Константинъ Рерихъ

адъюнктъ-профессоръ Технологическаго Института ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ I.

ТЕОРІЯ РЕГУЛИРОВАНІЯ МАШИНЪ.

Часть I.

МАХОВОЕ КОЛЕСО и періодическая неравномѣрность вращенія машинъ.

ПЕТРОГРАДЪ.

Типографія „Двигатель", Казначейская 6.

1916.

Отъ автора.

Задачей „Теорiи Регулированiя Машинъ“ является суммированiе и посильное развитiе той области техническаго знанiя и тѣхъ расчетовъ, при помощи которыхъ можно обезпечить спокойный и плавный ходъ машинъ. Выпускаемая первая часть посвящена изслѣдованiю установившагося движенiя, опредѣленiю перiодической неравномѣрности этого движенiя и расчету приведеннаго вѣса махового колеса. Кромѣ общеупотребительныхъ графическихъ методовъ, (о которыхъ см. гл. I и II) въ главѣ III развитъ аналитическiй методъ, позволившiй рѣшить рядъ новыхъ задачъ во второмъ отдѣлѣ книги, посвященномъ изысканiю и оцѣнкѣ возможныхъ средствъ уменьшенiя степени неравномѣрности вращенiя машинъ безъ увеличенiя приведеннаго вѣса маховика. Кромѣ общеупотребительныхъ средствъ (многокривошипныя машины, цѣлесообразный выборъ средней скорости и вѣса возвратно-движущихся частей), разсмотрѣны и оцѣнены еще не получившiя распространенiя болѣе сложныя маховыя колеса съ перемѣннымъ моментомъ инерцiи (такъ наз. изохронные маховики); послѣдняя глава посвящена больному вопросу о влiянiи упругости передаточныхъ органовъ на коефицiентъ неравномѣрности машинъ, причемъ намѣченъ цѣлесообразный выборъ упругой связи, позволяющiй иногда значительно улучшить равномѣрность вращенiя машинъ. Наконецъ, въ прибавленiи данъ бѣглый очеркъ приборовъ, служащихъ для измѣренiя степени неравномѣрности вращенiя машинъ. Нѣсколько параграфовъ, которые можно пропустить при первомъ ознакомленiи, напечатаны болѣе тѣсно, безъ шпонъ. Вопросъ о расчетѣ прочныхъ размѣровъ махового колеса выпущенъ; интересующихся отсылаемъ къ русскому переводу первой части книги Толле. Содержанiе слѣдующихъ выпусковъ предполагается посвятить теорiи центробѣжныхъ регуляторовъ и теорiи уравновѣшиванiя силъ инерцiи частей машинъ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ОТДѢЛЪ I.

Глава I. Примѣненіе закона живыхъ силъ.

Глава II. Примѣненіе принципа Д'Аламбера.

Глава III. Аналитическое опредѣленіе періодическихъ измѣненій скорости машинъ.

Прибавленіе къ отдѣлу I. Формула Уатта.

ОТДѢЛЪ II.

Способы улучшенія равномѣрности вращенія машинъ.

Глава IV. Наивыгоднѣйшіе элементы машины: углы заклинки многокривошипныхъ машинъ, вѣсъ возвратно-движущихся частей, средняя скорость и расположеніе вспомогательнаго механизма.

Глава V. Изохронныя маховыя колеса.

Глава VI. Вліяніе упругости передаточныхъ органовъ на періодическую неравномѣрность вращенія машинъ.

Прибавленіе. Приборы для измѣренія періодической неравномѣрности вращенія машинъ.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ:

Стрн.	*Стрк.*	*Напечатано:*	*Слѣдуетъ:*
58	13 си.	**положеній**	**движеній**
73	25 св.	соглашеніяхъ	въ сочлененіяхъ
101	1 св.	Глава V	Глава IV
112	7 св.	$v + > s$	$v + s$
122	1 св.	Глава VI.	Глава V.
152	1 св.	Глава VII.	Глава VI.

ВВЕДЕНІЕ.

1. Установившееся періодически-неравномѣрное вращеніе машинъ. Первой задачей Динамики Машинъ въ Прикладной Механикѣ является предсказаніе движенія машины въ зависимости отъ силъ, въ ней дѣйствующихъ, и отъ величины и распредѣленія массъ отдѣльныхъ ея частей. При этомъ можно различать случаи неустановившагося движенія машинъ, т. е. такіе, когда скорости нѣкоторыхъ ея точекъ все возрастаютъ или все убываютъ, отъ случаевъ установившагося движенія машинъ, когда скорость нѣкоторыхъ ея точекъ продолжительное время или совсѣмъ не измѣняется (турбинные двигатели) или измѣняется періодически (поршневые двигатели и вообще машины съ возвратно-движущимися частями), пріобрѣтая по истеченіи каждаго оборота или каждыхъ двухъ оборотовъ, или вообще, по истеченіи періода, прежнюю величину, Съ задачами на неустановившееся движеніе машинъ мы встрѣчаемся въ изслѣдованіи машинъ, движущихся съ большими или меньшими перерывами, какъ, напр., шахтныхъ подъемниковъ и вообще грузоподъемныхъ машинъ, прокатныхъ становъ и, въ особенности, желѣзнодорожныхъ поѣздовъ; кромѣ того время отъ момента пуска какой-либо машины въ ходъ до момента достиженія ею установившагося движенія или промежутки между однимъ установившимся движеніемъ и другимъ, или наконецъ время до остановки машины, также представляютъ собой случаи неустановившагося движенія машинъ.

Въ дальнѣйшемъ рѣчь будетъ идти только объ установившемся движеніи такихъ машинъ, скорости точекъ которыхъ измѣняются періодически. Машину мы себѣ будемъ представлять составленною изъ какого угодно числа звеньевъ съ однимъ только ограниченіемъ — она должна обладать полнымъ числомъ связей, или другими словами, она должна имѣть только одну степень свободы. Одно изъ звеньевъ мы будемъ считать главнымъ или ведущимъ звеномъ машины, а въ этомъ звенѣ выберемъ одну движущуюся точку, которую будемъ называть ведущей точкой. Къ ней мы будемъ приводить всѣ силы, дѣйствующія на различныя звенья машины, а также и массы звеньевъ; все изслѣдованіе движенія машины сведется такимъ образомъ къ изученію движенія этой ведущей точки, такъ какъ въ системѣ съ одной степенью свободы мгновенное положеніе, скорость и ускореніе одной точки вполнѣ опредѣляетъ положенія, скорости и ускоренія всѣхъ точекъ системы.

По причинамъ, которыя будутъ подробнѣе выяснены въ послѣдующемъ изложеніи, за главное звено обыкновенно выбирается система коренного вала машины, совершающая непрерывное вращательное движеніе. Только въ машинахъ, не имѣющихъ коренного вала (безкривошипные насосы или донки, паровые молота, гидравлическіе прессы), за главное звено приходится брать систему поршня, движущуюся прямолинейно-возвратно [1]). Мы не будемъ подробно останавливаться на этой группѣ машинъ, такъ какъ онѣ представляютъ значительно меньшій и лишь спеціальный интересъ, а сосредоточимъ все вниманіе на машинахъ съореннымъ валомъ; общіе методы изслѣдованія, которые будутъ далѣе изложены для этой группы машинъ, можно приложить и къ машинамъ безъ коренного вала.

Машины съ кореннымъ валомъ мы можемъ раздѣлить на двѣ большія группы: въ однѣхъ всѣ звенья совершаютъ непрерывное вращательное движеніе съ постояннымъ отношеніемъ угловыхъ скоростей, (напр., гидравлическая или паровая турбина, приводящая посредствомъ ременной, зубчатой или какой-либо иной передачи, обезпечивающей постоянное отношеніе скоростей, какую-нибудь рабочую машину, совершающую непрерывное вращательное движеніе, напр., динамо-машину или центробѣжный насосъ; точно также электродвигатель, приводящій посредствомъ такой же передачи въ движеніе токарный станокъ, на которомъ снимается стружка однороднаго металла и постояннаго поперечнаго сѣченія и т. п.). Машины второй группы содержатъ кромѣ того и звенья, совершающія періодическое возвратное движеніе, какъ напр., поршневой двигатель; или та же гидравлическая или паровая турбина, но приводящая въ движеніе поршневой насосъ; или тотъ же электродвигатель, но приводящій въ движеніе строгальный станокъ или рамную лѣсопилку.

Въ машинахъ первой группы установившееся движеніе, достигнутое при помощи особаго регулятора (напр., автоматическаго регулятора турбинныхъ двигателей) или благодаря саморегулированію (напр., у шунтового электродвигателя), протекаетъ вполнѣ равномѣрно до тѣхъ поръ, пока не будетъ нарушено равновѣсіе между силами движущими и сопротивленіями. О періодической неравномѣрности движенія такихъ

[1]) При опредѣленіи періодическаго подергиванія желѣзнодорожнаго поѣзда, приводимаго въ движеніе поршневымъ двигателемъ, можно за главное звено взять ведущее колесо, ось его считать неподвижной, но зато всю массу поѣзда предполагать сосредоточенной на ободѣ ведущаго колеса. Объ этомъ будетъ сказано нѣсколько словъ въ одномъ изъ примѣчаній къ главѣ 1 п. 10.

машинъ не можетъ быть и рѣчи и если иногда и приходится снабжать ихъ маховымъ колесомъ, то лишь въ помощь несовершенному, слишкомъ медленно дѣйствующему регулятору.

Наоборотъ, машины, нѣкоторыя звенья которыхъ движутся періодически—возвратно, лишь въ исключительно рѣдкихъ случаяхъ имѣютъ вполнѣ равномѣрное установившееся движеніе коренного вала. Періодически нарушаемое то въ одну, то въ обратную сторону равновѣсіе между движущими силами и сопротивленіями, а также необходимость то ускорять, то замедлять движеніе массъ, совершающихъ періодически возвратное движеніе, влекутъ за собой *періодическую неравномѣрность* вращенія коренного вала [1]), съ которою инженеръ долженъ умѣть бороться, такъ какъ равномѣрное вращеніе машинъ-орудій часто является необходимымъ условіемъ доброкачественности производимой ими полезной работы; такъ, напр., при размолѣ зеренъ, пряденіи тонкихъ номеровъ пряжи, производствѣ писчей бумаги, преобразованіи механической энергіи въ электрическую и пр., требуется, чтобы вращеніе коренного вала, приводящаго эти рабочія машины въ движеніе, было возможно болѣе равномѣрнымъ.

Есть много средствъ для уменьшенія предѣловъ періодическаго измѣненія скорости машинъ, которыя будутъ разсмотрѣны въ отдѣлѣ II. Наиболѣе простымъ и распространеннымъ является заклиниваніе на коренномъ валу машины *маховаго колеса* или маховика съ тяжелымъ ободомъ, инертность котораго уменьшаетъ предѣлы измѣненія угловой скорости коренного вала. Расчетъ необходимаго вѣса маховика будетъ изложенъ въ первомъ отдѣлѣ, а второй отдѣлъ предлагаемой книги мы посвятимъ другимъ, часто новымъ и не испробованнымъ еще методамъ борьбы съ періодической неравномѣрностью вращенія машинъ.

2. Средняя скорость вращенія машинъ. Если главное звено совершаетъ непрерывное вращательное движеніе, то координатой, опредѣляющей положеніе всѣхъ точекъ движущейся системы, удобнѣе всего выбрать уголъ поворота φ главнаго звена изъ какого-либо начальнаго

---

[1]) Эта періодическая неравномѣрность вращенія была сознана еще въ *Уаттовскій* періодъ. Такъ, современникъ *Джемса Уатта*, выдающійся англійскій инженеръ *Смитонъ*, говоритъ (*Smeaton* I. Reports on civil engineering, made on various occasions. Цитируемъ по 2-му изд. Лондонъ 1837, томъ II стр. 97, письмо „Corn mill to be worked by a fire engine“, помѣченное 23 ноября 1781 г.): „Можно полагать, что никогда движеніе, получаемое отъ качающагося органа паровой машины, не будетъ такъ равномѣрно, какъ движеніе водяного колеса“. Мнѣніе это, высказанное безъ указанія основаній, продиктованное чутьемъ опытнаго инженера, оказалось пророческимъ. Прошло 133 года неустаннаго труда надъ усовершенствованіемъ паровой машины, а въ дѣлѣ борьбы съ періодической неравномѣрностью вращенія мы до сихъ поръ пользуемся все однимъ и тѣмъ же средствомъ— Уаттовскимъ маховымъ колесомъ.

положенія (обычно изъ мертвой точки). При установившемся движеніи машины каждому углу поворота φ будетъ соотвѣтствовать вполнѣ опредѣленная мгновенная угловая скорость ω главнаго звена, измѣненія которой будутъ періодичны тогда, когда послѣ каждаго поворота на уголъ Φ, который мы будемъ называть угловымъ періодомъ машины, машина придетъ въ прежное положеніе (φ) съ прежней угловой скоростью (ω) и прежнимъ ускореніемъ; послѣ этого всѣ обстоятельства движенія машины и измѣненія мгновенной ея скорости въ точности повторятся и будутъ повторяться до тѣхъ поръ, пока не будетъ нарушено установившееся движеніе.

Представимъ себѣ, что при помощи одного изъ методовъ, которые будутъ изложены въ отдѣлѣ I, мы опредѣлили мгновенную угловую скорость ω, соотвѣтствующую каждому углу поворота φ машины. Само собою очевидно, что достаточно знать $\omega = f(\varphi)$ для одного углового періода, т. е. для измѣненія φ отъ O до Φ. Такъ какъ движеніе главнаго звена непрерывное вращательное, то величина ω не измѣняетъ своего знака; потому мы можемъ положить $\omega = \omega_{средн.} + \Delta\omega(\varphi)$, т. е. вмѣсто опредѣленія абсолютныхъ величинъ ω можемъ искать измѣненія $\Delta\omega$ угловой скорости по отношенію къ нѣкоторой средней скорости.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ пользоваться тремя различными понятіями о средней скорости машинъ. Именно, будемъ называть *средней ариѳметической угловой скоростью* ω_0 среднее ариѳметическое изъ наибольшаго и наименьшаго значенія ω_{max} и ω_{min} мгновенной угловой скорости

$$\omega_0 = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Далѣе, будемъ называть *средней планиметрической угловой скоростью* ω_c величину опредѣленнаго интеграла.

$$\omega_c = \frac{1}{\Phi}\int_0^{\Phi} \omega\, d\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Наконецъ, будемъ называть *дѣйствительной средней угловой скоростью* ω_m скорость такого равномѣрнаго вращенія, при которой главное звено описало-бы угловой періодъ Φ въ тотъ же промежутокъ времени (періодъ) T сек., какой требуется и для неравномѣрнаго вращенія. Только эту среднюю скорость мы можемъ опредѣлить изъ показаній счетчика оборотовъ; въ самомъ дѣлѣ, изъ опредѣленія вытекаетъ, что $\omega_m T = \Phi$, а если машина дѣлаетъ n оборотовъ въ минуту, то

$$T = \frac{30\,\Phi}{n\pi} \text{ сек. или } \omega_m = \frac{n\pi}{30} \text{ радіановъ въ секунду.}$$

Гораздо труднѣе вычислить ее, зная функціональную зависимость ω отъ φ. Такъ какъ

$$dt = \frac{d\varphi}{\omega}, \text{ то } T = \int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\omega},$$

откуда

$$\omega_m = \frac{\Phi}{\int\limits_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\omega}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

слѣдовательно, для опредѣленія ω_m придется планиметрировать діаграмму обратныхъ величинъ мгновенной угловой скорости ω.

Для машинъ съ высокой равномѣрностью вращенія разница между этими тремя средними скоростями ничтожно мала, поэтому часто говорятъ просто о средней скорости машины, пользуясь тою изъ нихъ, которая удобнѣе для рѣшенія поставленной задачи.

3. Коефиціентъ и мѣра неравномѣрности вращенія. Перейдемъ теперь къ установленію понятій о коефиціентѣ и мѣрѣ неравномѣрности. Практика показала, что удовлетворительное дѣйствіе рабочихъ машинъ[1]) получается лишь въ томъ случаѣ, если угловая скорость ихъ измѣняется въ небольшихъ предѣлахъ, т. е. если разность между ω_{max} и ω_{min} невелика. Будемъ называть *коефиціентомъ неравномѣрности* δ отношеніе разности между наибольшимъ и наименьшимъ значеніемъ угловой скорости главнаго звена къ средней ея величинѣ ω_m:

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Чѣмъ больше δ, тѣмъ неравномѣрнѣе движеніе машины. Вмѣсто дѣйствительной средней скорости обычно берутъ среднюю ариѳмети-

---

[1]) Надо имѣть въ виду, что между машиной-двигателемъ и рабочей машиной часто имѣются еще и приводы. Масса этихъ приводовъ обычно не учитывается и требованіе опредѣленной степени равномѣрности предъявляется обычно къ изолированному двигателю, какъ будто работа его поглощается тормозомъ. Это, конечно, неправильно, но точное принятіе во вниманіе всѣхъ приводимыхъ въ движеніе массъ, да еще и силъ упругости приводовъ, оказывающихъ часто значительное вліяніе на неравномѣрность движенія, приводить часто къ сложнымъ расчетамъ.

ческую скорость ω_0, что позволяетъ выразить ω_{max} и ω_{min} черезъ ω_0 и коефиціентъ неравномѣрности δ:

$$\omega_{max}=\omega_0\left(1+\frac{\delta}{2}\right) \quad \text{и} \quad \omega_{min}=\omega_0\left(1-\frac{\delta}{2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Въ нижеслѣдующей таблицѣ [1]) указаны значенія δ, обычно требуемыя отъ двигателей, приводящихъ въ движеніе различныя орудія.

Таблица величинъ δ; двигатель приводитъ въ движеніе:

насосы, ножницы . . .	$^1/_5$ до $^1/_{30}$	прядильни смотря по тонкости пряжи	$^1/_{50}$—$^1/_{100}$
механическія мастерскія	$^1/_{30}$—$^1/_{40}$	динамомашины постояннаго тока	$^1/_{100}$—$^1/_{200}$
ткацкія, писчебумажныя, мукомольныя машины	$^1/_{40}$—$^1/_{50}$	тоже перемѣннаго тока .	$^1/_{200}$—$^1/_{300}$

Иногда вмѣсто приведеннаго здѣсь коефиціента неравномѣрности можно встрѣтить понятіе о коефиціентѣ равномѣрности, представляющемъ собою обратную величину δ:

$$k=\frac{1}{\delta}=\frac{\omega_m}{\omega_{max}-\omega_{min}},$$

выражающемся не въ дробныхъ, а въ цѣлыхъ числахъ [2]).

При графическихъ расчетахъ вѣса обода маховика понятіе о коефиціентѣ неравномѣрности ведетъ къ очень простымъ результатамъ, такъ какъ положенія главнаго звена, соотвѣтствующія наибольшей ω_{max} и наименьшей ω_{min} скорости при этомъ легко опредѣляются. Совсѣмъ не то при аналитическомъ рѣшеніи различныхъ вопросовъ, свя-

---

[1]) Необходимо отмѣтить, что приведенныя въ этой таблицѣ цыфры надо считать приблизительными указаніями практики, лишенными строгаго научнаго обоснованія. Лишь въ послѣднее время появились попытки обосновать нѣкоторыя изъ нихъ. См. напр. Люстъ. Къ вопросу о примѣнеиіи двигателей Дизеля на электрическихъ станціяхъ (Извѣстія Пгд. Политехническаго Института Императора Петра Великаго т. XVIII за 1912 г., стр. 197—224). Въ статьѣ интересно указаиіе на то, что миганіе лампъ иакаливанія зависитъ не только отъ коефиціента неравномѣрности, но и отъ частоты пульсацій скорости, т. е. числа оборотовъ и характера кривой угловыхъ скоростей.

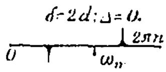
[2]) Понятіе о коефиціентѣ равномѣрности въ приведенномъ здѣсь опредѣленіи впервые встрѣчено нами въ курсѣ Понселе (Poncelet, Traité de mécanique appliquée aux machines, I часть, Льежъ 1845, стр. 131). У Навье, давшаго первый теоретическій расчетъ необходимаго вѣса обода маховика (Belidor, Architecture hydraulique ou l'art de conduire, d'élever et de ménager les eaux par les differents besoins de la vie. Nouvelle edition avec des notes et additions par M. Navier томъ I. Парижъ 1819 стр. 384—392), встрѣчается нѣсколько иное опредѣленіе степени равномѣрности, дающее вдвое меньшее число.

занныхъ съ періодической неравномѣрностью вращенія машинъ; положенія ω_{max} и ω_{min} опредѣляются при этомъ корнями трансцендентныхъ уравненій, что чрезвычайно затрудняетъ общее изслѣдованіе. Въ этихъ случаяхъ мы будемъ пользоваться другой мѣрой отклоненія ω отъ средней планиметрической скорости ω_c, которая предложена Хейномъ [1]), и которая представляетъ значительныя удобства для аналитическаго рѣшенія многихъ вопросовъ; будемъ называть опредѣленный интегралъ:

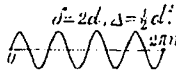
$$\Delta = \frac{1}{\Phi}\int_0^{\Phi}\left(1 - \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 d\varphi = \frac{1}{\Phi}\int_0^{\Phi}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 d\varphi - 1, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (6)$$

мѣрой неравномѣрности вращенія машины, причемъ Φ попрежнему обозначаетъ угловой періодъ машины; по формѣ интеграла видно, что Δ есть среднiй квадратъ отклоненія функціи ω отъ постоянной ω_c. Вслѣдствіе коренной разницы въ опредѣленіяхъ, между δ и Δ не существуетъ общей опредѣленной зависимости, такъ какъ на величину δ вліяетъ лишь величина наибольшей и наименьшей скорости, а на Δ также и характеръ кривой $\omega(\varphi)$, главнымъ образомъ продолжительность значительныхъ отклоненій скорости отъ средней.

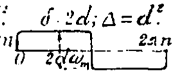
На *чер. 1, 2, 3* изображены для одного и того-же углового періода $\Phi = 2\pi n$ три различныя мыслимыя кривыя угловыхъ скоростей,



Чер. 1.



Чер. 2.



Чер. 3.

для которыхъ коефиціентъ неравномѣрности δ будетъ одинъ и тотъ же, такъ какъ наибольшія и наименьшія скорости во всѣхъ трехъ случаяхъ однѣ и тѣ-же. Мѣры-же неравномѣрности будутъ значительно разниться; такъ, для случая *чер. 1* Δ будетъ равно нулю, ибо ω только на одно мгновеніе (напр., вслѣдствіе дѣйствія удара) отклонилась отъ средней величины, но затѣмъ также мгновенно возвратилась къ ней подъ дѣйствіемъ обратнаго удара.

На *чер. 2* кривая угловыхъ скоростей изображена синусоидой съ i волнами, такъ что уравненіе кривой скоростей будетъ $\omega = \omega_c\left[1 + d\,\sin\left(\frac{i}{n}\varphi\right)\right]$, гдѣ n есть число тактовъ машины, опредѣляемое уравненіемъ $\Phi = 2\pi n$.

---

[1]) Heun, Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik, Лейпцигъ 1900, стр. 30.

Мѣру неравномѣрности опредѣляемъ интегрированіемъ:

$$\Delta = \frac{1}{2n\pi}\int\limits_0^{2n\pi} d^2 \sin^2\left(\frac{i}{n}\varphi\right)d\varphi = \frac{d^2}{2}$$

независимо отъ числа волнъ и тактовъ.

Наконецъ на *чер. 3* угловая скорость на участкѣ отъ O до φ_1 равна $\omega = \omega_r (1 + d)$ и на участкѣ отъ φ_1 до $\Phi = 2n\pi$ равна $\omega = \omega_r (1 - d)$, откуда

$$\Delta = \frac{1}{2n\pi}\left[\int\limits_0^{\varphi_1} d^2\, d\varphi + \int\limits_{\varphi_1}^{2n\pi} d^2\, d\varphi\right] = d^2,$$

причемъ указанныя на *чер. 3* мгновеиныя измѣненія скорости могутъ опять-таки вызываться только ударами, которые въ машинахъ обыкновенно не имѣютъ мѣста. Обыкновенно измѣненія угловой скорости машинъ происходятъ плавно и, какъ мы увидимъ впослѣдствіи, ихъ можно изобразить рядомъ Фурье

$$\omega = \omega_r\left[1 + c_1 \cos\frac{\varphi}{n} + d_1 \sin\frac{\varphi}{n} + c_2 \cos\frac{2\varphi}{n} + d_2 \sin\frac{2\varphi}{n} + c_3 \cos\frac{3\varphi}{n} + \right.$$
$$\left. + d_3 \sin\frac{3\varphi}{n} + \ldots\right] = \omega_r + \omega_r \Sigma\left(c_i \cos\frac{i\varphi}{n} + d_i \sin\frac{i\varphi}{n}\right),$$

который даже при конечномь числѣ членовъ обыкновенно достаточно точно выражаетъ эти измѣненія. Точная величина коефиціента неравномѣрности δ при этомъ можетъ быть найдена лишь съ большимъ трудомъ въ зависимости отъ численныхъ значеній амплитудъ $c_1\ c_2 \ldots d_1\ d_2$ и т. д., причемъ можно быть увѣреннымъ $\delta < 2\Sigma\sqrt{d_i^2 + c_i^2}$. Мѣра неравномѣрности Δ можетъ быть найдена безъ труда и совершенно точно, именно:

$$\Delta = \frac{1}{2\pi n}\int\limits_0^{2\pi n}\left[\Sigma\left(c_i \cos\frac{i\varphi}{n} + d_i \sin\frac{i\varphi}{n}\right)\right]^2 d\varphi = \frac{1}{2\pi n}\int\limits_0^{2\pi n}\left[\Sigma\left(c_i^2 \cos^2\frac{i\varphi}{n} + \right.\right.$$
$$+ d_i^2 \sin^2\frac{i\varphi}{n} + 2c_i\, c_j \cos\frac{i\varphi}{n}\cos\frac{j\varphi}{n} + 2d_i\, d_j \sin\frac{i\varphi}{n}\sin\frac{j\varphi}{n} +$$
$$\left.\left. + 2d_i\, c_j \sin\frac{i\varphi}{n}\cos\frac{j\varphi}{n}\right)\right] d\varphi = \frac{1}{2\pi n}\int\limits_0^{2\pi n}\left[\Sigma\left(\frac{c_i^2}{2} + \frac{c_i^2}{2}\cos\frac{2i\varphi}{n} + \frac{d_i^2}{2} - \right.\right.$$

$$-\frac{d_i^2}{2}\cos\frac{2i\varphi}{2}+(c_i\,c_j-d_i\,d_j)\cos\frac{i+j}{n}\varphi+(c_i\,c_j+d_i\,d_j)\cos\frac{i-j}{n}\varphi+$$

$$+c_j\,d_i\sin\frac{i+j}{n}\varphi+c_j\,d_i\sin\frac{i-j}{n}\varphi\Big)\Big]d\varphi=\Sigma\frac{c_i^2+d_i^2}{2}\quad\ldots\quad(7).$$

Такимъ образомъ, простая зависимость между δ и Δ существуетъ лишь въ случаѣ измѣненія угловой скорости по одной гармонической, когда

$$\Delta=\frac{1}{8}\,\delta^2.$$

Этой грубо приближенной зависимостью можно иногда пользоваться для сравненія; въ *таблицѣ 2* сведены величины Δ для различныхъ δ:

Таблица 2.

Приближенныя величины мѣры неравномѣрности Δ для различныхъ значеній коефиціента неравномѣрности δ.

$\delta=$	0,2	0,1	0,04	0,02	0,01	0,004	0,002
$\Delta=$	$5{,}00.10^{-3}$	$1{,}25.10^{-3}$	$2{,}00.10^{-4}$	$5{,}00.10^{-5}$	$1{,}25.10^{-5}$	$2{,}00.10^{-6}$	$5{,}00.10^{-7}$

ГЛАВА I.

Примѣненіе закона живыхъ силъ.

4. Историческія замѣчанія. Расчетъ махового колеса не обходится безъ примѣненія закона живыхъ силъ даже въ тѣхъ случаяхъ, когда, какъ напр., въ способѣ, основанномъ на построеніи діаграммы „касательныхъ усилій, въ основу кладется какой-либо другой принципъ, напр. принципъ Д'Аламбера. Причина лежитъ въ томъ, что силы, дѣйствующія въ машинѣ, являются функціями координаты, опредѣляющей положеніе ея механизма. Это даетъ возможность безъ труда вычислить работу силъ и слѣдовательно знать измѣненія живой силы.

Навье [1]), давшій первый расчетъ маховика, пользовался закономъ живой силы, хотя и клалъ въ основу расчета абстрактный механизмъ — къ кривошипу, составляющему одно цѣлое съ маховикомъ, онъ воображалъ приложенной постоянную внѣшнюю силу, дѣйствующую то въ одну, то въ другую сторону параллельно неизмѣнному направленію. Коромысло, поршень были такимъ образомъ лишены массы, длина шатуна предположена безконечной. Чтобы оцѣнить значеніе этого перваго шага, сдѣланнаго почти 100 лѣтъ тому назадъ, достаточно сказать, что и теперь въ нѣкоторыхъ элементарныхъ руководствахъ пренебрегаютъ массой поршня и считаютъ шатунъ безконечно длиннымъ.

Слѣдующій чрезвычайно крупный шагъ впередъ былъ сдѣланъ Коріолисомъ [2]), мемуаръ котораго представляетъ собой одинъ изъ наиболѣе значительныхъ вкладовъ въ Динамику Машинъ; въ немъ впервые,

[1]) Belidor-Navier, 1819 стр. 384 — 392 см. примѣчаніе на стр. 6. Этотъ расчетъ имѣется полностью въ курсѣ: Navier, Résumé des leçons, données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique á l'établissement des constructions et des machines, 2-ое изд. 1839 г. часть 3, стр. 504 — 509. Перваго изданія 1826 г. намъ не удалось видѣть.

[2]) Coriolis G. Sur l'influence du moment d'inertie du balancier d'une machine à vapeur et de sa vitesse moyenne sur la régularité du mouvement de rotation que le va-et-vient du piston communique au volant. Journal de l'école polytechnique, 1832 г. книга 21, томъ XIII, стр. 228 — 267.

Въ курсѣ: Coriolis. Du calcul de l'effet des machines ou considerations sur l'emploi des moteurs et sur l'évaluation, Парижъ 1829 г., на стр. 159 — 164 изложены основы приведенія массъ частей механизмовъ съ постояннымъ соотношеніемъ скоростей (зубчатыхъ приводовъ и пр.) къ одному звену, т. е. доказано, что приведенная масса пропорціональна квадрату передаточнаго числа. Вопросу о маховомъ колесѣ посвящено лишь нѣсколько общихъ замѣчаній.

кажется, поставлена и рѣшена задача объ опредѣленіи закона движенія механизма, подъ дѣйствіемъ заданныхъ силъ; кромѣ того въ мемуарѣ удѣлено должное вниманіе графическому способу изслѣдованія машинъ [1]).

Несмотря на сравнительную сложность механизма паровой машины съ коромысломъ, имъ правильно найдены соотношенія скоростей шарнировъ, затѣмъ на основаніи закона виртуальныхъ скоростей найдены соотношенія силъ и построена діаграмма касательныхъ усилій— первая діаграмма, которую намъ пришлось встрѣтить въ печати. Затѣмъ построена діаграмма работъ и діаграмма перемѣнныхъ приведенныхъ массъ поршня и коромысла (массы шатуновъ не приняты во вниманіе [2]). Такимъ образомъ Коріолисомъ былъ предначертанъ тотъ путь, которымъ 70 лѣтъ спустя пошелъ Виттенбауэръ. Центральная часть мемуара, посвященная разысканію наивыгоднѣйшей массы коромысла и наивыгоднѣйшей скорости, т. е. элементовъ, дающихъ наиболѣе равномѣрное вращеніе машины, потеряла свое значеніе вмѣстѣ съ исчезновеніемъ машинъ съ коромысломъ.

Однако, какъ это ни странно, мемуаръ Коріолиса не оказалъ воздѣйствія на расчетъ маховика; попрежнему въ курсахъ того времени (Poncelet и др.) рекомендовалась формула Уатта, всѣ-же академическія разсужденія о живой силѣ частей механизма не находили никакого приложенія. Послѣ выхода въ свѣтъ курса Прикладной Механики Морена [3]), давшаго намъ тотъ способъ построенія діаграммы касательныхъ силъ и тотъ приближенный расчетъ маховика, которымъ пользуются еще по сіе время, работа Коріолиса была совсѣмъ забыта. Лишь въ отдѣльныхъ мемуарахъ и курсахъ [4]) можно было изрѣдка встрѣтить понятіе о приведенной массѣ механизма, пока, наконецъ, въ 1904 г. Виттенбауэръ [5]) не воскресилъ идей Коріолиса, развивъ ихъ въ общій методъ графическаго изслѣдованія движенія машинъ.

5. Графическое опредѣленіе мгновенной работы. Работа давленій пара. Согласно закону живыхъ силъ измѣненіе кинетической энергіи системы твердыхъ тѣлъ съ одной степенью свободы должно быть равно суммѣ работъ всѣхъ силъ. Поэтому наша задача сводится къ ознакомленію какъ со способами вычисленія величины кинетической энергіи звеньевъ механизма, такъ и со способами опредѣленія вели-

---

[1]) „Il est à croire que la méthode graphique... restera toujours la seule, qu'on puisse enseigner aux constructeurs". Стр. 230.

[2]) Понселе вскорѣ послѣ этого указалъ (Poncelet. Traité de mécanique appliquée aux machines, часть I, Льежъ 1845 г., стр. 116), какимъ образомъ опредѣлить мгновенную живую силу шатуна.

[3]) Morin A. Leçons de mécanique pratique, часть 3, Парижъ 1846 г. стр. 312—368. Кромѣ того предварительная короткая замѣтка въ Comptes rendus de l'academie des sciences за 1843 г. семестръ 2, томъ XVII, стр. 857—9: Morin. Etudes sur les machines á vapeur et recherches sur le moment d'inertie qu'Il convient de donner au volant des divers systèmes des machines à vapeur.

[4]) Напр. Grashof. Theoretische Maschinenenlehre, Лейпцигъ 1883 г., томъ II стр. 349—355.

[5]) Wittenbauer. Graphische Dynamik der Getriebe, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1904 г., томъ 50 стр. 57—97; краткая замѣтка въ Z. d. V. d. J. за 1905 г. стр. 471—7. Замѣтка эта издана на русскомъ языкѣ брошюрой: Виттенбаэуръ. Графическое опредѣленіе вѣса маховаго колеса, перев. Москва, 1908 г.

чины работы силъ, дѣйствующихъ въ изслѣдуемой машинѣ. Начнемъ съ работы, которая зависитъ какъ отъ величины и направленія силъ, такъ и отъ перемѣщенія точекъ ихъ приложенія. Будемъ для краткости называть *мгновенной работой силъ* ту работу, которая произведена при перемѣщеніи въ разсматриваемое положеніе *(i)* всегда изъ одного и того-же начальнаго положенія (1) механизма, напр. изъ мертвой точки. Такъ какъ механизмъ обладаетъ одной степенью свободы, то достаточно будетъ задаваться каждый разъ опредѣленнымъ мгновеннымъ положеніемъ *(i)* и начальнымъ (1) главнаго звена механизма; это вполнѣ опредѣляетъ перемѣщенія всѣхъ точекъ приложенія силъ и даетъ возможность вычислить мгновенную ихъ работу.

За главное звено всегда будемъ выбирать систему кореннного вала машины (маховое колесо и неизмѣнно съ нимъ связанные передаточныя органы, коренной валъ, кризошипы или колѣна кореннаго вала и пр.), такъ какъ задача наша какъ разъ сводится къ изученію періодическихъ измѣненій угловой скорости этого вала [1]). За ведущую точку будемъ выбирать центръ пальца кривошипа или, въ случаѣ много-кривошипной машины, одинъ изъ пальцевъ кривошипа; путь ведущей точки будетъ слѣдовательно, окружность. Раздѣлимъ ее на произвольное число равныхъ частей, занумеруемъ ихъ (1,2...*i*...) и вычертимъ по точкамъ пути точекъ приложенія всѣхъ силъ. Послѣ этого можемъ начать опредѣленіе мгновенныхъ работъ всѣхъ силъ при перемѣщеніи механизма изъ начальнаго положенія, напр., изъ мертвой точки, въ каждое изъ разсматриваемыхъ положеній.

Для вычисленія мгновенной работы L_i какой-либо перемѣнной силы P при перемѣщеніи механизма изъ начальнаго положенія 1 въ положеніе i имѣемъ общую формулу

$$L_i = \int_1^i P \cos(F, v)\, ds;$$

такъ какъ сила и путь заданы чертежемъ, то и интегрированіе надо сумѣть выполнить графически, для чего построимъ діаграмму силы P; надо выпрямить путь, проходимый точкой приложенія силы P и откладывать его по оси абсциссъ; затѣмъ для каждаго изъ взятыхъ положеній точки приложенія, спроектировать силу P на касательную (напра-

[1]) Отмѣтимъ то неудобство, съ которымъ намъ пришлось бы столкнуться, если бы за главное звено мы выбрали систему, совершающую періодически-возвратное движеніе; въ мертвыхъ точкахъ приведенныя силы и массы звеньевъ, скорости которыхъ въ это мгновеніе не равны нулю, были-бы безконечно велики. Поэтому попытки выбора поршня за главное звено, встрѣчающіяся въ литературѣ (напр. Felgl, въ Dingl. P. Journ. за 1911 г. стр. 529—531), надо считать неудачными и ничѣмъ не оправдываемыми.

вленіе скорости v) и величины этихъ проекцій $P\cos(P, v)$ отложить, какъ ординаты. Площадь полученной діаграммы отъ начальной точки 1 до i и будета равна мгновенной работѣ L_i.

Очень рѣдко случается, чтобы перемѣнная сила дѣйствовала на точку, движущуюся криволинейно. Въ большинствѣ случаевъ приходится опредѣлять либо работу перемѣнной силы, точка приложенія которой движется прямолинейно возвратно (напр., давленіе на поршень), либо работу постоянной по величинѣ и направленію силы (напр., силы тяжести), точка приложенія которой движется криволинейно. Въ этихъ случаяхъ вычисленія значительно упрощаются, причемъ для кривошипнаго механизма дѣйствія лучше всего располагать такъ, какъ показано на *чер. 4*. Вверху изображена схема механизма поршневого двигателя, ось котораго наклонена къ горизонту (стрѣлки указываютъ линіи дѣйствія силъ тяжести поршня и шатуна). Пониже полукругъ α съ центромъ въ O изображаетъ въ увеличенномъ масштабѣ путь точки A, а внизу вычерчены въ крупномъ масштабѣ діаграммы равнодѣйствующихъ давленій на ед. площ. поршня съ обѣихъ его сторонъ (одна изъ нихъ начерчена перевернутой для компактности чертежа).

Требуется построить кривую мгновенныхъ работъ пара. Полукругъ α раздѣленъ на 8 равныхъ частей; для того, чтобы опредѣлить пути, проходимые любой точкой поршня, напр., центромъ шарнира ползуна B, а также пути, проходимые центромъ тяжести Z_2 шатуна, мы могли бы воспользоваться способомъ круговыхъ линеекъ [1]), извѣстнымъ изъ элементарнаго курса. Поступимъ еще проще, проведемъ черезъ точку O дугу $O\beta$ радіусомъ равнымъ длинѣ шатуна AB въ томъ же масштабѣ въ какомъ $O1$ изображаетъ радіусъ кривошипа OA, изъ центра, лежащаго на OB. Затѣмъ черезъ дѣленія 2,3 и т. д. проведемъ линіи, параллельныя діаметру 9,1, до пересѣченія въ точкахъ o_2, o_3 и т. д. съ дугой $O\beta$, и наконецъ, отложимъ отрѣзки $o_2 2$, $o_3 3$ и т. д. отъ центра O до точекъ $2'$, $3'$ и т. д. Легко доказать, что отрѣзки $12'$, $13'$ и т. д. будутъ изображать пути, пройденные шарниромъ B въ то время, когда палецъ кривошипа A описалъ дуги 12, 13 и т. д. Для того, чтобы построить путь точки Z_2 надо, согласно способу круговыхъ линеекъ, соединить точки 2 съ $2'$, 3 съ $3'$ и т. д. и раздѣлить отрѣзки $22'$, $33'$ и т. д. точками z_2, z_3 и т. д. въ отношеніи AZ_2 къ Z_2B, т. е.

$$\frac{2z_2}{z_2 2'} = \frac{3z_3}{z_3 3'} = \ldots = \frac{AZ_2}{Z_2B}$$

Такимъ образомъ мы построимъ верхнюю половину овала для

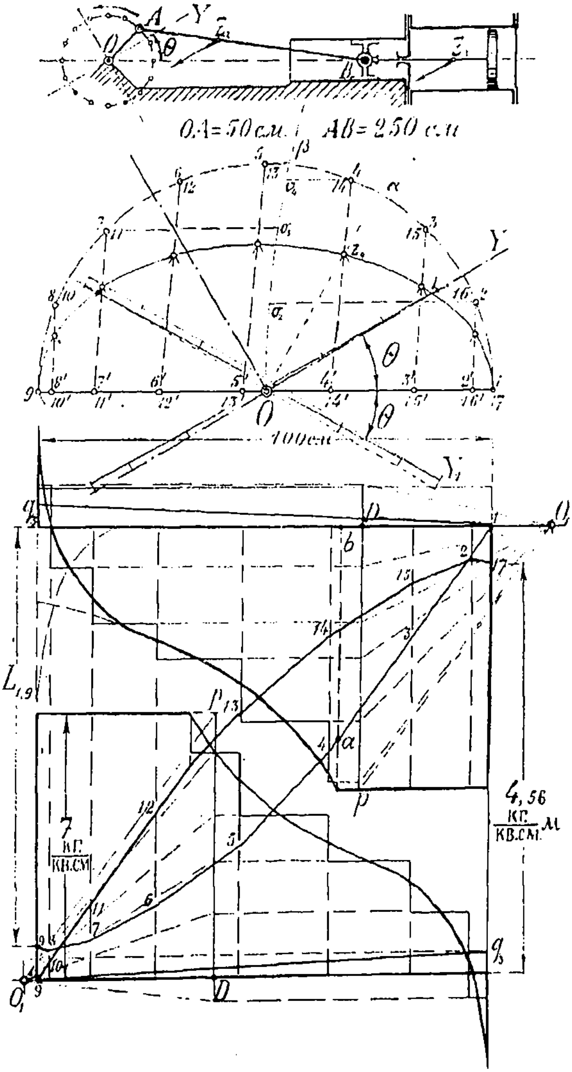
---

[1]) В. Л. Кирпичевъ и К. Э. Рерихъ. Построеніе и размѣтка путей, описываемыхъ точками плоскаго механизма. Пг. 1915. Литогр. изд. Кассы Взаимопом. Студентовъ Политехническаго Института.

К. Э. Рерихъ. Построеніе путей точекъ плоскаго механизма при помощи круговыхъ линеекъ. Вѣстникъ Общества Технологовъ за 1912 г. № 5 стр. 155—162.

хода поршня влѣво; для обратнаго хода, въ случаѣ если механизмъ центральный, т. е. продолженіе пути точки B проходить черезъ A, нижняя половина овала можетъ быть построена какъ симметричная кривая; размѣтки путей поршня для обратнаго хода въ этомъ случаѣ также не требуется, такъ какъ, очевидно, при переходѣ кривошипа изъ положенія 9 въ 10 поршень перейдетъ изъ положенія 9 въ 8' и т. д.

Займемся сначала діаграммой работъ пара, причемъ будемъ опредѣлять не полную работу, а работу силъ, приходящихся на 1 кв. см. площади поршня. Проведемъ черезъ точки 2', 3' и т. д. ординаты на діаграммѣ давленій пара *(чер. 4 внизу)*. Искомыя работы L_2, L_3 и т. д. изображаются соотвѣтственными элементарными площадками діаграммы силъ, такъ какъ косинусъ угла между силой и скоростью равенъ единицѣ. Графическое интегрированіе діаграммы силъ будемъ выполнять такъ: замѣнимъ элементарныя площадки діаграммы силъ равновеликими прямоугольниками, т. е. замѣнимъ криволинейную діаграмму ступенчатой линіей; не трудно съ достаточной точностью на глазъ такъ проводить линіи, параллельныя оси абсциссъ, чтобы отнимаемая площадка была на глазъ равновелика прибавляемой. Такимъ образомъ для вычисленія L_i будемъ имѣть



Чер. 4. Графическое построеніе работъ.

$$L_i = \int_1^2 p_1\, ds + \int_2^3 p_2\, ds + \ldots + \int_{i-1}^{i} p_{i-1}\, ds = p_1 s_{12} + p_2 s_{23} + \ldots p_{i-1} s_{i-1,\, i}$$

такъ какъ давленія $p_1, p_2 \ldots p_{i-1}$ сдѣланы постоянными. Для графическаго изображенія [1]) ломанной линіи L_i отложимъ по оси абсциссъ отрѣзокъ DO_1, спроектируемъ на ординату Dp всѣ давленія p_1, p_2 и т. д. и проведемъ изъ O_1 къ полученнымъ точкамъ лучи. Затѣмъ остается черезъ 1 провести линію $1a$ параллельно лучу O_1p, изъ a линію a 4 параллельно слѣдующему лучу и т. д. Орданаты полученной ломанной линіи $123a456789$ изобразятъ работу L давленія пара на пути поршня отъ мертвой точки до разсматриваемаго положенія въ нѣкоторомъ масштабѣ, зависящемъ отъ длины DO_1. Пусть мы желаемъ, чтобы работа 1 кг./кв. см. на пути 1 м. изображалась ξ см., причемъ 1 м. дѣйствительнаго пути изображается на чертежѣ λ см., а на діаграммѣ силъ давленіе въ 1кг./кв. см. изображается отрѣзкомъ π см. Возьмемъ отрѣзокъ DO_1 равнымъ

$$DO_1 = \frac{\pi\lambda}{\xi} \text{ см.}$$

и докажемъ, что тогда мы получимъ желательный масштабъ ξ для кривой работъ. Разсмотримъ напр. перемѣщеніе поршня изъ положенія 1 въ b, равное s м.; на чер. оно должно быть изображено отрѣзкомъ $1b = s\lambda$ см., причемъ p кг./кв. см. изображено отрѣзкомъ $Dp = p\pi$ см.; произведенная работа L_b, равная ps м. кг./кв. см. должна быть изображена отрѣзкомъ $ba = p\ s\ \xi$ см. Согласно построенію прямоугольные треугольники $1ba$ и O_1Dp подобны, откуда имѣемъ пропорціи:

$$\frac{Dp}{DO_1} = \frac{ba}{b1}, \text{ т. е. } \frac{p.\pi}{DO_1} = \frac{L_b}{s.\lambda} \quad \text{или } L_b = p\,s.\,\xi \text{ см.}$$

что и требовалось. Внизу построена кривая мгновенныхъ работъ для обратнаго хода поршня 9—17, причемъ за начальное положеніе взята вторая мертвая точка 9.

6. Работа силъ тяжести. Діаграмма работъ всѣхъ силъ. Теперь займемся работой силъ тяжести. Для системы ползуна B, т. е. вѣса поршня, поршневой скалки и ползуна, имѣемъ уже размѣченный прямолинейный путь; проекція силы на направленіе скорости будетъ постоянная, поэтому діаграмма работы вѣса ползуна будетъ прямая линія, для построенія которой отложимъ на *(чер. 4)* отъ точки D на продолженіи pD отрѣзокъ, изображающій $q_3 \cos\theta$ кг./кв. см., т. е. проекцію вѣса ползуна q_3, приходящагося на 1 кв. см. площади поршня, соединимъ его лучемъ съ O_1 и проведемъ черезъ 1 линію $1q_3$, параллельную лучу, которая и представитъ діаграмму работы силы тяжести при

[1]) Примѣненіе этого способа графическаго интегрированія къ расчету маховика предложено M.isеs, Die Ermittelung der Schwungmassen im Schubkurbelgetriebe. Z. d. öster. Ing. u. Arch. Ver. 1906 г., стр. 577, 589, 606.

опусканіи ползуна. Работа эта положительная и должна прибавляться къ работѣ пара, для чего діаграмма и построена по другую сторону оси абсциссъ. Для обратнаго хода эта работа отрицательная, почему $9q_3$ отложено для удобства вычитанія въ ту-же сторону, какъ и давленія пара.

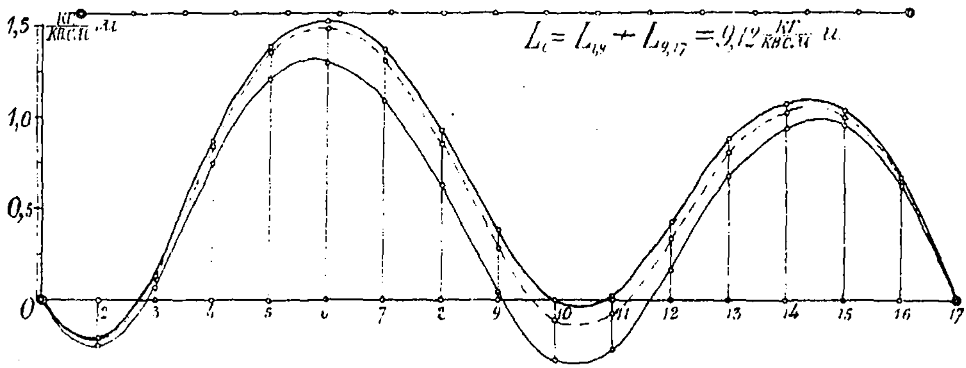
Для построенія работъ вѣса шатуна, воспользуемся тѣмъ, что работа силы тяжести равна вѣсу, умноженному на проекцію перемѣщенія на вертикаль. Если черезъ O провести вертикальную линію OY и спроектировать на нее различныя положенія точки Z_2, то задача будетъ приведена къ предыдущей, только вмѣсто дѣйствительныхъ путей будемъ пользоваться ихъ проекціями. Отложимъ по линіи, перпендикулярной DY, отрѣзокъ, изображающій q_2 кг./кв. см., т. е. вѣсъ шатуна, приходящійся на 1 кв. см. площади поршня, а отъ проекціи положенія 1 вдоль OY отложимъ отрѣзокъ DO_1, построимъ лучъ и проведемъ черезъ проекцію 1 линію параллельную — это и будетъ діаграмма работъ вѣса шатуна, только построена она на другой оси абсциссъ. Для обратнаго хода машины не будемъ строить симметричную нижнюю часть овала, а построимъ прямую OY_1 симметричную прямой OY; эта прямая расположена такимъ же образомъ по отношенію къ верхней части овала какъ OY относительно ненарисованной нижней его половины. Если вообразить себѣ часть овала съ прямою OY вырѣзанною изъ бумаги и опрокинутою вокругъ оси симметріи 1,9, то точка 10 совпадаетъ съ 8, 11 съ 7 и т. д., а прямая OY займетъ положеніе OY_1. Слѣдовательно вмѣсто вычерчиванія второй половины овала можемъ пользоваться верхней его частью, но проектировать пути будемъ на OY_1.

Теперь намъ надо заняться послѣдней силой — сопротивленіемъ, такъ какъ силы внутреннія, силы упругости частей машины совершаютъ ничтожно малую работу вслѣдствіе незначительности деформацій, а силы тренія пока вообразимъ приближенно прибавленными въ видѣ постоянной силы къ сопротивленію [1]).

Сопротивленіе, преодолѣваемое двигателемъ на коренномъ валу можетъ быть перемѣннымъ или постояннымъ; въ первомъ случаѣ (поршневой насосъ, компрессоръ и пр.) надо построить діаграмму его работъ такъ же, какъ только что было разсказано для давленія пара. Если же сопротивленіе можетъ быть принято постояннымъ въ теченіе періода (когда двигатель вращаетъ динамомашину или обслуживаетъ фабрику, нагрузка которой не претерпѣваетъ частыхъ періодическихъ

[1]) Точный учетъ работы силъ тренія въ механизмѣ можетъ быть произведенъ лишь при помощи принципа Д'Аламбера; вліяніе силъ тренія на неравномѣрность вращенія двигателей незначительно, и имъ всегда пренебрегаютъ. Обыкновенно пренебрегаютъ и вліяніемъ работы силъ тяжести, что даетъ ошибку въ сторону ухудшенія равномѣрности вращенія. Такъ какъ кривая работъ силъ тяжести строится чрезвычайно просто, и такъ какъ вліяніе ея въ нашемъ примѣрѣ около 15%, то очевидно, что пренебреженіе это не обосновано.

измѣненій), то дѣло значительно упрощается, такъ какъ кривая работъ постоянной силы сопротивленія, приведенной къ ведущей точкѣ, будетъ прямая линія, наклонная къ оси абсциссъ, по которой отложены углы поворота коренного вала. Для того, чтобы движеніе было установившимся, необходимо, чтобы сумма работъ всѣхъ силъ за періодъ была равна нулю, т. е. работа сопротивленія за періодъ должна равняться суммѣ работъ давленій пара за прямой и обратный ходъ (сумма работъ силъ вѣса, при возвращеніи механизма въ начальное положеніе, равна нулю). Такимъ образомъ, сложивъ $L_{1,9}$ съ $L_{9,17}$ (при абсолютно правильномъ парораспредѣленіи эти двѣ работы равны между собой), найдемъ полную работу сопротивленія за одинъ оборотъ $L_c = L_{1,9} + L_{9,17}$; работа сопротивленія возрастаетъ отъ нуля до этой величины



Чер. 5.

Діаграмма избытковъ работы.

прямо пропорціонально углу поворота коренного вала. Отложимъ ее на *чер. 5* и раздѣлимъ на 16 равныхъ частей соотвѣтственно 16 равнымъ дѣленіямъ періода. Теперь можемъ начать строить діаграмму полныхъ работъ, для чего возьмемъ *(чер. 5)* шестнадцать равныхъ отрѣзковъ произвольной длины, изображающихъ развернутый въ прямую линію путь кривошипа и будемъ откладывать въ прежнемъ или въ какомъ-либо иномъ (на *чер. 5* въ удвоенномъ) масштабѣ, избытки работъ вверхъ, и недостатки внизъ. При поворотѣ кривошипа напр. изъ положенія 1 въ 2 произведена работа: давленіемъ пара, вѣсомъ ползуна и вѣсомъ шатуна. Сложивъ ихъ всѣ вмѣстѣ и отнявъ одну шестнадцатую полной работы сопротивленія [1]), отложимъ результатъ на ординатѣ *(чер. 5)* въ точкѣ 2. Продѣлавъ это складываніе и вычитаніе для всѣхъ 16 положеній, получимъ діаграмму работъ всѣхъ силъ

[1]) Порядокъ сложенія и вычитанія конечно безразличенъ; удобнѣе сначала вычесть изъ работы пара работу сопротивленія, (нижняя сплошная кривая на *чер. 5*., а затѣмъ прибавлять работу силы вѣса поршня (пунктирная кривая) и шатуна (верхняя сплошная кривая).

въ машинѣ, при чемъ при правильномъ построеніи въ послѣдней точкѣ 17 ордината должна быть та же, что и въ точкѣ 1, т. е. нуль.

Діаграмму полныхъ работъ *(чер. 5)* мы построимъ, откладывая по ординатамъ работы въ кг./кв. см. $\times$ м., относя и работу къ единицѣ площади поршня; но можно конечно откладывать полныя работы даннаго двигателя въ кг. м. Изъ чертежа видно, что малыя сами по себѣ работы силъ вѣса оказываютъ существенное вліяніе, увеличивая разность между избытками работъ прямого и обратнаго хода.

Коріолисъ и Виттенбауэръ чертятъ сначала діаграмму касательныхъ приведенныхъ силъ, а затѣмъ ужъ ея интегральную кривую; конечно, это удлиняетъ работу. Проф. А. А. Саткевичъ [1]) предложилъ сразу строить вмѣсто теоретической индикаторной діаграммы давленій пара теоретическую діаграмму работъ этихъ давленій.

Кромѣ очерченнаго здѣсь графическаго способа опредѣленія работъ могутъ быть примѣнены и другіе: можно опредѣлять работу вычисленіемъ величины элементарныхъ площадокъ, можно пользоваться тѣми или другими формулами для приближенной квадратуры (напр. Симпсона, Гаусса, Чебышева); можно опредѣлять величины элементарныхъ площадокъ посредствомъ планиметра, обводя по очереди каждую изъ нихъ; эти два метода потребуютъ болѣе значительной затраты времени нежели графическій. Лишь интеграфъ Абданкъ-Абакановича можетъ уменьшить затрату времени, такъ какъ за одинъ обводъ онъ даетъ интегральную кривую, къ сожалѣнію, не всегда въ достаточно крупномъ масштабѣ.

7. Кинетическая энергія и приведенная масса звеньевъ механизма. Теперь займемся лѣвой частью уравненія живыхъ силъ, именно вычисленіемъ кинетической энергіи звеньевъ механизма, которая, какъ и для всякой системы матеріальныхъ точекъ, равна суммѣ элементарныхъ кинетическихъ энергій, т. е. $K = \frac{1}{2}\int v^2 dm$, причемъ интегрированіе распространяется на всѣ движущіяся матеріальныя точки механизма; такимъ образомъ для опредѣленія величины K надо знать: 1) массы всѣхъ его точекъ, 2) скорости всѣхъ точекъ. Можно считать извѣстнымъ вѣсъ каждаго звена механизма и распредѣленіе въ немъ массы, т. е. положеніе центра его тяжести и величину момента его инерціи относительно оси, проходящей черезъ центръ тяжести и перпендикулярной къ плоскости движенія механизма; какъ мы увидимъ впослѣдствіи, этого будетъ вполнѣ достаточно.

Что касается скоростей всѣхъ точекъ, то въ механизмѣ съ одной степенью свободы онѣ вполнѣ опредѣляются для каждаго положенія

---

[1]) А. А. Саткевичъ. Интегральная діаграмма работъ и ея примѣненіе къ расчету двигателей. Петроградъ, 1910 г. Изъ трудовъ съѣзда по двигателямъ внутренняго горѣнія.

механизма въ зависимости отъ величины скорости одной какой-либо точки, напр. ведущей точки главнаго звена, построеніемъ многоугольника скоростей. Но дѣйствительная мгновенная скорость ведущей точки намъ неизвѣстна (ее то и надо опредѣлить на основаніи закона живыхъ силъ). Изъ этого затрудненія мы выйдемъ при помощи слѣдующихъ разсужденій: пусть v_a обозначаетъ мгновенную скорость ведущей точки A, v—скорость нѣкоторой матеріальной точки механизма, масса которой равна dm. Раздѣлимъ и помножимъ кинетическую энергію K на v_a^2 получимъ

$$K = \frac{1}{2}\int v^2 dm = \frac{1}{2} v_a^2 \int \left(\frac{v}{v_a}\right)^2 dm,$$

откуда видимъ, что кинетическая энергія механизма равна половинѣ произведенія квадрата скорости ведущей точки на сумму, составленную изъ произведенія массы каждой точки dm на квадратъ отношенія ея скорости къ скорости ведущей точки; это отношеніе скоростей различно въ различныхъ положеніяхъ механизма, но для разсматриваемаго положенія оно неизмѣнно и независимо отъ величины скорости ведущей точки, такъ какъ изъ кинематики механизмовъ извѣстно, что при различныхъ скоростяхъ ведущей точки, соотвѣтствующихъ одному и тому же положенію механизма, многоугольники скоростей подобны между собой. Обозначивъ буквой

$$d\mu = dm \left(\frac{v}{v_a}\right)^2$$

приведенную массу разсматриваемой матеріальной точки массы dm, можемъ затѣмъ сложить всѣ эти приведенныя массы и найти приведенную массу всѣхъ звеньевъ механизма

$$\mu = \int \left(\frac{v}{v_a}\right)^2 dm,$$

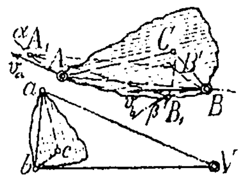
вполнѣ опредѣляемую по соотношенію скоростей его точекъ и ихъ массамъ. Она различна для различныхъ положеній ведущей точки и даетъ возможность опредѣлить кинетическую энергію по скорости ведущей точки, такъ какъ подстановка даетъ:

$$K = \frac{\mu v_a^2}{2}.$$

Итакъ, мгновенная величина кинетической энергіи звеньевъ механизма равна половинѣ произведенія приведенной массы механизма на квадратъ скорости ведущей точки.

8. Построеніе многоугольника скоростей. Припомнимъ тѣ теоремы изъ кинематики механизмовъ, на которыхъ основано построеніе многоугольника скоростей. Если механизмъ состоитъ изъ ряда четырехзвенныхъ сочлененій, то достаточно умѣть рѣшить слѣдующую задачу:

Точка A неизмѣняемаго звена ABC (*чер. 6*) движется по пути α съ заданной скоростью v_a; опредѣлить скорость v_b точки B, движущейся по пути β, и скорость v_c точки C неизмѣнно связанной съ A и B. Возьмемъ произвольную точку V за начало многоугольника скоростей и отъ нея будемъ откладывать всѣ скорости. Намъ извѣстна скорость v_a мы ее отложимъ въ видѣ вектора Va, кромѣ того намъ извѣстно направленіе скорости v_b точки B по касательной къ пути β; проведя изъ V линію, параллельную этой касательной, постараемся узнать положеніе точки b на этой линіи. Для этого разсмотримъ безконечно-малое перемѣщеніе звена AB, которое можемъ представить себѣ составленнымъ изъ двухъ: сначала перемѣстимъ поступательно все звено параллельно самому себѣ вмѣстѣ съ точкой A въ положеніе A_1B' со скоростью v_a, а затѣмъ повернемъ все звено вокругъ точки A_1, чтобы B попало въ B_1 на правильный путь β. Подобно тому, какъ путь точки B слагается такимъ образомъ изъ двухъ геометрическихъ составляющихъ BB' и $B'B_1$, и скорость v_b оказывается составленной изъ двухъ скоростей: скорости v_a поступательнаго движенія звена вмѣстѣ съ точкой A и относительной скорости v_{ba} вращательнаго движенія точки B вокругъ A $v_b = v_a +\!\!> v_{ba}$ [1]). Такъ какъ перемѣщеніе звена надо взять безконечномалое, то точка A_1 должна быть безконечно близка къ A, а A_1B_1 безконечно-близко AB, т. е. относительная скорость v_{ba} двухъ точекъ B и A неизмѣняемаго звена должна быть перпендикулярна AB [2]). Слѣдовательно для построенія v_b остается провести на многоугольникѣ линію $ab \perp AB$ до пересѣченія съ линіей Vb въ точкѣ b. Кромѣ скорости Vb точки B попутно опредѣляется и вращательная скорость $v_{ba} = ab$ точки B вокругъ A, а отсюда можетъ



Чер. 6.

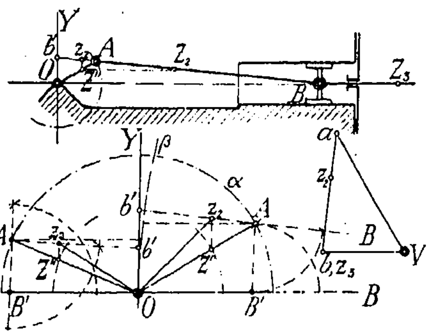
[1]) Такъ какъ подобное разложеніе можетъ быть выполнено и въ томъ случаѣ, когда кривыя α и β не лежатъ въ одной плоскости, то несомнѣнно теорема эта справедлива и для скоростей точекъ пространственныхъ механизмовъ. Разница лишь въ томъ, что тогда многоугольникъ скоростей дѣлается многограннымъ и для его построенія необходимы методы стереометріи, напр. начертательной геометріи.

[2]) Эта теорема была извѣстна еще въ началѣ 19 вѣка,—ею пользовался Коріолисъ въ цитированномъ выше мемуарѣ. (Journal de l'école polytechnique, Парижъ 1832, томъ XIII, тетр. 21, стр. 228—267), складывавшій векторы на схемѣ механизма. Въ настоящее время многоугольникъ скоростей строится всегда отдѣльно отъ изображенія схемы механизма, подобно тому, какъ въ графической статикѣ многоугольникъ напряженій строится отдѣльно отъ фермы. Идею построенія многоугольника скоростей и ускореній обыкновенно приписываютъ Мору (Mohr, Ueber Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne, Civilingenieur за 1887 годъ стр. 631), межъ тѣмъ какъ двумя-тремя годами ранѣе она была опубликована въ Англіи проф. Robert Smith въ мало распространенномъ журналѣ Transactions of the Royal Society of Edinburgh, томъ XXXII за 1884—1885 годъ, стр. 507—517 (A new graphic analysis of the kinematics of mechanisms). Статья Смита описываетъ построеніе многоугольника перемѣщеній, скоростей и ускореній для нѣсколькихъ простыхъ, а также болѣе сложныхъ, трехповодковыхъ сочлененій.

быть найдена и угловая скорость ω вращенія звена вокругъ мгновеннаго центра, ибо

$$v_{ba} = AB.\omega, \text{ откуда } \omega = \frac{ab}{AB}.$$

Для опредѣленія скорости v_c точки C, неизвѣстной намъ и по величинѣ, и по направленію, надо два раза повторить вышесказанное разсужденіе, именно можемъ утверждать, что v_c съ одной стороны равна геометрической суммѣ скоростей v_a и v_{ca}, причемъ послѣдняя перпендикулярна къ AC, а съ другой стороны по отношенію къ точкѣ B она должна равняться суммѣ v_b и v_{cb}, которая перпендикулярна къ CB; слѣдовательно намъ остается провести на многоугольникѣ скоростей черезъ точку a линію $ac \perp AC$ и черезъ точку b линію $bc \perp BC$; въ пересѣченіи получимъ точку c, опредѣляющую по соединеніи съ V величину Vc и направленіе скорости v_c. Легко видѣть, что треугольники abc и ABC подобны, повернуты другъ относительно друга на 90^0 и сходственно расположены, т. е. если точки A, C, B читаются по часовой стрѣлкѣ, то и a, c, b также должны слѣдовать другъ за другомъ въ обходѣ по направленію часовой стрѣлки.



Чер. 7.

Для примѣра, построимъ на *чер. 7* соотношенія скоростей точекъ кривошипнаго механизма. Скорость ведущей точки A зависитъ отъ неизвѣстной намъ величины ω мгновенной угловой скорости; зададимся величиной $\omega = 1$ сек.$^{-1}$, тогда $v_a = r\omega = OA$ см./сек.; отложимъ отъ точки V начала многоугольника скоростей (справа на *чер. 7*) въ нѣкоторомъ масштабѣ (1 см./сек. $= \nu$ см.) векторъ $Va \perp OA$; проведемъ Vb параллельно линіи движенія ползуна и $ab \perp AB$, получимъ величину v_b скорости точки B. Такъ какъ система ползуна движется поступательно, то скорости всѣхъ ея точекъ въ разсматриваемое мгновеніе тождественны, т. е. точкой b на многоугольникѣ скоростей изображается вся система ползуна и въ частности центръ тяжести Z_3 этой системы. Что касается скорости центра тяжести Z_2 шатуна, то для ея опредѣленія надо построить фигуру az_2b, подобную и сходственно расположенную группѣ точекъ AZ_2B; если эта группа точекъ образуетъ неизмѣняемый треугольникъ, то построеніе, какъ ужъ было указано, сводится къ проведенію двухъ прямыхъ; если же, какъ въ нашемъ примѣрѣ, треугольникъ AZ_2B вытянулся въ прямую линію, то надо на прямой ab найти точку z_2 расположенную подобно Z_2, т. е. чтобы

$$\frac{az_2}{z_2b} = \frac{AZ_2}{Z_2B}, \text{ или } \frac{az_2}{ab} = \frac{AZ_2}{AB}, \text{ или } \frac{z_2b}{ab} = \frac{Z_2B}{AB}.$$

Такъ какъ построеніе многоугольника скоростей придется дѣлать для многихъ положеній механизма, то желательно упростить построенія по крайней мѣрѣ для такого простого механизма, какъ кривошипный, воспользовавшись построеніями, уже произведенными для размѣтки путей точекъ. Если на схемѣ механизма (вверху) провести линію $OY \perp BZ_3$ (все равно, будетъ ли механизмъ центральный или нѣтъ) и продолжить шатунъ AB до пересѣченія съ этой линіей въ точкѣ b', то треугольникъ OAb' будетъ подобенъ треугольнику Vab вслѣдствіе взаимной перпендикулярности всѣхъ сторонъ. Его можно, слѣдовательно, разсматривать, какъ вычерченный въ другомъ масштабѣ и повернутый на 90^0 многоугольникъ скоростей; отрѣзокъ Ob' изображаетъ въ немъ повернутую скорость v_b поршня въ томъ же масштабѣ, въ какомъ OA изображаетъ v_a; отрѣзокъ Ab' изображаетъ повернутую относительную скорость точекъ B и A, такъ что мгновенная угловая скорость ω_2 шатуна при угловой скорости главнаго звена $\omega = 1$ сек.$^{-1}$ равна

$$\omega_2 = \frac{Ab'}{AB}.$$

Для построенія скорости точки Z_2 проведемъ $Z_2Z'' \parallel OB$ и $Z''z_2 \parallel OY'$, векторъ Oz_2 будетъ изображать повернутую скорость v_z точки Z_2.

Теперь покажемъ, какъ продѣлывать эти построенія въ большомъ масштабѣ при помощи круговой линейки. Пусть (*чер.* 7) кругъ α попрежнему изображаетъ путь пальца кривошипа; въ п. 6 (ср. *чер.* 5) уже было описано построеніе соотвѣтственнаго положенія поршня B', замѣняющее засѣчку изъ центра B радіусомъ AB; если теперь соединить точки A и B' прямою, то треугольникъ BAB' долженъ быть равнобедреннымъ, а слѣдовательно для построенія направленія шатуна надо при вершинѣ A построить уголъ $B'AB$ равный углу $AB'B$, какъ это показано на *чер.* 7. Построивъ линію OY перпендикулярную пути ползуна, продолжимъ BA до пересѣченія съ OY въ точкѣ b' и получимъ повернутую скорость Ob'. Для построенія z_2 найдемъ на OA точку Z'' дѣленіемъ пропорціонально отрѣзкамъ AZ_2 и Z_2B и проведемъ $Z''Z_2 \parallel OY$.

Многоугольникъ скоростей можетъ быть построенъ безъ особаго труда и для болѣе сложныхъ механизмовъ, но мы не будемъ здѣсь заниматься этимъ вопросомъ, отсылая интересующихся къ литературѣ вопроса [1]).

9. Приведенная масса различныхъ звеньевъ. Возвратимся теперь къ опредѣленію приведенныхъ массъ звеньевъ механизма. Ихъ можно раздѣлить по характеру движенія на три группы: а) звенья, движущіяся поступательно, б) звенья, вращающіяся вокругъ неподвижной оси и в) звенья, совершающія сложное плоское движеніе.

а) Для какого-либо звена, движущагося поступательно

---

[1]) На русскомъ языкѣ: Проф. В. Л. Кирпичевъ, Построеніе картины скоростей и картины ускореній для плоскихъ механизмовъ, Вѣстникъ Инженеровъ 1915 г. стр. 14—19 и 45—52, а также Л. В. Ассуръ, Изслѣдованіе плоскихъ стержневыхъ механизмовъ съ точки зрѣнія ихъ структуры и классификаціи. Часть вторая, глава первая. Извѣстія Политехническаго Института Императора Петра Великаго, томъ XXI и XXII за 1914 г. стр. 475—573 и 177—257. Въ продажѣ имѣются также литографированныя брошюры Л. В. Ассура (изд. кассы взаимопомощи студ. Политехн. Инст.) и К. Э. Рериха (Технолог. Инст.).

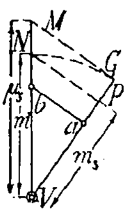
со скоростью v_b и имѣющаго массу m_3, кинетическая энергія, такъ же какъ и для матеріальной точки, равна

$$K_3 = \frac{1}{2} m_3 v_b^2.$$

Приравнивая ее къ кинетической энергіи приведенной массы μ_3, движущейся со скоростью v_a, получимъ

$$\mu_3 = m_3 \left(\frac{v_b}{v_a}\right)^2.$$

Эту величину легко опредѣлить построеніемъ, если взять какой-либо уголъ (*чер. 8*), на сторонахъ котораго отложены отрѣзки, пропорціональные скоростямъ Vb и Va (напр. на сторонахъ многоугольника скоростей), отложить по сторонѣ Va въ какомъ-либо масштабѣ отрѣзокъ VP, изображающій массу m_3 звена и провести $PN \parallel ab$; затѣмъ отложимъ $VG = VN$ по сторонѣ Va и опять проведемъ параллельную линіи ab. Второй отрѣзокъ, полученный на сторонѣ Vb и будетъ изображать въ принятомъ масштабѣ приведенную массу μ_3, какъ это слѣдуетъ изъ соотношеній:



Чер. 8.

$$\mu_3 = m' \frac{Vb}{Va} = m_3 \left(\frac{Vb}{Va}\right)^2.$$

б) Кинетическая энергія звена, вращающагося вокругъ неподвижной оси, напр. O_2, зависитъ [1]) отъ момента инерціи его J относительно оси вращенія и угловой скорости. Пусть звено имѣетъ

[1]) Умѣстно будетъ сказать здѣсь нѣсколько словъ о приведенной массѣ поѣзда, замѣняющей маховикъ въ паровозной машинѣ. Пусть M обозначаетъ массу всего поѣзда съ паровозомъ и колесами, v_a скорость его движенія по прямолинейному пути, J_i — моментъ инерціи колеснаго ската относительно его оси, r_i — радіусъ круга катанія. $d\mu_i$ — массу какой-либо точки механизма машины, движущейся относительно паровоза со скоростью u_i; теорема Кёнига дастъ намъ слѣдующее выраженіе для кинетической энергіи

$$2K = \left(M + \Sigma \frac{J_i}{r_i^2}\right) v_a^2 + \int u_i^2 d\mu_i \,.$$

Для того, чтобы свести задачу объ опредѣленіи подергиванія паровоза къ задачѣ о движеніи обыкновенной машины, вообразимъ поѣздъ неподвижнымъ, а ведущимъ и спареннымъ осямъ паровоза сообщимъ окружную скорость на кругѣ катанія равную v_a. Обстоятельства относительнаго движенія механизма отъ этого не измѣнятся, а массу поѣзда M вмѣстѣ съ приведенной массой скатовъ надо будетъ считать согласно вышенаписанному уравненію сосредоточенной на окружности ведущаго колеса.

какой-либо движущійся шарниръ, напр. D, скорость котораго Vd изображается на многоугольникѣ скоростей точкой d. Если обозначимъ разстояніе O_2D шарнира отъ оси вращенія буквой r, то угловая скорость звена будетъ

$$\omega = \frac{Vd}{O_2D} = \frac{v_d}{r},$$

а кинетическая энергія

$$K = \frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{J}{r^2} v_d^2,$$

т. е. такое звено можно замѣнить матеріальной точкой, помѣщенной въ шарнирѣ D, если массу m_d этой точки выбрать равной

$$m_d = \frac{J}{r^2},$$

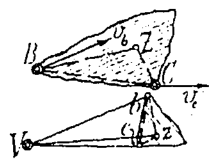
т. е. такой, чтобы моментъ инерціи этой точки относительно оси вращенія O_2 былъ равенъ J.

Послѣ этого, приведеніе массы къ ведущей точкѣ производится безъ затрудненія на основаніи соотношенія

$$\mu_d = m_d \left(\frac{v_d}{v_a}\right)^2,$$

причемъ построеніе ведется такъ же, какъ было показано на *чер. 8*.

в) Разсмотримъ теперь звено BCZ (*чер. 9*), совершающее плоское движеніе, съ шарнирами въ B и C и центромъ тяжести въ Z. Пусть m_2 будетъ масса звена, J_z—моментъ его инерціи относительно Z и пусть Vbc будетъ часть многоугольника скоростей, изображающая скорости точекъ B, C, Z и, слѣдовательно, всѣхъ вообще точекъ звена. Кинетическая энергія звена, по теоремѣ Кенига, равна кинетической его энергіи въ поступательномъ движеніи вмѣстѣ съ центромъ тяжести, сложенной съ кин. эн. вращательнаго движенія вокругъ центра тяжести, и если v_z обозначаетъ скорость точки Z, а ω угловую скорость вращенія звена, то



Чер. 9.

$$K = \frac{1}{2} m_2 v_z^2 + \frac{1}{2} J_z \omega^2.$$

Если обозначимъ $BC = l$ и подставимъ вмѣсто ω

$$\omega = \frac{bc}{BC} = \frac{v_{bc}}{l},$$

то получимъ

$$K = \frac{1}{2} m_2 v_s^2 + \frac{1}{2} \frac{J_s}{l^2} \cdot v_{bc}^2 = \frac{1}{2} \mu_2 v_a^2.$$

Слѣдовательно, приведенная масса μ_2 звена будетъ равна:

$$\mu_2 = m_2 \left(\frac{v_s}{v_a}\right)^2 + \frac{J_s}{l^2} \left(\frac{v_{bc}}{v_a}\right)^2 = \mu'_2 + \mu''_2,$$

т. е. слагается изъ двухъ приведенныхъ массъ: μ'_2 отъ поступательнаго движенія вмѣстѣ съ центромъ инерціи и μ''_2—вращенія вокругъ него. Каждое изъ этихъ слагаемыхъ легко строится согласно указаніямъ къ *чер. 8.*

Не надо думать, что вышеизложенный способъ опредѣленія живой силы механизма есть единственный.

Рѣшеніе Понселе [1]) для звена, совершающаго сложное движеніе, относилось къ шатуну паровой машины и выражало энергію его вращенія вокругъ мгновеннаго центра. Виттенбауэръ [2]) предложилъ замѣнять каждое такое звено четырьмя эквивалентными матеріальными точками, изъ которыхъ три могли быть расположены вокругъ центра тяжести, а четвертая должна совпадать съ центромъ тяжести; въ частномъ случаѣ, когда центръ тяжести лежитъ на прямой, соединяющей двѣ выбранныя точки, масса звена замѣняется тремя эквивалентными матеріальными точками. Способъ Виттенбауэра кажется намъ и болѣе сложнымъ и трудно запомииаемымъ, такъ какъ выраженія для вычисленія массъ эквивалентныхъ матеріальныхъ точекъ въ обшемъ случаѣ не отличаются простотой.

Очень легко запоминается теорема Н. Е. Жуковскаго [3]): кинетическая энергія механизма равна произведенію момента инерціи относительно начала V изображенія механизма на многоугольникѣ скоростей, на половину квадрата угловой скорости ведущаго звена.

Многоугольникъ скоростей долженъ быть вычерченъ для угловой скорости главнаго звена, равной 1, и массу каждой точки звена вообразимъ перенесенною въ изображающую точку многоугольника скоростей; если v длина отрѣзка, изображающаго скорость нѣкоторой точки механизма массы dm, то дѣйствительная скорость ея движенія будетъ $v\omega$ и, слѣдовательно, суммируя элементарныя кинетическія энергіи, получимъ

$$K = \frac{1}{2} \omega^2 \int v^2 \, dm.$$

[1]) Poncelet. Mécanique appliquée. Льежъ 1845 стр. 116.
[2]) Wittenbauer. Z. f. Math. und Physik томъ 50.
[3]) Н. Е. Жуковскій. Математическій сборникъ томъ 28 за 1909 стр. 71—119.

Однако, какъ только мы приступимъ къ вычисленію момента инерціи $\int v^2\, dm$ изображенія механизма, намъ придется разсматривать каждое звено въ отдѣльности и придти примѣрно къ тѣмъ же результатамъ, которые были ранѣе изложены.

10. Вѣса звеньевъ различныхъ двигателей. Для опредѣленія приведенныхъ массъ кривошипнаго механизма необходимо знать вѣса всѣхъ его частей и моменты инерціи системъ маховика и шатуна. Въ тѣхъ случаяхъ, когда мы имѣемъ дѣло съ уже построенной машиной, которую можно разобрать на части, взвѣсить и покачать или завертѣть каждое звено,—мы будемъ знать точно всѣ необходимыя данныя. Когда же машина еще проектируется, то приходится либо вычислять вѣса и моменты инерціи всѣхъ частей по конструктивнымъ ихъ чертежамъ, что требуетъ большого труда, либо надо имѣть среднія статистическія данныя о вѣсахъ отдѣльныхъ частей уже построенныхъ машинъ. Тогда можно приблизительно предсказать всѣ вѣса, еще не имѣя конструктивныхъ чертежей.

Тѣ среднія статистическія цифры, которыя приводятся сейчасъ въ курсахъ регулированія и справочникахъ, не годятся для нашихъ цѣлей, такъ какъ они выражаютъ общій вѣсъ всѣхъ частей механизма. Анализируя данныя Радингера, мы увидимъ, что онъ складывалъ вѣса системы ползуна, шатуна и кривошипа (безъ маховика) вмѣстѣ, дѣлилъ эту сумму на площадь поршня и получалъ такъ наз. вѣсъ возвратно движущихся частей механизма. Гюльднеръ складывалъ вѣсъ системы ползуна съ половиной вѣса шатуна. Намъ же необходимо знать отдѣльно вѣса трехъ основныхъ системъ машины: ползуна, шатуна и кривошипа.

Разберемся сначала въ факторахъ, вліяющихъ на вѣса отдѣльныхъ частей. Въ настоящее время можно сказать по этому поводу, что раціональному расчету подвергаются только поршневая скалка, шатунъ и кривошипъ; поршень и крестовина (ползунъ) конструируются по эмпирическимъ формуламъ. Въ основу расчета кладется наибольшее усиліе, передаваемое частями механизма, т. е. произведеніе $F.p$, гдѣ F—площадь поршня въ кв. см., а p—наибольшая разность давленій въ кг/кв. см. Несмотря на это мы будемъ, такъ же, какъ и Радингеръ выражать всѣ вѣса, относя ихъ къ одному кв. см. площади поршня, такъ какъ и работы выражены нами для того же кв. см. площади поршня т. е. будемъ дѣлить полный вѣсъ на F. Однако Fp вліяетъ главнымъ образомъ на поперечные размѣры частей, а на вѣсъ вліяетъ также и длина ихъ, зависящая отъ длины радіуса кривошипа r или длины хода поршня $H=2r$, такъ что полный вѣсъ зависитъ отъ произведенія $F.H.p$. Наконецъ, очень существенное вліяніе оказываютъ также индивидуальныя особенности конструктора и завода, сказывающіяся какъ въ выборѣ допускаемыхъ напряженій, такъ и въ выборѣ матеріала и конструкціи отдѣльныхъ частей.

Единственныя подробныя статистическія данныя относительно вѣсовъ найдены нами въ таблицахъ Радингера [1]). Пересчитавъ

[1]) Радингеръ. Паровыя машины съ большой скоростью поршней, СПБ. 1895 Перев. не вполнѣ удовлетворителенъ. Таблицы приложены въ концѣ книги.

всѣ его таблицы для постоянныхъ паровыхъ машинъ, мы приходимъ къ слѣдующимъ выводамъ:

Отнесенный къ пальцу вѣсъ кривошипа q_1, приходящійся на ед. пл. поршня колеблется въ машинахъ двойного расширенія для цилиндра высокаго давленія (7—8 атм.) отъ 0,036 до 0,095 кг./кв. см. и отъ 0,017 до 0,037 кг./кв. см. для цилиндра низкаго давленія. Какъ общее правило, кривошипы обоихъ цилиндровъ имѣютъ одинаковый абсолютный вѣсъ, такъ же какъ и шатуны, что само собой разумѣется, такъ какъ расчетныя усилія берутся равными. Вѣсъ шатуна на ед. пл. поршня q_2 колеблется отъ 0,073 до 0,21 кг./кв. см. для цил. выс. давл. и отъ 0,036 до 0,12 кг./кв. см. для цил. низк. давл. Наконецъ вѣсъ q_3 системы ползуна (поршень, скалка, крестовина) на ед. площади колеблется отъ 0,124 до 0,37 кг./кв. см. для цил. выс. давл. и отъ 0,075 до 0,195 кг/кв. см. для цил. низк. давл. При этомъ машина № 9 (180 л. с. безъ охл.) не принята во вниманіе, какъ дающая изъ ряду вонъ выходящія и ничѣмъ не оправдываемыя слишкомъ высокія цифры.

Среднія ариѳметическія изъ всѣхъ значеній таблицы получаются слѣдующія:

Для цилиндра высокаго давленія:

$q_1 = 0{,}06$ кг./кв. см.; $q_2 = 0{,}13$ кг./кв. см.; $q_3 = 0{,}225$ кг./кв. см.

Для цилиндра низкаго давленія:

$q_1' = 0{,}025$ кг./кв. см,; $q_2' = 0{,}065$ кг./кв. см.; $q_3' = 0{,}149$ кг./кв. см.

Наконецъ, для каждой машины были вычислены значенія $H.p.$ произведеніе длины хода въ метрахъ на давленіе впускаемаго пара въ атм. (для цил. выс. д. произведеніе колебалось отъ 1,8 до 12,4, а для цил. низк. давл. отъ 0,66 до 3,4) и затѣмъ отложены на миллиметровой бумагѣ вѣса по ординатамъ, а Hp, какъ абсциссы. Однако и тутъ отдѣльныя точки оказывались разсѣянными довольно значительно, но за то при этомъ способѣ можно не различать цил. высок. и низк. давл. Среднія прямыя, по которымъ можно было-бы приближенно вычислять вѣса, приходящіеся на 1 кв. см. площ. поршня, имѣли уравненія для кривошипа: $q_1 = 0{,}01 + 0{,}007.\ H.p.$

Для шатуна: $q_2 = 0{,}04 + 0{,}016.\ H.p.$

Для сист. ползуна: $q_3 = 0{,}10 + 0{,}012.\ H.p.$

Ошибка при пользованіи этими формулами иногда превосходитъ 50%. Особенно безпорядочны цифры, относящіяся къ шатунамъ.

Для судовыхъ паровыхъ машинъ тройного расширенія среднія ариѳметическія для цилиндровъ высокаго, средняго и низкаго давл. имѣютъ значенія:

Вѣсъ кривошипа $q_1 = 0{,}043$; $q_1' = 0{,}033$; $q_1'' = 0{,}015$ кг./кв. см.

Вѣсъ шатуна $q_2 = 0{,}071$; $q_2' = 0{,}029$; $q_2'' = 0{,}014$ кг./кв. см.

Вѣсъ ползуна $q_3 = 0{,}092$; $q_3' = 0{,}050$; $q_3'' = 0{,}034$ кг./кв. см.

Для паровозовъ у Радингера приведены лишь суммарные вѣса.

Нѣкоторыя данныя для двигателей внутренняго сгоранія имѣются у Гюльднера [1]); такъ, на стр. 153 даны вѣса открытыхъ поршней

[1]) Güldner, Das Entwerfen und Berechnen der Verbrennungsmaschinen, Берлинъ, 3 изд. 1914. Есть хорошій русскій переводъ.

отъ 0,126 до 0,275 кг./кв. см. Къ сожалѣнію онъ не вычисляетъ зависимости этого вѣса отъ длины хода; по догадкамъ можно считать ее: $q_3 = 0{,}37.\ H$ кг./кв. см., гдѣ H ходъ въ метрахъ. На стр. 190 даны лишь суммарныя значенія вѣса возвратно движ. массъ, причемъ къ вѣсу ползуна прибавлялося $^1/_2 - ^2/_3$ вѣса шатуна.

Таблица вѣсовъ возвр. дв. массъ двиг. внутр. сгор. по Гюльднеру:

Простого дѣйствія.	Обыкн.	Дизель.	Двойного дѣйст.	Обыкн.	Дизель.
Безъ крестов., ходъ $< 1{,}5\ D$	0,4—0,6	0,5—0,7	1 цил. безъ задн. крест.	1,0—1,25	—
Тоже, ходъ $> 1{,}5\ D$	0,6—0,75	0,7—0,8	Тоже съ „ „	1,2—1,4	1,3—1,5
Съ крестовиной	0,9—1,2	1,0—1,3	2 поршня тандемъ	1,5—1,8	1,6—1,9
Два поршня тандемъ . . .	1,25—1,5	1,35—1,6	3 поршня танд. . .	2,0	—

Для быстроходныхъ автомоб. двигателей [1]) отъ 0,025 до 0,04 кг./кв. см. Для одного маломощнаго Дизель-двигателя мы получили взвѣшиваніемъ слѣдующія значенія въ кг./кв. см.: поршень съ шипомъ 0,1625; шатунъ 0,1865; сережки 0,014; коромысло съ шипомъ 0,0513; малый шатунъ компрессора 0,0171; поршень компрессора 0,0243.

Теперь намъ остается привести данныя относительно положеній центра тяжести и величинъ момента инерціи шатуновъ, на основаніи статей Моллье [2]), Энсслина [3]) и Шестакова [4]). Именно, укажемъ величины отношеній a/l и ρ^2/l^2, гдѣ l длина шатуна между центрами его подшипниковъ, a разстояніе отъ оси пальца кривошипа до центра тяжести шатуна, а ρ—радіусъ инерціи относительно центра тяжести шатуна.

Отношеніе a/l измѣняется отъ 0,23 до 0,45 въ зависимости отъ конструкціи головки кривошипа и степени утолщенія шатуна къ пальцу кривошипа; ариѳметическое среднее для постоянныхъ машинъ (паро-

[1]) Болѣе подробныя данныя относительно автомобильныхъ и воздухоплавательныхъ двигателей имѣются въ книгѣ Kölsch (Gleichgang und Massenkräfte bei Fahr—und Flugzeug-maschinen, Берлинъ 1911) на стр. 9—15 для 14 машинъ съ діаметрами цилиндровъ 80—125 мм. Пересчитавъ его данныя, найдемъ: вѣса поршней колеблются отъ 0,0114 (16 цилиндровый воздухоплавательный двигатель Antoinette) до 0,0283 при среднемъ ариѳметическомъ 0,0235 кг./кв. см. Вѣса шатуновъ колеблются отъ 0,0079 (Antoinette) до 0, 0358 при среднемъ ариѳметическомъ 0,0224 кг./кв. см. Вѣса колѣнчатыхъ валовъ зависятъ еще и отъ числа, и отъ расположенія цилиндровъ и на одинъ цилиндръ составляютъ отъ 0,0091 (Ant.) до 0,0685 при среднемъ ариѳм. 0,0472 кг./кв. см. Дополнительныя данныя, характеризующія положеніе центра тяжести и моментъ инерціи шатуновъ (ср. ниже), были $a/l = 0.23$; $\rho^2/l^2 = 0{,}163$.

[2]) Mollier, Der Beschleunigungsdruck der Schubstange, Z. d. V. d. I. 1903, стр. 1638—40.

[3]) Ensslin, Die Trägheitskräfte einer Schubstange, Dingl. P. Journ. 1907, стр. 610—12.

[4]) Шестаковъ, Опредѣленіе момента инерціи паровозныхъ ведущихъ дышелъ. Вѣстникъ Общества Технологовъ 1914 г. стр. 453—5.

выхъ и двигателей внутренняго сгоранія; 11 примѣровъ) равно 0,38, а для паровозныхъ дышелъ (24 примѣра) равно 0, 34 при предѣлахъ отъ 0,225 до 0,417. Въ паровозныхъ дышлахъ замѣтна разница между шатунами для внутреннихъ машинъ и наружныхъ; для первыхъ среднее ариѳметическое изъ 7 примѣровъ равно 0,25, а для наружныхъ дышелъ среднее изъ 17 примѣровъ равно 0,373; эту разницу можно объяснить большимъ діаметромъ пальца кривошипа у внутреннихъ шатуновъ.

Отношеніе ρ^2/l^2 измѣняется для всѣхъ шатуновъ въ предѣлахъ отъ 0,104 до 0,244, причемъ среднее изъ 10 примѣровъ для постоянныхъ машинъ равно 0,17, а изъ 24 примѣровъ для паровозныхъ дышелъ равно 0,144. При этомъ не обнаруживается вліяніе положенія центра тяжести шатуна на величину отношенія ρ^2/l^2; вѣроятно колебанія получились бы гораздо меньшими, еслибы относить ρ^2 не къ квадрату длины l^2 между центрами, а къ квадрату полной длины L^2 шатуна отъ крайней точки на головкѣ крестовины до крайней точки его иа головкѣ кривошипа. Но изъ вышеуказанныхъ статей только Энсслинъ даетъ чертежи всѣхъ разсмотрѣнныхъ шатуновъ, а въ остальныхъ эти данныя отсутствуютъ.

Что касается вѣса поршней прямоточныхъ машинъ Штумпфа, то подробныхъ данныхъ намъ не удалось найти; можно считать, что вѣсъ поршня въ этомъ случаѣ больше процентовъ на 50—100, хотя Штумпфъ и говоритъ въ своемъ докладѣ, что вѣсъ возвратно движущихся частей его машины больше обыкновеннаго лишь на 5%. Вѣроятно за обыкновенный считался вѣсъ по Радингеру, т. е. явно преувеличенный [1]).

11. Приведенная масса кривошипнаго механизма. Теперь остается приложить тѣ теоремы, которыя были изложены въ п. 9 вообще для какого угодно механизма къ сравнительно простому кривошипному механизму. При этомъ надо поставить цѣль—сокращеніе числа построеній до минимума.

Пусть F обозначаетъ площадь поршня, q_k неизвѣстный приведенный къ пальцу кривошипа A вѣсъ маховика, отнесенный къ единицѣ площади поршня $q_k = \frac{J}{Fr^2}\ \frac{\text{кг.}}{\text{кв. см.}}$, гдѣ J моментъ инерціи въ кг. см.^{2}, а r—радіусъ кривошипа въ см.; пусть далѣе q_2—обозначаетъ вѣсъ шатуна, а q_3—вѣсъ системы ползуна—оба также отнесенные къ единицѣ площади поршня. Такъ какъ въ п. 8 ужъ было доказано, что скорости пальцевъ ползуна и кривошипа относятся какъ отрѣзки Ob' и OA *(чер. 7)*, то очевидно, приведенная масса μ_3 системы ползуна, приходящаяся на ед. площади поршня, будетъ опредѣляться соотношеніемъ

$$\mu_3 = \frac{q_3}{g}\left(\frac{Ob'}{OA}\right)^2 \text{ или приведенный вѣсъ [2]) } \gamma_3 = q_3 \left(\frac{Ob'}{OA}\right)^2.$$

---

[1]) Для примѣра, приведеннаго въ книгѣ Stumpf, Die Gleichstrommaschine Мюнхенъ, Берлинъ 1911, на стр. 47 можно вычислить по силѣ инерціи, начерченной на индикаторной діаграммѣ, вѣсъ возвратно движущихся частей $= 0{,}466$ кг./кв. см. Считая при этомъ половину вѣса шатуна равной 0,066 кг./кв. см., будемъ имѣть вѣсъ поршня 0,4 кг./кв. см., т. е. почти вдвое тяжелѣе обычнаго средняго вѣса.

[2]) Не надо его смѣшивать съ приведенной силой вѣса.

Для системы шатуна приведенный на ед. площ. поршня вѣсъ

$$\gamma_2 = q_2 \left(\frac{Oz_2}{OA}\right)^2 + \frac{J_z}{Fl^2} \left(\frac{Ab'}{OA}\right)^2;$$

сохранивъ прежнее обозначеніе ρ для плеча инерціи шатуна и вспомнивъ, что $J_z = q_2 . F\rho^2$ и что въ среднемъ $\rho^2 = 0{,}17\ l^2$, получимъ:

$$\gamma_2 = q_2 \left[\left(\frac{Oz_2}{OA}\right)^2 + 0{,}17 \left(\frac{Ab'}{OA}\right)^2\right] = \gamma_2' + \gamma_2'',$$

т. е. для опредѣленія приведенныхъ массъ надо продѣлать три построенія приведенной массы по *чер. 8*.

Къ уменьшенію построеній можно идти двоякимъ путемъ: во-первыхъ, можно быстро построить отрѣзокъ Oc, удовлетворяющій равенству

$$Oc^2 = Oz_2^2 + 0{,}17\ Ab'^2,$$

для чего возставимъ къ Oz_2 въ z_2 перпендикуляръ и отложимъ на немъ отрѣзокъ $z_2 c = \sqrt{0{,}17}\ Ab' = 0{,}412\ Ab'$; гипотенуза Oc будетъ требуемымъ отрѣзкомъ и тогда будемъ имѣть

$$\gamma_2 = q_2 \left(\frac{Oc}{OA}\right)^2.$$

Во-вторыхъ, можно постараться еще упростить выраженіе для приведенной массы шатуна; обратимъ наше вниманіе на первый членъ этого выраженія. Вѣсъ q_2, сосредоточенный въ центрѣ тяжести Z_2, замѣнимъ двумя матеріальными точками вѣса q_a и q_b въ шарнирахъ A и B, причемъ величины эти выберемъ такъ, чтобы общій центръ ихъ тяжести попрежнему лежалъ въ Z_2 и чтобы сумма ихъ вѣсовъ равнялась q_2. Этимъ условіямъ удовлетворяютъ значенія

$$q_a = q_2 \frac{Z_2 B}{AB} = q_2 \frac{b}{l};\quad q_b = q_2 \frac{AZ_2}{AB} = q_2 \frac{a}{l}.$$

Теперь посмотримъ, будетъ ли кинетическая энергія этихъ массъ выражать кинетическую энергію центра тяжести шатуна; для этого найдемъ величину ея въ предположеніи $\omega_1 = 1$ *сек.*$^{-1}$ сначала для двухъ матеріальныхъ точекъ q_a и q_b, а затѣмъ по теоремѣ Кенига, какъ сумму кинетической энергіи центра ихъ тяжести съ кин. эн. относительнаго ихъ движенія вокругъ центра тяжести, получимъ:

$$^1/_2\, q_a (OA)^2 + {}^1/_2\, q_b (Ob')^2 = {}^1/_2\, q_2 (Oz_2)^2 + {}^1/_2\, q_a (Az_2)^2 + {}^1/_2\, q_b (b'z_2)^2,$$

такъ какъ скорости точекъ A и B въ этомъ случаѣ изображаются *(чер. 7)* отрѣзками OA и Ob', а относительныя ихъ скорости вращенія вокругъ Z_2 отрѣзками Az_2 и $b'z_2$. Дѣля все уравненіе на OA^2, найдемъ:

$$\gamma_2' = q_2 \left(\frac{Oz_2}{OA}\right)^2 = q_a + q_b \left(\frac{Ob'}{OA}\right)^2 - q_a \left(\frac{Az_2}{OA}\right)^2 - q_b \left(\frac{b'z_2}{OA}\right)^2,$$

т. е. видно, что совпаденія нѣтъ. Подставимъ далѣе:

$$Az_2 = Ab' \cdot \frac{a}{l}; \; b'z_2 = Ab' \cdot \frac{b}{l},$$

а также примемъ во вниманіе значенія q_a и q_b, получимъ

$$\gamma_2' = q_a + q_b \left(\frac{Ob'}{OA}\right)^2 - q_2 \left(\frac{Ab'}{OA}\right)^2 \cdot \frac{a \cdot b}{l^2}.$$

Подставляя полученное значеніе въ выраженіе для приведеннаго вѣса всего шатуна, получимъ:

$$\gamma_2 = q_a + q_b \left(\frac{Ob'}{OA}\right)^2 + q_2 \left(\frac{Ab'}{OA}\right)^2 \left(\frac{\rho^2}{l^2} - \frac{a \cdot b}{l^2}\right),$$

т. е. приведенный вѣсъ шатуна слагается изъ трехъ частей: часть q_a постоянна и прикладывается къ приведенному вѣсу q_k маховаго колеса, часть q_b мѣняется по тому же закону, какъ и приведенный вѣсъ γ_3 системы ползуна, такъ что, прибавивъ къ вѣсу q_3 величину q_b, можемъ построеніе приведенной массы продѣлывать вмѣстѣ и тогда останется второе построеніе величины:

$$q_2 \left(\frac{\rho^2}{l^2} - \frac{ab}{l^2}\right) \left(\frac{Ab'}{OA}\right)^2.$$

Принявъ во вниманіе указанное на стр. 41 и 42 среднее расположеніе центра тяжести, будемъ имѣть для шатуновъ постоянныхъ машинъ:

$$\frac{a \cdot b}{l^2} = 0{,}24$$

и 0,22 для паровозныхъ дышелъ.

Такимъ образомъ второй членъ оказывается отрицательнымъ, равнымъ для постоянныхъ машинъ:

$-0{,}07\ q_2 \left(\frac{Ab'}{OA}\right)^2$, а для паровозныхъ дышелъ $-0{,}08\ q_2 \left(\frac{Ab'}{OA}\right)^2$,

т. е. очень малымъ.

Итакъ, полный приведенный вѣсъ кривошипнаго механизма [1])

---

[1]) Толле (Die Regelung der Kraftmaschinen стр. 115) даетъ приближенное выраженіе приведеннаго вѣса. которое можно вывести изъ нашего, принявъ во вниманіе, что уголъ $Ob'A$ близокъ къ прямому, т. е. считая для этого малаго члена длину шатуна безконечно большой. Тогда $(Ab')^2 = (OA)^2 - (Ob')^2$, подставляя и группируя члены, получимъ:

$$\gamma = q_k + q_2 \left(\frac{b^2}{l^2} + \frac{\rho^2}{l^2}\right) + \left[q_3 + q_2 \left(1 - \frac{b^2}{l^2} - \frac{\rho^2}{l^2}\right)\right] \left(\frac{Ob'}{OA}\right)^2.$$

При проектированіи, когда величина момента инерціи шатуна, а также всѣ вѣса гадательны, допустимо пользоваться этимъ приближениымъ выраженіемъ.

Если подставить среднія значенія коефиціентовъ, опредѣляющихъ постоянную и перемѣнную долю этого приведеннаго вѣса, то получимъ:

$$\gamma = q_k + 0{,}55\, q_2 + (q_3 + 0{,}45\, q_2) \left(\frac{Ob'}{OA}\right)^2,$$

т. е. 0,55 вѣса шатуна можно сосредоточить въ пальцѣ кривошипа, а 0,45 въ пальцѣ ползуна; для паровозныхъ дышелъ соотвѣтственныя доли будутъ 0,58 и 0,42.

равенъ:

$$\gamma = q_к + q_2 \frac{b}{l} + \left(q_3 + q_2 \frac{a}{l}\right)\left(\frac{Ob'}{OA}\right)^2 - q_2 \left(\frac{a \cdot b}{l^2} - \frac{\rho^2}{l^2}\right)\left(\frac{Ab'}{OA}\right)^2 \ldots (8).$$

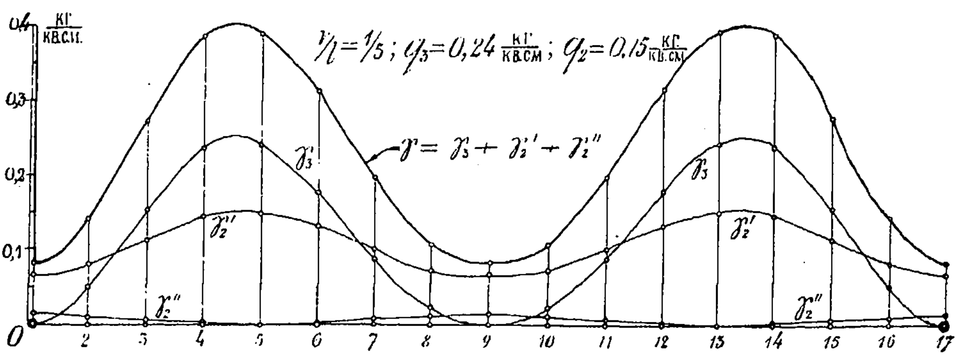
На *чер. 10* изображена діаграмма приведенныхъ вѣсовъ для шатуна и ползуна паровой машины, причемъ принято отношеніе длины кривошипа къ длинѣ шатуна

$$\lambda = \frac{1}{5},\ q_3 = 0{,}24 \text{ кг./кв. см.};\ q_2 = 0{,}15 \text{ кг./кв. см.}: \frac{a}{l} = 0{,}35 \text{ и } \frac{\rho^2}{l^2} = 0{,}18.$$

Кромѣ суммарнаго приведеннаго вѣса изображены также отдѣльныя его слагаемыя: — γ_3 изображаетъ приведенный вѣсъ поршня, γ_2' — приведенный вѣсъ центра тяжести шатуна и γ_2'' — приведенный вѣсъ отъ вращательнаго движенія шатуна

$$\gamma_2'' = q_2 \frac{\rho^2}{l^2}\left(\frac{Ab'}{OA}\right)^2$$

На чертежѣ ясно видно ничтожное значеніе даже этой слагаемой



Чер. 10.
Діаграмма приведенныхъ вѣсовъ.

12. Діаграмма массъ и работъ. Построеніе діаграммы мгновенныхъ работъ и діаграммы приведенныхъ массъ (или вѣсовъ) суть необходимыя подготовительныя операціи для рѣшенія поставленной задачи — подбора махового колеса и опредѣленія измѣненій угловой скорости. При помощи этихъ подготовительныхъ операцій мы значительно упростили рѣшеніе задачи, такъ какъ вмѣсто механизма какой-угодно сложности мы имѣемъ теперь одну матеріальную точку (ведущую точку A механизма) перемѣнной массы μ, движущуюся по окружности подъ вліяніемъ перемѣнныхъ силъ, работа которыхъ для каждаго положенія точки намъ извѣстна.

Мы не будемъ излагать здѣсь общихъ теоремъ, относящихся къ

Динамикѣ точки перемѣнной массы [1]) на томъ основанiи, что къ самому понятiю о перемѣнной приведенной массѣ мы. пришли, примѣняя къ механизму законъ живыхъ силъ (стр. 20), а это мы вправѣ дѣлать, если въ механизмѣ не происходитъ соударенiя массъ; мы будемъ, слѣдовательно, допускать, что механизмъ нашъ дѣйствительно все время обладаетъ только одной степенью свободы, т. е., что сочлененiя его совершенно плотны и не имѣютъ игры.

Если K_1 означаетъ величину (отнесенную къ 1 кв. см. площ. поршня) кинетической энергiи машины въ начальномъ положенiи, напр. въ мертвой точкѣ ($\varphi = o$) а K — въ любомъ положенiи, соотвѣтствующемъ углу поворота φ, и если L есть мгновенная работа всѣхъ силъ, также отнесенныхъ къ 1 кв. см. площади поршня, то по закону живой силы

$$K = K_1 + L.$$

или

$$\frac{\mu r^2 \omega^2}{2} = \frac{\mu_1 r^2 \omega_1{}^2}{2} + L, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

гдѣ $\mu_1 = \frac{\gamma_1}{g}$ и $\mu = \frac{\gamma}{g}$ отнесенныя къ 1 кв. см. площ. поршня величины приведенной массы соотвѣтственно въ начальный и разсматриваемый моменты. Такъ какъ q_k — приведенный вѣсъ маховика входитъ въ обѣ части ур. (9), то для опредѣленiя вѣса махового колеса надо рѣшить это уравненiе, относительно ω^2, найти наибольшее и наименьшее значенiя, замѣнить ихъ разность коефицiентомъ неравномѣрности и рѣшить полученное уравненiе относительно q_k. Этотъ путь, намѣченный Корiолисомъ, слишкомъ сложенъ для того, чтобы имъ можно было слѣдовать въ практическихъ расчетахъ; графическiй методъ Виттенбауэра во много разъ проще, поэтому мы и перейдемъ къ его дiаграммѣ массъ и работъ.

Сначала будемъ предполагать, что мы знаемъ приведенный вѣсъ маховика и построимъ дiаграмму массъ и работъ, для чего будемъ по оси абсциссъ (*чер. 11*) откладывать приведенную массу $\mu = \frac{\gamma}{g}$ или проще величину приведеннаго вѣса γ, соотвѣтствующую каждому изъ разсматриваемыхъ положенiй кривошипа, а по оси ординатъ сумму постоянной K_1 и перемѣнной работы L, соотвѣтствующей тѣмъ же положенiямъ кривошипа. Масштабы выберемъ сначала небольшими, чтобы большiя величины q_k и K_1 помѣстились на чертежѣ. Каждому положенiю кривошипа будетъ соотвѣтствовать одна опредѣленная изобра-

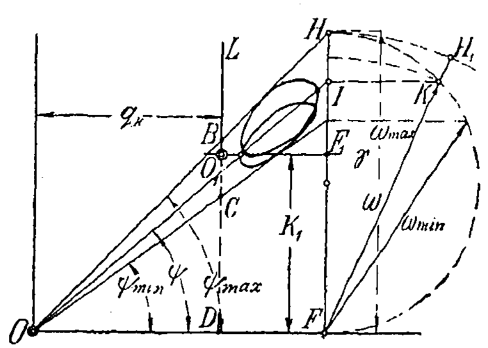
[1]) Интересующихся отсылаемъ къ книгѣ проф. И. В. Мещерскаго, Динамика точки перемѣнной массы, СПБ. 1897, а также къ статьѣ И. В. Мещерскаго Уравненiя движенiя точки перемѣнной массы въ общемъ случаѣ. (Извѣстiя СПБ. Политехническаго Института 1904 г. томъ I стр. 77—118); нѣсколько теоремъ имѣется также въ вышеуказанной статьѣ Виттенбауэра въ Z. f. M. und Ph. томъ 50.

жающая точка діаграммы массъ и работъ, такъ какъ ордината и абсцисса ея вполнѣ опредѣленны и берутся изъ діаграммы работъ (*чер. 5*) съ прибавленіемъ постоянной K_1 и діаграммы приведенныхъ вѣсовъ (*чер. 10*) съ прибавленіемъ постоянной q_k. При установившемся движеніи машины послѣдняя изображающая точка совпадетъ съ первой и, если соединить всѣ изображающія точки плавною линіей, получимъ замкнутую кривую; при неустановившемся движеніи машины діаграмма будетъ либо все подниматься, при избыткѣ работы движущихъ силъ и увеличеніи скорости, либо опускаться въ случаѣ недостатка работы движущихъ силъ. Взявъ точку O_1 съ абсциссой q_k и ординатой K_1, можемъ откладывать величины мгновенныхъ работъ и приведенныхъ массъ механизма отъ новыхъ координатныхъ осей O_1L и $O_1\gamma$.

Докажемъ теперь, что лучъ, соединяющій начало координатъ O съ изображающей точкой, характеризуетъ мгновенную скорость $r\omega$ ведущей точки. Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненія (9) слѣдуетъ:

$$\frac{r^2\omega^2}{2} = \frac{L + {}^1/_2\,\mu_1 r^2\omega_1^2}{\mu} = tg\psi, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

т. е. тангенсъ угла ψ наклона луча къ оси абсциссъ пропорціоналенъ квадрату мгновенной скорости ведущей точки.



Чер. 11. Діаграмма массъ и работъ.

Если провести изъ начала координатъ крайнія касательныя къ діаграммѣ массъ и работъ съ углами ψ_{max} и ψ_{min}, то точки касанія опредѣлятъ тѣ положенія кривошипа, при которыхъ машина имѣетъ наибольшую и наименьшую свою угловую скорость ω_{max} и ω_{min}. Этимъ свойствомъ діаграммы мы и должны воспользоваться для опредѣленія необходимаго вѣса маховика.

Въ самомъ дѣлѣ, діаграмму массъ и работъ можно построить, не зная вѣса маховика, для этого достаточно перенести начало координатъ въ другую точку—по оси абсциссъ на величину приведеннаго вѣса q_k маховика и кривошипа, а по оси ординатъ на величину кинетической энергіи маховика въ начальной моментъ $K_1 = \frac{q_1 r^2 \omega_1^2}{2g}$; на *чер. 11* буквой O_1 обозначено это новое начало координатъ; діаграмма массъ и работъ отъ этого переноса начала координатъ конечно не измѣнится; по оси абсциссъ теперь будемъ откладывать приведенный вѣсъ системъ ползуна и шатуна, т. е. $\gamma - q_k$, гдѣ q_k приведенная масса системы маховика и кривошипа, а по оси ординатъ перемѣнную работу L.

Если намъ задана средняя ариѳметическая скорость машины $\omega_0 = \frac{\pi n}{30}$ и требуемый коэфиціентъ неравномѣрности δ, то мы можемъ по ур. (5) вычислить скорости

$$\omega_{max} = \omega_0 \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \text{ и } \omega_{min} = \omega_0 \left(1 - \frac{\delta}{2}\right).$$

и слѣдовательно можемъ опредѣлить углы наклона лучей, соотвѣтствующихъ этимъ скоростямъ. Мы уже видѣли (ур. 10), что

$$\frac{r^2\omega^2}{2} = tg\psi,$$

причемъ коефиціентъ пропорціональности опредѣляется масштабами, положенными въ основаніе построенія діаграммы. Пусть работа въ $1 \frac{\text{кг.}}{\text{кв. см.}}$ м. отложена въ видѣ отрѣзка, равнаго ρ см., а приведенный вѣсъ $1 \frac{\text{кг.}}{\text{кв. см.}} = \beta$ см.; такъ какъ этотъ приведенный вѣсъ соотвѣтствуетъ технической массѣ $\frac{1}{9{,}81} \frac{\text{кг.}}{\text{кв. см.}} \cdot \frac{\text{сек.}^2}{\text{м.}}$, то слѣдовательно масса $1 \frac{\text{кг.}}{\text{кв. см.}} \cdot \frac{\text{сек.}^2}{\text{м.}} = 9{,}81 \cdot \beta$ см. Раздѣливши ρ на этотъ масштабъ, получимъ

$$1 \frac{\text{м.}^2}{\text{сек.}^2} = \frac{\rho}{9{,}81\,\beta}.$$

Слѣдовательно, если радіусъ кривошипа r выраженъ въ метрахъ, то

$$\frac{r^2\omega^2_{max}}{2} \frac{\text{м.}^2}{\text{сек.}^2} = \frac{\rho}{9{,}81\,\beta} \cdot \left(\frac{r^2\omega^2_{max}}{2}\right) = tg\psi_{max}$$

$$\text{и } tg\psi_{min} = \frac{\rho}{9{,}81\,\beta} \left(\frac{r^2\omega^2_{min}}{2}\right).$$

Вычисливъ эти величины и построивши прямоуг. треуг. съ такимъ отношеніемъ катетовъ, будемъ имѣть на чер. углы ψ_{max} и ψ_{min} [1]); про-

---

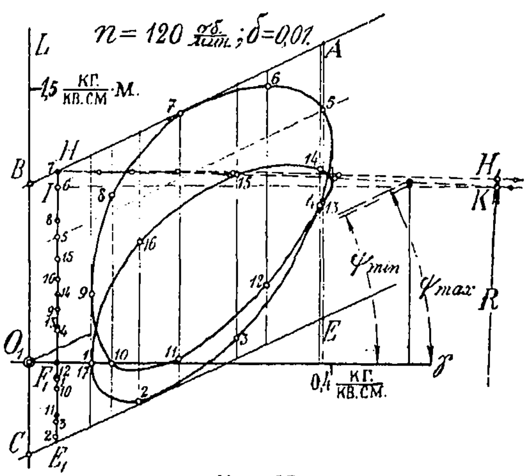
[1]) Для провѣрки правильности этого очень существеннаго построенія поступимъ такъ: возьмемъ какой-либо вѣсъ, напр. 0,5 кг./кв. см. и отложимъ его въ принятомъ масштабѣ по оси абсциссъ изъ начала O_1; затѣмъ вычислимъ кинетическія энергіи K_{max} и K_{min} этой массы, какъ если бы она была сосредоточена въ пальцѣ кривошипа и вращалась съ угловыми скоростями ω_{max} и ω_{min}

$$K_{max} = \frac{0{,}5}{9{,}81} \frac{r^2\omega^2_{max}}{2}\ ; \quad K_{min} = \frac{0{,}5}{9{,}81} \frac{r^2\omega^2_{min}}{2} \frac{\text{кг.}}{\text{кв. см.}} \text{ м., гдѣ } r \text{ въ метрахъ.}$$

Эти работы отложимъ, какъ ординаты въ принятомъ масштабѣ работъ; полученныя точки должны лежать на лучахъ, проведенныхъ изъ O_1 подъ углами ψ_{max} и ψ_{min} (чер. 12).

ведемъ посредствомъ угольника крайнія касательныя къ діаграммѣ массъ и работъ съ углами ψ_{max} и ψ_{min}, такъ, чтобы онѣ сходились къ неизвѣстному началу координатъ O, т. е. влѣво и внизъ. Пересѣченіе этихъ касательныхъ опредѣлитъ какъ точку O, такъ и искомый приведенный вѣсъ q_k или приведенную массу μ_k маховика. Затѣмъ по угламъ наклона лучей и ур. (9) могутъ быть опредѣлены и измѣненія угловой скорости ω.

13. Крупные масштабы. Измѣненія скорости. Среднія скорости. Для того, чтобы при помощи этого метода получить возможно болѣе точные результаты, діаграмму массъ и работъ надо чертить въ возможно болѣе крупномъ масштабѣ. Для коефиціентовъ неравномѣрности $^1/_3$ до $^1/_8$ можно построить всю діаграмму на чертежномъ листѣ въ достаточно крупномъ масштабѣ, для такихъ же коефиціентовъ неравномѣрности, какъ 0,01, чертежный листъ оказывается ужъ малымъ, либо приходится пользоваться мелкимъ масштабомъ. Кромѣ того пересѣченіе касательныхъ, уголъ между которыми очень малъ, не получается достаточно точно. Покажемъ, какъ пользоваться діаграммой В и т т е н б а у э р а при недоступномъ началѣ координатъ O, т. е. при черченіи въ крупномъ масштабѣ.



Чер. 12.

Пусть *чер. 12* изображаетъ ту же діаграмму массъ и работъ въ болѣе крупномъ масштабѣ, чѣмъ на *чер. 11*. Построивъ согласно сдѣланнымъ на стр. 53 указаніямъ касательныя съ углами ψ_{max} и ψ_{min}, по пытаемся вычислить абсциссу γ_k недоступной точки пересѣченія O этихъ касательныхъ. Для этого найдемъ точки пересѣченія касательныхъ съ осью ординатъ O_1 L въ точкахъ B и C.

Обращаясь къ *чер. 11* и ур. (9) мы видимъ, что

$$BD = \mu_k tg\psi_{max} \ ; \ CD = \mu_k tq\psi_{min};$$

вычитая, получаемъ

$$BC = BD - CD = L_o = \mu_k (tq\psi_{max} - tg\psi_{min}) = \frac{\mu_k r^2}{2} (\omega^2_{max} - \omega^2_{min}) = \mu_k r^2 \delta \omega_o^2,$$

откуда находимъ:

$$\mu_k = \frac{L_o}{\delta r^2 \omega_0^2} \ ; \ q_k = \frac{L_o g}{\delta r^2 \omega_0^2}.$$

Такъ, въ примѣрѣ на *чер.* 12 имѣемъ: $BC = L_0 = 1{,}51$ м. кг./кв. см.; для $\delta = 0{,}01$, $r = 0{,}5$ м. и 120 об./мин., находимъ $q_k = 37{,}4$ кг./кв. см.

Можно также найти пересѣченія касательныхъ съ двумя ординатами, напр. съ осью O_1L (отрѣзокъ L_0) и удаленною отъ нея на величину μ_a ординатой (отрѣзокъ L_a); тогда можно написать пропорцію

$$\frac{\mu_k + \mu_a}{\mu_k} = \frac{L_a}{L_0}, \text{ откуда } \mu_k = \mu_a \frac{L_0}{L_a - L_0} \ ;$$

этотъ способъ менѣе точенъ; вмѣсто отрѣзковъ на двухъ ординатахъ можно брать отрѣзки между точками пересѣченія крайнихъ лучей съ двумя абсциссами, разность ординатъ которыхъ равна L_1, и по нимъ вычислить K_1, а затѣмъ q_k.

Далѣе, для вычерчиванія діаграммы измѣненія скоростей намъ надо сумѣть черезъ каждую точку, напр. 5, діаграммы массъ и работъ (*чер.* 12) провести лучъ къ недоступному началу координатъ O. Проведемъ черезъ точку 5 ординату (или абсциссу, все равно) до пересѣченія съ касательными лучами въ точкахъ A и E; легко будетъ найти на какой-либо другой ординатѣ, напр. HE_1 такую точку 5, которая лежитъ на лучѣ 05, такъ какъ, очевидно, отрѣзки AE и HE_1 должны дѣлиться точками 5 въ одинаковомъ отношеніи, т. е.

$$\frac{A5}{H5} = \frac{E5}{E_15}.$$

Соединивъ точки 5 другъ съ другомъ имѣемъ требуемый лучъ. Производя подобныя построенія для всѣхъ точекъ діаграммы, имѣемъ всѣ данныя для сужденія о томъ, какъ измѣняются скорости ведущей точки механизма. Такъ, напр., на діаграммѣ *чер.* 12 видно, что отъ начальной точки 1 скорость сначала уменьшается, затѣмъ перейдя положеніе 2 увеличивается, достигая наибольшаго своего значенія не доходя положенія 7, затѣмъ снова уменьшается до 11, возрастаетъ до 15 и наконецъ возвращается къ первоначальному значенію 1.

Если необходимо построить діаграмму скоростей, то надо точно опредѣлить величину скорости въ каждомъ изъ положеній механизма. На *чер.* 11 это можно было бы сдѣлать слѣдующимъ образомъ: пусть ордината HF изображаетъ въ нѣкоторомъ масштабѣ, напр. 1 сек.$^{-1}$ = a см., наибольшую угловую скорость ω_{max}. Докажемъ, что для изображенія въ томъ же масштабѣ угловой скорости ω въ точкѣ I надо провести лучъ OI до пересѣченія съ HF; на HF, какъ діаметрѣ построить полуокружность и провести горизонталь IK; тогда FK и будетъ изображать величину ω.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\frac{r^2\omega^2}{2} = tq\psi = \frac{FI}{OF}, \text{ откуда } \omega = \sqrt{\frac{2FI}{r^2OF}} = c\sqrt{FI}$$

и точно также

$$\omega_{max} = c\sqrt{FH} \ ;$$

но съ другой стороны по условленному масштабу $\omega_{max} = a \,.\, FH$; исключая множитель c, получимъ:

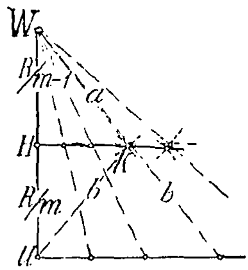
$$\omega = a\sqrt{FH.FI} = a.FK \,,$$

согласно построенію, предложенному Толле. При этомъ замѣтимъ что вмѣсто измѣренія длины FK мы можемъ также измѣрить уменьшеніе скорости $HF—FK$, для чего достаточно описать изъ F окружность радіусомъ HF; продоливъ FK до пересѣченія съ этой окружностью въ точкѣ H_1 или возставивъ перпендикуляръ H_1K къ H_1, будемъ имѣть $H_1K = HF—FK$

Теперь остается продѣлать всѣ описанныя построенія при недоступности точекъ O и F. Прежде всего найдемъ разстояніе FF_1 между двумя осями абсциссъ, для чего достаточно вычислить величину:

$$K_1 = \frac{\mu_1 r^2 \omega_1^2}{2},$$

причемъ величина μ_1 слагается изъ приведенной массы маховика и доли массы шатуна; ω_1 надо вычислить по положенію точки 1 на ординатѣ HF_1.



Чер. 13.

Какъ только полная длина ординаты HF извѣстна, такъ извѣстенъ и тотъ масштабъ, въ которомъ она изображаетъ угловую скорость ω_{max} (измѣняя разстояніе O_1F_1 не трудно подобрать такое положеніе ординаты HF_1, при которомъ масштабъ будетъ достаточно удобнымъ). Теперь намъ нужно при точкѣ H построить двѣ окружности радіусовъ $R = HF$ и $R_1 = {}^1/_2\, HF$ ортогональныя къ HF_1; (въ нашемъ примѣрѣ на оригиналѣ при масштабѣ 1 м. кг. / кв. см. = 4,8 см., $F_1F = 3{,}47$ м., а $R = 3{,}52$ м.). Построеніе (способъ Аполлонія) придется, конечно, дѣлать по точкамъ; для этого (*чер. 13*) отложимъ на HF_1 отрѣзки $HU = \frac{R}{m}$ и $HW = \frac{R}{m-1}$, гдѣ m какое угодно цѣлое число; затѣмъ построимъ какъ можно больше треугольниковъ WKU, стороны которыхъ удовлетворяютъ пропорціи

$$\frac{WK}{KU} = \frac{WH}{HU} \ ;$$

тогда геометрическое мѣсто точекъ K и будетъ окружность радіуса R; построеніе сторонъ, удовлетворяющихъ вышенаписанной пропорціи, облегчается двумя параллельными прямыми, проведенными черезъ точки H и U.

Примѣняя на *чер. 12* два раза построеніе Аполлонія, проводимъ черезъ точку H два круга радіусовъ $0{,}5HF$ и HF (будемъ дальше называть ихъ малымъ и большимъ кругами; вычерчиваніе ихъ начато, но не окончено). Проведя пучи изъ различныхъ точекъ діаграммы до пересѣченія съ ординатой HF, мы уже ранѣе получили на ней рядъ точекъ; теперь остается провести черезъ эти точки линіи, параллельныя оси абсциссъ до пересѣченія въ точкахъ K съ малымъ кругомъ; вмѣсто того, чтобы соединять K съ недоступной точкой F, соединимъ ее съ H и возставимъ въ K перпендикуляръ KH_1 къ HK до пересѣченія въ H_1 съ большимъ кругомъ; такъ какъ KH_1 есть продолженіе прямой KF, то отрѣзокъ этотъ и представляетъ собой разность $\omega_{max}-\omega$ въ томъ же масштабѣ, въ какомъ HF изображаетъ ω_{max}.

Однако (на *чер. 12*) ясно видно неудобство этого способа въ случаяхъ, когда ось абсциссъ значительно удалена, т. е. при очень равномѣрномъ вращеніи машины. Построеніе все-таки требуетъ значительныхъ размѣровъ чертежнаго листа, очень кропотливо, и, какъ при всякомъ оперированіи съ отрѣзками значительной длины для опредѣленія малыхъ величинъ, не дастъ большой степени точности. Поэтому лучше воспользоваться болѣе простымъ приближеннымъ методомъ, степень точности котораго поддается учету.

Разсмотримъ отрѣзки HI, полученные нами на ординатѣ HF. Такъ какъ (*чер. 11*)

$$\frac{HF}{OF}=tg\,\varphi_{max}=\frac{r^2\omega^2_{max}}{2},\ \text{а}\ \frac{IF}{OF}=\frac{r^2\omega^2}{2},$$

то

$$HI=\frac{OF\,.\,r^2}{2}(\omega^2_{max}-\omega^2)=k(\omega^2_{max}-\omega^2).$$

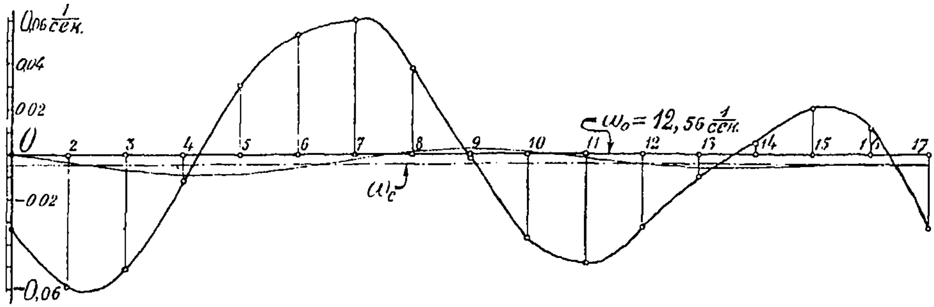
Можемъ положить $\omega=\omega_{max}(1-\xi)$, гдѣ ξ правильная дробь, наибольшее значеніе которой почти достигаетъ δ. Подставляя, имѣемъ $HI=k\omega^2_{max}(2\xi-\xi^2)$ или, пренебрегая очень малой величиной ξ^2 (наибольшее ея значеніе менѣе δ^2, межъ тѣмъ какъ 2ξ почти достигаетъ 2δ), можемъ приближенно считать

$$HI=2k\omega^2_{max}\xi=2k\omega_{max}(\omega_{max}-\omega),$$

т. е. съ точностью до δ^2 разсматриваемые отрѣзки изображаютъ мгновенныя разности угловыхъ скоростей въ томъ же масштабѣ, въ какомъ HE_1 (*чер. 12*) изображаетъ разность $\omega_{max}-\omega_{min}=\delta\omega_0$.

Для построенія діаграммы измѣненій угловой скорости можно слѣдовательно просто откладывать эти отрѣзки, что и сдѣлано *на чер. 14*.

По построенной діаграммѣ скоростей надо затѣмъ найти всѣ три среднія скорости машины; линія средней ариѳметической скорости ω_0 (ур. 1 на стр. 6) проведена на *чер. 14* (ось абсциссъ), какъ средняя линія между наибольшей и наименьшей скоростями. Средняя планиметрическая скорость (ур. 2 стр. 6) ω_c можетъ быть найдена планиметрированіемъ площади, ограниченной кривою измѣненій угловой скорости и произвольной осью абсциссъ и построеніемъ равновеликаго прямоугольника; легко убѣдиться подстановкой $\omega = \omega_a + \omega'$, что положеніе оси абсциссъ не вліяетъ на результатъ. Если планиметра нѣтъ подъ рукой, то можно примѣнить тотъ методъ графическаго интегрированія, который былъ описанъ въ п. 5 при построеніи діаграммы работъ пара. Для того, чтобы въ результатѣ прямо получить среднюю ординату, надо базу DO_1 взять равной угловому періоду Φ діаграммы; тогда, какъ легко доказать, на по-



Черт. 14.

Діаграмма измѣненій угловой скорости.

слѣдней ординатѣ интегральная кривая и отсѣчетъ среднюю высоту. На *чер. 14* болѣе тонкая кривая представляетъ такую интегральную кривую, причемъ за ось абсциссъ принята линія средней ариѳметической скорости ω_0.

Зато большія трудности представляетъ опредѣленіе дѣйствительной средней скорости ω_m, такъ какъ ω опредѣлено нами въ функціи угла поворота φ, а не времени t.

Въ п. 2 уже было найдено уравненіе (ур. 3 стр. 6) для опредѣленія ω_m, согласно которому требуется сначала построить кривую обратныхъ угловыхъ скоростей $\frac{1}{\omega}$ по кривой измѣненій ω. Толле (стр. 134) даетъ рядъ методовъ геометрическаго построенія величинъ $\frac{\omega_a^2}{\omega}$, гдѣ ω_a произвольно, но всѣ эти простыя построенія примѣнимы лишь въ случаѣ, когда ось абсциссъ доступна, т. е. когда коефиціентъ неравномѣрности великъ ($^1/_3$—$^1/_6$). Когда же разстояніе до оси абсциссъ, напр. въ 100 разъ больше, чѣмъ наибольшее измѣненіе скорости ($\delta = 0,01$), то методы эти не примѣнимы, такъ какъ требуютъ малаго масштаба и не даютъ достаточной степени точности. Найдемъ ω_m приближенно.

Подставляя $\omega = \omega_o (1 + \xi)$, гдѣ ξ относительное измѣненіе скорости, наибольшая величина котораго равна $^1/_2\, \delta$, разлагая $(1+\xi)^{-1}$ въ строку Ньютона и, ограничиваясь двумя членами разложенія, можемъ найти приближенно

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega_o} - \frac{\xi}{\omega_o} \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_o} - \frac{1}{\omega_o} \int\limits_0^{2\pi} \xi d\varphi.$$

Послѣдній интегралъ нами уже найденъ при опредѣленіи средней планиметрической скорости ω_c, именно можемъ написать:

$$2\pi\omega_c = 2\pi\omega_o + \omega_o \int\limits_0^{2\pi} \xi d\varphi, \quad \text{т. е.} \int\limits_0^{2\pi} \xi d\varphi = 2\pi \; \frac{\omega_c - \omega_o}{\omega_o}.$$

Подставляя, находимъ

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\omega} = T = \frac{2\pi}{\omega_m} = \frac{2\pi}{\omega_o} - 2\pi \, \frac{\omega_c - \omega_o}{\omega_o^2} = 2\pi \, \frac{2\omega_o - \omega_c}{\omega_o^2}$$

откуда

$$\omega_m = \frac{\omega_o^2}{2\omega_o - \omega_c}.$$

Однако самая кривая ω построена приближенно и, слѣдовательно, мы производили приближенныя дѣйствія надъ неточной величиной, отъ чего ошибки могутъ и уменьшаться, и увеличиваться. Поэтому дадимъ еще одинъ приближенный методъ, базирующійся непосредственно на діаграммѣ массъ и работъ *чер. 12*. Мы уже знаемъ, что

$$\omega^2 = \frac{2}{r^2}\, tg\psi \quad , \quad \text{откуда} \; \frac{1}{\omega^2} = \frac{r^2}{2} \, . \, ctg\psi.$$

Эти котангенсы строятся по діаграммѣ *чер. 12* такимъ же образомъ, какъ раньше строились тангенсы, только вмѣсто ординаты BC надо провести какую либо абсциссу и найти точки пересѣченія съ нею всѣхъ лучей. Разстоянія этихъ точекъ пересѣченія отъ луча, соотвѣтствующаго $ctg\psi_{min}$ можно откладывать, какъ $\frac{1}{\omega_{min}} - \frac{1}{\omega}$, ибо полагая $\omega = \omega_{min}\ (1 - \eta)$, найдемъ

$$\frac{r^2}{2} ctg\psi = \frac{1}{\omega_{min}^2(1-\eta)^2} = \frac{1}{\omega_{min}^2} + \frac{2\eta}{\omega_{min}^2};$$

высшими степенями малой величины η пренебрегаемъ.

Построивши такимъ образомъ приближенную діаграмму обратныхъ скоростей, пропланиметрируемъ ее и найдемъ ω_m.

14. Выводы. Какія общія заключенія относительно равномѣрности вращенія машинъ можно сдѣлать при помощи діаграммы массъ и работъ? Прежде всего мы видимъ, что діаграмма эта имѣетъ одинъ и тотъ же видъ для всѣхъ машинъ съ данной индикаторной діаграммой и съ даннымъ распредѣленіемъ массъ. Такъ напр., построенная нами діаграмма массъ и работъ (*чер. 12*) сохраняетъ одинъ и тотъ же видъ для всѣхъ машинъ съ наполненіемъ на одной трети хода поршня и съ взятымъ наклономъ оси цилиндра къ горизонту, если не измѣняется отношеніе длины радіуса кривошипа къ длинѣ шатуна, а также вѣсъ поршня и шатуна, приходящіеся на 1 кв. см. площ. поршня. Если давленіе пара будетъ не 7 кг./кв. см., какъ было принято, а иное, или ходъ будетъ не 1 м., а иной, то правильнымъ измѣненіемъ масштаба работъ можно быстро получить всѣ необходимыя данныя для построенія новой діаграммы; въ случаѣ же если работа силъ тяжести не принимается во вниманіе, можно пользоваться одною и тою же діаграммою массъ и работъ для всѣхъ давленій пара и данной отсѣчки, лишь измѣняя масштабъ ординатъ. Такимъ образомъ, діаграмма массъ и работъ позволяетъ быстро исчерпать всѣ практически интересныя комбинаціи основныхъ данныхъ и изучить ихъ вліяніе на неравномѣрность вращенія машины.

Особенно большое значеніе имѣетъ тотъ фактъ, что діаграмма массъ и работъ имѣетъ одинъ и тотъ же видъ для машинъ, имѣющихъ различное среднее число оборотовъ. Это позволяетъ быстро подобрать наивыгоднѣйшее, въ смыслѣ уменьшенія вѣса махового колеса, среднее число оборотовъ машины. Такъ, діаграмма, изображенная на *чер. 12*, имѣетъ овальную форму; увеличивая среднее число оборотовъ машины, мы будемъ получать уменьшающіеся отрѣзки L_0, опредѣляющіе вѣсъ маховика; кромѣ того увеличеніе ω_0 само по себѣ уменьшаетъ необходимый вѣсъ и, слѣдовательно, нѣсколько попытокъ опредѣлятъ ту среднюю скорость, при которой этотъ вѣсъ оказывается наименьшимъ [1]). Въ отдѣлѣ II этотъ вопросъ будетъ освѣщенъ аналитически съ другой точки зрѣнія.

Намѣченную только что, очень важную задачу регулированія

---

[1]) Въ книгѣ Толле (Die Regelung и т. д. стр. 131) вопросъ о наивыгоднѣйшей скорости освѣщенъ неправильно; не принято во вниманіе, что средняя скорость вліяетъ не только на L_0, но и на кинетическую энергію маховика, какъ это явствуетъ изъ уравненія для q_k на стр. 37.

машинъ, будетъ однако правильнѣе поставить нѣсколько иначе. Очень часто можетъ случиться, что найденная наивыгоднѣйшая скорость неудобна для практическаго осуществленія—слишкомъ низка или высока по сравненію съ тою, которая является наиболѣе удобною для выполненія требуемаго преобразованія энергіи; если напр. она слишкомъ низка, а двигатель вращаетъ динамо-машину, то вѣсъ, а слѣдовательно и цѣна, и амортизація этой динамо-машины могутъ оказаться невыгодными; если же она слишкомъ высока, а рабочая машина тихоходна, то потребуется лишняя промежуточная передача, что также удорожитъ установку. Въ такихъ случаяхъ надо считать среднюю скорость вращенія машины заданной и не подлежащей измѣненію; для осуществленія наивыгоднѣйшихъ соотношеній измѣняемымъ элементомъ тогда можно считать вѣсъ возвратно движущихся частей машины.

При такой постановкѣ вопроса намъ надо будетъ найти наивыгоднѣйшій вѣсъ возвратно движущихся частей машины (поршня и шатуна). Поставленную такъ задачу можно рѣшать попытками при помощи діаграммы массъ и работъ; для этого надо было бы, не перечерчивая діаграммы, измѣнять масштабъ массъ; каждому масштабу, какъ мы уже видѣли, будетъ соотвѣтствовать свой уголъ наклона луча средней, наибольшей и наименьшей скорости и вся задача сводится къ тому, чтобы отрѣзокъ L_0 оказался наименьшимъ. Въ отдѣлѣ II мы познакомимся съ общимъ аналитическимъ методомъ рѣшенія подобныхъ задачъ.

15. Діаграмма потенціальныхъ и кинетическихъ энергій. Мы уже неоднократно отмѣчали тѣ трудности, которыя возникаютъ при пользованіи діаграммой массъ и работъ въ случаѣ, когда машина ходитъ очень равномѣрно ($\delta < 0{,}02$). Недоступность оси абсциссъ и начала координатъ чрезвычайно затрудняетъ построеніе кривой угловыхъ скоростей и приводитъ въ концѣ концовъ къ приближенному построенію, а это заставляетъ подумать о томъ, нельзя-ли быстрѣе получить тотъ же приближенный результатъ. Взглянувъ на діаграмму массъ и работъ (*чер. 12*), мы прежде всего замѣчаемъ, какъ ничтожна разница между наклонами крайнихъ лучей; можно быть увѣреннымъ, что принявъ средній наклонъ, соотвѣтствующій средней ариѳметической угловой скорости ω_0, мы сдѣлаемъ относительную ошибку, наибольшая величина которой менѣе или равна δ. Между тѣмъ ужъ одно пренебреженіе силами тренія влечетъ за собой примѣрно такія же или большія ошибки. Кромѣ того, въ отношеніи расчета приведеннаго вѣса маховика, эта замѣна поведетъ къ небольшому его увеличенію, т. е. къ нѣкоторому запасу, такъ какъ отрѣзокъ L_0 получится нѣсколько больше; по сравненію съ тѣми грубыми приближеніями, которыя обыкновенно дѣлаются въ учетѣ приведенныхъ массъ ручекъ колеса, эта небольшая погрѣшность можетъ считаться ничтожной.

Разсуждая такимъ образомъ, мы можемъ утверждать, что мы сдѣлаемъ ничтожную ошибку, если въ выраженіи для мгновенной кинетической энергіи K всего механизма будемъ умножать приведенный вѣсъ маховика q_k на квадратъ мгновенной скорости ω, а приведенную массу поршня и шатуна μ на квадратъ средней скорости ω_0. Благодаря этому мы будемъ знать приближенную величину кинетической энергіи возвратно движущихся массъ для каждаго положенія. Если попрежнему K_1 обозначаетъ полную кинетическую энергію машины въ начальный моментъ (напр. въ мертвой точкѣ), то примѣненіе закона живой силы дастъ намъ:

$$L = K - K_1 = \frac{q_k\, r^2}{2g}\,(\omega^2 - \omega_1{}^2) + (\mu - \mu_1)\frac{r^2\omega^2{}_0}{2}, \quad . \; . \; . \; (10)$$

гдѣ L мгновенная разность работъ силъ движущихъ и сопротивленій вычерченная на *чер. 5.*

Полученное нами уравненіе показываетъ, что избыточная работа L внѣшнихъ силъ въ машинѣ расходуется съ одной стороны на измѣненіе кинетической энергіи маховика, которое мы для краткости обозначимъ одной буквой K_k, съ другой стороны на измѣненіе кинетической энергіи остальныхъ звеньевъ машины, которое мы обозначимъ буквою K'. Первое слагаемое K_k является неизвѣстнымъ нашей задачи, величину же K' мы должны сумѣть найти для каждаго φ хотя бы приближенно.

Приведенную массу шатуна можемъ при этомъ опредѣлять также приближенно, разнеся q_2 согласно выводамъ, сдѣланнымъ въ примѣчаніи къ стр. 32 и пренебрегая массой, сосредоточенной въ пальцѣ кривошипа, а массу, сосредоточенную въ пальцѣ ползуна (приблизительно $0{,}45 q_2$), прибавляя къ массѣ поршня q_3. Пусть q'_3 обозначаетъ этотъ вѣсъ возвратно движущихся частей, приходящійся на 1 кв. см. площади поршня и сосредоточенный въ пальцѣ ползуна.

Опредѣленіе кинетической энергіи

$$K' = \frac{\mu\omega_0{}^2}{2} = \frac{q_3{}' r^2 \omega_0{}^2}{2g} \cdot \left(\frac{Ob'}{OA}\right)^2$$

можно производить, либо опредѣляя μ, либо построивъ правую часть равенства. Такъ какъ послѣднее проще, то опишемъ это построеніе. Прежде всего вычислимъ величину

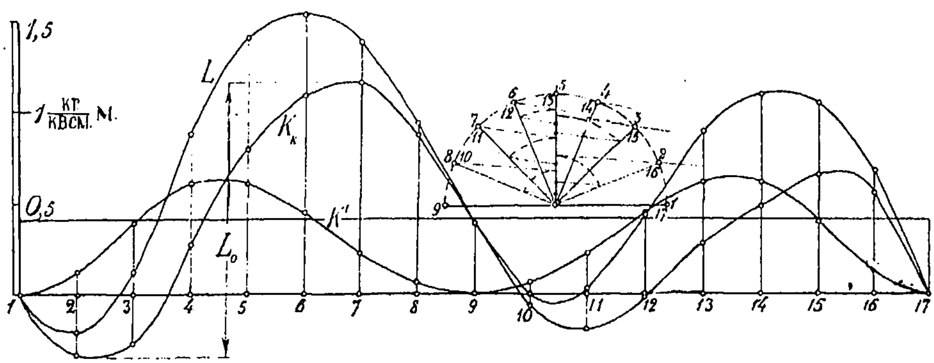
$$K_0 = \frac{q_3{}' r^2 \omega_0{}^2}{2g} \; \frac{\text{кг}}{\text{кв.см.}} \; \text{м.},$$

выражающую собою кинетическую энергію поршня и доли шатуна, если бы они были сосредоточены въ пальцѣ кривошипа; изобразивъ величину K_0 отрѣзкомъ въ томъ же масштабѣ, въ какомъ построена діаграмма работъ, проведемъ окружность радіуса K_0 и построимъ K такимъ-же образомъ, какъ на *чер. 8* строилась приведенная масса ползуна.

Возьмемъ (*чер. 15*) ось абсциссъ съ 16 равными отрѣзками, соотвѣтствующими 16 положеніямъ кривошипа, и перенесемъ съ *чер. 5* діаграмму работъ L. Затѣмъ, придавъ ур. (10) видъ:

$$K_k = \frac{q_k}{2g} r^2 (\omega^2 - \omega_1{}^2) = L - K',$$

видимъ, что отъ величины избыточной работы L надо отнять кинетическую энергію K' возвратно-движущихся массъ (въ начальный моментъ въ мертвой точкѣ $K' = 0$), чтобы получить ту кинетическую энергію, которую воспринялъ или отдалъ машинѣ маховикъ. Такъ какъ величина K



Чер. 15.

Діаграмма потенціальныхъ и кинетическихъ энергій.

всегда положительна, то откладывая ее отъ точекъ діаграммы L внизъ, получимъ діаграмму измѣненій кинетической энергіи K_k махового колеса. На этой діаграммѣ сразу видна наибольшая и наименьшая величина функціи K_k; а такъ какъ единственная перемѣнная величина, входящая въ эту функцію есть мгновенная угловая скорость ω, то можемъ написать:

$$K_{k\ max} = \frac{q_k}{2g} r^2 (\omega^2_{max} - \omega_1{}^2)\,; K_{k\ min} = \frac{q_k}{2g} r^2 (\omega^2_{min} - \omega_1{}^2)\,.$$

Вычитая одно изъ другого, имѣемъ:

$$L_0 = K_{k\ max} - K_{k\ min} = \frac{q_k\, r^2}{2g} (\omega^2_{max} - \omega^2_{min}) = \frac{q_k\, r^2}{g} \delta\, \omega_0{}^2\,,$$

откуда опредѣляемъ приведенный вѣсъ маховика q_k, обезпечивающій требуемую неравномѣрность машины δ:

$$q_k = \frac{L_0\, g}{\delta\, r^2\, \omega_0{}^2}\,.$$

Этотъ приближенный способъ расчета удобенъ въ томъ отношеніи, что попутно мы уже построили приближенную діаграмму угловыхъ скоростей машины, такъ какъ ординаты кривой K_k пропорціональны разности квадратовъ угловыхъ скоростей. Если коефиціентъ неравномѣрности δ достаточно малъ, то примѣнивъ всѣ тѣ разсужденія, которыя были изложены на стр. 40, мы можемъ съ большой степенью точности измѣненія квадратовъ угловой скорости считать пропорціональными измѣненіямъ самой угловой скорости; затѣмъ вычислимъ наибольшую и наименьшую угловыя скорости по коефиціенту неравномѣрности и средней ариѳметической скорости. А разъ мы знаемъ абсолютное значеніе угловой скорости въ наивысшей и наинизшей точкѣ діаграммы, то тѣмъ самымъ мы знаемъ и масштабъ кривой скоростей.

Сравнивая діаграммы угловыхъ скоростей *чер. 14* съ діаграммой K_k на *чер. 15*, мы обнаружимъ только разницу въ масштабахъ. Расчетъ приведеннаго вѣса маховика по *чер. 15* даетъ при $L_0 = 1{,}52$ величину $q_k = 37{,}8$ кг./кв.см.

Болѣе подробно этотъ приближенный способъ изложенъ въ литографированной брошюрѣ: Л. В. Ассуръ и К. Э. Рерихъ. Опредѣленіе момента инерціи махового колеса. Изданіе Кассы Взаимопомощи студ. Пгд. Политехническаго Института; статья II.

ГЛАВА II.

Примѣненіе принципа Д'Аламбера.

16. Историческія замѣчанія. Наиболѣе распространеннымъ въ настоящее время методомъ расчета вѣса обода махового колеса является построеніе діаграммы касательныхъ усилій, вращающихъ маховикъ. Профессору Морену [1]) принадлежитъ заслуга разработки этого простого, хотя и приближеннаго способа, быстро получившаго распространеніе, но на много лѣтъ задержавшаго развитіе теоретической динамики машинъ. Вопросъ о вліяніи возвратно движущихся массъ на равномѣрность вращенія машинъ, въ то время только начинавшій развиваться по совершенно правильному пути, указанному Коріолисомъ и Понселе [2]), былъ отрубленъ и надолго похороненъ Мореномъ; его методъ можно было бы назвать на половину статическимъ, такъ какъ вліяніе массъ возвратно движущихся частей совершенно не принималось имъ во вниманіе.

Самая идея построенія діаграммы касательныхъ усилій была не нова и впервые была встрѣчена нами въ уже упомянутомъ мемуарѣ Коріолиса (1832); Моренъ лишь упростилъ примѣненіе этой діаграммы къ расчету вѣса обода маховика, отбросивъ динамическую часть работы Коріолиса.

Зато Моренъ первый указалъ на вліяніе конечности длины шатуна, доказавъ на частномъ примѣрѣ, что чѣмъ короче шатунъ, тѣмъ тяжелѣе долженъ быть маховикъ. Такъ, напр., если въ машинѣ безъ расширенія принять длину шатуна сначала безконечной, затѣмъ равной шести, пяти и наконецъ четыремъ длинамъ кривошипа, то необходимыя для достиженія одинаковой степени равномѣрности вѣса ободовъ маховыхъ колесъ при прочихъ тождественныхъ условіяхъ должны относиться между собой, какъ $1:1{,}13:1{,}19:1{,}25$. Такимъ образомъ допущеніе безконечной длины шатуна ведетъ къ ошибкѣ до 25%, которая еще увеличивается въ случаѣ машины съ расширеніемъ. Этимъ было подорвано значеніе формулы Навье-Уатта [3]).

---

[1]) Morin Arthur, Etudes sur les machines à vapeur et recherches sur le moment d'inertie qu'il convient de donner au volant des divers systèmes des machines à vapeur. Comptes rendus de l'academie des sciences томъ XVII за 1843 г. 2 семестръ стр. 857—9; въ этой коротенькой замѣткѣ излагаются въ немногихъ словахъ лишь общіе результаты. Подробное изложеніе см. *Morin*, Leçons de mècanique pratique à l'usage des auditeurs etc. Часть 3. Парижъ 1846 стр. 312—368.

[2]) Мемуаръ Коріолиса, напечатанный въ 1832 г, и курсъ Понселе (1845 г,) уже цитировались въ предыдущей главѣ.

[3]) Какъ ужъ было указано въ основу теоріи Навье (Belidor Architecture hydraulique. Anotèè par M. Navier. Парижъ 1819) положены допущенія безконечной длины шатуна и постоянства давленія пара на поршень.

Если во времена Морена, когда машины были тихоходны, и средняя скорость поршня едва достигала 1 м/сек., еще можно было пренебрегать массой возвратно движущихся частей машины, то это становилось совершенно недопустимымъ во второй половинѣ 19 вѣка, когда стали строить все болѣе и болѣе быстроходныя машины, въ которыхъ средняя скорость поршня достигала 7 м/сек. Такъ какъ изслѣдованія Коріолиса и Понселе, не доведенныя до конца, уже были позабыты, то Портеромъ и Радингеромъ [1]) былъ придуманъ коррективъ къ методу Морена, именно было предложено принимать во вниманіе кромѣ силъ давленія пара на поршень еще и силы инерціи возвратно движущихся частей механизма. Принципъ Д'Аламбера позволялъ примѣнять законы статики и къ быстроходной машинѣ.

Однако съ принципіальной точки зрѣнія вопросъ вовсе не такъ простъ, какъ это кажется: мгновенная величина силы инерціи зависитъ не только отъ разсматриваемаго положенія механизма, но также и отъ мгновенной величины угловой скорости кривошипа; она пропорціональна квадрату угловой скорости.

Кромѣ того, какъ ни малы въ нѣкоторыхъ случаяхъ угловыя ускоренія кривошипа, они все-таки существуютъ и тоже вліяютъ на величину ускоренія, а слѣдовательно и на силу инерціи поршня. Такимъ образомъ, примѣненіе принципа Д'Аламбера приводитъ насъ къ заколдованному кругу. Портеръ и Радингеръ очень просто разрубили его, пренебрегши измѣненіемъ силъ инерціи отъ измѣненія мгновенной скорости машины и мгновеннаго ея ускоренія, т. е. предполагая при опредѣленіи силъ инерціи возвратно движущихся массъ, что машина вращается совершенно равномѣрно.

На основаніи всего изложеннаго въ предыдущей главѣ, мы можемъ утверждать, что такое пренебреженіе допустимо только для ма-

---

[1]) Radinger, Ueber Dampfmaschinen mit grosser Kolbengeschwindigkeit. Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-und-Architectenvereines, т. XXI за 1869 г. Позднѣе издано книгой подъ названіемъ „Ueber Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit", второе изданіе, Вѣна 1872; имѣется скверный русскій переводъ съ 3 изд. Спб. 1895. Въ литературѣ часто встрѣчается преувеличенное мнѣніе о значеніи работы Радингера въ динамикѣ машинъ (напр. Heun, Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik. стр. 53). На самомъ же дѣлѣ Радингеру оставалось только развить и примѣнить къ изслѣдованію равномѣрности вращенія машинъ то, что значительно ранѣе его было сдѣлано французскими и англійскими учеными въ вопросѣ объ уравновѣшиваніи силъ инерціи поршня и шатуна паровозныхъ машинъ посредствомъ противовѣсовъ.

Работа Lechatelier, Ètudes sur la stabilitè des machines locomotives en mouvement, Парижъ 1849, содержитъ уже всѣ основы ученія о силахъ инерціи частей кривошипнаго механизма въ элементарномъ изложеніи. Мемуаръ Villarceau, Thèorie de la stabilitè des machines locomotives en mouvement, Парижъ 1852 заключаетъ самое подробное изслѣдованіе силъ инерціи поршня и шатуна и цѣнна, какъ первое приложеніе закона движенія центра инерціи и закона моментовъ количествъ движенія къ машинамъ, повторенное впослѣдствіи Лоренцомъ.

Точно также и въ вопросѣ о вліяніи силъ инерціи возвратно движущихся массъ на неравномѣрность вращенія машинъ, Радингеръ вовсе не шелъ самостоятельной, новой дорогой, а лишь развилъ и популяризировалъ мысли и идеи знаменитаго англійскаго инженера Портера, конструктора быстроходной машины Аллена. Графическія изображенія силъ инерціи возвратно движущихся массъ при равномѣрномъ вращеніи кривошипа, діаграмма давленій, передаваемыхъ шатуну, за вычетомъ силъ инерціи возвратно движущихся массъ, всѣ эти основныя новыя идеи принадлежатъ Портеру, (Institution of mechanical engineers, Proceedings, 1858 стр. 50—80 Charles Porter. „On the Allen engine and governor"; извлеченіе напечатано въ Engineering за 1868 г. т. V, стр. 159, 184).

шинъ съ малымъ коефиціентомъ неравномѣрности δ. Чѣмъ больше δ, тѣмъ больше ошибка.

Чрезвычайно грубой ошибкой Радингера было то, что возвратно движущейся массой онъ считалъ сумму массы кривошипа, отнесенной къ его пальцу, шатуна и системы ползуна (поршень, скалка, крестовина). Поправки къ этому методу были даны прежде всего проф. Дженкиномъ [1]), давшимъ свой способъ графическаго изображенія силъ инерціи шатуна въ работѣ, главной цѣлью которой является графическое опредѣленіе коефиціента полезнаго дѣйствія различныхъ механизмовъ при помощи круговъ тренія.

Болѣе простой способъ опредѣленія касательнаго усилія, вызываемаго силой инерціи шатуна, былъ данъ проф. Моллье [2]), опять таки съ неизбѣжнымъ допущеніемъ, что кривошипъ вращается вполнѣ равномѣрно. Основываясь на работѣ Моллье, Энсслинъ [3]) приходитъ къ выводу, что при обычныхъ соотношеніяхъ вѣса, положенія центра тяжести и величины момента инерціи шатуна, вліяніе его силы инерціи на діаграмму касательныхъ силъ можетъ быть съ достаточною степенью точности выражено сосредоточеніемъ въ пальцѣ ползуна опредѣленной доли его вѣса,

Постановка задачи. Для того, чтобы связать способъ, изложенный въ предыдущей главѣ и основанный на законѣ живыхъ силъ, съ методомъ Портера-Радингера, воспользуемся второй формой уравненія Лангранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dK}{d\omega}\right)-\frac{dK}{d\varphi}=\frac{dL}{d\varphi},$$

причемъ обозначенія прежнія, т. е. K — кинетическая энергія машины, являющаяся, какъ мы видѣли въ главѣ I. функціей угла поворота φ съ одной стороны и угловой скорости ω главнаго звена (кривошипа) съ другой; L — разность работъ силъ движущихъ и сопротивленій, являющаяся при заданной нагрузкѣ и установившемся движеніи машины функціей только угла φ.

Такъ какъ

$$K=\frac{\mu r^2\omega^2}{2},$$

гдѣ μ — приведенная масса, а r — радіусъ кривошипа, то послѣ выполненія дифференцированій будемъ имѣть:

---

[1]) F Jenkin, On the application of graphic methods to the determination of the efficiency of machinery. Transactions of the Royal Society of Edinburgh, томъ XXVIII за 1876—8 годы, часть I стр. 1—32, часть II стр. 703—15. Кривошипный механизмъ разсмотрѣнъ во второй части, а силы инерціи шатуна въ прибавленіи, написанномъ его ассистентомъ Ewing'омъ. Этотъ способъ изображенія силъ инерціи шатуна принятъ и въ курсѣ Д. С. Зернова, Прикладная Механика, часть II, СПБ. 1908 г. стр. 87—90.

[2]) Mollier, Der Beschleunigungsdruck der Schubstange. Z. d. V. d. I, 1903 стр. 1638—40.

[3]) Ensslin, Die Trägheitskräfte einer Schubstange Dingl. P. Journal. за 1907 г. стр. 610—12.

$$\mu r^2 \frac{d\omega}{dt} + r^2\omega^2 \frac{d\mu}{d\varphi} - \frac{r^2\omega^2}{2}\frac{d\mu}{d\varphi} = \frac{dL}{d\varphi},$$

или

$$\mu r^2 \frac{d\omega}{dt} = \frac{dL}{d\varphi} - \frac{r^2\omega^2}{2}\frac{d\mu}{d\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Каждый изъ членовъ этого уравненія имѣетъ свое реальное значеніе, для выясненія котораго составимъ подобное же уравненіе, пользуясь исключительно принципомъ Д а л а м б е р а. Можемъ даже обобщить задачу, представивъ себѣ какой-угодно сложный механизмъ съ одной степенью свободы, а не простой кривошипный.

Для опредѣленія движенія этого механизма при помощи принципа Даламбера, намъ должны быть даны всѣ внѣшнія силы, дѣйствующія на его звенья, а также массы всѣхъ звеньевъ. Вмѣсто того, чтобы представлять себѣ движеніе всѣхъ матеріальныхъ точекъ сложнаго механизма, мы, какъ и въ предыдущей главѣ, будемъ изучать движеніе только одной, в е д у щ е й т о ч к и, причемъ должны знать, конечно, всѣ силы, какъ внѣшнія, такъ и силы инерціи, приведенныя къ этой ведущей точкѣ; тогда по принципу Д а л а м б е р а въ каждый моментъ должно быть равновѣсіе между силами внѣшними и силами инерціи.

Такимъ образомъ, поставленная задача разбивается на слѣдующія: 1) Каждую внѣшнюю силу, приложенную къ какому-либо звену механизма, надо замѣнить *приведенной касательной силой*, т. е. равнодѣйствующею, приложенною къ ведущей точкѣ и направленною по касательной къ пути ведущей точки, либо по направленію движенія (положительная или движущая приведенная сила), либо (отрицательная сила, сопротивленіе) противъ направленія движенія ведущей точки; 2) для каждаго звена изобразить величину, линію дѣйствія и направленіе силы его инерціи и также замѣнить ее приведенной къ ведущей точкѣ *касательной силой инерціи*.

17. Приведенная сила. Принципъ виртуальныхъ скоростей. Переходя къ первой задачѣ, — приведенію всѣхъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ въ машинѣ, къ ведущей точкѣ, — мы должны прежде всего остановиться на выборѣ какого-либо общаго метода ея рѣшенія. При этомъ намъ надо имѣть въ виду, что кромѣ внѣшнихъ силъ намъ впослѣдствіи придется приводить къ ведущей точкѣ и силы инерціи. Обычно стараются примѣнить простыя теоремы статики сооруженій, основанныя на построеніи многоугольника силъ (такъ наз. діаграмма К р е м о н а). Однако методъ этотъ даетъ простыя рѣшенія лишь для простыхъ механизмовъ; сложные механизмы уподобляются при этомъ многоопорнымъ фермамъ, и если они содержатъ стержни съ тремя шарнирами, то рѣшеніе дѣлается довольно сложнымъ.

Методъ, основанный на теоремѣ А р о н г о л ь д а - К е н н е д и и требующій предварительнаго построенія всѣхъ мгновенныхъ центровъ механизма для каждаго изъ его положеній, неудобенъ какъ потому, что эти предварительныя построенія громоздки, такъ и потому, что приходится приводить силы, приложенныя къ каждому звену, въ огдѣльности.

Наиболѣе удобнымъ для сложныхъ механизмовъ и большого числа силъ намъ кажется методъ, основанный на примѣненіи принципа возможныхъ перемѣщеній. Какъ подготовительная операція, для него требуется построеніе многоугольника скоростей, съ которымъ мы ужъ знакомы изъ п. 8. Можно считать это предварительное построеніе уже выполненнымъ; оно вообще неизбѣжно при каждомъ кинематическомъ и динамическомъ изслѣдованіи механизма. Покажемъ, какъ имъ пользоваться при рѣшеніи задачъ Статики механизмовъ.

Будемъ называть *приведенной силой* къ данному звена механизма такую, работа которой на безконечно-маломъ перемѣщеніи звена, допускаемомъ связями, равна суммѣ работъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на механизмъ. На основаніи принципа возможныхъ перемѣщеній можемъ утверждать, что сила, равная по величинѣ приведенной, но направленная въ прямо противоположную сторону, будетъ уравновѣшивать данную систему силъ. Если не принимать во вниманіе треній въ сочлененіяхъ, т. е. считать связи идеальными, то можемъ брать не всѣ, а только внѣшнія силы, такъ какъ работа реакцій въ сочлененіяхъ будетъ равна нулю.

Пусть P_a приведенная касательная сила, $P_1 P_2 \dots P_i \dots P_n$ заданныя силы, а ds_1, $ds_2 \dots ds_i \dots ds_n \dots$ одновременныя перемѣщенія точекъ ихъ приложенія, соотвѣтствующія перемѣщенію ds_a точки приведенія; тогда элементарная работа будетъ равна:

$$dL = P_a ds_a = \Sigma P_i \, ds_i \cos (P_i , v_i),$$

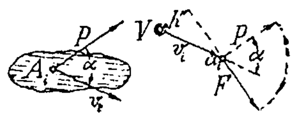
гдѣ v_i направленіе скорости точки приложенія силы P_i . Графическія дѣйствія надъ безконечно малыми перемѣщеніями неудобны, поэтому раздѣлимъ все уравненіе на время dt, въ теченіе котораго произошли перемѣщенія, получимъ вмѣсто перемѣщеній мгновенныя скорости точекъ приложенія:

$$P_a v_a = \Sigma P_i \, v_i \cos (P_i , v_i).$$

Наше дѣленіе на dt не есть только алгебраическое дѣйствіе, оно имѣетъ и реальное значеніе — мы переходимъ отъ элементарныхъ работъ къ воображаемымъ секунднымъ работамъ всѣхъ силъ, т. е. къ ихъ мощностямъ. Будемъ называть мгновенной мощностью какой-либо силы произведеніе величины силы на величину *скорости точки ея приложенія и на косинусъ угла между ними*, положительное, если этотъ уголъ острый, отрицательное, если онъ тупой. Тогда можемъ кратко выразить выведенное уравненіе слѣдующими словами: *мгновенная мощность приведенной силы равна суммѣ мгновенныхъ мощностей заданныхъ силъ.*

На многоугольникѣ скоростей каждой точкѣ механизма соотвѣтствуетъ своя *изображающая точка*, разстояніе которой отъ начала этого многоугольника изображаетъ скорость данной точки механизма; построивъ многоугольникъ скоростей, мы будемъ знать величину и направленіе скорости точки приложенія каждой силы и вопросъ о приведеніи силъ сводится, слѣдовательно, къ вопросу о вычисленіи ряда произведеній векторовъ. Однако мы постараемся избѣжать всякихъ вычисленій и сведемъ вопросъ къ графическимъ построеніямъ. Для этого докажемъ прежде всего, что *мощность силы равна моменту* [1] *этой силы, повернутой на 90° и приложенной къ изображающей точкѣ многоугольника скоростей, относительно его начала.* V_i

Для доказательства вообразимъ, A_i есть точка приложенія силы P (*чер. 16*), причемъ скорость ея $v_i = Va_i$ извѣстна по многоугольнику скоростей. Приложимъ къ точкѣ a_i силу $F = P$, повернувъ ее на 90° по часовой стрѣлкѣ, и найдемъ моментъ ея $M = Fh$. Легко видѣть, что $h = v_i \sin(90 - \alpha) = v_i \cos\alpha$, откуда $M = P_i v_i \cos\alpha$, а этой же величинѣ равна мощность силы P, что и требовалось доказать. Очевидно, вмѣсто того чтобы поворачивать силы, можно многоугольникъ скоростей чертить повернутымъ на 90° противъ часовой стрѣлки, какъ это предложено проф. Н. Е. *Жуковскимъ*, а силы прикладывать въ изображающихъ точкахъ безъ поворота.



Чер. 16.

При помощи только что доказанной теоремы мы не только пришли отъ мало знакомаго понятія о мощности силы къ прекрасно изучен-

---

[1] Теорема эта впервые встрѣчена нами въ статьѣ *Прёлля* (Pröll, Begründung graphischer Methoden zur Lösung dynamischer Probleme, Civilingenieur за 1873 годъ, стр. 124—127), который откладываетъ отъ нѣкотораго полюса скорости точекъ приложенія силъ повернутыми на 90° и къ концамъ ихъ прикладываетъ силы параллельно линіи ихъ дѣйствія. Значительное развитіе этотъ методъ получилъ въ чрезвычайно интересномъ мемуарѣ проф. Н. Е. *Жуковскаго*, Сведеніе динамическихъ задачъ о кинематической цѣпи къ задачамъ о рычагѣ (Математическій Сборникъ, томъ 28. Сообщ. 16 Дек. 1908 г., стр. 71—119), обогатившемъ Динамику Машинъ нѣсколькими новыми чрезвычайно цѣнными теоремами. См. также проф. В. Л. *Кирпичевъ*. Графическая Статина, изд. 3-е, Петроградъ. 1914 г., стр. 253—259. Во время доказательства мы придерживались метода проф. Д. С. *Зернова*. (Прикладная Механика, часть II. Птргрдъ. 1908 г. стр. 27—28), т. е. поворачивали на 90° не скорости, а силы. Для кривошипнаго механизма удобнѣе поворачивать скорости.

ному представленію о моментѣ силы, но и получили средство избѣжать всякихъ вычисленій. Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ многоугольникъ скоростей съ началомъ V и повернутыми силами приложенными къ изображающимъ точкамъ. Перефразируя уравненіе мощностей, мы можемъ теперь утверждать, что моментъ приведенной силы долженъ равняться суммѣ моментовъ повернутыхъ силъ, и слѣдовательно можемъ распространить на многоугольникъ силъ съ приложенными къ нему силами много теоремъ статики. Прежде всего мы замѣтимъ, что мы можемъ переносить точку приложенія силъ по линіи ихъ дѣйствія, такъ какъ это не измѣняетъ величины ихъ момента; затѣмъ мы можемъ складывать и разлагать силы по правилу параллелограмма, ибо по теоремѣ Вариньона и это не вліяетъ на сумму моментовъ силъ [1]). А если такъ, то мы можемъ использовать методы графической статики для опредѣленія равнодѣйствующей всѣхъ повернутыхъ силъ, т. е. можемъ построить многоугольникъ силъ и веревочный многоугольникъ, найти величину и линію дѣйствія равнодѣйствующей, а затѣмъ и величину уравновѣшивающей касательной силы, приложенной въ ведущей точкѣ.

Необходимо отмѣтить, что мы должны были-бы продѣлать точь-въ-точь тѣ же самыя дѣйствія и въ томъ случаѣ, если-бы повернутыя силы были приложены не къ абстрактной фигурѣ—многоугольнику скоростей, а къ неизмѣняемому твердому тѣлу съ неподвижной осью вращенія V, т. е. къ рычагу.

Въ самомъ дѣлѣ, мы тогда тоже постарались бы сложить всѣ силы, приложенныя къ рычагу, въ одну равнодѣйствующую, причемъ проще всего было-бы построить для этого веревочный многоугольникъ и многоугольникъ силъ. Для равновѣсія силъ на рычагѣ также необходимо, чтобы сумма ихъ моментовъ относительно неподвижной оси равнялась нулю, а моментъ приведенной силы долженъ равняться суммѣ моментовъ всѣхъ силъ.

Такимъ образомъ, мы естественно наталкиваемся на аналогію между фигурой многоугольника скоростей съ приложенными къ иему силами и нѣкоторымъ неизмѣняемымъ тѣломъ, представляющимъ собою эту же самую фигуру съ тѣми же силами и съ неподвижной осью, совпадающею съ началомъ многоугольника скоростей V; подмѣтившій эту аналогію, проф. Н. Е. Жуковскій, называетъ поэтому многоугольникъ скоростей вспомогательнымъ рычагомъ и сводитъ многія задачи динамики и статики машинъ къ задачамъ о вспомогательномъ рычагѣ.

Чтобы не отвлекаться отъ поставленной прямой задачи, мы въ

---

[1]) Кромѣ того можно прибавлять какія угодно уравновѣшенныя системы силъ и слѣдовательно замѣнять силу силой и парой; пару силъ можно какъ угодно поворачивать и переносить въ плоскости ея дѣйствія и т. д.

дальнѣйшемъ ограничимся лишь приложеніями теоремы о мощностяхъ къ кривошипному механизму, отсылая читателя въ вопросахъ о дальнѣйшемъ углубленіи и расширеніи отмѣченной аналогіи къ монографіи ея творца [1]), а въ вопросахъ о практическомъ приложеніи простѣйшихъ методовъ графической статики для построенія приведенной силы къ нашей брошюрѣ [2]). Прежде чѣмъ перейти къ силамъ инерціи механизма и ихъ изображенію на вспомогательномъ рычагѣ отмѣтимъ, что элементарная работа всѣхъ силъ, можетъ быть представлена въ слѣдующемъ видѣ:

$$dL = P_a\, ds_a = P_a \,.\, r\, d\varphi,$$

если касательная приведенная сила P_a приложена къ кривошипу радіуса r. Отсюда легко найти:

$$\frac{dL}{d\varphi} = P_a \,.\, r,$$

т. е. производная, стоящая въ правой части уравненія, есть моментъ приведенной внѣшней силы относительно оси кореннаго вала.

18. Построеніе многоугольника ускореній. Теперь перейдемъ къ изученію силъ инерціи звеньевъ какого-либо механизма. Силой инерціи нѣкоторой матеріальной точки наз. произведеніе массы этой точки m на дѣйствительное ея ускореніе j. Поэтому для опредѣленія величины и направленія силъ инерціи отдѣльныхъ матеріальныхъ точекъ даннаго механизма, надо умѣть опредѣлить величины и направленія ускореній всѣхъ точекъ механизма, т. е. построить многоугольникъ его ускореній, который безъ труда строится для простыхъ механизмовъ.

Построеніе многоугольника ускореній будемъ основывать на томъ же разложеніи движенія, которое было описано въ п. 6 и изображено на *чер. 6*. Пусть намъ извѣстно ускореніе j_a одной какой-либо точки A и пусть предварительно построенъ многоугольникъ скоростей; тогда мы можемъ утверждать, что ускореніе j_b точки B слагается изъ ускоренія переноснаго движенія и изъ ускоренія относительнаго движенія точки B вокругъ A, причемъ переносное движеніе есть поступательное перемѣщеніе стержня AB вмѣстѣ съ A; итакъ, прежде всего, полное ускореніе точки B равно геометрической суммѣ ускоренія j_a, точки A, и относительнаго ускоренія вращательнаго движенія точки B вокругъ A, которое въ свою очередь слагается изъ центростремительнаго ускоренія n_{ba} и касательнаго k_{ba}. Итакъ:

$$j_b = j_a \mathbin{+\!\!>} n_{ba} \mathbin{+\!\!>} k_{ba}.$$

Для построенія этой геометрической суммы возьмемъ точку J (*чер. 17*) за начало многоугольника ускореній и прежде всего отложимъ j_a, извѣстное намъ ускореніе точки A. Отъ конца его a построимъ век-

[1]) Н. Е. Жуковскій см. цитату на стр. 53.

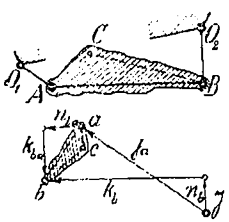
[2]) К. Э. Рерихъ. Равновѣсіе силъ въ плоскихъ шарнирныхъ механизмахъ. Литограф. изд. Кассы Взаимопомощи студ. Технолог. Инст. Императора Николая I. Пгд. 1915 г.

торъ n_{ba}, который легко опредѣлить и по направленію—отъ B къ A,— и по величинѣ:

$$n_{ba} = AB \,.\, \omega^2 = \frac{v_{ab}^2}{AB} = \frac{ab^2}{AB},$$

гдѣ $v_{ab} = ab$ есть относительная скорость точекъ B и A, найденная на многоугольникѣ скоростей.

Векторъ этотъ легко построить въ принятомъ масштабѣ ускореній, какъ четвертую пропорціональную. Касательное же ускореніе, равное $k_{ba} = AB \,.\, \varepsilon$, гдѣ ε обозначаетъ неизвѣстное еще угловое ускореніе звена, мы знаемъ только по направленію, которое перпендикулярно къ AB. Такимъ образомъ мы опять получаемъ только линію, на которой долженъ лежать конецъ j_b. Для опредѣленія самого вектора надо использовать еще одну нашу данную,—путь точки B. При движеніи по этому пути точка B имѣетъ ускореніе, слагающееся изъ центростремительнаго n_b и касательнаго k_b; послѣднее извѣстно только по направленію, а первое и по направленію (къ центру кривизны пути) и по величинѣ:



Чер. 17.

$$n_b = \frac{v_b^2}{R},$$

гдѣ R—радіусъ кривизны пути B, который долженъ быть намъ извѣстенъ. Построивъ отъ J векторъ n_b и проведя изъ его конца линію перпендикулярную къ радіусу кривизны, въ пересѣченіи ея съ k_{ba} найдемъ точку b, опредѣляющую векторъ j_b. Попутно опредѣлилась и величина углового ускоренія звена AB

$$\varepsilon = \frac{k_{ba}}{AB}.$$

Отсюда ясно, что постоянное движеніе главнаго звена ($\omega = \text{Const}$; $\varepsilon = 0$) вызываетъ ускоренныя движенія остальныхъ звеньевъ.

Если насъ заинтересуетъ ускореніе еще какой-либо точки C, принадлежащей звену AB, то для опредѣленія вектора j_c достаточно будетъ построить треугольникъ abc (или въ случаѣ, когда A, B и C лежатъ на одной прямой,—группу точекъ a, b, c) подобный треугольнику ABC и сходственно расположенный [1]. На многоугольникѣ скоростей этотъ треугольникъ оказывался повернутымъ на 90^0, а на многоугольникѣ ускореній онъ будетъ повернутъ на тупой уголъ, тѣмъ болѣе близкій къ 180^0, чѣмъ меньше угловое ускореніе ε.

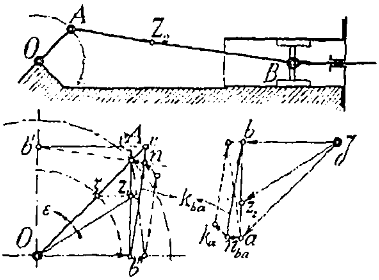
---

[1]) Доказательство этой теоремы вытекаетъ изъ неизмѣняемости фигуры ABC, см. В. Л. Кирпичевъ. Построеніе картины скоростей и картины ускореній для плоскихъ механизмовъ. Вѣстникъ Инженеровъ за 1915 г. № 1 и 2 стр. 14—19 и 45—52.

Другое доказательство: К. Э. Рерихъ. Скорости и ускоренія точекъ плоскаго шарнирнаго механизма. Изд. Общества Взаимопомощи студ. Пг. Технолог. Инст. 1915 г.

19. Ускоренія точекъ кривошипнаго механизма. Мы уже видѣли на стр. 22 (*чер. 7*), что для кривошипнаго механизма построеніе многоугольника скоростей можетъ быть значительно упрощено; докажемъ теперь, что построеніе многоугольника ускореній также можетъ быть сведено въ этомъ случаѣ къ проведенію нѣсколькихъ линій; для этого изобразимъ на *чер. 18* вверху схему механизма, въ правомъ углу— многоугольникъ ускореній, какъ-бы его надо было строить согласно вышеизложеннымъ правиламъ, а въ лѣвомъ углу—кругъ α, изображающій въ увеличенномъ масштабѣ путь пальца кривошипа A; построенія положенія B поршня при помощи круга β, направленія шатуна AB и повернутаго на 90^0 многоугольника скоростей OAb' опущены.

Задача будетъ заключаться въ построеніи ускоренія j_b ползуна B, причемъ ускореніе j_a точки A должно быть извѣстно. Такъ какъ точка A движется по кругу, то ускореніе ея по величинѣ и направленію зависитъ отъ угловой скорости ω и угловогo ускоренія ε кривошипа. Прежде всего покажемъ, какъ производится построеніе въ томъ случаѣ, когда $\varepsilon = 0$, а $\omega = 1$ сек.$^{-1}$, т. е, когда ускореніе точки A только центростремительное и равное какъ разъ радіусу кривошипа $OA = r$ см./сек.^{2}.



Чер. 18.

Отложимъ на многоугольникѣ ускореній векторъ Ja, равный $r\omega^2 = AO$, отъ точки a проведемъ векторъ n_{ba} въ направленіи шатуна отъ B къ A, изображающій центростремительное ускореніе точки B при относительномъ вращеніи ея вокругъ A; изъ конца проведемъ линію k_{ba}, перпендикулярную шатуну AB до пересѣченія въ точкѣ b'' съ прямою Jb'', параллельною оси цилиндра; такъ какъ путь точки B въ нашемъ случаѣ прямолинейный, то центростремительное ускореніе n_b будетъ равно нулю.

Всѣ операціи очень просты кромѣ построенія величины

$$n_{ba} = \frac{(Ab')^2}{AB},$$

требующей еще вспомогательнаго построенія, гдѣ Ab', какъ ужъ было указано въ п. 6, есть повернутая относительная скорость точекъ B и A,

Быстрѣе всего къ цѣли ведетъ слѣдующее построеніе: проведемъ изъ точки b' линію $b'c$ параллельно оси цилиндра до пересѣченія въ точкѣ c съ продолженіемъ OA; изъ c проведемъ перпендикулярную къ $b'c$ линію cn и докажемъ, что

$$An = n_{ba} = \frac{(Ab')^2}{AB};$$

это легко вывести изъ пропорціональности сторонъ подобныхъ треугольниковъ $Ab'c$ и OAB, а также Acn и OAb'. Если теперь провести изъ n

линію nb'' перпендикулярно AB, то многоугольникъ $OAnb''$ будетъ тождественъ многоугольнику ускореній $Ja\, n_{bu}\, k_{bu}\, b''$, но повернутъ относительно него на 180^0, т. е. все отложено въ обратную сторону. Это построеніе Мора значительно упрощаетъ задачу, надо только оговориться относительно четырехъ особенныхъ положеній механизма. Когда кривошипъ OA повернется на 90^0 изъ мертвой точки въ ту или другую сторону, то точка n совпадетъ съ A (*чер. 22*), что само-собой понятно, такъ какъ угловая скорость шатуна для этого положенія равна нулю; поэтому останется провести линію $4b''$ перпендикулярно AB. Когда поршень находится въ одной изъ мертвыхъ точекъ, построеніе совсѣмъ не годится и тогда проще всего его выполнить слѣдующимъ образомъ: такъ какъ въ мертвой точкѣ относительная скорость точекъ B и A равна OA, то намъ надо построить $OA^2 : AB$, а для этого повернемъ кривошипъ на 90^0 и опустимъ въ прямоугольномъ треугольникѣ AOB высоту On_1 на гипотенузу AB; отрѣзокъ An_1 и будетъ представлять величину искомаго центростремительнаго ускоренія точки B относительно A для обѣихъ мертвыхъ точекъ, которое надо будетъ отложить отъ точекъ *1* и *9* по направленію къ цилиндру; ускореніе ползуна для внутренней мертвой точки будетъ равно $Ob_9 = OA - An_1 = r\omega^2\ (1 - r/l)$, а для внѣшней $Ob''_1 = OA + An_1 = r\omega^2\ (1 + r/l)$.

Если бы звено OA вращалось съ угловой скоростью равной не единицѣ, а ω, то нужно было бы отложить отрѣзокъ Ja въ ω^2 разъ большій, или предполагать построеніе выполненнымъ въ масштабѣ въ ω^2 разъ меньшемъ; конечно, лучше сдѣлать послѣднее.

Если бы звено OA, вращаясь съ угловой скоростью ω, имѣло бы еще и угловое ускореніе ε, то полное ускореніе точки A слагалось бы изъ центростремительнаго $r\omega^2$ и касательнаго $k_a = r\varepsilon$. Послѣднее нужно было бы изобразить отрѣзкомъ въ томъ же масштабѣ, въ какомъ OA изображаетъ $r\omega^2$, и прибавить въ должномъ направленіи къ центростремительному, а затѣмъ продолжать всѣ вышеописанныя построенія многоугольника ускореній. Въ сокращенномъ же построеніи касательное ускореніе k_a проще всего прибавить геометрически къ точкѣ n, но въ обратномъ дѣйствительному направленіи (все обратно). Для опредѣленія величины и направленія ускоренія j_z какой-либо точки Z шатуна, лежащей на AB, надо соединить A съ b'', раздѣлить отрѣзокъ Ab'' въ томъ же отношеніи, въ какомъ Z дѣлитъ AB. Тогда $ZO = j_z$.

20. Ускоренія постояннаго и начальнаго положеній. Итакъ, мы видимъ, что для построенія многоугольника ускореній и, слѣдовательно, для опредѣленія силъ инерціи всѣхъ точекъ механизма, надо знать мгновенную угловую скорость ω и мгновенное угловое ускореніе ε главнаго звена. Между тѣмъ силы инерціи мы ищемъ какъ разъ для того, чтобы опредѣлить и ε, и ω. Мы попадаемъ такимъ образомъ въ заколдованный кругъ, изъ котораго можемъ выбраться только строгимъ раздѣленіемъ силъ инерціи по ихъ происхожденію на двѣ группы: на силы инерціи постояннаго движенія и на силы инерціи начальнаго движенія. Будемъ называть основнымъ постояннымъ движеніемъ такое, при которомъ угловое ускореніе главнаго звена равно нулю, а угловая скорость его равна единицѣ ($\varepsilon = 0$; $\omega = 1$ сек.$^{-1}$). Основнымъ начальнымъ движеніемъ будемъ называть такое, при которомъ угловая скорость главнаго звена равна нулю, а угловое ускореніе равно единицѣ ($\omega = 0$; $\varepsilon = 1$ сек.$^{-2}$). Эти два основныхъ движенія дадутъ намъ два вполнѣ опредѣленныхъ многоугольника ускореній [1]), изъ которыхъ одинъ, многоугольникъ ускореній постояннаго движенія, былъ нами построенъ; что же касается многоугольника ускореній начальнаго движенія, то такъ какъ $\omega = 0$, скорости всѣхъ точекъ механизма также равны нулю, и слѣдовательно, всѣ центростремительныя ускоренія равны нулю; каса, тельныя же ускоренія направлены по скорости, вслѣдствіе чего основной многоугольникъ ускореній начальнаго движенія оказывается тождественнымъ съ основнымъ многоугольникомъ скоростей.

Легко доказать, что ускоренія, соотвѣтствующія любой угловой скорости и любому угловому ускоренію, могутъ быть получены геометрическимъ сложеніемъ векторовъ, взятыхъ съ основныхъ многоугольниковъ, съ измѣненіемъ масштаба. Пусть напр. $\omega = a$ сек.$^{-1}$; $\varepsilon = b$ сек.$^{-2}$, тогда мы беремъ ускореніе нѣкоторой точки на основномъ многоугольникѣ постояннаго движенія и увеличиваемъ его въ a^2 разъ, затѣмъ беремъ ускореніе той же точки на основномъ многоугольникѣ ускореній начальнаго движенія, увеличиваемъ его въ b разъ и складываемъ геометрически съ ускореніемъ постояннаго движенія. Можемъ утверждать, что получимъ дѣйствительное полное ускореніе.

Въ самомъ дѣлѣ, безъ сомнѣнія для ведущей точки главнаго звена мы получимъ такимъ образомъ правильную величину дѣйствительнаго ускоренія, равную, благодаря прямому углу между векторами, $r\sqrt{a^4 + b^2}$. А если мы получаемъ правильные результаты для ведущей точки, то для остальныхъ точекъ механизма это будетъ также справедливо на основаніи теоремы векторіальнаго анализа, что порядокъ геометрическаго сложенія не вліяетъ на результатъ.

Теперь ясенъ дальнѣйшій планъ — мы должны сумѣть построить двѣ діаграммы основныхъ приведенныхъ силъ инерціи постояннаго и начальнаго движеній; умноженіемъ соотвѣтственныхъ ординатъ первой діаграммы на ω^2, а второй на ε мы можемъ получить такія значенія силъ инерціи начальнаго движенія, которыя будутъ уравновѣшивать внѣшнія силы, и идя шагъ за шагомъ, можемъ найти законъ движенія машины.

21. Изображеніе силъ инерціи звеньевъ. Займемся изображеніемъ силъ инерціи каждаго звена, т. е. приведеніемъ множества элементарныхъ силъ инерціи къ простѣйшему виду. Для удобства будемъ расчленят задачу по роду движенія соотвѣтственнаго звена.

Всѣ звенья механизма можно раздѣлить на три группы:

1) Звенья, движущіяся поступательно, т. е. такія, у которыхъ

---

[1]) Идея отдѣльнаго построенія многоугольниковъ ускореній постояннаго и начальнаго движеній принадлежитъ также проф. Н. Е. Жуковскому, называющему соотвѣтственныя ускоренія перманентными и начальными.

скорости всѣхъ точекъ тождественны, равно какъ и ускоренія; силы инерціи всѣхъ точекъ такого звена параллельны между собою и равнодѣйствующая ихъ приложена въ центрѣ этихъ параллельныхъ силъ, т. е. въ центрѣ тяжести; такъ какъ скорость центра тяжести при этомъ и по величинѣ, и по направленію всегда равна скорости центра шарнира, съ этимъ звеномъ сочлененнаго, то на многоугольникѣ скоростей соотвѣтственная сила инерціи все равно совпадаетъ съ точкой, изображающей скорость шарнира; слѣдовательно точку приложенія силы инерціи звена, движущагося поступательно, можно выбирать произвольно [1]).

2) Звенья, вращающіяся вокругъ неподвижной оси, имѣютъ силы инерціи, вызываемыя какъ угловой скоростью вращательнаго ихъ движенія, такъ и угловымъ ускореніемъ; первыя суть центробѣжныя силы, которыя, какъ извѣстно изъ курса теоретической механики, въ случаѣ плоскаго звена, плоскость симметріи котораго совпадаетъ съ плоскостью чертежа, приводятся къ одной равнодѣйствующей центробѣжной силѣ [2]), приложенной въ центрѣ тяжести, равной произведенію массы звена на кратчайшее разстояніе центра его тяжести до оси вращенія и на квадратъ мгновенной угловой скорости, и направленной по этому кратчайшему разстоянію отъ оси вращенія. Такъ какъ ось вращенія неподвижна и на многоугольникѣ скоростей изображается его началомъ V, то повернутая центробѣжная сила такого звена всегда будетъ проходить черезъ точку V, и очевидно, никакого вліянія на равновѣсіе силъ механизма производить не будетъ (если не принимать во вниманіе тренія въ шарнирахъ). Силы инерціи, вызываемыя угловымъ ускореніемъ, приводятся къ равнодѣйствующей силѣ, равной произведенію массы звена на касательное ускореніе центра его тяжести, направленной въ сторону, противоположную направленію этого ускоренія, и приложенной къ центру качанія звена [3]).

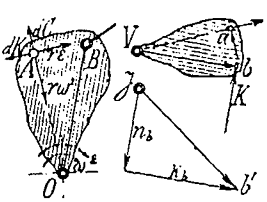
---

[1]) Это значитъ лишь, что такой переносъ не измѣняетъ условій равновѣсія механизма; если, однако, кромѣ того разсматриваются и опорныя реакціи звеньевъ, то такой переносъ вызываетъ пару, измѣняющую давленія въ опорахъ, а слѣдовательно и силы тренія, дѣйствующія въ нихъ.

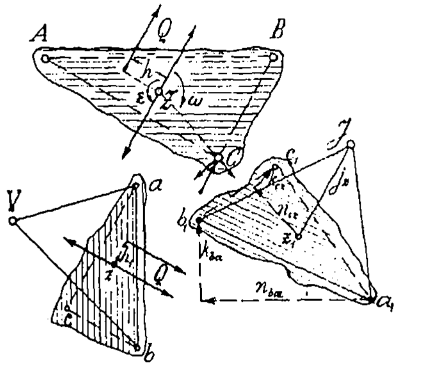
[2]) Если звено не симметрично относительно плоскости чертежа, то появляется еще пара, моментъ которой зависитъ отъ центробѣжныхъ моментовъ инерціи звена. На движеніе механизма эта пара не вліяетъ и только нагружаетъ шарниры. Только въ пространственныхъ механизмахъ (напр. въ шпиндельныхъ грузовыхъ регуляторахъ) нужно считаться и съ этой парой (см. Tolle, Die Regelung der Kraftmaschinen 2 изд. Берлинъ, 1909, стр. 450 и слѣд.).

[3]) Это легко доказать: расположимъ начало O (*чер. 19*) координатныхъ осей OX и OY въ оси вращенія; элементарная сила инерціи нѣкоторой элементарной массы dm, расположенной въ точкѣ A въ разстояніи $OA = r$ отъ оси, при угловомъ ускореніи ε звена, будетъ равна $dK = dm\,r\,\varepsilon$. Проекціи главнаго вектора этихъ силъ будутъ $V_x = \int dm\, r\varepsilon \cos\varphi = \int dm\, x\,\varepsilon = m x_c \varepsilon$; точно также $V_y = m y_c \varepsilon$,

Если насъ не интересуютъ тренія въ шарнирахъ, то мы можемъ замѣнить дѣйствительную силу инерціи силой, приложенной въ движущемся шарнирѣ этого звена. Для этого въ немъ надо вообразить сосредоточенной массу $m_1 = m\,\frac{\rho^2}{l^2}$, гдѣ l разстояніе шарнира до оси вращенія. Произведеніе этой массы на линейное касательное ускореніе шарнира дастъ силу инерціи, моментъ которой относительно оси вращенія будетъ равенъ $K = m_1\, l^2\, \varepsilon = m\, \rho^2\, \varepsilon$. На *чер. 19* изображено звено OAB, многоугольники скоростей (V) и ускореній (J) и сила K, перенесенная на многоугольникъ скоростей.



Чер. 19.



Чер. 20.

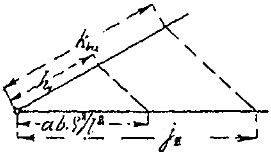
3) Для звеньевъ, вращающихся вокругъ мгновенной оси, мы легко можемъ по многоугольнику ускореній (*чер. 20*) найти линейное ускореніе центра тяжести j_s и угловое ускореніе ε вращенія звена. Легко доказать, что силы инерціи приводятся къ одному главному вектору Q, величина котораго равна произведенію массы звена на ускореніе центра его тяжести $Q = m\, j_s$, и къ главному моменту, направленному обратно угловому ускоренію и по величинѣ равному произведенію момента инерціи звена относительно центра тяжести $J = m\, \rho^2$ на угловое ускореніе, т. е. $M = m\, \rho^2\, \varepsilon$ [1]). Эта система легко

гдѣ x_c и y_c суть координаты центра тяжести. Главный моментъ $M = \int dm\, r^2\, \varepsilon = m\, \rho^2\, \varepsilon$, гдѣ ρ — радіусъ инерціи звена относительно оси вращенія O. Эта система силы и пары легко приводится къ одной силѣ, равной $m r_c \varepsilon$, приложенной въ точкѣ, разстояніе которой до оси O равно ρ^2 / r_c на прямой, соединяющей центръ тяжести съ O, т. е. въ центрѣ качанія.

[1]) Для доказательства расположимъ начало относительныхъ координатъ OX и OY въ центрѣ тяжести Z и вспомнимъ, что ускореніе каждой точки звена можетъ быть представлено въ видѣ геометрической суммы переноснаго ускоренія j_s при поступательномъ движеніи вмѣстѣ съ любой его точкой, напр. центромъ тяж. Z, и относительнаго въ вращательномъ движеніи вокругъ центра инерціи, центростремительнаго и касательнаго. Такимъ образомъ элементарная сила инерціи

приводится къ одной равнодѣйствующей силѣ, величина которой равна $Q = m j_s$, а линія дѣйствія легко опредѣляется по величинѣ силы и пары слѣдующимъ образомъ: изобразимъ моментъ $M = m \rho^2 \varepsilon$ *(чер. 20)* парой силъ $mj_s, -mj_s$ такимъ образомъ, чтобы одна изъ нихъ была направлена прямо противоположно силѣ инерціи mj_s; плечо пары будетъ, очевидно, равно $h = \rho^2 \frac{\varepsilon}{j_s}$. Направленія отдѣльныхъ элементовъ легко находятся по многоугольнику ускореній: mj_s противоположно j_s; направленіе углового ускоренія ε опредѣляется при построеніи ускоренія точки B по ускоренію точки A, ибо прибавивъ къ a_1 центростремительное n_{ba}, получали затѣмъ касательное k_{ba} и по величинѣ, и по направленію; но $k_{ba} = AB . \varepsilon = l . \varepsilon$, и такъ какъ оно направлено вверхъ, то ε направлено противъ часовой стрѣлки, а M, слѣдовательно, по часовой стрѣлкѣ. Подставляя ε, находимъ $h = \frac{\rho^2}{l} . \frac{k_{ba}}{j_s}$: величина эта легко строится графически, какъ четвертая пропорціональная, если принять во вниманіе, что ρ^2/l есть отрѣзокъ постоянной длины, легко опредѣляемый вычисленіемъ или построеніемъ. На многоугольникѣ скоростей отрѣзокъ h будетъ изображенъ отрѣзкомъ h_1 во столько разъ меньшимъ h, во сколько разъ ab меньше AB, т. е.

$$h_1 = h \frac{ab}{l} = \frac{\rho^2}{l^2} . \frac{k_{ba}}{j_s} . ab.$$



Чер. 21.

На стр. 48 мы уже указывали, что для шатуновъ $\rho^2/l^2 = 0{,}104$ до $0{,}244$, а въ среднемъ $0{,}17$. Легко построить отрѣзокъ $\rho^2/l^2 . ab$, а затѣмъ и h_1, какъ четвертую пропорціональную *(чер. 21)*. Послѣ этого остается отложить h_1 или h въ правильную сторону и изобразить силу инерціи.

Такимъ образомъ силы инерціи каждаго звена могутъ быть изображены одной силой, величина которой опредѣляется вычисленіемъ, а линія дѣйствія — построеніями. Намъ остается, слѣдовательно, привести

какой-либо точки C будетъ равна геометрической суммѣ трехъ силъ инерціи dmj_s, $dmr\omega^2$ и $dmr\varepsilon$, гдѣ r разстояніе элементарной массы dm до Z, а ω угловая скорость и ε угловое ускореніе звена. Суммируя проекціи, получимъ $V_x = mj_s \cos\varphi_1 + m x_c \omega^2 + m x_c \varepsilon$ и $V_y = mj_s \sin\varphi_1 + m y_c \omega^2 + m y_c \varepsilon$. Но $x_c = y_c = 0$, откуда $V = mj_s$. Что касается главнаго момента, то сумма моментовъ силъ инерціи переноснаго движенія относительно центра тяжести будетъ нуль; точно также и сумма моментовъ центробѣжныхъ силъ относительнаго движенія равна нулю, вслѣдствіе чего $M = \int dm\, r^2 \varepsilon = m\rho^2\varepsilon$.

всѣ эти силы къ ведущей точкѣ, пользуясь методомъ, описаннымъ въ п. 19 [1]).

22. Силы инерціи начальнаго движенія. Уравненіе движенія. Теперь перейдемъ къ силамъ инерціи начальнаго движенія и прежде всего отмѣтимъ, что величина ихъ также заранѣе неизвѣстна, такъ какъ дѣйствительное угловое ускореніе главнаго звена зависитъ отъ величины дѣйствительныхъ силъ инерціи какъ постояннаго, такъ и начальнаго движеній. Это угловое ускореніе должно быть такъ подобрано, чтобы силы, приведенныя къ ведущей точкѣ, въ каждое мгновеніе уравновѣшивались силами инерціи. Мы не будемъ приводить основныя силы инерціи къ ведущей точкѣ, какъ мы это только что продѣлали, а займемся болѣе удобнымъ методомъ—приведеніемъ массъ. Вообразимъ въ ведущей точкѣ сосредоточенной массу μ, которую подберемъ такъ, чтобы ея касательная сила инерціи $\mu r_a \varepsilon$ равнялась приведенной силѣ инерціи начальнаго движенія всѣхъ звеньевъ механизма. Это приведеніе массъ мы безъ труда можемъ выполнить для основного начальнаго движенія ($\omega = 0$; $\varepsilon = 1$ *сек.*$^{-2}$). Въ самомъ дѣлѣ, основное ускореніе начальнаго движенія нѣкоторой матеріальной точки массы dm одного изъ звеньевъ механизма мы можемъ просто опредѣлять по основному многоугольнику скоростей, такъ какъ въ этомъ случаѣ векторы j и v тождественны. Слѣдовательно, основная сила инерціи начальнаго движенія $jdm = vdm$ направлена противоположно направленію скорости разсматриваемой точки. Легко видѣть, что мощность ея равна $-v^2dm$, такъ какъ послѣ поворота на 90^0 она будетъ перпендикулярна къ скорости.

Если скорость ведущей точки равна v_a, и если мы вообразимъ въ ней сосредоточенной приведенную массу $d\mu$, основная начальная сила инерціи которой замѣняетъ дѣйствіе массы dm, то мы будемъ имѣть соотношеніе

$$v_a^2 d\mu = v^2 dm,$$

такъ какъ ихъ мощности должны быть одинаковы.

Собирая отдѣльныя приведенныя массы для всѣхъ матеріальныхъ точекъ, принадлежащихъ данному механизму, получимъ одну приведенную массу μ, сосредоточенную въ ведущей точкѣ механизма и дѣйствіемъ своимъ замѣняющую начальныя силы инерціи всего механизма для любого углового ускоренія ε главнаго звена, такъ какъ измѣненіе ε

---

[1]) Есть еще и другіе методы изображенія силъ инерціи каждаго звена; такъ Tolle (Die Regelung der Kraftmaschinen, Берлинъ, 1909 г., стр. 42) изображаетъ силы инерціи четырьмя силами, приложенными въ двухъ шарнирахъ. Wittenbauer (Dynamische Kräftepläne, Zeitschrift für Mathematik und Physik, томъ 53, за 1906 г., стр. 274, или Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1906 г., стр. 951), также приводитъ силы инерціи къ четыремъ силамъ (двѣ силы, одна пара), приложеннымъ въ шарнирахъ. Jenkin и Ewing изображаютъ ихъ тремя силами (Trans. of R. Soc. of Edinburgh, томъ XXVIII, 1876—8 г., стр. 712, Appendix).

измѣняетъ только масштабъ многоугольника скоростей, но не соотношенія отдѣльныхъ векторовъ.

Итакъ, для опредѣленія μ будемъ имѣть соотношеніе

$$v_a^2\mu = \int v^2 dm, \text{ или } \mu = \int \left(\frac{v}{v_a}\right)^2 dm,$$

причемъ интегралъ долженъ быть распространенъ на всѣ движущіяся матеріальныя точки механизма.

Уравненіе для опредѣленія приведенной массы силъ инерціи начальнаго движенія оказывается, такимъ образомъ, тождественнымъ уравненію, служившему намъ въ главѣ I для приведенія массъ по ихъ живой силѣ (стр. 20). Это прольетъ намъ свѣтъ на реальное значеніе отдѣльныхъ членовъ уравненія Лагранжа (11). Если приведенная сила инерціи начальнаго движенія равна $\mu r \varepsilon$, гдѣ r—разстояніе ведущей точки до оси ея вращенія, то моментъ ея относительно оси вращенія будетъ $\mu r^2 \varepsilon$, а это и есть ни что иное, какъ членъ, стоящій въ лѣвой части уравненія Лагранжа. Для того, чтобы уяснить реальное значеніе послѣдняго члена этого уравненія, въ случаѣ механизма съ одной степенью свободы, напишемъ уравненіе движенія на основаніи принципа Даламбера.

Вмѣсто сложнаго механизма мы имѣемъ теперь одну ведущую точку, на которую дѣйствуетъ касательная внѣшняя сила то положительная (избытокъ вращающаго усилія надъ сопротивленіемъ), то отрицательная (недостатокъ). Кромѣ этой приведенной внѣшней силы мы имѣемъ еще приведенныя основныя силы инерціи двухъ родовъ — постояннаго движенія и начальнаго движенія. Чтобы перейти отъ приведенной основной ($\omega = 1$ *сек.*$^{-1}$) силы инерціи постояннаго движенія Q къ дѣйствительной, достаточно помножить первую на квадратъ дѣйствительной величины мгновенной угловой скорости главнаго звена ω^2. Чтобы перейти отъ основной силы инерціи начальнаго движенія ($\varepsilon = 1$ *сек.*$^{-2}$) къ дѣйствительной достаточно умножить приведенную массу μ на дѣйствительную величину мгновеннаго касательнаго ускоренія ведущей точки ε. Согласно принципу Д'Аламбера эти три силы, имѣющія общую линію дѣйствія, должны взаимно уравновѣшиваться во всякое мгновеніе.

Такимъ образомъ, если буквой P обозначить приведенную внѣшнюю силу, соотвѣтствующую данному положенію механизма, буквой Q—соотвѣтствующую основную силу инерціи постояннаго движенія, буквой μ—приведенную массу механизма, а r—радіусъ окружности, описываемой ведущею точкою, то будемъ имѣть дифференціальное уравненіе, опредѣляющее движеніе главнаго звена, аналогичное ур. Лагранжа:

$$\mu r\frac{d\omega}{dt}=P-Q\omega^2\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ (11)$$

гдѣ μ, P и Q, графически найденныя функціи отъ угла поворота главнаго звена φ, изображенныя на соотвѣтственныхъ діаграммахъ. Само собою разумѣется, всѣ эти функціи могутъ изображать не абсолютныя значенія соотвѣтственныхъ силъ и массъ, а отнесенныя къ единицѣ площади поршня, что дѣлаетъ каждое рѣшеніе болѣе общимъ.

Мы уже доказали выше, что въ уравненіи Лагранжа:

$$\mu r^2\frac{d\omega}{dt}=\frac{dL}{d\varphi}-\frac{r^2\omega^2}{2}\ \frac{d\mu}{d\varphi}$$

первый членъ правой его части представляетъ собою моментъ приведенной силы Pr, а членъ, стоящій въ лѣвой части уравненія—моментъ приведенной силы инерціи начальнаго движенія. Умноживши ур. (11) на r и сравнивая его съ ур. Лагранжа, мы видимъ, что послѣдній его членъ есть ни что иное, какъ моментъ приведенной силы инерціи постояннаго движенія, т. е.:

$$Qr\omega^2=\frac{r^2\omega^2}{2}\ \frac{d\mu}{d\varphi}\ \text{или}\ Q=\frac{r}{2}\ \frac{d\mu}{d\varphi}=\frac{r}{2g}\ \frac{d\gamma}{d\varphi},$$

гдѣ γ—приведенный вѣсъ.

Такимъ образомъ, знаніе приведенной массы μ или приведеннаго вѣса γ въ функціи угла поворота φ освобождаетъ насъ отъ сложныхъ операцій построенія ускореній, изображенія и приведенія силъ инерціи постояннаго движенія, такъ какъ мы умѣемъ съ любой степенью точности продифференцировать заданную графически кривую. Это замѣчаніе лишало бы главу II всякаго смысла, если бы принципъ Даламбера не давалъ бы намъ возможности опредѣлить всѣ давленія въ шарнирахъ и звеньяхъ, необходимыя для расчета прочныхъ размѣровъ частей механизма, и принять во вниманіе треніе въ шарнирахъ.

Если подставить вмѣсто Q производную отъ μ, то общій интегралъ этого нелинейнаго дифференціальнаго уравненія будетъ ни что иное, какъ уравненіе живыхъ силъ (ур. 9 стр. 34), которымъ мы занимались въ отдѣлѣ I. Если же этой подстановкой не пользоваться, а опредѣлять силы инерціи постояннаго движенія построеніями, то общій интегралъ будетъ неизвѣстенъ; поэтому остановимся на приближенныхъ методахъ его рѣшенія, предполагая, что намъ извѣстна начальная угловая скорость ω_1 главнаго звена, соотвѣтствующая какой-либо эпохѣ.

Самымъ грубымъ приближеніемъ, ведущимъ, однако, къ самому простому рѣшенію, будетъ обычное рѣшеніе Портера-Радингера. Чтобы къ нему прійти, допустимъ, что: 1) приведенная масса μ постоянна $\mu=\frac{q_k}{g}$, гдѣ q_k — приведенный вѣсъ маховика, т. е. будемъ пренебрегать силами инерціи начальнаго движенія возвратно движущихся частей машины по сравненію съ громадной приведенной массой махового колеса; 2) вмѣсто дѣйствительныхъ силъ инерціи постояннаго движенія возвратно движущихся массъ возьмемъ приближенныя ихъ значенія, соотвѣтствующія напр. неизмѣнной средней ариѳметической угловой скорости ω_0 гл. зв., т. е. будемъ пренебрегать небольшими измѣненіями мгновенной угловой скорости ω. Тогда наше ур. (11) дастъ намъ величину угловаго ускоренія, соотвѣтствующаго каждому положенію машины; а это легко опредѣляетъ тѣ углы поворота машины, для которыхъ угловая скорость имѣетъ наибольшее или наименьшее значеніе, такъ какъ для этихъ угловъ производная должна быть равна нулю. Но

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi},$$

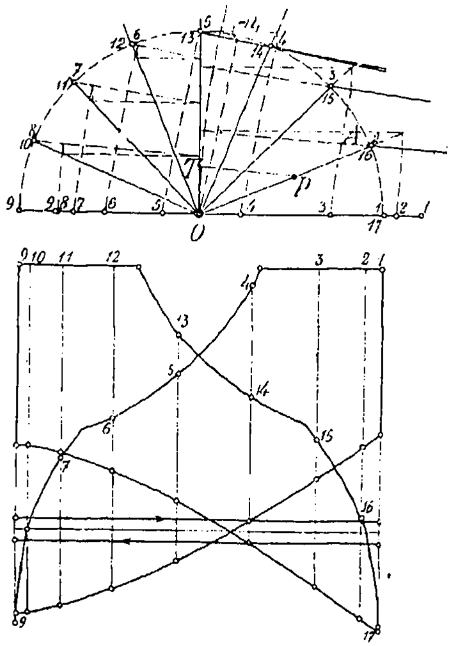
а такъ какъ никогда при установившемся движеніи угловая скорость главнаго звена ω не равна нулю, то интересующіе насъ углы поворота опредѣляются тѣми моментами, когда угловое ускореніе равно нулю. На этомъ основывается расчетъ приведеннаго вѣса махового колеса, требующій, конечно, опять таки перехода къ закону живой силы:

$$\omega^2 = \omega_1^2 + 2 \int_0^{\varphi} \frac{P - Q\omega_0}{\mu r} \, d\varphi.$$

Когда найденъ вѣсъ маховика, тогда это же уравненіе позволяетъ опредѣлить приближенно измѣненіе угловой скорости машины.

23. Построеніе діаграммы касательныхъ усилій. Напомнимъ вкратцѣ изъ элементарнаго курса тотъ ходъ построеній діаграммы силъ $P - Q \cdot \omega_0^2$, на которомъ основывается весь методъ Портера-Радингера. Возьмемъ для этого ту же одноцилиндровую паровую машину, которою мы занимались въ главѣ I *(чер. 5)* съ той же индикаторной діаграммой и числомъ оборотовъ 120 въ мин.

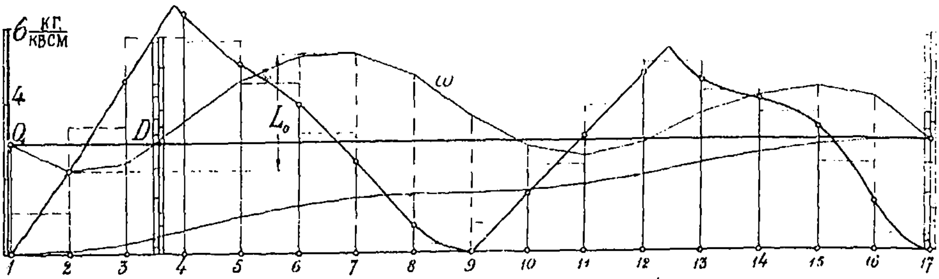
Возвратно движущіяся массы будемъ считать состоящими изъ вѣса системы ползуна 0,24 кг./кв. см. и доли вѣса шатуна, который разложимъ по указаніямъ стр. 32 и сосредоточимъ въ пальцѣ ползуна $0.15 \cdot 0{,}45 = 0{,}068$ кг./кв. см. Такимъ образомъ расчетъ будемъ вести на возвратно движущуюся массу 0,308 кг./кв. см. Масштабъ для черченія круга радіуса $OA = r$ выберемъ такимъ образомъ, чтобы отрѣзки Ob'', изображающіе ускореніе ползуна *(чер. 18)*, одновременно изображали и силу инерціи возвратно движущихся массъ въ томъ же масштабѣ, въ какомъ вычерчена индикаторная діаграмма, или кратномъ ему. Для этого вспомнимъ, что радіусъ OA на многоугольникѣ ускореній долженъ изображать $r\omega_0^2 = 79$ м/сек.². Умноживъ это ускореніе на вѣсъ возвратно движущейся массы 0,308 кг./кв. см. и раздѣливъ на ускореніе силы тяжести 9,81 м/сек.², получимъ силу инерціи около 2,48 кг./кв. см., а такъ какъ на оригиналѣ индикаторная діаграмма изображена въ масштабѣ 1 кг./кв. см. = 1 см., то и радіусъ OA круга возьмемъ въ оригиналѣ равнымъ 4,96 см. съ тѣмъ, чтобы, раздѣливъ отрѣзокъ, изображающій ускореніе, на 2, получить величину мгновенной силы инерціи. По радіусу кривошипа найдемъ длину шатуна $l = 5r = 24{,}8$ см. Начертивши *(чер. 22)* круги α и β, размѣтимъ положенія ползуна, опредѣлимъ направленія шатуна и построимъ ускоренія ползуна для всѣхъ положеній кривошипа, ограничиваясь однимъ полуоборотомъ, такъ какъ для второго полуоборота при симметричномъ центральномъ кривошипномъ механизмѣ можемъ пользоваться построеніями перваго полуоборота. Отрѣзки, изображающіе ускореніе ползуна, будутъ изображать также при выбранномъ радіусѣ OA и силы инерціи системы ползуна. Вычитая ихъ изъ давленій пара въ періоды возрастанія скорости ползуна и прибавляя въ періоды убыванія, получимъ величины силъ давленія пара за вычетомъ силъ инерціи. Силой вѣса возвратно движущейся массы обыкновенно пренебрегаютъ, но ничего не стоитъ отложить проекцію ея на направленіе движенія ползуна $0{,}308 \cos \theta = 0{,}26$ для одного хода, какъ движущую силу, для обратнаго, какъ сопротивленіе и силы инерціи откладывать не отъ оси абсциссъ, а отъ этихъ прямыхъ линій.



Чер. 22. Діаграмма давленій и силъ инерціи.

Послѣ этого останется найти приведенную касательную силу по закону мощностей. Такъ какъ въ нашемъ случаѣ направленія силъ и скоростей совпадаютъ, то силы должны быть обратно пропорціональны скоростямъ, поэтому будемъ откладывать (это построеніе вычерчено лишь для положенія 16) силу, дѣйствующую на ползунъ и изображенную уже на діаграммѣ давленій, по радіусу OA въ видѣ отрѣзка OP; изъ P проводимъ PT параллельно шатуну и на вертикали, получаемъ отрѣзокъ OT, равный искомой приведенной касательной силѣ. Продѣлавши это построеніе для всѣхъ 16 положеній кривошипа, построимъ діаграмму касательныхъ силъ на *чертежѣ 23*; пропланиметрировавши ее, (на *чер. 23* показано графическое опредѣленіе средней ординаты) найдемъ среднее касательное усиліе $= 2{,}9$ кг./кв. см., которому должно равняться сопротивленіе, ибо иначе движеніе машины не будетъ установившимся. Ординаты діаграммы касательныхъ усилій до линіи постояннаго сопротивленія дадутъ намъ величину $T = P - Q \cdot \omega_0^2$ избыточной или недостаточной вращающей силы; пересѣченія же діаграммы касательныхъ усилій съ линіей постояннаго сопротивленія опредѣляютъ тѣ углы поворота кривошипа, отсчитываемые по оси абсциссъ, для которыхъ T, а вмѣстѣ съ нимъ и угловое ускореніе, равны нулю, — это суть положенія ω_{max} или ω_{min}. Раздѣлить ω_{max} и

ω_{min} легко, такъ какъ первымъ долженъ предшествовать избытокъ, а вторымъ недостатокъ вращающей силы.



Чер. 23. Діаграмма касательныхъ усилій.

Теперь уравненіе, опредѣляющее движеніе, имѣетъ видъ $\mu r \dfrac{d\omega}{dt} = T$, причемъ мы знаемъ T въ зависимости отъ φ. Умноживъ обѣ его части на $rd\varphi$ и интегрируя отъ $\varphi = 0$ до φ, будемъ имѣть, если считать приведенную массу постоянной и равной μ_k:

$$\frac{\mu_k r^2}{2}(\omega^2 - \omega_1^2) = \int_0^\varphi Trd\varphi = L.$$

Это уравненіе представляетъ собою переходъ къ закону живыхъ силъ; лѣвая часть его выражаетъ измѣненіе кинетической энергіи маховика, а правая — избыточную работу приведенной силы, которую легко построить, прибѣгнувъ къ графическому интегрированію. Отложимъ на *чер.* 23 отрѣзокъ O_1D въ соотвѣтствіи съ желаемымъ масштабомъ и построимъ интегральную кривую. Она опредѣлитъ намъ наибольшую разность работъ L_o и, слѣдовательно, наибольшее измѣненіе кинетической энергіи маховика

$$\frac{\mu_k r^2}{2}(\omega^2_{max} - \omega^2_{min}) = L_o\,, \text{ откуда } \frac{q_k}{g} = \mu_k = \frac{L_o}{\delta r^2 \omega_0^2}.$$

Интегральная кривая даетъ намъ приближенно кривую измѣненія угловыхъ скоростей. По чертежу видно, что ходъ діаграммы отличается отъ изображенной на *чер. 14* только малымъ масштабомъ. Точно также и вѣсъ махового колеса на единицу площади будетъ лишь немного больше найденнаго въ главѣ I.

24. Другіе способы опредѣленія движенія. Если отказаться отъ допущеній, положенныхъ въ основу расчета вѣса маховика по способу Портера — Радингера и пользуясь исключительно принципомъ Д'Аламбера опредѣлять движеніе, то придется столкнуться съ большими затрудненіями. Такъ, тѣ положенія кривошипа, при которыхъ угловая скорость его имѣетъ наибольшее и наименьшее значенія и знаніе которыхъ необходимо для расчета вѣса маховика, могутъ быть опредѣлены лишь при помощи послѣдовательныхъ приближеній и длинныхъ вычисленій. Если же приведенный вѣсъ маховика уже извѣстенъ, то измѣненія угловой скорости могутъ быть опредѣлены при помощи довольно длинныхъ вычисленій, если для одного какого-либо положенія кривошипа извѣстна угловая его скорость, напр. для начальнаго положенія 1 дано ω_1.

Дальнѣйшее опредѣленіе движенія машины сводится къ ариѳметическому интегрированію дифференціальнаго уравненія (11), для чего можно воспользоваться двумя способами: способомъ конечныхъ разностей и способомъ Рунге.

Первый изъ нихъ основывается на замѣнѣ дифференціаловъ конечными разностями. Подсчитавъ по ω_1 приближенно періодъ машины T *сек.* $= \frac{2\pi}{\omega}$, т. е. время одного ея оборота, разобьемъ этотъ періодъ на нѣсколько (16, или больше) равныхъ частей, каждая продолжительностью τ *сек.* Зная начальную скорость ω_1, можемъ вычислить угловое ускореніе ε въ начальный моментъ

$$\varepsilon_1 = \frac{P_1 - Q_1 \cdot \omega_1^2}{\mu_1 r}.$$

Предполагая, что въ теченіе малаго промежутка времени τ это ускореніе измѣняется незначительно, вычислимъ угловую скорость ω_2 и уголъ поворота кривошипа φ_2 къ концу этого промежутка времени:

$$\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon_1 \tau \qquad ; \qquad \varphi_2 = \omega_1 \tau + \varepsilon_1 \frac{\tau^2}{2}.$$

Тотчасъ можемъ опредѣлить угловое ускореніе въ концѣ промежутка τ изъ уравненія:

$$\varepsilon_2 = \frac{P_2 - Q_2 \cdot \omega_2^2}{\mu_2 r},$$

гдѣ P_2, Q_2 и μ_2 суть значенія, соотвѣтствующія углу поворота φ_2 и легко опредѣляемыя изъ построенныхъ діаграммъ.

Послѣ этого можемъ внести поправку: вмѣсто того, чтобы считать ε_1 постояннымъ, будемъ считать за постоянное угловое ускореніе въ теченіи τ среднюю ариѳметическую изъ ε_1 и ε_2, т. е.

$$\varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2},$$

по которой и вычислимъ болѣе правильную угловую скорость ω_{12} и уголъ поворота φ_{12}. Послѣ этого дѣлаемъ новый шагъ, предполагая, что протекло опять τ *сек.* И т. д., пока не исчерпаемъ всего періода.

Еще большую сравнительно съ этимъ степень точности даетъ намъ вычислительный способъ проф. К. Рунге [1]). Чтобы воспользоваться имъ перепишемъ основное дифференціальное уравненіе такъ:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{P(\varphi) - Q(\varphi) \cdot \omega^2}{r.\mu(\varphi)} \qquad ; \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega.$$

Кромѣ того намъ даны начальныя данныя: при $t = 0$; $\varphi = \varphi_1$; $\omega = \omega_1$. Также даны (графически) функціи P, Q и μ отъ φ.

Выберемъ опять нѣкоторый промежутокъ времени τ и вычислимъ

---

1) См. Forsyth, Treatise on Differential Equations, 3-ье изданіе, Лондонъ 1903 г., стр. 51—54.

слѣдующія 4 приращенія угловой скорости (d_1, d_2, d_3, d_4) и 4 угла поворота (δ_1, δ_2, δ_3 и δ_4):

$$d_1 = \frac{P(\varphi_1) - Q(\varphi_1) \cdot \omega_1^2}{r.\mu(\varphi_1)} \cdot \tau \qquad \delta_1 = \omega_1 \cdot \tau$$

$$d_2 = \frac{P(\varphi_1 + 0{,}5\,\delta_1) - Q(\varphi_1 + 0{,}5\,\delta_1) \cdot (\omega_1 + 0{,}5\,d_1)^2}{r\mu(\varphi_1 + 0{,}5\,\delta_1)} \cdot \tau \qquad \delta_2 = (\omega_1 + 0{,}5\,d_1) \cdot \tau$$

$$d_3 = \frac{P(\varphi_1 + 0{,}5\,\delta_2) - Q(\varphi_1 + 0{,}5\,\delta_2) \cdot (\omega_1 + 0{,}5\,d_2)^2}{r\mu(\varphi_1 + 0{,}5\,\delta_2)} \cdot \tau \qquad \delta_2 = (\omega_1 + 0{,}5\,d_2) \cdot \tau$$

$$d_4 = \frac{P(\varphi_1 + \delta_3) - Q(\varphi_1 + \delta_3) \cdot (\omega_1 + d_3)^2}{r\mu(\varphi_1 + \delta_3)} \cdot \tau \qquad \delta_4 = (\omega_1 + d_3) \cdot \tau$$

Послѣ этого можемъ вычислить истинныя приращенія угла поворота $\Delta\varphi$ и угловой скорости $\Delta\omega$, происшедшія въ теченіе промежутка времени τ, по формуламъ:

$$\Delta\varphi = \frac{\delta_1 + \delta_4}{6} + \frac{\delta_2 + \delta_3}{3} \quad ; \quad \Delta\omega = \frac{d_1 + d_4}{6} + \frac{d_2 + d_3}{3},$$

которыя точны до членовъ, содержащихъ τ въ пятой и высшихъ степеняхъ.

По приращеніямъ вычислимъ значенія угла поворота φ_2 и угловой скорости ω_2, соотвѣтствующія концу промежутка времени τ:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi \quad ; \quad \omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega.$$

Послѣ этого дѣлаемъ новый шагъ, вычисляя φ_3 и ω_3 къ моменту времени $\tau + \tau$, и т. д., пока не исчерпаемъ весь періодъ.

Высокая степень точности этого способа позволяетъ брать меньшее число интерваловъ, однако надо не забывать, что цѣлью является построеніе кривой угловыхъ скоростей, а для этого необходимо извѣстное количество точекъ, зависящее отъ характера измѣненія угловой скорости (напр. для одноцилиндровой паровой машины двойного дѣйствія неправильно брать число точекъ меньше 8, такъ какъ въ теченіе оборота угловая скорость имѣетъ два максимума и два минимума). Количество вычисленій гораздо больше, поэтому способъ этотъ слѣдуетъ примѣнять лишь тогда, когда требуется чрезвычайная степень точности, едва ли умѣстная при графическомъ исполненіи подготовительныхъ операцій.

25. Общіе выводы. Допустимость приближенныхъ рѣшеній. Если точное примѣненіе принципа Д'Аламбера къ изслѣдованію движенія шарнирныхъ механизмовъ ведетъ къ столь сложнымъ вычисленіямъ, то интересно выяснить, какія погрѣшности влекутъ за собою приближенные методы Портера-Радингера и изложенный въ п. 15. Для этого разберемъ тѣ допущенія, которыя положены въ ихъ основу. Главнымъ и необходимымъ является *пренебреженіе измѣненіями средней скорости машины* при учетѣ вліянія массъ механизма (шатуна и ползуна). Въ методѣ Портера—Радингера это обозначаетъ, что мы пренебрегаемъ силами инерціи начальнаго движенія механизма и измѣненіями силъ инерціи постояннаго движенія, вызываемыми колебаніями угловой скорости. Лишь въ учетѣ силъ инерціи махового колеса принимаются во вниманіе измѣненія средней его скорости. Въ методѣ п. 15 это обозначаетъ, что мы пренебрегаемъ тѣми измѣненіями кинетической энергіи механизма, которыя вызываются измѣненіемъ средней угловой скорости главнаго звена. Такъ какъ въ методѣ Портера—Радингера мы приводимъ внѣшнія силы и силы инерціи къ ведущей точкѣ (вмѣстѣ или порознь, это безразлично), а затѣмъ находимъ работу этихъ силъ, и такъ какъ работа силы инерціи есть ни что иное, какъ измѣненіе живой силы, то оба сравниваемые приближенные методы въ этомъ отношеніи равноцѣнны; слѣдовательно, разсматриваемое допущеніе дастъ въ нихъ одинаковыя погрѣшности, причемъ для метода п. 15 эту погрѣшность легко найти.

Пусть μ будетъ приведенная масса частей механизма въ тотъ моментъ, когда угловая скорость главнаго звена имѣетъ наибольшую (или наименьшую) величину

$$\omega_{max} = \omega_0 \left(1 + \frac{\delta}{2}\right).$$

Точная величина кинетической энергіи механизма равна въ этомъ случаѣ:

$$\frac{\mu\, \omega^2_{max}}{2} = \frac{\mu\, \omega_0^2}{2}\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^2,$$

а вмѣсто этого мы беремъ лишь

$$\frac{\mu\, \omega_0^2}{2}.$$

Слѣдовательно, относительная погрѣшность равна

$$\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^2 - 1 = \frac{\delta\,(4 + \delta)}{4}.$$

Если δ мало, то квадратомъ можно пренебречь, и тогда относительная погрѣшность будетъ равна δ (напр., если $\delta = 0{,}01$, то 1%).

Но это еще не обозначаетъ, что относительная погрѣшность въ опредѣленіи вѣса махового колеса также будетъ равна δ; смотря по тому, какова величина приведенной массы въ моменты ω_{max} и ω_{min}, какова величина средней угловой скорости и наибольшей избыточной работы внѣшнихъ силъ,—можно получить любую относительную погрѣшность въ опредѣленіи приведеннаго вѣса маховика.

Напр., въ тихоходныхъ двигателяхъ или даже быстроходныхъ, но четырехтактныхъ двигателяхъ эта погрѣшность можетъ быть равна нулю даже для болѣе значительныхъ δ. Наоборотъ, въ машинахъ, неравномѣрность движенія которыхъ обусловливается главнымъ образомъ тяжелыми возвратно движущимися массами, какъ напр. въ быстроходныхъ рамныхъ лѣсопилкахъ, эта погрѣшность будетъ близка къ δ.

Второе допущеніе, которое мы дѣлали какъ въ изложеніи метода Портера—Радингера, такъ и въ п. 15, заключалось въ приближенномъ учетѣ силъ инерціи и кинетической энергіи постояннаго движенія шатуна. Для упрощенія графическихъ построеній мы прибавляли нѣкоторую долю вѣса шатуна къ вѣсу системы ползуна, хотя могли бы совершенно точно найти измѣненія кинетической энергіи или приведенную силу инерціи шатуна. Слѣдовательно, это второе допущеніе является не необходимымъ, а лишь упрощающимъ, обусловленнымъ какъ незначительностью вѣса шатуна по сравненію съ вѣсомъ системы ползуна, такъ и ничтожностью вліянія этого допущенія. Не будемъ заниматься точнымъ учетомъ этого вліянія, такъ какъ ничтожность погрѣшности ясна изъ сказаннаго въ п. 12. При проектированіи новой машины вообще вѣса частей механизма гадательны и этимъ оправдываются введенныя упрощенія. Если-же машина уже построена и нужно теоретически изслѣдовать обстоятельства ея движенія съ возможною точностью, то ничто не мѣшаетъ прибѣгнуть къ точнымъ построеніямъ.

Итакъ, пользованіе приближенными методами расчета вѣса маховика допустимо въ машинахъ-двигателяхъ съ высокою степенью равномѣрности вращенія, т. е. съ коефиціентомъ неравномѣрности менѣе 0,02. Приведенный вѣсъ маховика получается при этомъ всегда съ небольшимъ запасомъ, напр. для паровыхъ машинъ можно считать этотъ запасъ приблизительно равнымъ половинѣ процента на каждую сотую величины δ[1]). Такъ, для $\delta = 0{,}1$ погрѣшность будетъ около 5%, т. е. расчетный приведенный вѣсъ маховика окажется приблизительно на 5% тяжелѣе при пользованіи приближенными методами. Такая погрѣшность въ сторону запаса вполнѣ допустима, если принять во вниманіе грубо-приближенный учетъ массы ручекъ махового колеса и другія допущенія.

Если цѣлью является не расчетъ приведеннаго вѣса маховика, а изслѣдованіе неравномѣрности вращенія уже построенной машины, то примѣненіе закона живыхъ силъ быстрѣе и проще ведетъ къ результату,—построенію діаграммы угловыхъ скоростей,—въ тѣхъ случаяхъ, когда треніемъ въ шарнирахъ можно пренебречь. Если машина на-

---

[1]) Указанныя здѣсь величины погрѣшности получены графически при помощи діаграммы массъ и работъ *черт. 12*. Для этого достаточно провести на ней сначала касательныя, соотвѣтствующія средней скорости машины, а затѣмъ нѣсколько касательныхъ для различныхъ δ. Сравнивая полученныя отрѣзки L_0, будемъ знать погрѣшность, вызываемую главнымъ допущеніемъ.

столько быстроходна, что треніе, вызываемое большими силами инерціи, должно быть принято во вниманіе, то приходится пользоваться принципомъ Д'Аламбера, опредѣляя для каждаго положенія механизма давленія въ шарнирахъ и силы тренія. Если цѣлью является опредѣленіе коефиціента полезнаго дѣйствія машины, то наиболѣе простое рѣшеніе можно получить, введя подобно *Дженкину*[1]) допущеніе, что кривошипъ вращается равномѣрно съ средней угловой скоростью; это допущеніе опредѣляетъ ускоренія всѣхъ точекъ и, слѣдовательно, силы инерціи и давленія въ шарнирахъ. Пренебреженіе измѣненіями угловой скорости допустимо въ машинахъ съ высокой равномѣрностью вращенія ($\delta < 0{,}02$).

Въ болѣе точныхъ расчетахъ и для машинъ съ малой равномѣрностью вращенія ($\delta > 0{,}02$) можно опредѣлить сначала измѣненія угловой скорости машины, пользуясь закономъ живой силы и считая приведенное сопротивленіе тренія постояннымъ; затѣмъ посредствомъ графическаго дифференцированія можно построить діаграмму угловыхъ ускореній. Эти двѣ діаграммы вполнѣ опредѣляютъ мгновенныя ускоренія всѣхъ точекъ механизма и, слѣдовательно, силы инерціи всѣхъ звеньевъ; остается найти давленія въ шарнирахъ и приведенныя силы тренія. Мы не будемъ подробно описывать всѣ необходимыя при этомъ построенія, отсылая интересующихся къ статьѣ Е. Г. Кротова [2]) автору которой я имѣлъ честь оказать помощь нѣсколькими указаніями.

Наконецъ, при опредѣленіи движенія при помощи одного изъ способовъ, изложенныхъ въ п. 24, можно для каждаго положенія машины вносить поправку на приведенную силу тренія соглашеніяхъ.

---

[1]) Jenkin, Trans. of the Royal Soc. of Edinburgh T. XXVIII стр. 1—32, 703—715.

[2]) Кротовъ Е. Г., Графодинамическое изслѣдованіе кривошипнаго механизма рамной лѣсопилки. Вѣстникъ Инженеровъ за 1915 г. № 22 стр. 1055—1065.

ГЛАВА III.

Аналитическое опредѣленіе періодическихъ измѣненій скорости машинъ.

26. Гармоническіе ряды. Изложенные въ главахъ I и II методы опредѣленія неравномѣрности основывались почти исключительно на графическихъ построеніяхъ. Главный недостатокъ графическаго метода состоитъ въ томъ, что при его помощи затруднительно изслѣдовать вліяніе измѣненій какого-либо элемента на равномѣрность вращенія машины; въ самомъ дѣлѣ, для того чтобы такое изслѣдованіе произвести, нужно взять какой-либо конкретный примѣръ и въ немъ измѣнять интересующій насъ элементъ, опредѣляя каждый разъ результатъ —коефиціентъ неравномѣрности; такое изслѣдованіе, какъ оно ни длинно, все-таки будетъ имѣть значеніе только для даннаго конкретнаго примѣра, ибо при другихъ комбинаціяхъ элементовъ результатъ можетъ получиться иной.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда графическій методъ затушевываетъ, смѣшиваетъ воедино вліяніе нѣсколькихъ элементовъ, или когда, вслѣдствіе осложненія задачи или необходимости выбрать отдѣльные элементы наивыгоднѣйшимъ образомъ, онъ становится не примѣнимымъ, —на помощь долженъ явиться анализъ, все разлагающій на составныя части, дающій намъ даръ предвидѣнія.

При установившемся движеніи машины всѣ явленія, съ которыми намъ придется имѣть дѣло, измѣняются періодически, такъ какъ по истеченіи опредѣленнаго числа оборотовъ машина проходитъ черезъ начальное положеніе съ прежней скоростью и ускореніемъ; мы уже видѣли, что элементы, опредѣляющіе движеніе машины,—силы и ихъ работа, а также приведенная масса всѣхъ звеньевъ,—періодически повторяются; вслѣдствіе этого и измѣненія угловой скорости повторяются періодически. Для аналитическаго выраженія періодически измѣняющагося явленія наиболѣе пригодны ряды періодическихъ функцій; для нашихъ цѣлей вполнѣ достаточно будетъ пользованіе рядами тригонометрическихъ функцій или рядами Фурье, состоящими изъ синусовъ и косинусовъ отъ независимой перемѣнной, которою для машины является уголъ поворота φ кривошипа.

Обозначимъ буквою Φ угловой *періодъ* машины, т. е. тотъ уголъ ея поворота, по прошествіи котораго машина проходитъ черезъ начальное положеніе съ начальной скоростью и ускореніемъ. Тогда общій членъ ряда Фурье будетъ имѣть видъ:

$$a_i \sin \frac{2\pi}{\Phi} i\varphi \text{ и } b_i \cos \frac{2\pi}{\Phi} i\varphi,$$

гдѣ a_i и b_i суть амплитуды данной гармонической, порядокъ которой есть i, причемъ i есть цѣлое число.

Если намъ встрѣтится сумма двухъ членовъ, синусоиды и косинусоиды одинаковаго порядка, то мы можемъ ихъ сложить въ одну синусоиду или косинусоиду, такъ какъ

$$a_i \sin \frac{2\pi}{\Phi} i\varphi + b_i \cos \frac{2\pi}{\Phi} i\varphi = \pm A_i \sin\left(\frac{2\pi}{\Phi} i\varphi \pm \alpha_i\right)$$

причемъ

$$A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}; \quad tg\ \alpha_i = \left[\frac{b_i}{a_i}\right].$$

Уголъ α_i называется *фазой* данной гармонической; онъ всегда меньше 90°, такъ какъ опредѣляется абсолютными значеніями амплитудъ a_i и b_i. Что-же касается знаковъ амплитуды A_i и фазы α_i, то легко составить на основаніи законовъ тригономегріи слѣдующія соотношенія: $+a_i$, $+b_i = +A_i$, $+\alpha_i$, т. е. положительныя амплитуды a_i и b_i даютъ положительныя и амплитуду A_i, и фазу α_i; $+a_i$, $-b_i = +A_i$, $-\alpha_i$; $-a_i$, $+b_i = -A_i$, $-\alpha_i$; $-a_i$, $-b_i = -A_i$, $+\alpha_i$.

Точно также

$$a_i \sin \frac{2\pi}{\Phi} i\varphi + b_i \cos \frac{2\pi}{\Phi} i\varphi = \pm B_i \cos\left(\frac{2\pi}{\Phi} i\varphi \pm \beta_i\right),$$

причемъ

$$B_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}; \quad tg\ \beta_i = \left[\frac{a_i}{b_i}\right],$$

а знаки берутся: $+a_i$, $+b_i = +B_i$, $-\beta_i$; $+a_i$, $-b_i = -B_i$, $-\beta_i$; $-a_i$, $+b_i = +B_i$, $+\beta_i$; $-a_i$, $-b_i = -B_i$, $+\beta_i$.

Какъ извѣстно, каждая однозначная функція, имѣющая конечное число максимумовъ и минимумовъ и конечное число конечныхъ разрывовъ, можетъ быть выражена рядомъ Фурье.

Если функція $f(\varphi)$ имѣетъ періодъ Φ, то можемъ написать:

$$f(\varphi) = b_0 + a_1 \sin \frac{2\pi}{\Phi} \varphi + a_2 \sin \frac{2\pi}{\Phi} 2\varphi + a_3 \sin \frac{2\pi}{\Phi} 3\varphi + \ldots$$

$$+ b_1 \cos \frac{2\pi}{\Phi} \varphi + b_2 \cos \frac{2\pi}{\Phi} 2\varphi + b_3 \frac{2\pi}{\Phi} 3\varphi + \ldots =$$

$$= b_0 + \Sigma\, a_i \sin \frac{2\pi}{\Phi} i\varphi + \Sigma\, b_i \cos \frac{2\pi}{\Phi} i\varphi.$$

При этомъ для опредѣленія амплитудъ служатъ интегралы:

$$b_0 = \frac{1}{\Phi} \int_0^\Phi f(\varphi)\, d\varphi;\ a_i = \frac{2}{\Phi} \int_0^\Phi \sin \frac{2\pi}{\Phi} i\varphi f(\varphi)\, d\varphi;\ b_i = \frac{2}{\Phi} \int_0^\Phi \cos \frac{2\pi}{\Phi} i\varphi . f(\varphi) d\varphi.$$

Если амплитуды удовлетворяютъ этимъ уравненіямъ, то можно утверждать, что средняя квадратичная ошибка между дѣйствительной функціей $f(\varphi)$ и приближеннымъ ея выраженіемъ посредствомъ ряда Фурье съ конечнымъ, произвольно взятымъ числомъ членовъ, будетъ имѣть наименьшую возможную при данномъ числѣ членовъ величину.

Въ томъ случаѣ, когда функція $f(\varphi)$ задана графически, опредѣленіе амплитудъ можетъ быть произведено двумя способами: либо при помощи механическихъ приборовъ—*анализаторовъ*, либо приближеннымъ вычисленіемъ интеграловъ. Мы не будемъ здѣсь подробно останавливаться на описаніи гармоническихъ анализаторовъ, такъ какъ владѣлецъ прибора въ описаніяхъ и спеціальной литературѣ долженъ почерпнуть всѣ свѣдѣнія, необходимыя для пользованія приборомъ [1]). Укажемъ только, что изъ приборовъ, имѣющихся въ продажѣ, гармоническій анализаторъ *Майкельсона* и *Страттона* [2]) является наиболѣе сложнымъ, но за то и наиболѣе полнымъ приборомъ; онъ позволяетъ не только разложить въ рядъ съ числомъ членовъ 20 или 80, кривую, которую нужно при этомъ вырѣзать изъ цинковой дощечки, но также и сложить любой гармоническій рядъ, т. е. онъ производитъ какъ прямое, такъ и обратное дѣйствіе; обращеніе съ нимъ, по словамъ лицъ, видѣвшихъ его, довольно затруднительно и стоитъ онъ больших денегъ.

Анализаторъ Генрици [3]) до 1910 года былъ наиболѣе употре-

[1]) Описаніе значительнаго числа предложенныхъ для гармоническаго анализа приборовъ и идей можно найти у Orlich, Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven, Брауншвейгъ 1906. Тамъ-же указаны и устарѣвшіе методы ариеметическаго гармоническаго анализа. Общія основанія гармоническаго анализа можно найти въ книгахъ, проф. Крыловъ А. Н. О приближенныхъ вычисленіяхъ. СПБ. 1911 г. стр. 150—222; Runge, Theorie und Praxis der Reihen, Лейпцигъ 1904 г.

[2]) Michelson and Stratton, A new harmonic Analyser, Philosophical Magazine, т. 45 Январь 1898 г. стр. 85—91; см. также Крыловъ стр. 212 и Runge стр. 164—8 и 181.

[3]) Брошюра, содержащая описаніе и краткую теорію прибора, выписывается отъ г. Coradi—(математически-механическія мастерскія въ г. Цюрихѣ, Швейцарія), изготовляющаго этотъ приборъ. См. также Крыловъ стр. 204—208.

бительнымъ инструментомъ; онъ даетъ за два обвода вычерченной кривой 10 коефиціентовъ при синусахъ и 10 при косинусахъ; кривая должна быть вычерчена такъ, чтобы періодъ ея изображался абсциссой вполнѣ опредѣленной длины (36 см. въ малыхъ приборахъ и 40 въ большихъ); при обводѣ иглою разлагаемой кривой приходится катить довольно тяжелый приборъ по чертежу, что не особенно способствуетъ правильности самаго обвода.

Наконецъ, наиболѣе дешевымъ является анализаторъ Мадера [1]), требующій однако столькихъ обводовъ разлагаемой кривой, сколько членовъ долженъ содержать рядъ. Онъ состоитъ изъ линейки съ зубчатой рейкой и зубчатыми смѣнными колесиками и обыкновеннаго планиметра. Кривая можетъ быть вычерчена въ любомъ масштабѣ.

27. Ариѳметическій способъ разложенія въ рядъ. Изъ ариѳметическихъ методовъ гармоническаго анализа опишемъ наиболѣе простой и точный методъ Рунге. Основывается онъ на вычисленіи опредѣленныхъ интеграловъ (стр. 75) по способу трапецій. Раздѣлимъ періодъ Φ на $4n$ равныхъ частей и пусть $y_0, y_1, y_2 \ldots y_k \ldots\ldots y_{4n-1}, y_{4n}$ будутъ значенія функціи $f(\varphi)$, соотвѣтствующія равноотстоящимъ абсциссамъ $O, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_k \ldots \Phi$, причемъ $y_{4n} = y_0$; тогда для опредѣленія амплитудъ будемъ имѣть:

$$b_0 = \frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{4n} y_k\,;\quad a_i = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{4n} y_k \sin i\varphi_k \frac{2\pi}{\Phi}\,; b_i = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{4n} y_k \cos i\varphi_k \frac{2\pi}{\Phi}\,.$$

Вычисленіе этихъ суммъ облегчается тѣмъ, что между 0 и 2π есть четыре значенія аргумента, для которыхъ синусъ или косинусъ имѣетъ одинаковую абсолютную величину; кромѣ того имѣется цѣлый рядъ соотношеній для тригонометрическихъ функцій дополнительныхъ и пополнительныхъ дугъ. Такъ напр., если $4n = 12$, то величина $\varphi_1\, 2\pi/\Phi = 30°$, а принявъ во вниманіе всѣ равныя абсолютныя величины входящихъ въ вычисленіе тригонометрическихъ функцій, получимъ слѣдующія формулы для опредѣленія 12 амплитудъ $b_0 \ldots a_5, b_1 \ldots b_0$:

$$12\,b_0 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11}\,;$$

$$6\,a_1 = y_3 - y_9 + 0{,}5\,(y_1 + y_5 - y_7 - y_{11}) + 0{,}866\,(y_2 + y_4 - y_8 - y_{10});$$

$$6\,b_1 = y_0 - y_6 + 0{,}5\,(y_2 + y_{10} - y_4 - y_8) + 0{,}866\,(y_1 + y_{11} - y_5 - y_7);$$

$$6\,a_2 = 0{,}866\,(y_1 + y_2 + y_7 + y_8 - y_4 - y_5 - y_{10} - y_{11});$$

$$6\,b_2 = y_0 + y_6 - y_3 - y_9 + 0{,}5\,(y_1 + y_5 + y_7 + y_{11} - y_2 - y_4 - y_8 - y_{10});$$

$$6\,a_3 = y_1 + y_5 + y_9 - y_3 - y_7 - y_{11};$$

$$6\,b_3 = y_0 + y_4 + y_8 - y_2 - y_6 - y_{10};$$

---

[1]) Крыловъ. прибл. выч. стр. 208—211. Mader. Ein einfacher harmonischer Analysator mit beliebiger Basis. E. T. Z. за 1909 годъ № 36 стр. 847—849.

$$6\,a_4 = 0{,}866\,(y_1 + y_4 + y_7 + y_{10} - y_2 - y_5 - y_8 - y_{11});$$
$$6\,b_1 = y_0 + y_3 + y_6 + y_9 + 0{,}5\,(-y_1 - y_2 - y_4 - y_5 - y_7 - y_8 - y_{10} - y_{11})$$
$$6\,a_5 = y_3 - y_9 + 0{,}5\,(y_1 + y_5 - y_7 - y_{11}) + 0{,}866\,(y_8 + y_{10} - y_2 - y_4);$$
$$6\,b_5 = y_0 - y_6 + 0{,}5\,(y_2 + y_{10} - y_1 - y_8) + 0{,}866\,(y_5 + y_7 - y_1 - y_{11});$$
$$12\,b_6 = y_0 - y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + y_6 - y_7 + y_8 - y_9 + y_{10} - y_{11}.$$

Для того, чтобы упростить весь комплексъ необходимыхъ суммированій, Рунге предложилъ свою таблицу вычисленій [1]), благодаря которой работа занимаетъ минимумъ времени. Лучше всего познакомиться съ этой таблицей на примѣрѣ. На *чер. 24* (стр. 81) изображено пять діаграммъ работы внѣшнихъ силъ въ четырехтактномъ дизель-двигателѣ; наибольшее давленіе на индикаторныхъ діаграммахъ, положенныхъ въ основу для вычерчиванія этого чертежа, было 33 кг./кв. см., ходъ принятъ равнымъ 1 метру, вѣсъ возвратно движущихся частей $=$ 0,5 кг./кв. см. (двигатель вертикальный), а отношеніе радіуса кривошипа къ длинѣ шатуна 1:5. Наклонныя линіи изображаютъ работу постояннаго сопротивленія при установившемся движеніи, а періодъ равенъ 4π. Верхняя кривая I даетъ работу силъ при полной нагрузкѣ (100%) машины, II при 68,3%; III при 44,1%, IV при 25,2% и V при холостомъ ходѣ, т. е. 0% нагрузки. По этой діаграммѣ легко находить избытокъ работы движущихъ силъ для любого положенія, стоитъ лишь взять съ чертежа разность ординатъ, изображающихъ работу движущей силы и сопротивленія. Измѣривши 12 равноотстоящихъ ординатъ кривой I по масштабу, выпишемъ значенія ихъ, $y_0 = 0$; $y_1 = 6{,}68$ кг./кв. см. и т. д. въ таблицу для разложенія діаграммы въ рядъ Фурье (см. слѣд. стр.).

Благодаря числамъ частнаго примѣра, приведенная здѣсь таблица не требуетъ никакихъ поясненій. Итакъ, діаграмма I избытковъ работъ можетъ быть аналитически выражена рядомъ:

$$L_I = b_0 + \Sigma a_i \sin \frac{2\pi}{\Phi} i\varphi + \Sigma b_i \cos \frac{2\pi}{\Phi} i\varphi =$$

$$= 6{,}49 + 2{,}14 \sin \frac{\varphi}{2} + 0{,}53 \sin \varphi + 0{,}04 \sin \frac{3}{2}\varphi -$$

$$- 0{,}06 \sin 2\varphi - 0{,}04 \sin \frac{5}{2}\varphi - 1{,}96 \cos \frac{\varphi}{2} - 1{,}69 \cos \varphi -$$

$$- 1{,}13 \cos \frac{3}{2}\varphi - 0{,}80 \cos 2\varphi - 0{,}62 \cos \frac{5}{2}\varphi - 0{,}29 \cos 3\varphi \text{ въ } \frac{\text{кг.}}{\text{кв. см.}} \text{ м.}$$

---

[1]) Таблица для 6 гармоническихъ имѣется въ „Theorie und Praxis der Reihen" а для 12 гармоническихъ въ C. Runge und F. Emde, Rechnungsformular zur Zerlegung einer empirisch gegebenen periodischen Funktion in Sinuswellen и книжка съ объясненіями къ формуляру (Брауншвейгъ, 1913). Самый формуляръ представляетъ изъ себя нѣсколько экземпляровъ листа съ напечатанными символами y_0, y_1 и т. д. и съ пустыми мѣстами для вписыванія цифръ, ихъ складыванія, вычитанія и т. д.

Таблица для разложенія діаграммы въ рядъ Фурье [1]).

$y_1=+6{,}68$	$y_2=+9{,}68$	$y_3=+9{,}72$	$y_4=+8{,}97$	$y_5=+8{,}18$
$y_{11}=+3{,}67$	$y_{10}=+4{,}88$	$y_9=+5{,}60$	$y_8=+6{,}22$	$y_7=+6{,}81$
Сум.: $c_1=+10{,}35$	$c_2=+14{,}56$	$c_3=+15{,}32$	$c_4=+15{,}19$	$c_5=+14{,}99$
Разн.: $d_1=+3{,}01$	$d_2=+4{,}80$	$d_3=+4{,}12$	$d_4=+2{,}75$	$d_5=+1{,}37$

$y_0=\ \ 0$	$c_1=+10{,}35$	$c_2=+14{,}56$	$d_1=+3{,}01$	$d_2=+4{,}80$
$y_6=+7{,}42$	$c_5=+14{,}99$	$c_4=+15{,}19$	$d_5=+1{,}37$	$d_4=+2{,}75$
Сум.: $s_0=+7{,}42$	$s_1=+25{,}34$	$s_2=+29{,}75$	$s_3=+4{,}38$	$s_4=+7{,}55$
Разн.: $r_0=-7{,}42$	$r_1=-4{,}64$	$r_2=-0{,}63$	$r_3=+1{,}64$	$r_4=+2{,}05$

$s_0=+7{,}42$	$s_1=+25{,}34$	$-{}^1/_2\,s_2=-14{,}88$	${}^1/_2\,s_1=+12{,}67$	$r_0=-7{,}42$
$s_2=+29{,}75$	$c_3=+15{,}32$	$s_0=+7{,}42$	$-c_3=-15{,}32$	$-r_2=+0{,}63$
Сумма: $\left\{\begin{array}{l} s_0+s_2=+37{,}17 \\ s_1+c_3=+40{,}66 \end{array}\right.$		$-{}^1/_2\,s_2+s_0=-7{,}46$ ${}^1/_2\,s_1-c_3=-2{,}65$		$6b_3=-6{,}79$ (Сумма)
Сумма: $12b_0=+77{,}83$		$6b_2=-10{,}11$		$r_1=-4{,}64$
Разность: $12b_6=-3{,}49$		$6b_4=-4{,}81$		$0{,}866\,r_1=-4{,}02$

$s_3=+4{,}38$	${}^1/_2\,r_2=-0{,}32$	${}^1/_2\,s_3=+2{,}19$	$r_3=+1{,}64$	$s_4=+7{,}55$
$-d_3=-4{,}12$	$r_0=-7{,}42$	$d_3=+4{,}12$	$0{,}866\,r_3=+1{,}42$	$0{,}866\,s_4=+6{,}54$
$6a_3=+0{,}26$	Сум.$=-7{,}74$	Сум.$=+6{,}31$	$0{,}866\,r_3=+1{,}42$	$r_4=+2{,}05$
(Сумма)	$0{,}866\,r_1=-4{,}02$	$0{,}866\,s_4=+6{,}54$	$0{,}866\,r_4=+1{,}78$	$0{,}866\,r_4=+1{,}78$
Сумма: $6b_1=-11{,}76$		$6a_1=+12{,}85$	$6a_2=+3{,}20$	
Разность: $6b_5=-3{,}72$		$6a_5=-0{,}23$	$6a_4=-0{,}36$	

Для того чтобы провѣрить правильность произведенныхъ вычисленій, а также удостовѣриться, что рядъ съ взятымъ числомъ членовъ

[1]) Не составитъ труда переписать эту таблицу на болѣе толстой бумагѣ и вырѣзать цифры приведеннаго въ ней частнаго примѣра. Получится маска, подъ которую надо подкладывать бѣлую бумагу, чтобы пользоваться схемой вычисленія сколько угодно разъ.

достаточно точно выражаетъ діаграмму, надо провѣрить правильность тождества:

$$y_0^2 + y_1^2 + \ldots y_k^2 + \ldots y_{11}^2 = 6. \left[2\left(b_0^2 + b_6^2\right) + a_1^2 + \right.$$
$$\left. + a_2^2 + \ldots + a_5^2 + b_1^2 + \ldots + b_5^2\right].$$

Если всѣ числа трехзначныя, то возведенія въ квадратъ не представляютъ труда при пользованіи таблицами квадратовъ; въ нашемъ примѣрѣ можемъ пренебречь тѣми гармоническими, амплитуды которыхъ менѣе 0,1, и тогда получимъ: 588,94 = 589,32, что можно считать за тождества, такъ какъ всѣ предыдущія вычисленія ограничивались тремя значащими цифрами.

Второй способъ провѣрить достаточность числа членовъ ряда заключается въ вычисленіи провѣрочнаго ряда съ большимъ числомъ членовъ. Такъ, пользуясь формуляромъ Рунге, для той же діаграммы I найдемъ рядъ съ 12 гармоническими:

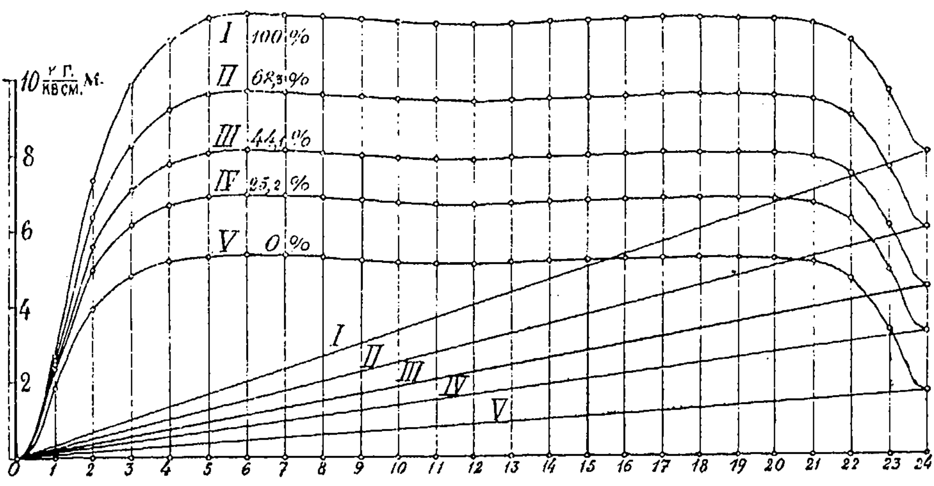
$$L_I = 6{,}46 + 2{,}13 \sin\frac{\varphi}{2} + 0{,}58 \sin\varphi - 0{,}01 \sin\frac{3}{2}\varphi -$$
$$- 0{,}14 \sin 2\varphi - 0{,}14 \sin\frac{5}{2}\varphi - 0{,}20 \sin 3\varphi - 0{,}10 \sin\frac{7}{2}\varphi -$$
$$- 0{,}08 \sin 4\varphi - 0{,}06 \sin\frac{9}{2}\varphi + 0{,}06 \sin 5\varphi - 0{,}01 \sin\frac{11}{2}\varphi -$$
$$- 1{,}94 \cos\frac{\varphi}{2} - 1{,}65 \cos\varphi - 1{,}07 \cos\frac{3}{2}\varphi - 0{,}53 \cos 2\varphi - 0{,}44 \cos\frac{5}{2}\varphi -$$
$$- 0{,}29 \cos 3\varphi - 0{,}18 \cos\frac{7}{2}\varphi - 0{,}19 \cos 4\varphi - 0{,}06 \cos\frac{9}{2}\varphi -$$
$$- 0{,}03 \cos 5\varphi - 0{,}02 \cos\frac{11}{2}\varphi + 0{,}03 \cos 6\varphi.$$

Сравнивая этотъ длинный рядъ съ предыдущимъ, видимъ, что короткій рядъ болѣе или менѣе точенъ только въ первыхъ трехъ гармоническихъ, что вполнѣ понятно, такъ какъ 12 его коефиціентовъ опредѣлены на основаніи только 12 ординатъ діаграммы.

Кромѣ умѣнія разлагать графически заданныя кривыя въ рядъ Фурье надо также научиться производить и обратное дѣйствіе, т. е. быстро по точкамъ начертить кривую, выражаемую даннымъ рядомъ. Это можно сдѣлать графически и ариѳметически. Графическій способъ основывается на графическомъ изображеніи синуса и косинуса при помощи окружности, радіусъ которой равенъ амплитудѣ. Ариѳметическій способъ приводитъ къ таблицѣ, похожей на таблицу для разложенія. Таблица эта будетъ приведена въ концѣ главы при рѣшеніи конкретнаго примѣра. При ея помощи можно также производить провѣрку правильности произведеннаго разложенія.

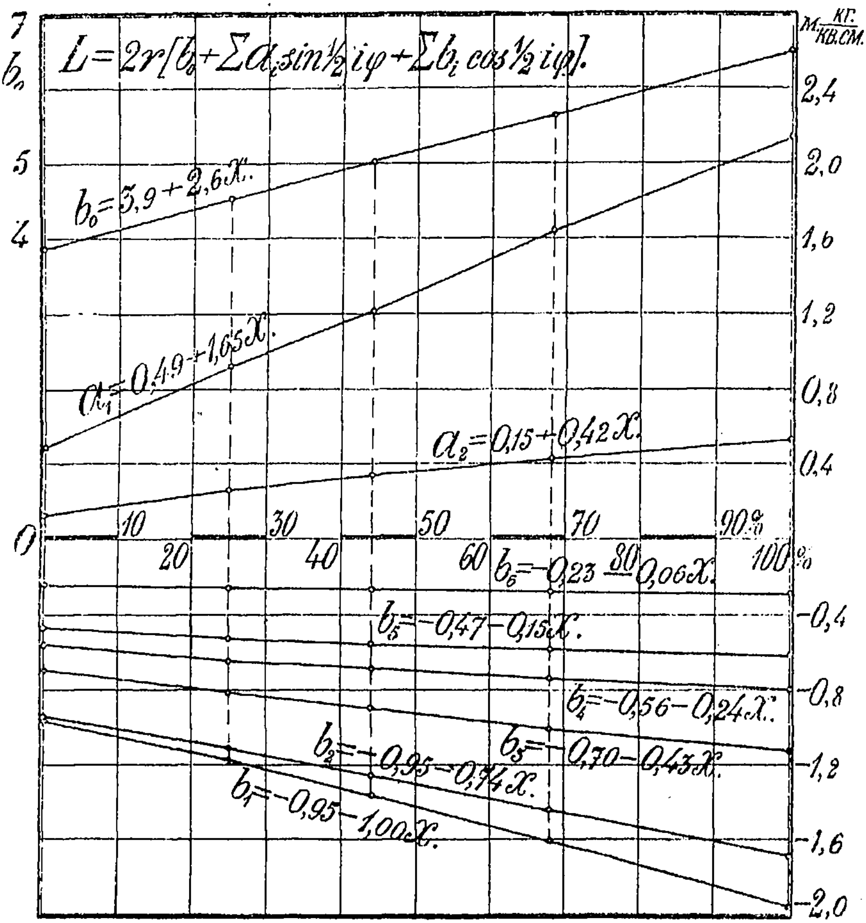
28. Аналитическое выраженіе діаграммы работъ. Послѣ всего сказаннаго въ предыдущемъ п. относительно аналитическаго выраженія періодическихъ явленій, ясенъ дальнѣйшій ходъ нашего аналитическаго изслѣдованія. Мы должны сумѣть выразить при помощи рядовъ Фурье какъ работу всѣхъ силъ въ машинѣ, такъ и приведенную ея массу, найти гармоническій рядъ, выражающій измѣненія угловой скорости машины и наконецъ такъ подобрать приведенный вѣсъ маховика, чтобы эти измѣненія не превосходили желательныхъ предѣловъ.

Что касается избыточной работы L, то мы видѣли въ предыдущемъ п., какимъ образомъ производится опредѣленіе коефиціентовъ ряда. Поэтому здѣсь надо сказать лишь нѣсколько словъ о томъ, какъ возможно шире использовать разложенія, произведенныя для одного конкретнаго случая. Для этого прежде всего надо брать не абсолютныя величины силъ, а отнесенныя къ 1 кв. см. площади поршня. Затѣмъ ходъ машины надо принимать равнымъ 1 метру; если дѣйствительный ходъ машины будетъ не единица, а H м., то работа будетъ пропорціональна H, т. е. $L_h = L_1 . H$.



Чер. 24. Діаграммы работъ дизель-двигателя.

Во многихъ двигателяхъ этихъ двухъ мѣръ вполнѣ достаточно, такъ какъ индикаторная ихъ діаграмма почти одинакова для различныхъ машинъ; такъ напр. въ дизель-двигателяхъ наибольшее давленіе всегда около 30—36 кг./кв. см. Въ такихъ двигателяхъ остается построить нѣсколько діаграммъ работы для различныхъ нагрузокъ двигателя (*на чер. 24* построено 5 діаграммъ), разложить ихъ въ гармоническіе ряды и нанести амплитуды гармоническихъ одинаковаго порядка на графикѣ. Очень часто измѣненія амплитудъ при измѣненіи нагрузки протекаютъ настолько плавно, что вполнѣ допустимо интерполированіе. Для примѣра на *чер.* 25 приведенъ графикъ измѣненія амплитудъ въ зависимости отъ измѣненія нагрузки дизель двигателя. По оси абсциссъ отложены нагрузки двигателя въ процентахъ отъ нормальной, а по оси ординатъ амплитуды a_i, b_i въ масштабѣ, указанномъ на *чер.* 25 справа, и постоянная b_0, масштабъ которой нанесенъ слѣва. Въ основу разложенія положены избытки работъ, изображенные на *чер.* 24 для нагрузокъ: 100 %; 68,3; 44,1; 25,2; 0 %. Разложеніе было произведено по способу Рунге по 12 ординатамъ; изъ *чер.* 25 видно плавное измѣненіе амплитудъ допускающее аналитическое выраженіе каждой амплитуды линейной функціей отъ нагрузки x.



Чер. 25. Зависимость амплитудъ работы дизель-двигателя отъ нагрузки.

Для паровыхъ машинъ проф. Г. Ѳ. Проскура [1]) предложилъ

---

[1]) Г. Ѳ. Проскура. Регулированіе хода машинъ-двигателей часть I. Установившееся движеніе машинъ, маховыя колеса, ихъ расчетъ и конструкція. Извѣстія Харьковскаго Технологическаго Института Императора Александра III. Томъ IV, 1908 г. стр. 3—77. Также и отдѣльнымъ изданіемъ.

поступать слѣдующимъ образомъ: для различныхъ наполненій отъ 0 до 75% вычерчивается индикаторная діаграмма только впуска и расширенія пара для начальнаго давленія 1 кг./кв. см. въ предположеніи, что съ противоположной стороны поршня абсолютная пустота. Для каждой изъ такихъ индикаторныхъ діаграммъ строилась затѣмъ діаграмма касательныхъ силъ и разлагалась въ рядъ Фурье. Пусть для отсѣчки $x\%$ касательное усиліе T_x выражалось рядомъ: $T_x = T_0 + \Sigma T_i \sin i\varphi + \Sigma S_i \cos i\varphi$, гдѣ φ уголъ поворота машины. Если дѣйствительное давленіе свѣжаго пара не 1, а p_c, то касательное усиліе будетъ въ p_c разъ болѣе, т. е. будетъ равно $T_x . p_c = T_0 . p_c + \Sigma T_i\, p_c \sin i\varphi + \Sigma S_i\, p_c \cos i\varphi$. Затѣмъ онъ вычерчивалъ индикаторную діаграмму противодавленія также въ предположеніи, что давленіе мятаго пара равно 1 кг./кв. см. и что предвареніе сжатія равно $y\%$. Разлагая соотвѣтственную касательную діаграмму въ рядъ, будемъ имѣть: $t_y = t_0 + \Sigma t_i \sin i\varphi + \Sigma s_i \cos i\varphi$; если же давленіе мятаго пара будетъ p_m, то получимъ: $t_y . p_m = t_0\, p_m + \Sigma t_i\, p_m \sin i\varphi + \Sigma s_i\, p_m \cos i\varphi$, а полная діаграмма касательныхъ силъ будетъ тогда

$$T_{xy} = (T_0 p_c + t_0 p_m) + \Sigma (T_i\, p_c + t_i\, p_m) \sin i\varphi + \Sigma (S_i\, p_c + s_i\, p_m) \cos i\varphi.$$

Величины T_0, t_0, T_i, S_i, t_i, s_i вычислены имъ по способу Рунге для 12 ординатъ и сведены въ графики (стр. 50, 51 и 52). Помноживши T_{xy} на $r\,d\varphi$ и проинтегрировавъ, мы найдемъ работу L_{xy}, отнесенную къ 1 кв. см. площади поршня, для радіуса кривошипа $r = 0{,}5\,H$ въ видѣ ряда:

$$L_{xy} = 2r\,[A_0\, p_c + a_0\, p_m + \Sigma (A_i\, p_c + a_i\, p_m) \sin i\varphi + \Sigma (B_i\, p_c + b_i\, p_m) \cos i\varphi],$$

при чемъ новые коефиціенты A, a, B, b вычисляются по формуламъ:

$$A_0 = \Sigma \frac{T_i}{2i}; \qquad a_0 = \Sigma \frac{t_i}{2i};$$

$$A_i = \frac{S_i}{2i}; \quad B_i = -\frac{T_i}{2i}; \quad a_i = \frac{s_i}{2i}; \quad b_i = -\frac{t_i}{2i}$$

29. Аналитическое выраженіе приведенной массы. Его легко написать на основаніи того, что было выведено въ п. 11; на стр. 46 было ужъ найдено точное выраженіе (ур. 8) приведеннаго вѣса γ частей механизма

$$\gamma = q_1 + q_2\frac{b}{l} + \left(q_3 + q_2\frac{a}{l}\right)\left(\frac{Ob'}{OA}\right)^2 - q_2\left(\frac{ab}{l^2} - \frac{\rho^2}{l^2}\right)\left(\frac{Ab'}{OA}\right)^2;$$

причемъ q_1—обозначаетъ приведенный къ пальцу кривошипа вѣсъ махового колеса и системы коренного вала, q_2 — вѣсъ шатуна, q_3 — системы ползуна (поршень, скалка, ползунъ); всѣ вѣса отнесены къ единицѣ площади поршня; a и b суть разстоянія центра тяжести шатуна отъ пальцевъ кривошипа и ползуна, l — длина шатуна, а ρ — радіусъ его инерціи относительно центра тяжести.

Слѣдовательно намъ остается найти аналитическое выраженіе для перемѣнныхъ отношеній Ob' и Ab' къ OA, что не трудно сдѣлать изъ разсмотрѣнія угловъ треугольника OAb' на *чер. 12.* Обозначивъ уголъ AOB поворота кривошипа изъ мертваго положенія буквой φ, уголъ ABO наклона шатуна къ оси машины буквой ψ, будемъ имѣть:

$$\frac{Ob'}{OA}=\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi};\quad \frac{Ab'}{OA}=\frac{\cos\psi}{\cos\varphi},$$

причемъ для исключенія зависимаго перемѣннаго угла ψ изъ соотношенія сторонъ треугольника OAB имѣемъ: $\sin\psi=\lambda\sin\varphi$, гдѣ λ обозначаетъ отношеніе длины кривошипа r къ длинѣ шатуна l.

Произведя подстановку, воспользовавшись строкой Ньютона и ограничиваясь членами, содержащими λ не выше пятой степени, получимъ послѣ простыхъ тригонометрическихъ преобразованій ряды:

$$\left(\frac{Ob'}{OA}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\lambda^2+\frac{1}{16}\lambda^4+\ldots+\cos\varphi\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{8}\lambda^3+\right.$$

$$\left.+\frac{15}{256}\lambda^5+\ldots\right)+\cos2\varphi\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{32}\lambda^4+\ldots\right)+$$

$$+\cos3\varphi\left(-\frac{\lambda}{2}-\frac{3}{16}\lambda^3+\frac{9}{128}\lambda^5+\ldots\right)+$$

$$+\cos4\varphi\left(-\frac{1}{8}\lambda^2-\frac{1}{16}\lambda^4+\ldots\right)+\cos5\varphi\left(\frac{1}{16}\lambda^3-\frac{15}{128}\lambda^5+\ldots\right)+$$

$$+\cos6\varphi\left(\frac{1}{32}\lambda^4+\ldots\right)+\cos7\varphi\left(-\frac{3}{256}\lambda^5+\ldots\right)+\ldots;$$

$$\left(\frac{Ab'}{OA}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\lambda^2+\frac{1}{16}\lambda^4+\ldots+\cos2\varphi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{32}\lambda^4+\ldots\right)+$$

$$+\cos4\varphi\left(-\frac{1}{8}\lambda^2-\frac{1}{16}\lambda^2+\ldots\right)+\cos6\varphi\left(\frac{1}{32}\lambda^4+\ldots\right)+\ldots$$

Подставляя полученныя выраженія, найдемъ рядъ, выражающій приведенный вѣсъ:

$$\gamma = q_1 + q_2\frac{b}{l} + \left(q_3 + q_2\frac{a^2+\rho^2}{l^2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\lambda^2 + \frac{1}{16}\lambda^4 + \ldots\right) +$$

$$+ \left(q_3 + q_2\frac{a}{l}\right)\left(\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{8}\lambda^3 + \frac{15}{256}\lambda^5 + \ldots\right)\cos\varphi -$$

$$- \left[\frac{1}{2}\left(q_3 + q_2\frac{l^2-b^2-\rho^2}{l^2}\right) + \left(q_3 + q_2\frac{a^2+\rho^2}{l^2}\right)\left(-\frac{1}{32}\lambda^4 + \ldots\right)\right]\cos 2\varphi +$$

$$+ \left(q_3 + q_2\frac{a}{l}\right)\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{3}{16}\lambda^3 + \frac{9}{128}\lambda^5 + \ldots\right)\cos 3\varphi +$$

$$+ \left(q_2 + q_2\frac{a^2+\rho^2}{l^2}\right)\left(-\frac{1}{8}\lambda^2 - \frac{1}{64}\lambda^4 - \ldots\right)\cos 4\varphi +$$

$$+ \left(q_3 + q_2\frac{a}{l}\right)\left(\frac{1}{16}\lambda^3 - \frac{15}{128}\lambda^5 + \ldots\right)\cos 5\varphi +$$

$$+ \left(q_3 + q_2\frac{a^2+\rho^2}{l^2}\right)\left(\frac{1}{32}\lambda^4 + \ldots\right)\cos 6\varphi +$$

$$+ \left(q_3 + q_2\frac{a}{l}\right)\left(-\frac{3}{256}\lambda^5 + \ldots\right)\cos 7\varphi.$$

Величина λ обычно мала, не болѣе $^1/_4$, поэтому для обыкновенныхъ машинъ число членовъ ряда можетъ быть взято гораздо меньшимъ, напр. можно ограничиться членами, содержащими λ въ первой степени. Въ общихъ же разсужденіяхъ мы будемъ пользоваться общимъ видомъ ряда для приведенной массы:

$$\mu = \mu_0 + \Sigma \mu_i \cos i\varphi,$$

причемъ будемъ помнить, что наибольшее значеніе имѣетъ постоянный членъ μ_0, затѣмъ идетъ μ_2 и наконецъ μ_1 и μ_3, а остальные члены ничтожно малы.

30. Уравненіе движенія. Теперь намъ остается воспользоваться закономъ живыхъ силъ для опредѣленія измѣненій угловой скорости машины ω. Если назвать μ_n и ω_n величину приведенной массы и угловой скорости для начальнаго положенія машины $\varphi=0$, то будемъ имѣть знакомое намъ уравненіе

$$\frac{1}{2}\mu\ r^2\omega^2-\frac{1}{2}\mu_n\ r^2\omega_n^2=L,$$

изъ котораго можемъ въ каждомъ частномъ примѣрѣ вычислять значенія ω. Чтобы получить общее аналитическое рѣшеніе задачи, выразимъ и угловую скорость ω посредствомъ ряда *Фурье*, именно положимъ:

$$\omega=\omega_c\ (1+\Sigma\ c_i\cos i\varphi+\Sigma\, d_i\sin i\varphi),$$

гдѣ ω_c средняя планиметричеекая скорость, а c_i, d_i—неизвѣстныя амплитуды, причемъ опредѣленіе движенія сводится къ опредѣленію этихъ амплитудъ.

Принявъ во вниманіе, что для $\varphi=0$

$$\mu_n=\mu_0+\Sigma\mu_i \text{ и } \omega_n=\omega_c\ (1+\Sigma c_i),$$

будемъ имѣть уравненіе:

$$\frac{r^2\omega_c^2}{2}(\mu_0+\Sigma\,\mu_i\cos i\varphi)\ (1+\Sigma\, c_i\cos i\varphi+\Sigma d_i\sin i\varphi)^2=$$

$$=L+\frac{r^2\omega_c^2}{2}(\mu_0+\Sigma\,\mu_i)\ (1+\Sigma\, c_i)^2,$$

причемъ работа L можетъ быть выражена рядомъ.

$$L=(b_0+\Sigma\, a_i\sin i\varphi+\Sigma\, b_i\cos i\varphi)\,2\,r.$$

Такимъ образомъ, правая часть нашего уравненія будетъ содержать рядъ *Фурье*, лѣвая-же представляетъ собой произведеніе одного ряда на квадратъ другого.

Для рѣшенія задачи необходимо и лѣвую часть преобразовать такъ, чтобы она представляла собою рядъ *Фурье*; тогда легко будетъ рѣшить задачу, пользуясь основной теоремой гармоническаго анализа, что два ряда *Фурье* съ однимъ и тѣмъ-же аргументомъ тождественно равны только въ томъ случаѣ, когда амплитуды ихъ одноименныхъ гармоническихъ порознь равны другъ другу. Прежде всего займемся рядомъ для квадрата угловой скорости:

$$(1+\Sigma\ c_i\ \cos i\varphi+\Sigma\ d_i\ \sin i\varphi)^2=1+\Sigma\ c_i^2\ \cos^2 i\varphi+\Sigma\ d_i^2\ \sin^2 i\varphi+$$

$$+2\,\Sigma\ c_i\ \cos i\varphi+2\,\Sigma\ d_i\ \sin i\varphi+2\,\Sigma\ c_i\ d_j\ \cos i\varphi\sin j\varphi+$$

$$+2\Sigma c_i d_i \sin i\varphi \cos i\varphi = 1 + \frac{1}{2}\Sigma c_i^2 + \frac{1}{2}\Sigma c_i^2 \cos 2i\varphi +$$

$$+\frac{1}{2}\Sigma d_i^2 - \frac{1}{2}\Sigma d_i^2 \cos 2i\varphi + 2\Sigma c_i \cos i\varphi + 2\Sigma d_i \sin i\varphi +$$

$$+\Sigma c_i d_j \sin (i+j)\varphi + \Sigma c_i d_j \sin (j-i)\varphi + \Sigma c_i d_i \sin 2i\varphi =$$

$$= 1 + {}^1/_2 \Sigma c_i^2 + {}^1/_2 \Sigma d_i^2 + \Sigma \left(2 c_i + {}^1/_2 c^2_{\frac{i}{2}} + \tfrac{1}{2} d^2_{\frac{i}{2}}\right) \cos i\varphi$$

$$+ \Sigma \left(2 d_i + c_{\frac{i}{2}} d_{\frac{i}{2}} + c_g d_{h\,(g+h=i)} + c_g d_{h\,(h-g=i)}\right) \sin i\varphi$$

При этомъ символы $c_{\frac{i}{2}}$, $d_{\frac{i}{2}}$ обозначаютъ, что для данной гармонической порядка i надо взять амплитуды c и d гармонической вдвое меньшаго порядка; само собою разумѣется, для нечетныхъ i эти символы исчезаютъ. Символы $c_g\, d_h\, (h \pm g = i)$ обозначаютъ, что въ гармоническую порядка i входятъ также произведенія амплитудъ такихъ гармоническихъ, порядки которыхъ удовлетворяютъ равенству $h+g=i$ или $h-g=i$.

Для машинъ съ высокой равномѣрностью вращенія этотъ рядъ можетъ быть значительно упрощенъ, такъ какъ можно утверждать, что каждая изъ амплитудъ c_i и d_i меньше коефиціента неравномѣрности δ, и при $\delta < 0{,}02$ можно пренебречь членами, содержащими квадраты или произведенія амплитудъ c_i и d_i, по сравненію съ членами $2c_i$ и $2d_i$. Тогда рядъ для ω^2 принимаетъ чрезвычайно простой видъ:

$$\omega^2 = \omega_c^2 \left(1 + \Sigma\, 2\, c_i \cos i\varphi + \Sigma\, 2\, d_i \sin i\varphi.\right).$$

Остается умножить его на рядъ, выражающій перемѣнную массу, причемъ произведеніе рядовъ напишется такъ:

$$\mu_0 + \Sigma\, \mu_i \cos i\varphi + \Sigma\, 2c_i \mu_0 \cos i\varphi + \Sigma\, 2d_i\, \mu_0 \sin i\varphi + \Sigma\, 2c_i\, \mu_i \cos^2 i\varphi +$$

$$+ \Sigma\, 2d_i\, \mu_i \sin i\varphi \cos i\varphi + \Sigma\, 2c_i\, \mu_j \cos i\varphi \cos j\varphi + \Sigma\, 2d_i\, \mu_j \sin i\varphi \cos j\varphi =$$

$$= \mu_0 + \Sigma\, \mu_i\, c_i +$$

$$\Sigma \left(\mu_i + 2\,\mu_0\, c_i + \mu_{\frac{i}{2}}\, c_{\frac{i}{2}} + \mu_j\, c_{h\,(h-j=i\,;\,j-h=i)} + \mu_j\, c_{h\,(h+j=i)}\right) \cos i\varphi +$$

$$+ \Sigma \left(2\,\mu_0\, d_i + \mu_{\frac{i}{2}}\, d_{\frac{i}{2}} + \mu_j\, d_{h\,(h-j=i)} - \mu_j\, d_{h\,(j-h=i)} + \mu_j\, d_{h\,(h+j=i)}\right) \sin i\varphi$$

причемъ нѣкоторые символы уже были объяснены выше, а значки h и j надо брать только не равные между собою Итакъ, наше уравненіе принимаетъ видъ:

$$\frac{r^2\omega_c^2}{2}\Big\{\mu_0+\Sigma\mu_i c_i+$$

$$+\Sigma\Big[\mu_i+2\mu_0 c_i+\mu_{\frac{i}{2}} c_{\frac{i}{2}}+\mu_j c_h{}_{(h-j=i;\,j-h=i)}+\mu_j c_h{}_{(j+h=i)}\Big]\cos i\varphi+$$

$$+\Sigma\Big[2\mu_0 d_i+\mu_{\frac{i}{2}} d_{\frac{i}{2}}+\mu_j d_h{}_{(h-j=i)}-\mu_j d_h{}_{(j-h=i)}+\mu_j d_h{}_{(j+h=i)}\Big]\sin i\varphi\Big\}=$$

$$=2r\,b_0+\frac{r^2\omega_c^2}{2}(\mu_0+\Sigma\mu_i)(1+\Sigma c_i)^2+\Sigma 2ra_i\sin i\varphi+\Sigma 2\,rb_i\cos i\varphi.$$

Сравнивая постоянные члены, находимъ:

$$\frac{r^2\omega_c^2}{2}(\mu_0+\Sigma c_i\,\mu_i)=2r\,b_0+\frac{r^2\omega_c^2}{2}(\mu_0+\Sigma\mu_i)\,(1+\Sigma c_i)^2.$$

Кромѣ того для каждаго i должны быть выполнены тождества:

$$\frac{r^2\omega_c^2}{2}\Big[\mu_i+2\mu_0 c_i+\mu_{\frac{i}{2}} c_{\frac{i}{2}}+\mu_j c_h{}_{(h-j=i;\,j-h=i)}+\mu_j c_h{}_{(j+h=i)}\Big]=2r\,b_i.$$

$$\frac{r^2\omega_c^2}{2}\Big[2\mu_0 d_i+\mu_{\frac{i}{2}} d_{\frac{i}{2}}+\mu_j d_h{}_{(h-j=i)}-\mu_j d_h{}_{(j-h=i)}+\mu_j d_h{}_{(j+\ \ =i)}\Big]=2r\,a_i$$

Пусть въ разложеніи L мы ограничиваемъ рядъ n синусами и n косинусами, рядъ μ тоже возьмемъ съ числомъ членовъ не болѣе n и наконецъ рядъ для ω будемъ искать также съ n гармоническими, т. е. съ $2n$ неизвѣстными амплитудами. Такъ какъ для каждаго i мы получили два уравненія, а число гармоническихъ равно n, то мы получимъ $2n$ линейныхъ алгебраическихъ уравненій, т. е. какъ разъ столько, сколько надо для опредѣленія $2n$ амплитудъ. Слѣдовательно вопросъ свелся къ нахожденію корней $2n$ линейныхъ уравненій съ $2n$ неизвѣстными [1]).

Для примѣра выпишемъ тѣ уравненія, которыя получились-бы для $n=6$.

$$\frac{4\,b_1}{r\omega_c^2}=\mu_1+2\mu_0 c_1+\mu_1 c_2+\mu_2 c_3+\mu_2 c_1+\mu_3 c_4+\mu_3 c_2+\mu_4 c_5+\mu_4 c_3+$$
$$+\mu_5 c_4+\mu_5 c_6+\mu_6 c_5.$$

---

[1]) Для машины съ большимъ коефиціентомъ неравномѣрности или вообще при точномъ рѣшеніи задачи, если не пренебрегать вторыми степенями c_i и d_i, мы получили бы тѣ же $2n$ уравненій съ $2n$ неизвѣстными, но уравненія были-бы второй степени относительно неизвѣстныхъ.

$$\frac{4\,a_1}{r\omega_c^2} = 2\,\mu_0\,d_1 + \mu_1\,d_2 + \mu_2\,d_3 - \mu_2\,d_1 + \mu_3\,d_4 - \mu_3\,d_2 + \mu_4\,d_4 - \mu_4\,d_3 +$$

$$+ \mu_5\,d_6 - \mu_5\,d_4 - \mu_6\,d_5\,.$$

$$\frac{4\,b_2}{r\omega_c^2} = \mu_2 + 2\,\mu_0\,c_2 + \mu_1\,c_1 + \mu_1\,c_3 + \mu_2\,c_4 + \mu_3\,c_5 + \mu_3\,c_1 + \mu_4\,c_6 + \mu_4\,c_2 +$$

$$+ \mu_5\,c_3 + \mu_6\,c_4\,.$$

$$\frac{4\,a_2}{r\omega_c^2} = 2\,\mu_0\,d_2 + \mu_1\,d_1 + \mu_1\,d_3 + \mu_2\,d_4 + \mu_3\,d_5 - \mu_3\,d_1 + \mu_4\,d_6 - \mu_4\,d_2 -$$

$$- \mu_5\,d_3 - \mu_6\,d_4\,.$$

И такъ далѣе; приведенныхъ четырехъ равенствъ достаточно, чтобы судить о кропотливости рѣшенія задачи въ такой постановкѣ.

Если проанализировать вышенаписанныя уравненія, то мы замѣтимъ, что они содержатъ величины различныхъ порядковъ малости. Уже было замѣчено, что въ выраженіи приведенной массы мы имѣемъ одинъ очень большой членъ μ_0 приведенная масса маховика и постоянныя части массъ механизма, величины же μ_i можно считать величинами перваго порядка малости по сравненію съ μ_0; точно также было отмѣчено, что амплитуды c_i и d_i суть величины, вообще говоря, перваго порядка малости по сравненію съ единицей. Слѣдовательно, мы имѣемъ полное право отбросить величины второго порядка малости, для того чтобы получить хотя и приближенное, но зато простое рѣшеніе, позволяющее продолжать общее аналитическое изслѣдованіе поставленной задачи и обладающее достаточною съ технической точки зрѣнія степенью точности. Уравненія, служащія для опредѣленія c_i и d_i упростятся чрезвычайно, если пренебречь произведеніями $\mu_i\,c_i$ и $\mu_i\,d_i$, ибо типичное уравненіе принимаетъ тогда видъ:

$$\frac{4\,b_i}{r\omega_c^2} = \mu_i + 2\,\mu_0\,c_i\,; \quad \frac{2\,a_i}{r\omega_c^2} = \mu_0\,d_i\,,$$

откуда сразу находимъ

$$c_i = 2\,\frac{b_i - 0{,}25\,\mu_i\,r\omega_c^2}{\mu_0\,r\omega_c^2}\,;\ d_i = \frac{2\,a_i}{\mu_0\,r\omega_c^2}\,.$$

Можно утверждать, что это-же рѣшеніе мы могли-бы получить быстрѣе, еслибы сразу приняли во вниманіе измѣненіе живой силы частей механизма только отъ постояннаго движенія кривошипа съ угловой скоростью ω_c, и лишь для маховика учли бы измѣненія угловой скорости. Въ самомъ дѣлѣ, послѣ подстановки въ ур. 10 (стр. 45) соотвѣтственныхъ рядовъ получимъ, отбросивъ постоянные члены:

$$\Sigma \frac{\mu_0 r^2 \omega_c^2}{2} (2\, c_i \cos i\varphi + 2\, d_i \sin i\varphi) = \Sigma\, 2r (a_i \sin i\varphi + b_i \cos i\varphi) -$$

$$- \Sigma \frac{\mu_i\, r^2\, \omega_c^2}{2} \cos\, i\varphi.$$

Рѣшая это уравненіе относительно c_i и d_i для каждой гармонической отдѣльно, получимъ тѣ-же самые отвѣты. Такимъ образомъ мы имѣемъ возможность изслѣдовать аналитически степень точности приближенныхъ графическихъ методовъ, изложенныхъ въ п. 15 и 23; для этого надо было-бы сравнить найденные приближенные отвѣты для c_i и d_i съ точнымъ аналитическимъ рѣшеніемъ вопроса.

Однако для каждаго конкретнаго примѣра мы имѣемъ возможность выяснить степень точности рѣшенія при помощи діаграммы массъ и работъ, поэтому мы не будемъ отвлекаться подобнымъ изслѣдованіемъ отъ болѣе интересныхъ примѣненій аналитическаго метода.

31. Общіе выводы. Аналитическій расчетъ приведеннаго вѣса маховика. Возможность аналитически опредѣлять измѣненія угловой скорости вычисленіемъ амплитудъ c_i и d_i, даетъ намъ новое средство для опредѣленія какъ мѣры неравномѣрности $\triangle$, такъ и коефиціента неравномѣрности δ; а по этимъ величинамъ опредѣляется и необходимый вѣсъ маховика.

Повторивши приведенныя въ *п.* 2 (стр. 8 и 9) интегрированія, мы найдемъ мѣру неравномѣрности:

$$\triangle = \frac{1}{2} \Sigma\, (c_i^2 + d_i^2) = 2\, \frac{\Sigma\, [(b_i - 0{,}25\, \mu_i\, r \omega^2_c)^2 + a_i^2]}{\mu_0^2\, r^2\, \omega_c^4}$$

Гораздо труднѣе найти коефиціентъ неравномѣрности δ; для этого необходимо аналитически найти наибольшую и наименьшую величину угловой скорости, опредѣляемой рядомъ:

$$\omega = \omega_c + \omega_c (\Sigma c_i \cos i\varphi + \Sigma\, d_i \sin i\varphi).$$

Аналитическое рѣшеніе этой задачи въ общемъ видѣ требуетъ сначала опредѣленія тѣхъ значеній угла φ, при которыхъ производная отъ ω по φ обращается въ нуль, т. е. опредѣленія корней гармоническаго ряда. Можно намѣтить нѣсколько способовъ приближеннаго вычисленія этихъ корней, но они довольно кропотливы и не даютъ рѣшенія вопроса въ общемъ видѣ. Поэтому при рѣшеніи конкретныхъ задачъ проще вычертить для одного періода, т. е. отъ $\varphi = 0$ до Φ, функцію η относительныхъ измѣненій угловой скорости, выражаемую рядомъ:

$$\eta = \Sigma\, c_i \cos i\varphi + \Sigma\, d_i \sin i\varphi.$$

На діаграммѣ будетъ ясно видно самое большое и самое малое значеніе $+\eta_{max}$ и $-\eta_{min}$ этой функціи и тогда $\delta=\eta_{max}+\eta_{min}$. Ниже будетъ цана таблица для быстраго складыванія гармоническаго ряда, т. е. для вычисленія двѣнадцати равноотстоящихъ ординатъ η. Наконецъ, возможно грубо приближенное опредѣленіе η_{max} и η_{min}, основанное на слѣдующихъ неравенствахъ:

$$\Sigma c_l \cos i\varphi \leqslant \cos k\varphi . \Sigma (c_l) \; ; \; \Sigma d_l \sin i\varphi \leqslant \sin k\varphi \, \Sigma (d_l);$$

откуда

$$\eta \leqslant \cos k\varphi \, \Sigma (c_l) + \sin k\varphi \, \Sigma (d_l),$$

гдѣ прямыя скобки показываютъ, что складываются абсолютныя величины амплитудъ. Обозначивъ

$$\Sigma (c_l) = C \; ; \; \Sigma d_l = D,$$

будемъ имѣть:

$$\eta_{max} \leqslant + \sqrt{C^2+D^2}; \; \eta_{min} \leqslant -\sqrt{C^2+D^2} \text{ и } \delta \leqslant 2\sqrt{C^2+D^2}.$$

Если амплитуды a_l и b_l извѣстны для различныхъ нагрузокъ или отсѣчекъ машины, то могутъ быть найдены измѣненія мѣры неравномѣрности Δ и коефиціента неравномѣрности δ при измѣненіи нагрузки.

Наконецъ на основаніи, изложеннаго можетъ быть данъ аналитическій методъ расчета приведеннаго вѣса махового колеса, или точнѣе величины μ_0, представляющей собою сумму большой приведенной массы μ_k маховика и небольшой постоянной части μ_c приведенной массы звеньевъ механизма. Если задана та мѣра неравномѣрности Δ, которою должна обладать машина, то изъ формулы D, опредѣляющей ее, находимъ:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{2\Sigma [(b_l - 0{,}25\,\mu_l\, r\omega_c^2) + a_l^2]}{r^2\omega_c^4\,\Delta}};$$

$$q_0 = q_k + q_c = \frac{9{,}81}{r\omega_c^2}\sqrt{\frac{2\Sigma [(b_l - 0{,}25\,\mu_l\, r\omega_c^2)^2 + a_l^2]}{\Delta}}$$

При опредѣленіи μ_0 по коефиціенту неравномѣрности δ, можемъ сначала сдѣлать грубый расчетъ, пользуясь приближеннымъ выводомъ для δ. Подставивъ абсолютныя величины амплитудъ c_l и d_l, въ формулу $\delta=2\sqrt{C^2+D^2}$ найдемъ:

$$\mu_0 = \frac{4\sqrt{(\Sigma[b_l - 0{,}25\,\mu_l r\omega_c^2])^2 + (\Sigma[a_l])^2}}{r\omega_c^2\delta};$$

$$q_k + q_c = \frac{39{,}24}{r\omega_c^2\delta} \sqrt{(\Sigma[b_i - 0{,}25\,\mu_i r\omega_c^2])^2 + (\Sigma[a_i])^2}$$

Для примѣра расчитаемъ аналитически маховикъ къ одноцилиндровой паровой машинѣ, для которой въ главѣ I было найдено необходимое $q_k = 37{,}3$ кг/кв. см. Разложеніе діаграммы работъ дастъ намъ рядъ:

$$L = 2r.[0{,}662 + 0{,}213 \sin\varphi - 0{,}556 \sin 2\varphi - 0{,}066 \sin 3\varphi - 0{,}065 \sin 4\varphi +$$
$$+ 0{,}025 \sin 5\varphi - 0{,}118 \cos\varphi - 0{,}464 \cos 2\varphi - 0{,}060 \cos 3\varphi + 0{,}007 \cos 4\varphi -$$
$$- 0{,}018 \cos 5\varphi - 0{,}009 \cos 6\varphi],$$

причемъ ходъ $2\,r = 1$ м. При вѣсѣ ползуна $q_3 = 0{,}24$, шатуна $q_2 = 0{,}15$ кг/кв. см. и принятыхъ на стр. 33 въ главѣ I положеніи центра тяжести и радіусѣ инерціи шатуна, получимъ для приведеннаго вѣса рядъ:

$$\gamma = q_k + 0{,}30 + 0{,}03 \cos\varphi - 0{,}15 \cos 2\varphi - 0{,}03 \cos 3\varphi.$$

Мы не знаемъ точно, какая мѣра неравномѣрности Δ соотвѣтствуетъ $\delta = 0{,}01$; принявъ грубо-приближенную величину, найденную на стр. 9, $\Delta = 1{,}25 \,.\, 10^{-5}$ и продѣлавъ всѣ вычисленія для $\omega_c^2 = 158$ сек.$^{-2}$, найдемъ $q_k = 31{,}9$ кг/кв. см., т. е. на 14,5% меньше правильной величины. Съ другой стороны, задаваясь $\delta = 0{,}01$ и пользуясь выведенной въ этомъ п. грубо-приближенной формулой, найдемъ $q_k = 45{,}3$ кг/кв. см., т. е. на 21,4% больше правильной.

Докажемъ, что ошибка перваго расчета по Δ не въ неточности метода, а въ несоотвѣтствіи величинъ Δ и δ. Для этого вычислимъ, задаваясь $q_k = 37{,}3$, рядъ η относительныхъ измѣненій угловой скорости, получимъ:

$$\eta = -0{,}00119 \cos\varphi - 0{,}00108 \cos 2\varphi + 0{,}00005 \cos 4\varphi - 0{,}00012 \cos 5\varphi -$$
$$- 0{,}00006 \cos 6\varphi + 0{,}00142 \sin\varphi - 0{,}00371 \sin 2\varphi - 0{,}00044 \sin 3\varphi -$$
$$- 0{,}00043 \sin 4\varphi + 0{,}00017 \sin 5\varphi.$$

Отсюда найдемъ мѣру неравномѣрности $\Delta = 0{,}94 \,.\, 10^{-5}$ вмѣсто принятой $1{,}25 \,.\, 10^{-5}$. Для опредѣленія коефиціента неравномѣрности δ сложимъ при помощи нижеслѣдующей таблицы для складыванія рядовъ Фурье рядъ η, т. е. вычислимъ 12 ординатъ $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots \eta_{12}$ $(\eta_{13} = \eta_1)$ кривой, изображающей относительныя измѣненія скорости; въ этой таблицѣ c_i обозначаютъ коефиціенты при косинусахъ, а d_i— при синусахъ вышенаписаннаго ряда, при чемъ для сокращенія письма числа увеличены въ 10^5 разъ, такъ что напр. 119 обозначаетъ 0,00119; результаты выписаны полностью.

Таблица для складыванія рядовъ Фурье.

	$c_0 = -0$	$c_1 = -119$	$c_2 = -108$	$d_1 = +142$	$d_2 = -371$
	$c_6 = -6$	$c_5 = -12$	$c_4 = +5$	$d_5 = +17$	$d_4 = -43$
Сумма:	$\sigma_1 = -6$	$\sigma_2 = -131$	$\sigma_3 = -103$	$\sigma_4 = +159$	$\sigma_5 = -414$
Разн.:	$u_1 = +6$	$u_2 = -107$	$u_3 = -113$	$u_4 = +125$	$u_5 = -328$

	$\sigma_1 = -6$	$u_1 = +6$	$u_2 = -107$	$u_3 = -113$	$u_4 = +125$
	$c_3 = -0$	$d_3 = -44$	$\sigma_5 = -414$	$\sigma_4 = +159$	$u_5 = -328$
Сумма:	$s_1 = -6$	$s_2 = -38$	$s_3 = -521$	$s_4 = +46$	$s_5 = -203$
Разн.:	$r_1 = -6$	$r_2 = +50$	$r_3 = +307$	$r_4 = -272$	$r_5 = +453$

	$\sigma_2 = -131$	$s_1 = -6$	$r_2 = +50$	$r_1 = -6$	$s_2 = -38$
	$\sigma_3 = -103$	$s_6 = -234$	$-r_4 = -272$	$-r_6 = +28$	$-s_4 = -46$
Сум.:	$s_6 = -234$	$\eta_1 = -0{,}00240$	$\eta_4 = -0{,}00222$	$\eta_7 = +0.00022$	$\eta_{10} = -0{,}00084$
Разн.:	$r_6 = -28$	(сумма)	(сумма)	$s_3 = -521$	$0{,}866.s_3 = -451$

$s_2 = -38$	$r_1 = -6$	$s_1 = -6$	$r_2 = +50$	$s_5 = -203$
$^1/_2\, s_4 = +23$	$^1/_2\, r_6 = -14$	$-{^1/_2}\, s_6 = +117$	$^1/_2\, r_4 = -136$	$0{,}866.s_5 = -176$
Сумма: $= -15$	Сумма: $= -20$	Сумма: $= +111$	Сумма: $= -86$	$r_3 = +307$
$0{,}866.\ s_3 = -451$	$0{,}866.s_5 = -176$	$0{,}866.r_5 = +392$	$0{,}866.r_3 = +266$	$0{,}866.r_3 = +266$
Сумма: $\eta_2 = -0{,}00466$	$\eta_3 = -0{,}00196$	$\eta_5 = +0{,}00503$	$\eta_{12} = +0{,}00180$	$r_5 = +453$
Разн.: $\eta_6 = +0{,}00436$	$\eta_{11} = +0{,}00156$	$\eta_9 = -0{,}00281$	$\eta_8 = -0{,}00352$	$0{,}866.r_5 = +392$

Если судить о коефиціентѣ неравномѣрности по наибольшей и наименьшей ординатѣ, то $\delta = \eta_6 - \eta_2 = 0{,}00969$, а если вычертить η въ функціи φ, то получимъ $\delta = 0{,}01$; сравненіе діаграммы η съ діаграммой *чер. 14* не обнаруживаетъ существенной разницы. Принявъ, что $\delta = 0{,}01$ соотвѣтствуетъ $\Delta = 9{,}4.\ 10^{-6}$, получимъ правильный вѣсъ маховика. Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что аналитическій методъ расчета вѣса маховика можетъ дать правильные результаты, если мѣра неравномѣрности взята правильно. Несмотря на кропотливость расчетовъ, мы будемъ имъ пользоваться въ тѣхъ случаяхъ, когда графическіе методы почему-либо не примѣнимы, такъ напр. въ отдѣлъ II при расчетѣ изохронныхъ маховиковъ онъ окажетъ намъ незамѣнимыя услуги.

ПРИБАВЛЕНІЕ КЪ ОТДѢЛУ I.

Формула Уатта.

32. Историческія замѣчанія. Было-бы неправильно совсѣмъ умолчать о формулѣ, позволяющей быстро, хотя и приближенно, опредѣлить необходимый вѣсъ обода маховика по мощности N въ лош. сил. и числу оборотовъ n машины; формула эта, которую мы будемъ называть формулой Уатта, можетъ служить и для провѣрки расчетовъ и для самихъ расчетовъ въ тѣхъ случахъ, когда большая или меньшая равномѣрность вращенія не имѣетъ особеннаго значенія.

Кромѣ того мы воспользуемся этой главой для нѣкоторыхъ историческихъ экскурсій въ область зарожденія современнаго машиностроенія и общей теоріи машинъ, и прослѣдимъ, хотя-бы поверхностно, исторію примѣненія махового колеса къ паровой машинѣ [1]). Первыя машины, предназначавшіяся для приведенія въ непрерывное вращательное движеніе тѣхъ или иныхъ станковъ, были безъ махового колеса [2]), роль котораго выполнялась гидравлическимъ трансформаторомъ; поршень парового цилиндра посредствомъ коромысла приводилъ въ движеніе поршень водяного насоса, накачивающаго воду въ лотокъ верхненаливного мельничнаго колеса, которое и давало вполнѣ равномѣрное вращеніе.

Первыя построенныя паровыя машины съ непрерывнымъ вращеніемъ (Oxley 1762, Clarke 1769, Stewart 1777) дали плохіе результаты, и Смитонъ [3]) совершенно правильно указываетъ, что главнымъ затрудненіемъ при этомъ является необходимость сравнительно продолжительной остановки поршня въ мертвой точкѣ на время охлажденія пара водою, вспрыскиваемою въ цилиндръ. Вотъ почему мало помогло дѣлу и примѣненіе шатунно-кривошипной передачи (Picard патентъ 1780 г.) и даже примѣненіе махового колеса (Wasbrough, патентъ 1779 г. [4]).

---

[1]) Нельзя, конечно, говорить объ исторіи изобрѣтенія маховика, такъ какъ она восходитъ къ глубокой древности. Леонардо-да-Винчи первый кажется описалъ примѣненіе маховика къ станкамъ, приводимымъ во вращеніе при помощи рукоятки одушевленными существами. См. Beck, Beiträge zur Geschichte des Maschinenbaues, Берлинъ 1900, стр. 326.

[2]) Точно также и въ первой идеѣ паровой машины съ непрерывнымъ вращеніемъ. принадлежащей Денису Папену (Acta Eruditorum 1690 г. стр. 410) не была высказана необходимость маховика. Но Папенъ предлагалъ машину съ 3—4 цилиндрами (вѣроятно для большей равномѣрности), и такъ какъ она предназначалась имъ для приведенія во вращеніе гребныхъ колесъ парохода, то въ скрытомъ видѣ она имѣла и маховикъ. Преобразующій движеніе поршня механизмъ долженъ былъ состоять изъ комбинаціи зубчатыхъ реекъ и храповыхъ колесъ, аналогично первому газовому двигателю Otto Deutz.

[3]) Въ уже цитированномъ (на стр. 3) письмѣ.

[4]) Годы указаны не по первоисточникамъ, а взяты изъ книги: Farey I. A Treatise on the Steam Engine, hystorical, practical and descriptive, Лондонъ 1827 г. Эта прекрасная книга даетъ наиболѣе полную картину состоянія машиностроенія въ концѣ XVIII вѣка.

Только Джемсу Уатту, кореннымъ образомъ измѣнившему (1769—1781 г.) процессъ дѣйствія пара въ машинѣ отдѣленіемъ холодильника съ его насосомъ отъ цилиндра паровой машины, и внесшему рядъ другихъ усовершенствованій (высокое давленіе пара, двойное дѣйствіе цилиндра, паровая рубашка и пр.) могла удаться постройка паровой машины съ непрерывнымъ вращеніемъ, такъ какъ онъ устранилъ отмѣченное Смитономъ затрудненіе — длительную остановку поршня въ мертвой точкѣ. Первая его машина, построенная въ Soho въ 1784 году содержала кромѣ термическихъ усовершенствованій два крупныхъ динамическихъ улучшенія: примѣненіе центробѣжнаго регулятора, употреблявшагося и раньше въ вѣтряныхъ и водяныхъ мельницахъ, и остроумное динамическое использованіе планетной передачи. Обыкновенно планетарій Уатта считаютъ механизмомъ, предназначеннымъ только для обхода патента Пикара на кривошипно-шатунную передачу; однако Уаттъ не приминулъ использовать его хорошія стороны, именно онъ заклинивалъ маховикъ не на валу кривошипа, а на втулкѣ зубчатаго колеса, свободно надѣтой на валъ кривошипа, и вслѣдствіе сцѣпленія съ зубчаткой шатуна вращающейся примѣрно вдвое быстрѣе кривошипа. Уаттъ ясно понималъ, какъ это выгодно:—„Это устройство имѣетъ большое преимущество, давая двойную скорость маховому колесу;... оно уменьшаетъ въ 4 раза вѣсъ обода маховика“ [1]).

И когда планетное колесо вышло изъ употребленія (послѣ 1800 г.), долго еще маховикъ заклинивался не на коренномъ валу машины, а на валу зубчатки, сцѣпленной съ кореннымъ валомъ и дѣлающей примѣрно вдвое больше оборотовъ, благодаря чему значительно повышалась равномѣрность вращенія станковъ, приводимыхъ во вращеніи машиной.

Прошло около 50 лѣтъ, прежде чѣмъ появились руководства, посвященныя расчету и построенію паровыхъ машинъ и содержащія кое-что о расчетѣ маховика [2]) Въ первыхъ сочиненіяхъ, посвященныхъ

[1]) См. Farey стр. 424. Какъ ни старъ этотъ принципъ, его часто вновь открываютъ. Такъ въ статьѣ г. Александрова „Регулированіе паровой машины дополнительнымъ маховикомъ“. (Техническій Сборникъ за 1897 годъ стр. 323) рекомендуется повышать равномѣрность вращенія двигателя, вращающаго динамомашину посредствомъ ременной передачи съ промежуточнымъ валомъ, заклиниваніемъ на промежуточномъ валу дополнительнаго маховика. Если буквой k обозначить передаточное число между валомъ дополнительнаго маховика и кореннымъ валомъ, а буквой J моментъ инерціи дополнительнаго маховика, то его дѣйствіе будетъ равноцѣнно увеличенію момента инерціи коренного маховика на величину Jk^2, такъ что небольшой дополнительный маховикъ, заклиненный на быстро вращающемся валу, оказываетъ дѣйствіе въ k^2 разъ большее. Однако такой дополнительный маховикъ противорѣчитъ основному принципу извѣстному съ 1830 года (см. Справочную книгу для инженеровъ Морена и др.)—ставить маховикъ какъ можно ближе къ машинѣ-двигателю, чтобы не вызывать упругихъ колебаній въ передаточныхъ частяхъ. Вліяніе упругой связи (въ данномъ случаѣ ремня) на коефиціентъ неравномѣрности, какъ мы увидимъ впослѣдствіи, можетъ быть чрезвычайно значительнымъ и, смотря по соотношеніямъ элементовъ, упругость можетъ и ухудшать, и улучшать равномѣрность вращенія.

[2]) Farey, 1827, уже цитировался; кромѣ того Tredgold, Principles of the steam engine, Лондонъ 1827; этой книги намъ не удалось видѣть; французскій переводъ со второго изданія 1838 г. не содержитъ по вопросу о расчетѣ маховика чего-либо особенно интереснаго для того времени.

общей теорiи машинъ [1]), вопросъ о маховомъ колесѣ совершенно не затрагивался, такъ какъ паровая машина еще не получила тогда распространенiя и все вниманiе было сосредоточено на гидравлическихъ и грузоподъемныхъ машинахъ.

Первое сочиненiе, въ которомъ затронутъ вопросъ о перiодическомъ измѣненiи угловой скорости машинъ, найденное нами, принадлежитъ Guenyveau [2]), который описываетъ дѣйствiе маховика, говоритъ, что выгодно дѣлать его радiусъ возможно большимъ и что вѣсъ обода долженъ быть сообразованъ съ мощностью машины; не рекомендуется снабжать тяжелымъ маховикомъ машины, часто останавливаемыя и движущiяся то въ одну, то въ противоположную сторону. Попытку его дать теорiю маховика надо считать неудачной и не доведенной до конца.

Прочныя основанiя расчету вѣса обода маховика даны знаменитымъ Navier [3]) въ его интересныхъ примѣчанiяхъ къ Белидору, впервые рѣшившимъ задачу о неравномѣрности вращенiя тяжелаго колеса, приводимаго въ движенiе постояннымъ усилiемъ, передаваемымъ отъ безконечно-длиннаго шатуна кривошипу.

Выводъ формулы Уатта чрезвычайно простъ послѣ всего того, что было сказано въ главахъ *I* и *II*. Пусть L_1 обозначаетъ полную работу, производимую машиной въ теченiе перiода, а L_0 та избыточная работа, которая должна быть при данной средней скорости машины поглощена маховикомъ. На стр. 35 была найдена формула

$$q_k = \frac{L_0 g}{\delta r^2 w_0^2}$$

для вычисленiя приведеннаго вѣса q_k маховика, обезпечивающаго требуемое δ. Если въ этой формулѣ принять $L_0 = c_1 L_1$, т. е. считать избыточную работу, равной нѣкоторой долѣ полной работы, да кромѣ того подставить вмѣсто L_1 мощность машины въ лош. с.: $4500\ N = L_1 n$, гдѣ n обозначаетъ число перiодовъ въ одну минуту, то получимъ формулу:

$$q_k r^2 w_0^2 = \frac{c_1 g}{4500} \frac{N}{n\delta} = \frac{c N}{n\delta}.$$

Навье не придалъ выведенной имъ формулѣ этого простого вида.

---

[1]) Какъ напр. въ сочиненiи отца Прикладной Механики, какъ отдѣльной дисциплины, Carnot Lazare Essai sur les machines en general, Парижъ 1783 г., и въ первыхъ курсахъ Прикладной Механики, служившихъ пособiями для студентовъ Парижской Политехнической Школы: Lanz et Betancourt, Essai sur la composition des machines, Парижъ 1808 и Hachette, Traité des machines, Парижъ 1811. Точно также и первое посмертное изданiе Belidor, Nouvelle Architecture hydraulique, редактированное Prony, не содержитъ теорiи махового колеса.

[2]) Guenyveau A. Essai sur la science des machines. Лiонъ 1810.

[3]) Belidor, Architecture hydraulique ou l'art de conduire, d'élever et de ménager les eaux par les differents besoins de la vie. Nouvelle edition avec des notes. et additions par M. Navier. Томъ I. Парижъ 1819. стр. 384—392.

Фарей [1]), Тредгольдъ [2]) и большинство справочниковъ начала 19 столѣтія [3]) приводятъ формулу:

$$PV^2 = c\frac{N}{n},$$

гдѣ P—вѣсъ обода маховика въ кг., V—окружная его скорость въ м./сек., а c—практическій коефиціентъ.

Понселе [4]) и Таффъ [5]) ввели впервые въ формулу степень равномѣрности вращенія машины.

Формула Уатта встрѣчается и въ современныхъ справочникахъ для инженеровъ (напр. Хютте, томъ I стр. 900) причемъ среднее значеніе коефиціента c для одно-кривошипныхъ машинъ $c = 7000$, для машинъ съ 2 кривошипами подъ угломъ 90^0 величина $c = 2500$ и наконецъ для машинъ съ тремя кривошипами подъ угломъ 120^0 величина $c = 1400$.

Очень подробныя таблицы, учитывающія различныя степени наполненія и силы инерціи возвратно-движущихся частей имѣются у Толле [6]).

---

[1]) Farey, Treatise on the Steam-Engine, Лондонъ 1827, стр. 636—643, см. также стр. 414, 450, 491. Формулу онъ не выписываетъ, а говоритъ, что средняя кинетическая энергія маховика должна быть въ опредѣленное число разъ болѣе работы, производимой паромъ въ теченіе хода и опредѣляемой по индикаторной діаграммѣ.

[2]) Tredgold, The steam-engine, its invention and progressive improvement, 2 изданіе Лондонъ 1838 стр. 386—9. Перваго изданія, носившаго заглавіе Principles of the steam-engine, Лондонъ 1827, намъ не удалось видѣть.

[3]) Изъ справочныхъ книгъ для инженеровъ наиболѣе полной и наиболѣе распространенной была книга Морена (Morin, Aide-mémoire de mécanique pratique, Парижъ, непрерывный рядъ изданій съ 1833 по 1870 годъ. Она была переведена на многіе языки, между прочимъ и на русскій въ 1839 и 1843 г.

[4]) Poncelet, Traité de mécanique industrielle, Льежъ 1845 г. томъ I стр. 134. Изъ литографированныхъ лекцій Понселе намъ удалось видѣть только позднѣйшее издание „Cours de mécanique industrielle, professé a l'école centrale des arts et manufactures, Парижъ. Годъ изданія не указанъ, вѣроятно 1831 или 1836.

Въ другомъ своемъ курсѣ: Poncelet, Traité de mécaniqne appllquée aux machines, Льежъ 1845, томъ I, стр. 102—153, Понселе кромѣ вывода простой формулы расчета вѣса обода маховика по Навье даетъ еще полу-аналитическій, полуграфическій методъ опредѣленія измѣненій угловой скорости кривошипа, развивая методъ Коріолиса (1832).

[5]) Taffe, Application des principes de mécanique aux machines les plus en usage, mues par l'eau, la vapeur, le vent et les animaux. Марсель 1835, стр. 61.

[6]) Tolle, Die Regelung der Kraftmaschinen, Берлинъ 1909 стр. 89—90. Первымъ, подавшимъ идею подобной таблицы, былъ Charbonnier, Mémoire sur les moyens, generalement employés pour régulariser les mouvements des machines à vapeur à manivelles, et en particulier sur le régulateur employé par M. M. Meyer & C⁰ lu le 27 Juillet 1842. Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse, томъ 17 за 1843 г. стр. 332—372. Позднѣе издано въ дополненномъ видѣ книгой: Charbonnier, Détermination du volant et du régulateur à boules, ramenant la vitesse du régime, Парижъ 1864. Онъ пытался рѣшить задачу аналитически, пренебрегая конечностью длины шатуна. Mayer, Graphische Bestimmung des Schwugradgewichtes der Dampfmaschinen (Z. d. V. d. I, 1889 г. стр. 113) пользовался для составленія таблицъ графическимъ методомъ Морена. Его работу повторилъ Толле, принявшій во вниманіе и силы инерціи.

Güldner, Berechnung des Schwungradgewichtes der Verbrennungsmotoren (Z. d. V. d. I, 1901 стр. 365, 409) далъ подобную-же формулу для двигателей внутренняго сгоранія, введя въ нее отношеніе средняго индикаторнаго давленія сжатія къ общему среднему индикаторному давленію всего цикла.

ОТДѢЛЪ II.

Способы улучшенія равномѣрности вращенія машинъ.

33. Введеніе. Въ предыдущемъ отдѣлѣ рѣчь шла объ одномъ только наиболѣе распространенномъ и неизбѣжномъ средствѣ для достиженія необходимой равномѣрности вращенія — тяжеломъ маховомъ колесѣ; чѣмъ больше приведенный его вѣсъ при прочихъ равныхъ условіяхъ, тѣмъ равномѣрнѣе вращеніе машины. Однако очень тяжелое маховое колесо является часто непріятнымъ придаткомъ къ поршневой машинѣ, увеличивающимъ вредную работу силъ тренія и дѣлающимъ установку громоздкой, что имѣетъ значеніе для переносныхъ машинъ. Такимъ образомъ возникаетъ вопросъ о возможномъ уменьшеніи вѣса маховово колеса безъ ухудшенія равномѣрности вращенія.

Если говорить о вѣсѣ обода махового колеса, то теоретически казалось бы возможнымъ осуществить любой приведенный вѣсъ посредствомъ легкаго обода—стоитъ только радіусъ обода сдѣлать очень большимъ, такъ какъ моментъ инерціи махового колеса относительно оси вращенія будетъ возрастать пропорціонально квадрату радіуса.

Однако практически это увеличеніе радіуса ограничено какъ размѣрами машиннаго помѣщенія, такъ, главнымъ образомъ, и допустимыми напряженіями матеріала обода, разрываемаго центробѣжными силами. Кромѣ того для скрѣпленія обода со втулкой въ одно цѣлое нужны спицы, вѣсъ которыхъ увеличивается съ увеличеніемъ радіуса; поэтому надо признать, что увеличеніе радіуса маховика лишь частично рѣшаетъ вопросъ [1]).

---

[1]) Какъ показало изслѣдованіе проф. К. А. Владимірова доложенное 17 февраля 1914 г. Научно-Механическому Кружку Общества Технологовъ, существуетъ нѣкоторый наивыгоднѣйшій радіусъ маховика для каждой машины, при которомъ полный вѣсъ махового колеса вмѣстѣ со спицами имѣетъ наименьшую величину. Этотъ радіусъ названъ наивыгоднѣйшимъ потому, что при наименьшемъ вѣсѣ работа силъ тренія будетъ наименьшая и съ другой стороны стоимость маховика наименьшая. Для двухъ примѣровъ, приведенныхъ въ упомянутомъ изслѣдованіи, наивыгоднѣйшій радіусъ оказался равнымъ приблизительно 2 метр.

Вторымъ простымъ средствомъ уменьшенія вѣса маховика является заклиниваніе его не на коренномъ валу поршневого двигателя, а на валу привода, вращающагося возможно быстрѣе, напр., дѣлающаго въ k разъ больше оборотовъ, чѣмъ коренной валъ. Мы уже упоминали (стр. 95) объ этомъ способѣ улучшенія равномѣрности вращенія, принадлежащемъ Уатту (планетный механизмъ). Необходимый для достиженія опредѣленной степени равномѣрности моментъ инерціи маховика будетъ при этомъ въ k^2 разъ меньше, но зато центробѣжныя силы увеличатся. Въ настоящее время это средство примѣняется рѣдко главнымъ образомъ потому, что считается нераціональнымъ подвергать приводъ дѣйствію перемѣнныхъ силъ; если приводъ зубчатый, то онъ будетъ очень шумѣть, если же онъ гибкій, напр., ременный, то будетъ скользить.

На заводѣ Уатта въ Soho была также произведена попытка [1]) выравнять діаграмму касательныхъ силъ статически при помощи воздушнаго буффера (заглушенннаго или закрытаго со всѣхъ сторонъ компрессора). Однако предложеніе это надо считать неудачнымъ; необходимые размѣры компрессора должны быть одного порядка съ размѣрами парового цилиндра, а если такъ, то проще сдѣлать машину сдвоенной двухкривошипной, раздѣливъ паровой цилиндръ на два. Замѣна буффера большой пружиной, напр., длиннымъ валомъ съ задѣланнымъ концомъ, также не представляетъ собой удачнаго способа улучшенія равномѣрности вращенія машинъ вслѣдствіе громоздкости.

Единственнымъ практически цѣннымъ *статическимъ* рѣшеніемъ вопроса является устройство многокривошипныхъ машинъ, очень распространенное со времени введенія машинъ многократнаго расширенія. Исторически оно является старѣйшимъ средствомъ, предложеннымъ еще Папеномъ (1690 г.). Поэтому мы и займемся прежде всего въ главѣ V вопросомъ о наивыгоднѣйшихъ углахъ заклинки многокривошипныхъ машинъ, дающихъ наиболѣе равномѣрное движеніе.

Въ этой же главѣ мы займемся задачей Коріолиса (1832) о наивыгоднѣйшемъ вѣсѣ возвратно-движущихся частей и наивыгоднѣйшей средней скорости. Въ концѣ главы мы затронемъ вскользь новый вопросъ о наивыгоднѣйшемъ расположеніи вспомогательныхъ механизмовъ—воздушнаго насоса въ паровыхъ машинахъ съ холодильникомъ или компрессора въ двигателяхъ Дизеля.

Главу VI мы посвятимъ нѣсколькимъ предложеніямъ изохронныхъ маховиковъ, т. е. маховыхъ колесъ съ перемѣннымъ моментомъ инерціи, содержащихъ цѣлесообразно устроенный механизмъ или особыя гири, силы инерціи которыхъ поглощаютъ работу двигателя въ мо-

---

[1]) См. Comptes rendus т. IX за 1839 г. сем. 2, стр. 219 сообщеніе Араго о письмѣ сэра John Robison.

менты ея избытка и затѣмъ возвращаютъ ее въ моменты недостатка работы. Предложенія эти еще не дали положительныхъ результатовъ, нѣкоторыя изъ нихъ еще не испробованы, но тѣмъ болѣе необходимо освѣтить ихъ съ теоретической точки зрѣнія.

Наконецъ, въ главѣ VII мы займемся изслѣдованіемъ вліянія упругости привода между двигателемъ и рабочею машиной (напр., длиннаго и потому пружинящаго вала, ременной передачи и пр.) на равномѣрность вращенія. Особенно интересно будетъ выяснить, въ какихъ случаяхъ упругость привода улучшаетъ равномѣрность вращенія рабочей машины.

ГЛАВА V.

Наивыгоднѣйшіе элементы машины: углы заклинки многокривошипныхъ машинъ, вѣсъ возвратно-движущихся частей, средняя скорость и расположеніе вспомогательнаго механизма.

34. Наивыгоднѣйшіе углы заклинки многокривошипныхъ машинъ. Историческія замѣчанія. Для каждаго рода двигателей практика установила опредѣленные углы заклинки кривошиповъ, долгое время (со временъ Морена, т. е. съ 1843 г.), считавшіеся наивыгоднѣйшими. Еще Моренъ [1]) при помощи діаграммы вращающихъ усилій показалъ, что моменты инерціи маховиковъ, дающихъ одинаковую равномѣрность 1) однокривошипной паровой машинѣ двойного дѣйствія, 2) двукривошипной съ углами заклинки 90° и 3) трехкривошипной съ углами заклинки 120°,—относятся между собою при равныхъ прочихъ условіяхъ (мощности, скорости и пр.), какъ 1:0,239:0,0863. Болѣе подробное изслѣдованіе вопроса о наивыгоднѣйшемъ углѣ заклинки кривошиповъ было впервые произведено Лоренцомъ [2]), особенно внимательно отнесшимся къ графическому уравниванію самыхъ большихъ гармоническихъ слагающихъ ряда Фурье, изображающаго вращающее усиліе. Болѣе полное рѣшеніе вопроса для одной заданной нагрузки принадлежитъ Рюденбергу [3]), давшему рѣшенія для двухъ и трехкривошипной машины.

Г. Ѳ. Проскура [4]) посвятилъ особое вниманіе паровой машинѣ съ двумя кривошипами, причемъ поставилъ вопросъ болѣе обще благодаря уже упоминавшимся на стр. 83 графикамъ амплитудъ.

---

[1]) Morin, Leçons de mécanique pratique, часть 3, Парижъ 1846, стр. 364.

[2]) Lorenz, Dynamik der Kurbelgetriebe mit besonderer Berücksichigung der Schiffsmaschinen. Лейпцигъ 1901 г. стр. 97—109.

[3]) Rüdenberg, Die günstigsten Kurbelwinkel für stationäre Mehrkurbelmaschinen, Dinglers Pol. Jonrnal за 1904 г. стр. 417—20; 437—9; 456—9.

[4]) Проскура, Г. Ѳ. Регулированіе хода машинъ двигателей. Часть I. Установившееся движеніе машинъ. Маховыя колеса, ихъ расчетъ и конструкція. Харьковъ 1908, стр. 52—77. Оттискъ изъ Извѣстій Харьковскаго Технологическаго Института за 1908 г. Томъ IV.

Ходъ разсужденій обоихъ послѣднихъ авторовъ почти одинаковъ: пишутся гармоническіе ряды, выражающіе діаграммы тангенціальныхъ усилій на кривошипахъ. Затѣмъ пишется рядъ для средняго отклоненія діаграммы отъ постояннаго сопротивленія, которое на основаніи принципа наименьшихъ квадратовъ равно корню квадратному изъ средней ариѳметической квадратовъ всѣхъ отклоненій; рядъ этотъ зависитъ отъ угла заклинки кривошиповъ; взявъ производныя по угламъ заклинки и приравнявъ ихъ нулю, получаемъ столько уравненій, сколько угловъ заклинки. Лишь рѣшеніе этихъ уравненій, отысканіе ихъ корней, представляетъ при большомъ числѣ кривошиповъ значительныя трудности, такъ какъ уравненія суть тригонометрическіе ряды отъ угла заклинки.

Рекомендуя читателю подробное ознакомленіе съ обоими упомянутыми только что изслѣдованіями, мы постараемся восполнить здѣсь одинъ принципіальный пробѣлъ ихъ; именно, вмѣсто разысканія угла, наивыгоднѣйшаго лишь при одной разсматриваемой нагрузкѣ, поставимъ вопросъ о среднемъ наивыгоднѣйшемъ углѣ заклинки кривошиповъ при измѣненіи нагрузки (или отсѣчки) машины отъ x_1 до x_2. Такая постановка представляетъ собою не только академическій, но и практическій интересъ: если для каждаго типа машинъ будетъ найденъ этотъ средній наивыгоднѣйшій уголъ, то это избавитъ нашихъ машиностроителей отъ кропотливыхъ расчетовъ для каждой проектируемой машины въ отдѣльности.

35. Двухкривошипная машина. Какъ простѣйшій случай, возьмемъ сначала двухкривошипную машину и напишемъ прежде всего ряды для работы и приведенной массы. Пусть работа, передаваемая валу первымъ кривошипомъ по-прежняму выражается рядомъ:

$$L_1 = 2r\left[\, b_0 + \Sigma a_i \sin i\varphi + \Sigma b_i \cos i\varphi \,\right].$$

Если уголъ поворота второго кривошипа считать отъ мертвой точки перваго кривошипа, а уголъ между кривошипами обозначить буквой α, то для второй машины можемъ написать рядъ:

$$L_2 = 2r\left[f_0 + \Sigma e_i \sin i(\varphi+\alpha) + \Sigma f_i \cos i(\varphi+\alpha)\right].$$

Складывая оба ряда и группируя члены получимъ:

$$L = L_1 + L_2 = 2r\left[\, b_0 + f_0 + \Sigma(a_i + e_i \cos i\alpha - f_i \sin i\alpha) \sin i\varphi + \Sigma(b_i + \right.$$

$$\left. + e_i \sin i\alpha + f_i \cos i\alpha) \cos i\varphi \,\right].$$

Точно также, если для перемѣнныхъ приведенныхъ массъ первой и второй машины будемъ имѣть ряды:

$$\mu = \Sigma \mu_i \cos i\varphi \quad \text{и} \quad m = \Sigma m_i \cos i\,(\varphi + \alpha),$$

то прибавляя постоянный членъ μ_0, получимъ рядъ для приведенной массы:

$$\mu = \mu_0 + \Sigma (\mu_i + m_i \cos i\alpha) \cos i\varphi - \Sigma m_i \sin i\alpha \,.\, \sin i\varphi \,.$$

Выраженіе для ряда угловой скорости оставимъ прежнее:

$$\omega = \omega_c (1 + \Sigma c_i \cos i\varphi + \Sigma d_i \sin i\varphi).$$

Повторивъ всѣ тѣ разсужденія, которыя были развиты въ главѣ III предыдущаго отдѣла, мы найдемъ:

$$c_i = 2\,\frac{b_i + e_i \sin i\alpha + f_i \cos i\alpha - 0{,}25\, r\omega_c^2\, (\mu_i + m_i \cos i\alpha)}{\mu_0 r\omega_c^2};$$

$$d_i = 2\,\frac{a_i + e_i \cos i\alpha - f_i \sin i\alpha + 0{,}25\, r\omega_c^2\, m_i \sin i\alpha)}{\mu_0 r\omega_c^2}\,.$$

Подставивши эти величины въ выраженіе:

$$\triangle_c = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \Sigma \frac{(c_i^2 + d_i^2)}{2}\, dx,$$

найдемъ среднюю мѣру неравномѣрности въ функціи угла заклинки α.

$$\triangle_c (x_2 - x_1).\ 0{,}5\, \mu_0^2\, r^2 \omega_c^4 = \int_{x_1}^{x_2} \Sigma \Big\{ a_i^2 + e_i^2 + (b_i - 0{,}25\, \mu_i r\omega_c^2)^2 +$$

$$+ (f_i - 0{,}25\, m_i r\omega_c^2)^2 + 2 \Big[c_i (b_i - 0{,}25\, \mu_i r\omega_c^2) - a_i (f_i - 0{,}25\, m_i r\omega_c^2) \Big].$$

$$.\, \sin i\alpha + 2 \Big[(b_i - 0{,}25\, \mu_i r\omega_c^2)\, (f_i - 0{,}25\, m_i r\omega_c^2) + a_i\, e_i \Big] \cos i\alpha \Big\}\, dx.$$

Для опредѣленія средняго наивыгоднѣйшаго угла надо приравнять нулю производную отъ $\triangle_c$ по α, что приведетъ насъ къ уравненію:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum \Big\{ \Big[e_i (b_i - 0{,}25\, r\omega_c^2\, \mu_i) - a_i (f_i - 0{,}25\, r\omega_c^2\, m_i) \Big] \cos i\alpha -$$

$$-\left[(b_i - 0{,}25\ r\,\omega_c^2\,\mu_i)\,(f_i - 0{,}25\,r\ \ \omega_c^2\,m_i) + a_i\,e_i \right] \sin i\alpha \Big\}\, i\,dx = 0.$$

Корни α_1, α_2 и т. д. этого уравненія суть углы заклинки, обращающіе Δ_c въ max или min. Для того чтобы выполнить интегрированіе надо будетъ a_i, b_i, e_i и f_i выразить по возможности простыми функціями отъ x. Изъ полученныхъ корней надо отдѣлить тѣ, при которыхъ Δ_c имѣетъ наименьшее, а не наибольшее значеніе, и, если ихъ нѣсколько, подстановкой опредѣлить наивыгоднѣйшій изъ нихъ. Если оба цилиндра тождественны, т. е. если $e_i = a_i$; $f_i = b_i$ и $m_i = \mu_i$, то всѣ косинусоиды пропадаютъ и остается рядъ изъ однѣхъ синусоидъ. То обстоятельство, что множителемъ каждаго члена ряда является i заставляетъ подозрѣвать, что рядъ этотъ плохо сходящійся. Если это такъ, то будемъ искать минимумъ, вычерчивая самую функцію.

Примѣръ. Двухцилиндровый дизель-двигатель.

Для примѣра найдемъ средній наивыгоднѣйшій уголъ заклинки для двухцилиндроваго дизеля, составленнаго изъ двухъ тождественныхъ машинъ. Работу продувочнаго компрессора для упрощенія выкладокъ не будемъ принимать во вниманіе.

Если буквой x обозначить нагрузку двигателя въ доляхъ полной нагрузки, то графикъ, изображенный на *чер. 25*, съ большой степенью точности можетъ быть выраженъ при помощи линейныхъ зависимостей коефиціентовъ отъ x. Именно можемъ положить:

$$L = 2\ r.\Big[3{,}86 + 2{,}62\ x + (0{,}49 + 1{,}65\ x)\ \sin\frac{\varphi}{2} + (0{,}14 + 0{,}40\,x)\sin\varphi -$$

$$-(0{,}95 + 1{,}00\ x)\ \cos\frac{\varphi}{2} - (0{,}95 + 0{,}74x)\cos\varphi - (0{,}70 + 0{,}43\,x)\cos\frac{3}{2}\varphi -$$

$$-(0{,}56 + 0{,}24\,x)\ \cos 2\varphi - (0{,}47 + 0{,}15\,x)\ \cos\frac{5}{2}\ \varphi -$$

$$-(0{,}23 + 0{,}06\,x)\cos 3\varphi\Big].$$

гдѣ $2\ r$ длина хода въ метрахъ.

Для приведеннной массы будемъ имѣть рядъ:

$$\gamma = 0{,}31 + 0{,}04\cos\varphi - 0{,}20\ \cos 2\ \varphi - 0{,}04\ \cos 3\ \varphi,$$

причемъ принято $q_3 = 0{,}3$ кг./кв. см.; $q_2 = 0{,}2$ кг. / кв. см.

Такъ какъ оба цилиндра тождественны, то уравненіе принимаетъ видъ:

$$\int_0^1 \sum \left[(b_i - 0{,}25\ r\,\omega_c^2\ \mu_i)^2 + a_i^2 \right] \sin i\,\alpha\,.\,i\,dx = 0.$$

Послѣ подстановки значеній a_i и b_i должно слѣдовать интрегрированіе; при этомъ замѣтимъ, что

$$\int_0^1 (g + hx)^2\ dx = \frac{(g+h)^3 - g^3}{3h}\,.$$

Сначала продѣлаемъ всѣ вычисленія, не принимая во вниманіе массы возвратно-движущихся частей. Уравненіе, корень котораго опредѣляетъ наивыгоднѣйшій уголъ α, приметъ, послѣ умноженія на общій знаменатель 3, слѣдующій видъ:

$$6{,}21 \sin\frac{\alpha}{2} + 5{,}75\ \sin\ \alpha + 3{,}84 \sin\frac{3}{2}\alpha + 2{,}80\ \sin\ 2\alpha + 2{,}22 \sin\frac{5}{2}\ \alpha +$$

$$+ 0{,}60 \sin 3\,\alpha = 0.$$

Сложивши этотъ рядъ при помощи таблицы (стр. 93), получимъ несомнѣнные корни: $\alpha = 0 = 4\pi$ и $\alpha = 2\pi$. Первый изъ нихъ, конечно, соотвѣтствуетъ максимуму, а чтобы убѣдиться, что второй даетъ минимумъ, напишемъ рядъ опредѣляющій $\triangle_c$. Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ $e_i = a_i$; $f_i = b_i$ и $m_i = \eta_i$, то синусоиды пропадутъ, и мы получимъ:

$$\triangle_c = \frac{4}{\mu_0^2\ r^2\ \omega_c^4} \int_0^1 \sum \left[\ a_i^2 + (b_i - 0{,}25\ \mu_i\,r\,\omega_c^2)^2 \right] (1 + \cos i\alpha)\,dx.$$

Если не принимать во вниманіе массъ механизма и вынести общій знаменатель 3 за скобки, получимъ для нашего примѣра:

$$0{,}75\ \mu_0^2\ \ r^2\ \omega_c^4\,.\ \triangle_c = 23{,}22 + 12{,}42\ \cos\ \frac{\alpha}{2}\ + 5{,}75 \cos\alpha + 2{,}56 \cos\frac{3}{2}\,\alpha +$$

$$+ 1{,}40\ \cos\ 2\,\alpha + 0{,}89\ \cos\frac{5}{2}\,\alpha + 0{,}20\ \cos\ 3\ \alpha.$$

Этотъ рядъ сходится лучше предыдущаго и послѣ складыванія увидимъ, что изъ 12 его ординатъ одна, седьмая наименьшая, именно:

$$y_5 = +15{,}8;\ \ y_6 = +15{,}2;\ y_7 = +14{,}7;\ y_8 = +15{,}2;\ \ y_9 = +15{,}8.$$

Слѣдовательно наименьшее $\triangle_c$ будетъ при углѣ α, соотвѣтствующемъ y_7, т. е. $6\,.\,60^0 = 360^0$, что общеизвѣстно.

Болѣе тщательное изслѣдованіе кривой въ промежуткѣ $\alpha = 2\pi \pm \pm 60^\circ$ черезъ каждые 10° показываетъ, что второго минимума нѣтъ, такъ что общепринятый уголъ заклинки $\alpha = 2\pi$ является среднимъ наивыгоднѣйшимъ. Нѣсколько примѣровъ съ принятіемъ во вниманіе массы даютъ тотъ-же результатъ.

36. Трехкривошипная машина. Если уголъ поворота третьяго кривошипа также считать отъ мертвой точки перваго, уголъ заклинки обозначить буквой β, а рядъ для работы написать въ видѣ:

$$L_\beta = 2r\left[h_o + \Sigma g_i \sin i(\varphi+\beta) + \Sigma h_i \cos i(\varphi+\beta)\right],$$

а для приведенной массы:

$$\mu_{III} = \Sigma l_i \cos i(\varphi+\beta),$$

то амплитуды въ рядѣ угловой скорости будутъ опредѣляться уравненіями:

$$c_i = 2\,\frac{b_i + e_i \sin i\alpha + g_i \sin i\beta + f_i \cos i\alpha + h_i \cos i\beta -}{\mu_o\, r\, \omega_c^2}$$

$$\frac{-0{,}25\, r\omega_c^2(\mu_i + m_i \cos i\alpha + l_i \cos i\beta)}{\mu_o\, r\, \omega_c^2}.$$

$$d_i = 2\,\frac{a_i + e_i \cos i\alpha + g_i \cos i\beta - f_i \sin i\alpha - h_i \sin i\beta +}{\mu_o\, r\, \omega_c^2}$$

$$\frac{+0{,}25\, r\omega_c^2(m_i \sin i\alpha + l_i \sin i\beta)}{\mu_o\, r\, \omega_c^2}.$$

Обозначивъ для сокращенія письма:

$$b'_i = b_i - 0{,}25\,\mu_i r\omega_c^2;\; f'_i = f_i - 0{,}25\, m_i r\omega_c^2;\; h'_i = h_i - 0{,}25\, l_i r\omega_c^2,$$

напишемъ рядъ для средней мѣры неравномѣрности:

$$\Delta_c\,.(x_2 - x_1).\ 0{,}5\,\mu_o^2\, r^2\omega_c^4 = \int_{x1}^{x2} \Sigma\Big\{a_i^2 + e_i^2 + g_i^2 + b'^2_i + f'^2_i +$$

$$+ h'^2_i + 2(e_i b'_i - a_i f'_i)\sin i\alpha + 2(g_i b'_i - a_i h'_i)\sin i\beta +$$

$$+ 2(a_i e_i + b'_i f'_i)\cos i\alpha + 2(a_i g_i + b'_i h'_i)\cos i\beta +$$

$$+ 2(e_i g_i + f'_i h'_i)\cos i(\alpha-\beta) + 2(e_i h'_i - g_i f'_i)\sin i(a-\beta)\Big\}\,dx.$$

Такимъ образомъ, рядъ, опредѣляющій Δ_c, а слѣдовательно и производныя отъ Δ_c по α и β, представляетъ собою сумму трехъ рядовъ Фурье съ аргументами $i\alpha$, $i\beta$ и $i(\alpha-\beta)$. Частный примѣръ опредѣленія максимумовъ и минимумовъ подобнаго ряда содержится у Рюденберга. Мы не будемъ, подобно ему, опредѣлять ихъ дифференцированіемъ и нахожденіемъ корней. Экономнѣе въ смыслѣ затраты времени будетъ искать минимумъ при помощи простыхъ ариѳметическихъ вычисленій. Кромѣ того результатъ будетъ вѣрнѣе, такъ какъ мы будемъ оперировать съ рядами, сходимость которыхъ не ухудшена дифференцированіемъ.

Для этого вычислимъ отдѣльно слѣдующія функціи:

$$C = Const. = \int_{x1}^{x2} \Sigma \left(a_i{}^2 + e_i{}^2 + g_i{}^2 + b'_i{}^2 + f'_i{}^2 + h'_i{}^2 \right) dx$$

$$y(\alpha) = 2 \int_{x1}^{x2} \sum \Big[(e_i b'_i - a_i f'_i) \sin i\alpha + (a_i e_i + b'_i f'_i) \cos i\alpha \Big] . dx$$

$$z(\beta) = 2 \int_{x1}^{x2} \sum \Big[(g_i b'_i - a_i h'_i) \sin i\beta + (a_i g_i + b'_i h'_i) \cos i\beta \Big] dx$$

$$v(\alpha - \beta) = 2 \int_{x1}^{x2} \sum \Big[(e_i h'_i - g_i f'_i) \sin i(\alpha - \beta) +$$

$$+ (e_i g_i + f'_i h'_i) \cos i(\alpha - \beta) \Big] dx.$$

Тогда величина $\triangle_c$ будетъ пропорціональна суммѣ $C + y + z + v$.

Послѣдніе три функціи, представляющія собою ряды Фурье, достаточно вычислить, конечно, только для одного періода, т. е. для измѣненія α, β и $(\alpha - \beta)$ въ предѣлахъ отъ O до Φ. Раздѣлимъ угловой період Φ на какое-нибудь цѣлое число равныхъ угловъ, каждый въ τ°, напр. на 12 частей, и пусть намъ извѣстны величины y_0, $y_1 \ldots y_{11}$; z_0, $z_1 \ldots z_{11}$; v_0, $v_1 \ldots v_{11}$ значеній функцій, соотвѣтствующія угламъ α, β и $\alpha - \beta$ равнымъ O, τ, $2\tau \ldots 11\tau$. Тогда для опредѣленія среднихъ наивыгоднѣйшихъ угловъ α и β намъ надо будетъ найти минимумъ суммы $C + y + z + v$. Прежде всего не будемъ пока обращать вниманіе на постоянное слагаемое C; изъ остальныхъ трехъ слагаемыхъ два не зависимы, а третье зависимое. Поэтому будемъ задаваться каждый разъ опредѣленнымъ значеніемъ одного изъ аргументовъ, напр. разности $\alpha - \beta = i\tau$; это дастъ намъ опредѣленное v_i; къ нему надо прибавлять сумму $z_k + y_{k+i}$ и отмѣтить наименьшую изъ всѣхъ суммъ; если напр. сумма $z_n + y_{n+i}$ наименьшая, то это значить, что при разности $\alpha-\beta=i\,\tau$ выгодными углами заклинки былибы $\alpha=(n+i)\tau$ и $\beta=n\tau$, а перемѣнное слагаемое для опредѣленія $\triangle_c$ будетъ имѣть малую величину $u_i=v_i+z_n+y_{n+i}$.

Опредѣливши 12 малыхъ величинъ u_0, u_1, . . . u_{11} соотвѣтственно значеніямъ $\alpha-\beta=O$, τ, 2τ . . . 11τ, мы найдемъ наименьшую изъ нихъ, которая и опредѣлитъ грубо приближенно наивыгоднѣйшіе углы α и β. Послѣ этого надо нѣсколькими попытками черезъ 5 или 10° провѣрить, нѣтъ-ли вблизи найденныхъ значеній α и β еще болѣе выгодныхъ комбинацій.

Не надо думать, что предлагаемый здѣсь методъ требуетъ опредѣленія 144 суммъ. Одного взгляда на нѣкоторыя слагаемыя достаточно для того, чтобы быть увѣреннымъ, что ихъ сумма не будетъ наименьшею; поэтому для каждаго $\alpha-\beta=i.\tau$ надо будетъ дѣйствительно вычислить лишь нѣсколько сомнительныхъ суммъ.

Само собою разумѣется, двѣнадцатью дѣленіями можно пользоваться лишь въ томъ случаѣ, когда шестая гармоническая всѣхъ трехъ рядовъ ничтожно мала по сравненію съ остальными; въ противномъ случаѣ надо брать больше дѣленій.

Примѣръ. Трехцилиндровый дизель. Для примѣра провѣримъ опять средніе наивыгоднѣйшіе углы заклинки двигателя дизеля, состоящаго изъ трехъ тождественныхъ машинъ, основные элементы которыхъ были указаны на стр. 104. Вслѣдствіе тождественности цилиндровъ ряды значительно упростятся, коефиціенты при синусахъ обратятся въ нули, такъ какъ $g_i=e_i=a_i$; $h'_i=f'_i=b'_i$. Средняя мѣра неравномѣрности $\triangle_c$ опредѣляется въ этомъ случаѣ уравненіемъ

$$\triangle_c\, 0{,}5\, \mu_0{}^2 r^2 \omega_c{}^4=\int_0^1 \sum \Big[3(a_i{}^2+b'_i{}^2)+2(a_i{}^2+b'_i{}^2)\cos i\alpha+$$

$$+2(a_i{}^2+b'_i{}^2)\cos i\beta+2(a_i{}^2+b'_i{}^2)\cos i(\alpha-\beta)\Big]\, dx$$

Такимъ образомъ, въ случаѣ тождественныхъ цилиндровъ намъ надо будетъ складывать не три, а всего одинъ рядъ Фурье, для того чтобы знать всѣ 36 значеній y, z и v. Подставляя значенія a_i, b_i и пренебрегая возвратно движущимися массами, получимъ послѣ интрегрированія:

$$y=2\int_0^1 \sum (a_i{}^2+b_i{}^2)\cos i\alpha\,.\,dx=8{,}28\cos\frac{\alpha}{2}+3{,}82\cos\alpha+$$

$$+1{,}70\cos\frac{3}{2}\alpha+0{,}94\cos 2\alpha+0{,}60\cos\frac{5}{2}\alpha+0{,}14\cos 3\alpha.$$

Складываніе этого ряда при помощи таблицы (стр. 93) даетъ: $y_0 = +15{,}48$; $y_1 = +7{,}95$; $y_2 = +0{,}50$; $y_3 = -3{,}02$; $y_4 = -4{,}98$; $y_5 = -5{,}35$; $y_6 = -5{,}68$; $y_7 = -5{,}35$; $y_8 = -4{,}98$; $y_9 = -3{,}02$; $y_{10} = +0{,}50$; $y_{11} = +7{,}95$; $y_{12} = y_0$. Такія-же значенія пробѣгаютъ и z_i, и v_i.

Выпишемъ значенія y_i и z_i на двухъ ленточкахъ бумаги неравной ширины, придавъ имъ такую форму, чтобы одна ленточка легко передвигалась въ другой и чтобы можно было въ одномъ вертикальномъ ряду имѣть любыя слагаемыя $y_{k+i} + z_k$. Придавая $\alpha - \beta$ послѣдовательно значенія отъ O до $11.\tau$, въ нашемъ случаѣ отъ 0° до 660° черезъ каждые 60°, будемъ находить малыя значенія суммъ $u_i = v_i + z_n + y_{n+i}$; получимъ слѣдующее: $\alpha - \beta = O$, $u_0 = v_0 + y_6 + z_6 = +4{,}12$; $\alpha - \beta = 60°$, $u_1 = v_1 + y_6 + z_5 = v_1 + y_7 + z_6 = -3{,}08$; $\alpha - \beta = 120°$, $u_2 = v_2 + y_7 + z_5 = -10{,}20$; $\alpha - \beta = 180°$; $u_3 = v_3 + y_7 + z_4 = v_3 + y_8 + z_5 = -13{,}35$; $\alpha - \beta = 240°$, $u_4 = v_4 + y_8 + z_4 = -14{,}94$, $\alpha = 480^0$, $\beta = 240^0$; $\alpha - \beta = 300^0$, $u_5 = v_5 + y_8 + z_3 = v_5 + y_9 + z_4 = -13{,}35$; $\alpha - \beta = 360°$, $u_6 = v_6 + y_9 + z_9 = v_6 + y_0 + z_3 = -11{,}72$. Дальше измѣненія u идутъ симметрично, не внося новыхъ комбинацій угловъ α и β, а лишь замѣняя одинъ другимъ; именно находимъ: $u_7 = -13{,}35$; $u_8 = -14{,}94$ при $\alpha = 240^0$, $\beta = = 480^0$; $u_9 = -13{,}35$; $u_{10} = -10{,}20$; $u_{11} = -3{,}08$; $u_{12} = +4{,}12$.

Итакъ, общепринятые углы заклинки $\alpha = 240^0$; $\beta = 480^0$ являются въ то-же время и средними наивыгоднѣйшими. Надо замѣтить, что дѣйствительное число суммъ, которыя пришлось вычислять было 12, а не 144.

37. Четырехкривошипная машина. Пусть къ тѣмъ тремъ кривошипамъ, о которыхъ было говорено въ предыдущемъ п., прибавляется еще четвертый съ угломъ заклинки γ. Написавъ рядъ для работы

$$L_4 = 2r\left[p_0 + \Sigma\, q_i \sin i(\varphi + \gamma) + \Sigma p_i \cos i(\varphi + \gamma)\right]$$

и для массы

$$\mu_{1V} = \Sigma\, k_i \cos\, i\,(\varphi + \gamma),$$

опредѣлимъ амплитуды:

$$c_i = 2\,\frac{e_i \sin\, i\alpha + g_i\, \sin\, i\,\beta + q_i \sin i\,\gamma + b'_i + f'_i \cos\, i\,\alpha + h'_i \cos\, i\beta +}{\mu_0\; r\omega_a^2}$$

$$\frac{+p'_i\, \cos\, i\,\gamma}{\mu_0\, r\,\omega_a^2}$$

$$d_i = 2\,\frac{a_i + e_i \cos i\,\alpha + g_i\, \cos\, i\beta + q_i \cos\, i\,\gamma - f'_i \sin\, i\,\alpha - k'_i \sin\, i\,\beta -}{\mu^0\; r\,\omega_a^2}$$

$$\frac{-p'_i \sin i\gamma}{\mu_0 \; r\omega_c^2}$$

причемъ сохранены прежнія обозначенія и кромѣ того для сокращенія письма обозначено $p'_i = p_i - 0{,}25\; k_i\, r\,\omega_c^2$. Рядъ для $\triangle_c$ приметъ видъ:

$$\triangle_c\,(x_2 - x_1).\; 0{,}5\;\mu_0^2\; r^2\omega_c^4 = \int_{x1}^{x2} \sum \Big\{ a_i^{\,2} + b'^{\,2}_i + f'^{\,2}_i + g_i^{\,2} + h'^{\,2}_i +$$

$$+ q_i^2 + p_i'^2 + 2\Big[e_i\, b_i' - a_i\, f_i')\sin i\alpha + (a_i\, e_i + b_i' f_i')\cos i\alpha + (g_i\, b_i' - a_i\, h'_i)$$

$$\sin i\beta + (a_i\, g_i + b_i'\, h_i')\cos i\beta + (q_i\, b_i' - a_i p_i')\sin i\gamma + (a_i\, q_i + b_i'\, p_i')\cos i\gamma +$$

$$+ (e_i\, h_i' - g_i\, f_i')\sin i\,(\alpha - \beta) + (e_i\, g_i + h_i' f'_i)\cos i\,(\alpha - \beta) + (e_i\, p_i' - q_i\, f_i')$$

$$\sin i\,(a - \gamma) + (e_i\, q_i + f_i'\, p_i')\cos i\,(\alpha - \gamma) + (g_i\, p_i' - q_i\, h_i')\sin i\,(\beta - \gamma) +$$

$$+ (g_i\, q_i + h_i'\, p_i')\cos i\,(\beta - \gamma)\Big]\Big\} dx.$$

Число рядовъ, опредѣляющихъ величину Δ_c, возрасло до 6 и вмѣстѣ съ этимъ въ значительной степени усложнилось число возможныхъ комбинацій различныхъ угловъ заклинки. Если пользоваться предложеннымъ въ предыдущемъ п. ариѳметическимъ методомъ, то суммировать надо будетъ не три, а шесть слагаемыхъ.

Введемъ обозначенія:

$$y\,(\alpha) = 2\int_{x1}^{x2} \sum \Big[(e\;\; b_i' - a_i\, f_i')\sin i\alpha + (a_i\, e_i + b_i' f_i')\cos i\alpha\Big] dx$$

$$z\,(\beta) = 2\int_{x1}^{x2} \sum \Big[(g_i\;\, b_i' - a_i\;\, h_i')\sin i\beta + (a_i\, g_i + b_i'\, h_i')\cos i\beta\Big] dx$$

$$v\,(\gamma) = 2\int_{x1}^{x2} \sum \Big[(q_i\;\, b_i' - a_i\, p_i')\sin i\gamma + (a_i\, q_i + b_i'\, p_i')\cos i\gamma\Big] dx$$

$$s\,(\alpha - \beta) = 2\int_{x1}^{x2} \sum \Big[(e_i\;\, h_i' - g_i f_i')\sin i\,(\alpha - \beta) + (e_i g_i + h_i'\, f_i')\cos i\,(\alpha - \beta)\Big] dx$$

$$t(\alpha-\gamma)=2\int_{x1}^{x2}\sum\Big[(e_i p_i')-q_i f_i')\sin i(\alpha-\gamma)+(e_i q_i+p_i' f_i')\cos i(\alpha-\gamma)\Big]dx$$

$$w(\beta-\gamma)=2\int_{x1}^{x2}\sum\Big[(g_i p_i'-q_i h_i')\sin i(\beta-\gamma)+(g_i q_i+p_i' h_i')\cos i(\beta-\gamma)\Big]\ dx$$

и пусть при помощи таблицъ мы вычислили по 12 ординатъ каждаго ряда. Задача заключается въ томъ, чтобы изъ этихъ 72 ординатъ подобрать шесть такихъ, сумма которыхъ $u=y+z+v+s+t+w$ имѣетъ наименьшую изъ всѣхъ возможныхъ комбинацій величину. Вычисленій будетъ больше, чѣмъ въ случаѣ трехкривошипной машины, но не такъ ужъ много, чтобы отказаться отъ нихъ. Раздѣлимъ опять угловой періодъ Φ на 12 равныхъ частей по τ^0 каждая и будемъ задаваться двумя величинами аргументовъ $\alpha-\beta=i\tau$ и $\alpha-\gamma=j\tau$ причемъ, какъ i, такъ и j будемъ варьировать отъ 0 до 11. Выбраннымъ двумъ аргументамъ будетъ соотвѣтствовать вполнѣ опредѣленный третій $\beta-\gamma=(j-i)\tau$. Слѣдовательно для каждой комбинаціи i и j мы будемъ имѣть вполнѣ опредѣленныя значенія s_i, t_j и w_{j-i}, сумму которыхъ не трудно опредѣлить. Останется найти 12 суммъ: $y_n+z_{n-i}+v_{n-j}$ или, вычисляя въ умѣ лишь приблизительную величину каждой изъ нихъ, опредѣлить одну наименьшую сумму и, прибавивъ къ ней $s_i+t_j+w_{j-i}$, замѣтить малую величину u_{ij}, соотвѣтствующую выбранной комбинаціи. Послѣ того какъ это продѣлано для всѣхъ 144 комбинацій, можно изъ полученныхъ малыхъ величинъ опредѣлить наименьшую и такимъ образомъ найти три наивыгоднѣйшихъ угла заклинки.

Примѣръ. Четырехцилиндровый дизель. Сохраняя принятыя обозначенія, мы опять значительно упростимъ ряды вслѣдствіе тождественности всѣхъ цилиндровъ. Основное уравненіе приметъ видъ:

$$\Delta_e\,.\,0{,}5\ \mu_0^2\ r^2\omega_e^4=\int_0^1\sum\Big[4\,(a_i^2+b_i'^2)+2\,(a_i^2+b_i'^2)\cos i\,\alpha+$$

$$+2\,(a^{i2}+b_i'^2)\cos i\,\beta+2\,(a_i^2+b_i'^2)\cos i\,\gamma+2\,(a_i^2+b_i'^2)\cos i\,(\alpha-\beta)+$$

$$+2\,(a_i^2+b_i'^2)\cos i\,(\alpha-\gamma)+2(a_i^2+b_i'^2)\cos i\,(\beta-\gamma)\Big]\,dx\,.$$

Какъ видно, всѣ шесть функцій протекаютъ тождественно; двѣнадцать значеній y уже вычислены на стр. 109, и мы можемъ ими воспользоваться. Приготовивъ три подвижныя ленточки съ надписанными значеніями y, z и v, беремъ $i=0$ и j мѣняемъ отъ нуля до 11, находимъ наименьшую сумму u, затѣмъ беремъ $i=1$, а j опять мѣняемъ отъ нуля до 11 и т. д.; многихъ вычисленій при этомъ не приходится производить, такъ такъ они приводятъ къ уже извѣстнымъ результатамъ вслѣдствіе тождественности всѣхъ шести рядовъ съ одной стороны, и симметричности рядовъ съ другой. Результатъ получается такой-же, какъ и въ предыдущихъ случаяхъ—нѣсколько разъ получается одна и та-же наименьшая сумма $u=y+z+v+>s+t+w=-23{,}44$, но всегда она даетъ въ различныхъ комбинаціяхъ одни и тѣ-же углы заклинки 180^0, 360^0 и 540^0, т. е. общеизвѣстные.

Не будемъ разбирать здѣсь пятикривошипной машины, такъ какъ ничего принципіально новаго она не внесетъ; число рядовъ увеличится до 10 и вмѣстѣ съ этимъ возрастетъ лишь число необходимыхъ ариѳметическихъ дѣйствій.

38. Наивыгоднѣйшій вѣсъ возвратно-движущихся частей и наивыгоднѣйшая средняя скорость. Поставленные въ заголовкѣ этой главы два вопроса были впервые возбуждены Коріолисомъ въ уже цитированномъ (глава I, стр. 11) мемуарѣ. По вопросу о наивыгоднѣйшемъ вѣсѣ возвратно-движущихся частей современныхъ машинъ намъ не извѣстно ни одного позднѣйшаго сочиненія, вопросъ же о наивыгоднѣйшей скорости поднимался въ сочиненіяхъ Радингера, Толле и Проскуры. Рекомендуемая Радингеромъ скорость наиравномѣрнѣйшаго движенія настолько слабо обоснована, что на ней не стоитъ останавливаться. Рекомендуемое Толле графическое рѣшеніе вопроса для одной какой-либо нагрузки машины при помощи діаграммы массъ и работъ не правильно въ томъ отношеніи, что средняя скорость машины вліяетъ на приведенный вѣсъ маховика двоякимъ образомъ: 1) измѣняя кинетическую энергію и силы инерціи возвратно-движущихся частей; 2) измѣняя колебанія кинетической энергіи маховика. Второе обстоятельство упущено Толле, и дѣйствительная наивыгоднѣйшая скорость, дающая наименьшій вѣсъ маховика, лежитъ нѣсколько выше той, которую онъ рекомендуетъ. Въ курсѣ „Регулированіе машинъ" Г. Ѳ. Проскуры вопросъ рѣшенъ аналитически лишь для одной опредѣленной нагрузки машины.

Постараемся найти аналитически *средній наивыгоднѣйшій вѣсъ возвратно-движущихся частей машины* и *среднюю наивыгоднѣйшую ея скорость*, подразумѣвая подъ наивыгоднѣйшими такія ихъ величины, при которыхъ средняя мѣра неравномѣрности Δ_c имѣетъ наименьшую величину.

Прежде чѣмъ перейти къ рѣшенію поставленныхъ вопросовъ, намъ хочется подчеркнуть важность и высокій интересъ вновь поднятой здѣсь задачи Коріолиса о наивыгоднѣйшемъ вѣсѣ частей машины. Средняя скорость (среднее число оборотовъ) машины часто не можетъ быть выбрана конструкторомъ по его желанію, такъ какъ ее задаетъ ему заказчикъ, руководящійся своими экономическими соображеніями, стоимостью трансмиссій, удобствомъ и пр. Между тѣмъ вѣсъ возвратно-движущихся частей въ значительной степени предоставленъ волѣ конструктора; хотя уменьшеніе его и представляетъ извѣстныя затрудненія, требуя иногда замѣны чугуна сталью и, слѣдовательно, удорожанія машины, но очень часто эта мѣра можетъ оказаться выгодной. Очень часто, для не быстроходныхъ машинъ, можетъ быть выгоднымъ утяжеленіе возвратно-движущихся частей; мы будемъ при этомъ предполагать, что оно производится за счетъ утяжеленія крестовины, напр., заливкою полостей ея чугуномъ или прикрѣпленіемъ къ ней чугунныхъ гирь; только если нѣтъ крестовины, то придется измѣнять вѣсъ поршня.

Простое разсужденіе покажетъ намъ, насколько выгоднѣе прибавить 1 кг. къ ползуну, чѣмъ къ пальцу кривошипа. При коефиціентѣ неравномѣрности δ, радіусѣ кривошипа r въ м. и средней угловой скорости ω_0 работа, воспринимаемая, а затѣмъ отдаваемая массой въ 1 кг., сосредоточенной въ пальцѣ кривошипа, равна $\delta r^2 \omega_0^2 : 19{,}62$ кг.м.; если тотъ же 1 кг. сосредоточенъ въ ползунѣ, то онъ воспринимаетъ, а затѣмъ отдаетъ работу $r^2 \omega_0^2 : 19{,}62$, т. е. въ $1/\delta$ разъ больше. Считая, что въ среднемъ радіусъ маховика равенъ пяти радіусамъ кривошипа, такъ что 1 кг. на ободѣ маховика замѣняетъ 25 кг. на пальцѣ кривошипа, увидимъ, что для $\delta < 0{,}04$ можетъ оказаться выгоднѣе прибавить 1 кг. къ ползуну, а не къ ободу маховика. Конечно, надо помнить, что масса обода маховика работаетъ тогда, когда нужно, масса же ползуна воспринимаетъ и отдаетъ работу независимо отъ того, повышаетъ это или ухудшаетъ равномѣрность движенія машины. Въ каждомъ частномъ случаѣ легко подсчитать, что будетъ выгоднѣе съ экономической точки зрѣнія, — утяжелить ободъ маховика, или утяжелить (или облегчить) систему ползуна.

Общее рѣшеніе. Пусть работа машины изображается рядомъ:

$$L = 2r\left[b_0 + \Sigma a_i \sin i\varphi + \Sigma b_i \cos i\varphi\right].$$

Имѣя въ виду много-кривошипныя машины, рядъ для приведенной массы напишемъ въ общемъ видѣ:

$$\mu = \mu_0 + \Sigma \mu_i \cos i\varphi + \Sigma m_i \sin i\varphi.$$

Тогда измѣненія угловой скорости будутъ опредѣляться амплитудами:

$$c_i = 2\,\frac{b_i - 0{,}25\,\mu_i\, r\omega_c^2}{\mu_0\, r\omega_c^2}\,;\; d_i = 2\,\frac{a_i - 0{,}25\, m_i\, r\omega_c^2}{\mu_0\, r\omega_c^2}.$$

Величина же средней мѣры неравномѣрности при измѣненіи нагрузки (или отсѣчки) отъ x_1 до x_2 будетъ равна:

$$\Delta_c = \frac{2}{x_2 - x_1} \int_{x1}^{x2} \sum \frac{(b_l - 0{,}25\, \mu_l\, r\omega_c^2)^2 + (a_l - 0{,}25\, m_l\, r\omega_c^2)^2}{\mu_0^2\, r^2\, \omega_c^4}\, dx.$$

Найдемъ сначала наивыгоднѣйшій вѣсъ q_3 ползуна (или ползуновъ въ многокривошипной машинѣ); при этомъ надо имѣть въ виду, что величина q_3 входитъ линейно въ выраженія амплитудъ μ_l и m_l. Приравняемъ производную отъ Δ_c по q_3 нулю, получимъ:

$$\frac{d\,\Delta_c}{d\,q_3} = \frac{-1}{(x_2 - x_1)\,\mu_0^2 r\omega_c^2} \int_{x1}^{x2} \sum \left[(b_l - 0{,}25\,\mu_l\, r\omega_c^2)\,\frac{d\mu_l}{dq_3} + \right.$$

$$\left. + (a_l - 0{,}25\, m_l\, r\omega_c^2)\,\frac{dm_l}{dq_3}\right]\, dx.$$

Слѣдовательно для опредѣленія наивыгоднѣйшаго q_3 будемъ имѣть уравненіе:

$$\int_{x1}^{x2} \sum \left[b_l - 0{,}25\,\mu_l\, r\omega_c^2)\, \frac{d\mu_l}{dq_3} + (a_l - 0{,}25\, m_l\, r\omega_c^2)\,\frac{dm_l}{dq_3}\right] dx = 0,$$

рѣшеніе котораго не представляетъ никакихъ трудностей, такъ какъ q_3 будетъ входить въ него линейно; если кромѣ того коефиціенты a_l и b_l можно будетъ выразить алгебраическими функціями отъ x, то и интегрированіе не представитъ никакихъ затрудненій. Производныя отъ μ_l и m_l по q_3 будутъ представлять собой постоянные множители. Сумма распространяется только на тѣ гармоническія, которыя содержатъ μ_l или m_l.

Несомнѣнно, что наивыгоднѣйшій вѣсъ ползуна имѣется у каждой машины; чтобы въ этомъ убѣдиться, стоитъ взять вторую производную:

$$\frac{d^2\,\Delta_c}{dq_3^2} = \frac{1}{4\,\mu_0^2} \sum \left[\left(\frac{d\mu_l}{dq_3}\right)^2 + \left(\frac{dm_l}{dq_3}\right)^2 \right].$$

Она всегда положительна, слѣдовательно, функція Δ_c имѣетъ лишь минимумъ.

Наивыгоднѣйшая скорость. Для опредѣленія наивыгоднѣйшей скорости надо приравнять нулю производную по угловой скорости или, такъ какъ ω_c входитъ въ квадратѣ и въ четвертой степени, производную по ω_c^2; получимъ:

$$\frac{d\,\Delta_c}{d(\omega_c^2)}=\frac{-4}{x_2-x_1}\int_{x1}^{x2}\sum\left[\frac{b_l\,(b_l-0{,}25\,\mu_l\,r\omega_c^2)+a_l\,(a_l-0{,}25\,m_l\,r\omega_c^2)}{\mu_0^2\,r^2\,\omega_c^6}\right]dx.$$

Приравнивая ее нулю, найдемъ квадраты наивыгоднѣйшей скорости, какъ корни уравненія:

$$\frac{\int\limits_{x1}^{x2}\sum\left[b_l\,(b_l-0{,}25\,\mu_l\,r\omega_c^2)+a_l\,(a_l-0{,}25\,m_l\,r\omega_c^2)\right]dx}{\omega_c^6}=0.$$

Одинъ корень $\omega_c^2=\infty$ очевиденъ, и надо посмотрѣть, будетъ ли это наиболѣе или наименѣе выгодная скорость, т. е. даетъ ли онъ наименьшее или наибольшее значеніе Δ_c. Доказать это при помощи второй и высшихъ производныхъ не удастся, такъ какъ всѣ онѣ обращаются при этомъ въ нуль, а надо будетъ найти величину Δ_c для $\omega_c^2=\infty$, а затѣмъ найти Δ_c для случая, когда обратная величина ω_c^2 равна сколь угодно малой величинѣ ξ. Легко убѣдиться, что

$$\Delta_c=\frac{2}{\mu_0^2\,r^2\,(x_2-x_1)}\int_{x1}^{x2}\sum\left[\left(\frac{b_l}{\omega_c^2}-0{,}25\,\mu_l\,r\right)^2+\left(\frac{a_l}{\omega_c^2}-0{,}25\,m_l\,r\right)^2\right]dx;$$

при $\omega_c^2=\infty$ это выраженіе въ предѣлѣ даетъ:

$$\Delta_c=\frac{1}{8}\sum\frac{\mu_l^2+m_l^2}{\mu_0^2},$$

а при $\dfrac{1}{\omega_c^2}=\xi$:

$$\Delta_c(\xi)=\frac{1}{8}\sum\frac{\mu_l^2+m_l^2}{\mu_0^2}+\frac{1}{\mu_0^2\,r^2\,(x_2-x_1)}\left[2\xi^2\int_{x1}^{x2}\sum\left(a_l^2+b_l^2\right)dx-\right.$$

$$\left.-r\xi\int_{x1}^{x2}\sum\left(b_l\,\mu_l+a_l\,m_l\right)dx\right].$$

Слѣдовательно, въ зависимости отъ знаковъ и величинъ коефиціентовъ b_l, μ_l, a_l и m_l этотъ корень можетъ соотвѣтствовать и наиболѣе, и наименѣе выгодной скорости. Въ каждомъ частномъ случаѣ легко найти, задавшись различными ξ, приближается-ли Δ_c къ своему предѣлу увеличиваясь или уменьшаясь.

Второй корень будетъ:

$$\omega_c^2 = \frac{4\int\limits_{x1}^{x2}\sum\left(a_i^2+b_i^2\right)dx}{r\int\limits_{x1}^{x2}\sum\left(a_i m_i + b_i\mu_i\right)dx}$$

Не будемъ пытаться въ общемъ случаѣ опредѣлить, который изъ двухъ корней даетъ наиболѣе, а который наименѣе выгодную скорость. Это зависитъ отъ величинъ и знаковъ a_i, b_i, μ_i и m_i, и можетъ быть найдено лишь въ каждомъ частномъ случаѣ.

Все-таки приведемъ здѣсь общее выраженіе второй производной:

$$\frac{d^2\Delta_c}{d(\omega_c^2)^2} = \frac{4}{x_2 - x_1}\int\limits_{x1}^{x2}\sum\left[\frac{b_i(3\,b_i - 0{,}5\,\mu_i r\omega_c^2) + a_i(3a_i - 05\,\mu_i r\omega_c^2)}{\mu_0^2 r^2 \omega_c^8}\right]dx$$

такъ какъ имъ придется пользоваться впослѣдствіи.

Надо помнить также, что всѣ суммированія распространяются только на тѣ гармоническія слагаемыя, изъ которыхъ приходится вычитать четверти $\mu_i r\omega_c^2$, и слѣдовательно которыя имѣютъ соотвѣтственные члены въ рядѣ приведенной массы. Если напр., рядъ приведенной массы состоитъ изъ трехъ косинусоидъ, то и рядъ, служащій для опредѣленія наивыгоднѣйшихъ q_3 и ω_c^2, долженъ состоять только изъ трехъ соотвѣтственныхъ гармоническихъ b_i. Нижеприводимые примѣры пояснятъ сказанное.

39. Примѣры. *Одноцилиндровый дизель.* Воспользовавшись уже знакомыми намъ (стр. 82) рядами для работы:

$$L = 2r\Big[3{,}86 + 2{,}62x + (0{,}49 + 1{,}65x)\sin\frac{\varphi}{2} + (0{,}14 + 0{,}4x)\sin\omega -$$
$$-(0{,}95 + 1{,}00x)\cos\frac{\varphi}{2} - (0{,}95 + 0{,}74x)\cos\varphi - (0{,}70 + 0{,}43x)\cos{}^3/_2\varphi -$$
$$-(0{,}56 + 0{,}24x)\cos 2\varphi - (0{,}47 + 0{,}15x)\cos{}^5/_2\varphi - (0{,}23 + 0{,}06x)\cos 3\varphi\Big],$$

и для приведенной массы

$$\mu = \mu_0 + \mu_1\cos\varphi + \mu_2\cos 2\varphi + \mu_3\cos 3\varphi \text{ кг./кв. см.},$$

найдемъ наивыгоднѣйшія q_3 и ω_c^2. При этомъ x обозначаетъ нагрузку машины въ доляхъ нормальной, а коефиціенты ряда μ обозначаютъ (стр. 85):

$$\mu_1 = \left(q_3 + q_2 \frac{a}{l}\right)\frac{\lambda}{2g};\ \mu_2 = -\left(q_3 + q_2 \frac{l^2 - b^2 - \rho^2}{l^2}\right)\frac{1}{2g};$$

$$\mu_3 = -\left(q_3 + q_2 \frac{a}{l}\right)\frac{\lambda}{2g}.$$

Для нормальной конструкціи дизель-двигателя можно принять:

$$q_3 = 0{,}3 \text{ кг./кв. см.};\ q_2 = 0{,}2 \text{ кг./кв. см.};\ \lambda = 0{,}2;\ \frac{a}{l} = 0{,}40;$$

$$1 - \frac{b^2 + \rho^2}{l^2} = 0{,}46.$$

Такъ какъ рядъ μ не содержитъ синусовъ, то въ опредѣленіи наивыгоднѣйшихъ q_3 и ω_c^2 будутъ участвовать только три амплитуды, именно: $b_1 = -0{,}95 - 0{,}74x$; $b_2 = -0{,}56 - 0{,}24x$ и $b_3 = -0{,}23 - 0{,}06x$. Подставляя указанныя значенія въ общую формулу, получимъ уравненія для опредѣленія наивыгоднѣйшаго вѣса:

$$\int_0^1 \left\{ 0{,}1 \left[-0{,}95 - 0{,}74x - \frac{0{,}025}{9{,}81} r\omega_c^2 (q_3 + 0{,}4q_2) \right] - 0{,}5 \left[\frac{0{,}125}{9{,}81} r\omega_c^2 (q_3 + \right.\right.$$

$$\left. + 0{,}46\, q_2) - 0{,}56 - 0{,}24\, x) \right] - 0{,}1 \left[\frac{0{,}025}{9{,}81} r\omega_c^2 (q_3 + 0{,}4 q_2) - 0{,}23 - \right.$$

$$\left.\left. - 0{,}06x \right] \right\} dx = 0.$$

Откуда находимъ:

$$0{,}0675\, q_3 r\omega_c^2 + 0{,}0308\, q_2 r\omega_c^2 = 0{,}184\, g \quad \text{и} \quad q_3 + 0{,}456\, q_2 = 2{,}73 \frac{g}{r\,\omega_c^2},$$

или словами: *вѣсъ возвратно-движущихся массъ на единицу площади поршня долженъ равняться 2,73 кг./кв. см., умноженному на отношеніе ускоренія силы тяжести къ центростремительному ускоренію пальца кривошипа.* Такъ напр., для машины, дѣлающей 180 об./мин. и имѣющей $r = 0{,}3$ м., величина $r\omega_c^2 = 106{,}6$ въ 10,87 разъ больше ускоренія силы тяжести, слѣдовательно наивыгоднѣйшій вѣсъ возвратно-движущихся частей въ этомъ примѣрѣ будетъ 0,251 кг./кв. см.

Не надо думать, что въ случаѣ одноцилиндроваго двигателя выборъ этого вѣса даетъ значительную экономію въ вѣсѣ маховика, расчитанномъ по коефиціенту неравномѣрности δ. Можно лишь гарантировать, что средняя мѣра неравномѣрности Δ_c будетъ наименьщею.

Четырехцилиндровый дизель съ углами заклинки 180°, 360° и 540° будетъ имѣть рядъ для работы[1]):

$$L = 2r\left[15{,}44 + 10{,}48x - (2{,}24 + 0{,}96x)\cos 2\varphi\right]$$

и для приведенной массы:

$$\mu = \mu_0 - \frac{2}{g}(q_3 + 0{,}46\,q_2)\cos 2\varphi\,.$$

Найдемъ наивыгоднѣйшую скорость, считая $r = 0{,}3$ м. и $q_3 + 0{,}46\,q_2 = 0{,}40$ кг./кв. см. Второй корень даетъ:

$$\omega_c^2 = \frac{4\int\limits_0^1 \left(2{,}24 + 0{,}96x\right)^2 dx}{0{,}0408\int\limits_0^1 \left(2{,}24 + 0{,}96x\right) dx} = 449 \text{ сек.}^{-2};\ \omega_c = 21{,}2 \text{ сек.}^{-1}$$

или около 200 об./мин. Посмотримъ, максимумъ или минимумъ Δ_c соотвѣтствуетъ найденному корню. Вторая производная въ нашемъ примѣрѣ равна

$$\frac{d^2\Delta_c}{d(\omega_c^2)^2} = \frac{4}{\mu_0^2 r^2 \omega_c^8}\left[\int\limits_0^1 3b_2^2\,dx - 0{,}5\,\mu_2\,r\,\omega_c^2\int\limits_0^1 b_2\,dx\right] = \frac{4}{\mu_0^2 r^2 \omega_c^8}(22{,}4 - 15{,}1)$$

положительна, и слѣдовательно второй корень даетъ намъ минимумъ Δ_c.

Корень $\omega_c = \infty$ даетъ намъ максимумъ неравномѣрности, ибо при $r = 0{,}3$ м. послѣдній членъ выраженія

$$\Delta_c(\xi) = \frac{1}{8}\sum\frac{\mu_i^2 + m_i^2}{\mu_0^2} + \frac{1}{\mu_0^2 r^2}\left[14{,}94\,\xi^2 - 2{,}22\,r\xi\right]$$

отрицателенъ при $\xi < 0{,}0445$ сек.^{2}, т. е. при $\omega_c > 4{,}73$ сек.$^{-1}$.

Въ заключеніе найдемъ наивыгоднѣйшій вѣсъ возвратно-движущихся частей для 120 об./мин. и $r = 0{,}3$ м.

Такъ какъ мы имѣемъ дѣло только съ однимъ членомъ ряда, то будемъ имѣть простое уравненіе:

---

[1]) Приводимый здѣсь рядъ полученъ изъ ряда для одноцилиндроваго двигателя путемъ сложенія. Было бы болѣе точно вычертить діаграммы работъ четырехцилиндроваго двигателя для различныхъ нагрузокъ и разложить ихъ въ ряды. Въ примѣрѣ для поясненія сказаннаго допустимо грубо-приближенное выраженіе.

$$0{,}25\,\mu_2\, r\,\omega_c^2 = \int_0^1 b_2\, dx = -2{,}72;\ \mu_2 = -0{,}204\,(q_3 + 0{,}46\, q_2) = -\frac{10{,}88}{r\,\omega_c^2}.$$

Откуда

$$q_3 + 0{,}46\, q_2 = 1{,}13 \text{ кг./кв. см.}$$

для каждаго изъ цилиндровъ. Такой большой вѣсъ можно осуществить либо искусственной конструкціей поршней — намѣреннымъ и значительнымъ ихъ утяжеленіемъ, либо послѣдовательнымъ расположеніемъ цилиндровъ (тандемъ). Но прежде чѣмъ выполнить этотъ вѣсъ, полезно убѣдиться при помощи діаграммы энергій, какой выигрышъ въ расчетномъ избыткѣ работы даетъ онъ и что коммерчески выгоднѣе при данномъ δ, утяжелить ли поршень или маховикъ.

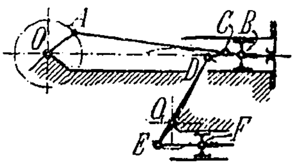
40. Наивыгоднѣйшее расположеніе вспомогательнаго механизма. Обыкновенно въ двигателяхъ для преобразованія прямолинейно-возвратнаго движенія поршня въ непрерывное вращательное движеніе коренного вала примѣняется центральный кривошипный механизмъ. Замѣняя его болѣе сложнымъ или варьируя цѣлесообразно его элементы, можно также достигнуть цѣли,—улучшить равномѣрность вращенія двигателя. Конечно, нельзя рекомендовать усложненія преобразующаго механизма, такъ какъ каждое лишнее звено, каждый лишній шарниръ ведетъ къ пониженію коефиціента полезнаго дѣйствія двигателя. Вмѣсто этого въ нѣкоторыхъ случаяхъ очень полезно использовать для улучшенія равномѣрности движенія различные *вспомогательные механизмы*, имѣющіеся во многихъ двигателяхъ. Такъ, многія паровыя машины снабжаются особымъ механизмомъ для приведенія въ движеніе *воздушнаго насоса*; цѣлесообразное устройство этого механизма, правильный выборъ движущихся массъ, можетъ въ значительной степени улучшить равномѣрность вращенія одноцилиндровой паровой машины. Точно также расположеніемъ и цѣлесообразнымъ выборомъ массъ звеньевъ компрессора можно немного улучшить равномѣрность вращенія четырехцилиндровыхъ четырехтактныхъ или двухцилиндровыхъ двухтактныхъ двигателей внутренняго сгоранія.

Мы не будемъ здѣсь очень подробно разрабатывать этого новаго вопроса въ регулированіи машинъ, такъ какъ не всѣ детали изслѣдованія доведены нами до конца. Остановимся для примѣра на одноцилиндровой паровой машинѣ и лишь въ общихъ чертахъ укажемъ тотъ путь, по которому надо идти при рѣшеніи подобныхъ задачъ.

Прежде всего долженъ быть хорошо изученъ рядъ, выражающій работу двигателя при различныхъ нагрузкахъ, согласно указаніямъ, сдѣланнымъ въ главѣ III перваго отдѣла (*чер. 25*). Особое вниманіе при этомъ должно быть обращено на большіе члены ряда. Такъ, для однотактнаго двигателя—одноцилиндровой паровой машины наибольшими членами ряда будутъ $a_2 \sin 2\varphi + b_2 \cos 2\varphi$.

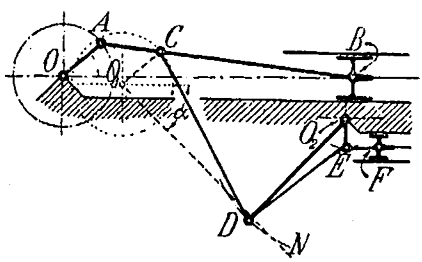
Что касается амплитуды b_2, то мы показали только что, какъ цѣлесообразнымъ выборомъ вѣса поршня можно значительно уменьшить ея вліяніе на неравномѣрность движенія машины. Амплитуду a_2 нельзя значительно уменьшить такимъ способомъ, такъ какъ приведенная масса поршня при центральномъ механизмѣ имѣетъ только одинъ большой членъ $\mu_2 \cos 2\varphi$. Предлагавшаяся одно время замѣна центральнаго кривошипнаго механизма нецентральнымъ мало помогаетъ, такъ какъ это измѣненіе отражается только величинами перваго и высшаго порядка малости. Прибавленіе холостого кривошипа, заклиненнаго подъ нѣкоторымъ угломъ къ рабочему и приводящаго въ колебательное движеніе гирю, не раціонально, такъ какъ осложняетъ машину.

Слѣдовательно, остается использовать воздушный насосъ, цѣлесообразно расположивъ его и выбравъ его массу. На *чер. 26* схематически изображено обычно примѣняемое расположеніе привода къ воздушному насосу. Оно не цѣлесообразно; точно также и всѣ другія расположенія, въ которыхъ мертвыя точки насоснаго поршня совпадаютъ съ мертвыми точками поршня двигателя, въ первомъ приближеніи будутъ равносильны утяжеленію вѣса поршня и не дадутъ намъ желательнаго результата, такъ какъ во всѣхъ этихъ случаяхъ большую амплитуду въ рядѣ приведенной массы будетъ имѣть только членъ $\mu_2 \cos 2\varphi$.



Чер. 26.

Только расположеніе, указанное на *чер. 27*, дастъ значительную величину въ видѣ члена $m_2 \sin 2\varphi$, въ чемъ легко убѣдиться при помощи слѣдующаго приближеннаго опредѣленія приведенной массы насоса. Вѣсъ поршня вмѣстѣ со столбомъ перемѣщаемой воды, а также вѣсъ тяги EF сосредоточимъ въ точкѣ E и затѣмъ замѣнимъ равнодѣйствующей массой, сосредоточенной въ точкѣ D; массу рычага DO_2E также сосредоточимъ въ D. Массу соединительной тяги CD приближенно сосредоточимъ въ точкахъ C и D подобно тому, какъ это мы дѣлали съ массой шатуна.



Чер. 27.

Если точка C достаточно близка къ ведущей точкѣ A, то путь ея будетъ мало отличаться отъ окружности, описываемой точкой A и приближенно можемъ считать, что точка C направляется воображаемымъ кривошипомъ CO_1, равнымъ и параллельнымъ AO. Путь точки D, дугу круга, описанную изъ O_2 приближенно замѣнимъ прямою линіей O_1N, проходящей черезъ O_1 и въ двухъ точкахъ пересѣкающей дѣйствительный путь точки D.

Такимъ образомъ, для сохраненія времени [1]) мы привели задачу къ уже знакомому намъ опредѣленію приведенной массы центральнаго кривошипнаго механизма. Если q_d обозначаетъ сумму всѣхъ вѣсовъ сосредоточенныхъ въ точкѣ D, λ_1—отношеніе длины радіуса кривошипа OA къ длинѣ шатуна CD, а φ_2 — мгновенную величину угла CO_1N, то на основаніи сказаннаго можемъ выразить приведенную массу уравненіемъ:

$$\mu = m_0 + m_1 \cos \varphi_2 + m_2 \cos 2\varphi_2 + m_3 \cos 3\varphi_2,$$

гдѣ

$$m_1 = + \frac{q_d \lambda_1}{2g}; \; m_2 = - \frac{q_d}{2g}; \; m_3 = - \frac{q_d \lambda_1}{2g}.$$

Если далѣе обозначить по-прежнему мгновенный уголъ поворота AOB машины буквой φ, а направленіе O_1N опредѣлять угломъ $BO_1N = \alpha$, то $\varphi_2 = \varphi + \alpha$, такъ что

$$\mu = m_0 + m_1 \cos(\varphi + \alpha) + m_2 \cos(2\varphi + 2\alpha) + m_3 \cos(3\varphi + 3\alpha).$$

Для того, чтобы вторая гармоническая этого ряда обратилась въ синусоиду необходимо, чтобы $2\alpha = 90°$ или $2\alpha = 270°$. Первымъ расположеніемъ съ угломъ $\alpha = 45°$ надо пользоваться въ тѣхъ случаяхъ, когда a_2 положительно, ибо тогда разность $a_2 - 0{,}25\, m_2 r \omega_c^2$ можно обратить въ нуль. Если же a_2 отрицательно, то надо взять $\alpha = 135°$, чтобы и $m_2 \cos 2(\varphi + \alpha)$ было отрицательно.

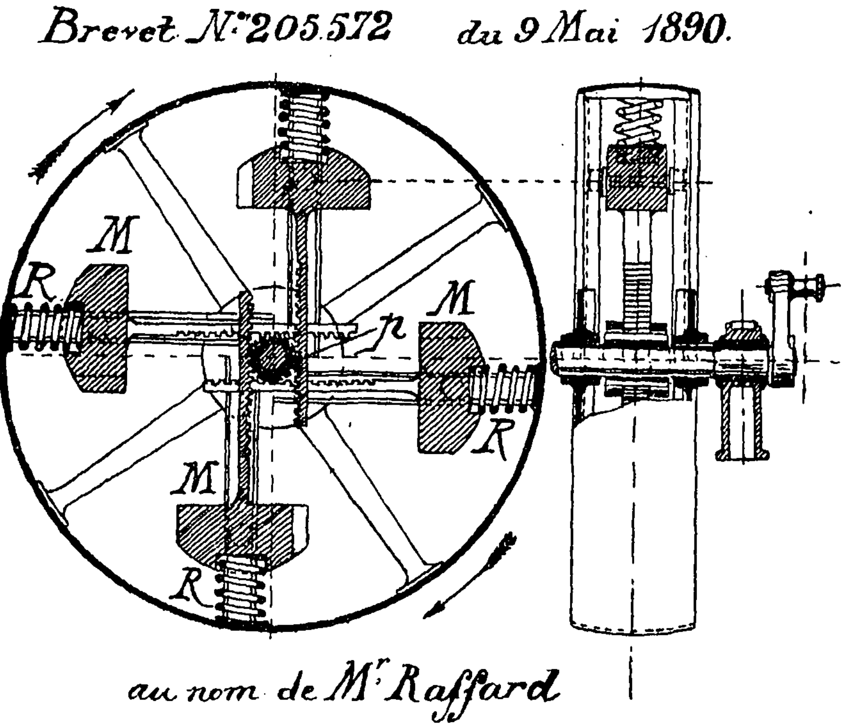
---

[1]) Болѣе точное аналитическое опредѣленіе приведенной массы четырехзвеннаго сочлененія $OACDO_2$ вполнѣ возможно, но оно потребовало бы отъ насъ много элементарныхъ мало интересныхъ выкладокъ.

ГЛАВА VI.

Изохронныя маховыя колеса.

41. Изохронный маховикъ Раффара. Создавая свой изохронный маховикъ, Раффаръ предполагалъ [1]) получить маховое колесо, моментъ инерціи котораго при возрастаніи угловой скорости автоматически увеличивался бы вслѣдствіе отодвиганія отъ оси нѣсколькихъ подвижныхъ гирь дѣйствіемъ центробѣжныхъ силъ, а при уменьшеніи угловой скорости уменьшался вслѣдствіе притяженія гирь къ оси дѣйствіемъ мощныхъ стальныхъ пружинъ.



Чер. 28. Изохронный маховикъ Раффара.

На *чер. 28* изображена копія чертежа, приложеннаго къ описанію патента Раффара. Мы видимъ четыре подвижныхъ гири *M,*

---

[1]) Brevet № 205 572 du 9 Mài 1890 au nom de M-r Raffard pour volant isochrone, c'est à dire à moment d'inertie automatiquement variable, ayant pour objet de produire une plus grande régularité de mouvement angulaire que celle q'on obtient avec le volant actuellement en usage.

перемѣщающіяся на каткахъ по пазамъ спеціальныхъ спицъ и сжимающія четыре витыя пружины R, отчасти уравновѣшивающія ихъ центробѣжныя силы. Для того чтобы центръ тяжести всѣхъ гирь всегда оставался на оси вращенія и для уравновѣшиванія силъ тяжести гирь, къ каждой гирѣ прикрѣплена зубчатая рейка; всѣ рейки сцѣпляются съ одной холостой шестерней, сидящей свободно на валу маховика.

Измѣненія живой силы такого колеса. какъ это совершенно правильно отмѣчаетъ Раффаръ, гораздо болѣе значительны, чѣмъ обыкновеннаго махового колеса. Если мы представимъ себѣ гирю вѣса m кг. въ неизмѣнномъ разстояніи R_0+a отъ оси вращенія, то увеличеніе начальной угловой скорости ω_1 подъ дѣйствіемъ внѣшней силы, совершившей работу L кг. м., будетъ опредѣляться уравненіемъ:

$$L=\frac{m(R_0+a)^2}{2g}\left(\omega^2-\omega_1{}^2\right).$$

Но если та же гиря въ начальный моментъ была на разстояніи R_0-a, а въ конечный на разстояніи R_0+a отъ оси вращенія, то

$$L=\frac{m}{2g}\left[\left(R_0+a)^2\omega^2-(R_0-a)^2\omega_1{}^2\right]=$$

$$=\frac{m}{2g}\left[\left(R_0+a)^2(\omega-\omega_1{}^2)+4R_0a\omega_1{}^2\right].$$

Сравнивая эту величину съ предыдущей, видимъ, что подвижная гиря воспринимаетъ еще добавочную работу

$$2\frac{m}{g}R_0a\omega_1{}^2,$$

которая возвращается машинѣ при обратномъ движеніи гири дѣйствіемъ Коріолисовой (добавочной центробѣжной) силы инерціи.

Если же кромѣ того при перемѣщеніи гири на величину $2a$ сжимается пружина, то часть работы L затратится еще на сжатіе этой пружины; это обстоятельство вовсе не принимаетъ во вниманіе Раффаръ въ своемъ элементарномъ расчетѣ.

Однако совершенно очевидно, что элементарный расчетъ здѣсь совершенно не приложимъ; вѣдь силы, вращающія кривошипъ машины и вызывающія неравномѣрность ея движенія, измѣняются быстро могутъ вызвать болѣе или менѣе значительные размахи гирь M въ зависимости отъ упругости пружинъ, средней скорости вращенія и т. д.; это—система съ двумя степенями свободы.

По вопросу объ изохронномъ маховикѣ Раффара имѣется нѣсколько изслѣдованій. Замѣтка самого изобрѣтателя [1]) носила элементарный характеръ, такъ какъ въ основу ея было положено допущеніе, что въ каждое мгновеніе существуетъ равновѣсіе между центробѣжной силой гири и давленіемъ на нее пружины. Это имѣло-бы мѣсто въ томъ случаѣ, если-бы измѣненія угловой скорости машины происходили медленно по сравненію съ періодомъ собственныхъ колебаній гирь подъ дѣйствіемъ пружинъ и центробѣжной силы, соотвѣтствующей средней угловой скорости. Такъ какъ въ дѣйствительныхъ машинахъ періодическія измѣненія угловой скорости происходятъ быстро, то необходимо принимать во вниманіе полную силу инерціи гирь.

Первое изслѣдованіе вынужденныхъ колебаній гирь въ быстро вращающемся маховикѣ принадлежитъ французскому проф. Лекорню [2]), не совсѣмъ удачно назвавшему этотъ маховикъ упругимъ.

Въ статьѣ разсмотрѣно вліяніе удара на равномѣрность вращенія маховика Раффара, а также найдены періодическія измѣненія угловой скорости маховика подъ дѣйствіемъ вращающей силы, періодически измѣняющейся по простому гармоническому закону ($C. \cos r\omega t$) На русскомъ языкѣ статья Лекорню изложена г. Серебряковымъ [3]).

Въ нашей статьѣ [4]) доказано, что вращеніе машины съ маховикомъ Раффара не можетъ быть вполнѣ равномѣрнымъ; затѣмъ найдены вынужденныя колебанія гирь, причемъ принято во вниманіе треніе гирь въ направляющихъ, вызываемое добавочными центробѣжными силами. Постараемся здѣсь дать правила расчета и выбора наивыгоднѣйшихъ элементовъ маховика Раффара, чтобы окончательно оцѣнить это средство уменьшать періодическую неравномѣрность вращенія машинъ.

Въ основу расчета мы положимъ другое конструктивное его выполненіе, по нашему мнѣнію, болѣе совершенное и компактное; вѣдь по существу изохронный маховикъ представляетъ собой большой плоскій регуляторъ, только не вліяющій на отсѣчку машины; элементы его надо выбрать такъ, чтобы вынужденныя колебанія гирь выравнивали періодическую неравномѣрность вращенія машины.

---

[1]) Bulletin technologique de la Société des anciens élèves des écoles nationales d'arts et métiers, 1891. Цитирую по Лекорню.

[2]) L. Lecornu. Sur les volants élastiques. Journal de l'école polytechnique Парижъ, 1902, стр. 9—27.

[3]) К. Серебряковъ. Изохронное маховое колесо. Извѣстія Южно-русскаго Общества Технологовъ за 1906 г. № 9, стр. 107—112.

[4]) К. Рерихъ. Виды на усовершенствованіе регулирующаго дѣйствія махового колеса. Извѣстія Петроградскаго Политехническаго Института за 1907 г., т. VII, стр. 479—510.

Большое несовершенство конструкціи Раффара заключается въ расположеніи и направленіи его гирь въ пазахъ спеціальныхъ ручекъ; если принять во вниманіе, что выравниваніе діаграммы касательныхъ усилій производится въ сущности Коріолисовыми (добавочными центробѣжными) силами инерціи гирь, возникающими при перемѣщеніи гиръ во вращающемся маховикѣ, то станетъ ясно, что сила, прижимающая катки къ спицамъ, должна достигать значительной величины, напр. средняго вращающаго усилія машины и больше того; матеріалъ спицъ работаетъ при этомъ на изгибъ, т. е. наиболѣе невыгоднымъ для чугуна образомъ; въ каткахъ развивается значительное треніе, сильно уменьшающее коефиціентъ полезнаго дѣйствія машины и потому дѣлающее приборъ нераціональнымъ. Слишкомъ большое разстояніе гирь отъ оси маховика также кажется намъ не конструктивнымъ, такъ какъ при этомъ центробѣжная сила достигаетъ громадной величины, а слѣдовательно размѣры необходимой для ея уравновѣшиванія пружины могутъ оказаться грандіозными.

Будемъ предполагать, что центръ тяжести гирь, движется по прямой, проходящей черезъ ось вращенія маховика, и направляется какимъ-либо приближенно—прямолинейно—направляющимъ шарнирнымъ механизмомъ, напр. Уаттовскимъ. Такимъ образомъ мы уменьшимъ работу тренія и улучшимъ дѣйствіе гирь.

Движеніе центра тяжести гирь по радіусу выгоднѣе, чѣмъ по хордѣ, такъ какъ въ этомъ случаѣ моментъ добавочной центробѣжной силы инерціи гирь будетъ имѣть наибольшую величину при прочихъ равныхъ условіяхъ.

42. Уравненія движенія. Теперь займемся опредѣленіемъ движенія изохроннаго маховика и подборомъ наивыгоднѣйшихъ его элементовъ, для чего воспользуемся уравненіями Лагранжа. Кинетическая энергія системы напишется очень просто; при этомъ мы для упрощенія уравненій будемъ принимать во вниманіе возвратно-движущіяся массы механизма приближенно,—вычитая силы инерціи постояннаго ихъ движенія изъ приведенной силы, или вычитая кинетическую энергію постояннаго ихъ движенія изъ избыточной работы; въ отдѣлѣ I мы видѣли, что для машинъ съ высокой равномѣрностью движенія такое упрощеніе задачи вполнѣ допустимо. Такимъ образомъ, кинетическая энергія системы будетъ состоять изъ кинетической энергіи приведеннаго вѣса q_k системы коренного вала, да изъ кинетической энергіи подвижныхъ гирь. Обозначимъ далѣе буквой m сумму вѣсовъ обѣихъ гирь, ρ—мгновенное разстояніе центра ихъ тяжести до оси вращенія, r — радіусъ кривошипа и подъ q_k будемъ подразумѣвать приведенный вѣсъ коренного вала, кривошипа, всѣхъ частей, заклиненныхъ на коренномъ валу и вмѣстѣ съ нимъ вращающихся, а также и приведенные вѣса гирь m въ предположеніи, что центръ ихъ тяжести совпадаетъ съ осью вращенія. Вѣса

q_k и m могутъ быть отнесены къ единицѣ площади поршня. При этихъ обозначеніяхъ кинетическая энергія системы напишется:

$$K = \frac{1}{2g}\left[q_k\, r^2\, \omega^2 + m\, \rho^2\, \omega^2 + m\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2\right];$$

кинетической энергіей относительнаго движенія частей пружины будемъ пренебрегать или учтемъ ее приближенно, прибавивъ третью долю вѣса пружинъ къ вѣсу гирь.

Силовая функція системы слагается изъ работы силъ упругости пружины и изъ мгновенной работы L силъ въ машинѣ, которую мы уже хорошо изучили и умѣемъ выразить аналитически рядомъ Фурье. Надо только не забыть вычесть изъ нѣкоторыхъ гармоническихъ кинетическую энергію постояннаго движенія ($\omega = \omega_0$) возвратно-движущихся массъ. Пусть послѣ произведеннаго вычитанія, будемъ имѣть рядъ:

$$L = 2r\left[b_0 + \Sigma\, a_i \sin i\varphi + \Sigma\, b_i \cos i\varphi\right].$$

Работа силъ упругости пружины зависитъ отъ ея жесткости и отъ деформаціи; пусть для того, чтобы деформировать (сжать или вытянуть) обѣ пружины на ед. длины необходимо приложить силу, отнесенную къ ед. площади поршня, равную p кг., которую будемъ называть *коефиціентомъ неподатливости пружины*. Пусть разстояніе отъ центра тяжести гирь до оси вращенія должно быть равно ρ_0 см. для того, чтобы пружина была совершенно не напряжена; такимъ образомъ деформація пружины равна $\rho - \rho_0$, а силовая функція

$$-\frac{p}{2}(\rho - \rho_0)^2;$$

отрицательна, такъ какъ положительной деформаціи должна соотвѣтвѣтствовать отрицательная сила (сопротивленіе).

Теперь мы имѣемъ все необходимое для написанія дифференціальныхъ уравненій движенія:

$$\left(\frac{q_k r^2 + m\rho^2}{g}\right)\frac{d\omega}{dt} + \frac{2m}{g}\rho\omega\frac{d\rho}{dt} = \frac{dL}{d\varphi}; \quad \frac{m}{g}\frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{m}{g}\rho\omega^2 = -p(\rho - \rho_0).$$

Это система совокупныхъ нелинейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ перемѣнными коефиціентами, общій интегралъ которыхъ неизвѣстенъ. Для выбора наивыгоднѣйшихъ соотношеній намъ необходимо имѣть возможно простое, хотя и приближенное, общее рѣшеніе задачи. Поэтому мы введемъ цѣлый рядъ упрощающихъ допущеній, для того, чтобы превратить уравненія въ линейныя съ постоянными коефиціентами и послѣднимъ членомъ.

Прежде всего вмѣсто перемѣнныхъ ω и ρ введемъ относительныя измѣненія этихъ величинъ, положивъ

$$\omega = \omega_0 (1 + \eta); \ \rho = R (1 + \xi),$$

гдѣ ω_0 обозначаетъ среднюю угловую скорость машины, а R среднее разстояніе центра тяжести гирь до оси вращенія. Относительное отклоненіе η угловой скорости отъ средней ея величины будетъ настолько мало, что квадратами и высшими его степенями будемъ пренебрегать. Точно также будемъ предполагать, что относительныя перемѣщенія гирь ξ малы, такъ что ξ^2 и т. д. можно пренебречь. Движеніе машины будемъ считать настолько равномѣрнымъ, что въ рядѣ L можно замѣнить аргументъ φ приближенной его величиной $\varphi = \omega_0 t$, гдѣ ω_0 средняя угловая скорость, а t — время, протекшее отъ начальнаго момента до разсматриваемаго мгновенія. Произведя подстановки и пренебрегая произведеніями и квадратами малыхъ величинъ, получимъ:

$$\frac{q_\kappa r^2 + m R^2}{g} \cdot \frac{d\eta}{dt} + \frac{2mR^2}{g} \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{\omega_0} \frac{dL}{d\varphi} = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{dL}{dt};$$

$$\frac{m}{g} \frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{m}{g} \omega_0^2 (1 + \xi + 2\eta) = p \frac{\rho_0 - R}{R} - p\xi.$$

Эти уравненія линейны, и интегрированіе ихъ не представляетъ затрудненій. Для сокращенія письма введемъ обозначеніе:

$$\gamma r^2 = q_k r^2 + m R^2,$$

гдѣ γ будетъ обозначать приведенный вѣсъ маховика и гирь, центръ тяжести которыхъ закрѣпленъ не на оси машины, а въ среднемъ положеніи. По раздѣленіи перемѣнныхъ будемъ имѣть диф. ур.:

$$\frac{d^3\eta}{dt^3} + \frac{d\eta}{dt}\left(\frac{pg}{m} + 4\omega_0^2 \frac{mR^2}{\gamma r^2} - \omega_0^2\right) = \frac{g}{\omega_0^2 \gamma r^2}\left[\left(\frac{pg}{m} - \omega_0^2\right)\frac{dL}{dt} + \frac{d^3L}{dt^3}\right]$$

$$\frac{d^3\xi}{dt^3} + \frac{d\xi}{dt}\left(\frac{pg}{m} + 4\omega_0^2 \frac{mR^2}{\gamma r^2} - \omega_0^2\right) = \frac{g}{\omega_0^2 \gamma r^2} \frac{dL}{dt}.$$

Движеніе, опредѣляемое нашими диф. ур. безъ послѣднихъ членовъ можетъ имѣть два существенно различныхъ характера въ зависимости отъ знака коефиціента при первой производной. Если онъ отрицателенъ, то интегрированіе дастъ намъ все убывающую или все возростающую показательную функцію; въ этомъ случаѣ установившееся движеніе машины будетъ невозможно:—гиря будетъ выброшена центробѣжной силой изъ маховика или прижата къ втулкѣ силой пружины и все приспособленіе не будетъ имѣть никакого смысла. Для того, чтобы гири совершали періодическія колебанія, необходимо, чтобы коефиціентъ этотъ былъ положителенъ, т. е. должно быть

$$n^2 = \frac{pg}{m} + 4\omega_0{}^2 \frac{m R^2}{\gamma r^2} - \omega_0{}^2 > 0.$$

или

$$\frac{pg}{m\,\omega_0{}^2} + 4\frac{m R^2}{\gamma r^2} > 1$$

Величину $x = pg : m\,\omega_0{}^2$ можно назвать *коефиціентомъ устойчивости* гирь при неизмѣнной угловой скорости ω_0 вращенія машины, такъ какъ при перемѣщеніи ихъ на единицу длины давленіе пружинъ возрастетъ на величину p, а центробѣжная сила на $m\,\omega_0{}^2 : g$. Если коефиціентъ устойчивости будетъ равенъ единицѣ ($x = 1$), то мы будемъ имѣть дѣло съ *безразличнымъ равновѣсіемъ* гирь (аналогично астатическому регулятору); если онъ болѣе единицы, то *равновѣсіе* будетъ устойчивымъ, и если мы хотимъ, чтобы среднее положеніе гирь было равно R, то должно быть соблюдено равенство $pg(R - \rho_0) = m R\,\omega_0{}^2$, т. е. центробѣжная сила, соотвѣтствующая средней угловой скорости и разстоянію R, должна уравновѣшиваться давленіемъ пружины.

43. Интегрированіе уравненій движенія. Прежде чѣмъ писать интегралы, мы можемъ нѣсколько упростить самыя дифференціальныя уравненія. Для этого умножимъ каждое изъ нихъ на dt и будемъ интегрировать отъ $t = 0$ до $t = t$, получимъ:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + n^2\eta = \frac{g}{\omega_0{}^2\gamma r^2}\left[\left(\frac{pg}{m} - \omega_0{}^2\right)L + \frac{d^2L}{dt^2}\right] + C_1;\quad \frac{d^2\xi}{dt^2} + n^2\,\xi = \frac{g}{\omega_0{}^2\gamma r^2} L + C_2,$$

гдѣ C_1 и C_2 постоянныя интегрированія, не представляющія для насъ интереса. Изъ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій намъ извѣстно, что сначала надо написать общій интегралъ безъ послѣднихъ членовъ, т. е. полагая правую часть уравненія равной нулю. Мы получимъ свободныя колебанія системы;

$$\eta = A \cos(nt + \alpha)\ ;\ \xi = B\cos(nt + \beta).$$

Эти свободныя колебанія будутъ возникать при всякомъ измѣненіи, установившагося движенія, т. е. послѣ измѣненій нагрузки машины. Возникшія свободныя колебанія должны быстро погашаться неизбѣжными сопротивленіями: треніемъ въ сочлененіяхъ гирь съ маховикомъ, сопротивленіемъ воздуха и пр. Поэтому, когда движеніе окончательно установится, свободныхъ колебаній совсѣмъ не будетъ, и мы можемъ перейти къ вынужденнымъ колебаніямъ, т. е. къ частнымъ интеграламъ диф. ур. съ послѣднимъ членомъ.

Такъ какъ

$$L = 2r\,(b_0 + \Sigma\, a_i \sin i\omega_0 t + \Sigma\, b_i \cos i\omega_0 t),$$

то

$$\frac{d^2L}{dt^2} = -2r\,(\Sigma\, a_i\, i^2 \omega_0^2 \sin\, i\,\omega_0 t + \Sigma\, b_i\, i^2\, \omega_0^2 \cos\, i\,\omega_0 t).$$

Подставляя и отбрасывая не интересующіе насъ постоянные члены, будемъ имѣть дифференціальныя уравненія:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + n^2\eta = \frac{2g}{\gamma r\omega_0^2}\left[\sum\left(\frac{pg}{m} - \omega_0^2 - i^2\,\omega_0^2\right)\left(a_i \sin\, i\,\omega_0 t + b_i \cos\, i\,\omega_0 t\right)\right]$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + n^2\xi = \frac{2g}{\gamma r\omega_0^2}\left[\sum\left(a_i \sin\, i\,\omega_0 t + b_i \cos\, i\,\omega_0 t\right)\right].$$

Мы видимъ, что уравненія отличаются только коефиціентами, поэтому разберемъ подробно частный интегралъ перваго изъ нихъ, такъ какъ намъ особенно важно знать измѣненія угловой скорости машины. Частный интегралъ будетъ представлять собою гармоническій рядъ:

$$\eta = \Sigma\, c_i \cos\, i\,\omega_0 t + \Sigma\, d_i \sin\, i\,\omega_0 t.$$

Подстановка въ диф. ур. дастъ намъ равенство:

$$\sum\left(n^2 - i^2\,\omega_0^2\right)\left(d_i \sin i\,\omega_0 t + c_i \cos i\,\omega_0 t\right) =$$

$$= \frac{2g}{\gamma r\omega_0^2}\left[\sum\left(\frac{pg}{m} - \omega_0^2 - i^2\,\omega_0^2\right)\left(a_i \sin\, i\,\omega_0 t + b_i \cos\, i\,\omega_0 t\right)\right].$$

Такъ какъ два гармоническихъ ряда тождественно равны только въ томъ случаѣ, когда отдѣльно амплитуды при синусахъ и косинусахъ каждой гармонической соотвѣтственно равны, то находимъ, подставивъ n^2:

$$d_i = \frac{2g\,a_i}{\gamma r\,\omega_0^2}\;\frac{\dfrac{pg}{m\omega_0^2} - (i^2+1)}{\dfrac{pg}{m\omega_0^2} + 4\;\dfrac{mR^2}{\gamma r^2} - (i^2+1)};$$

$$c_i = \frac{2g\,b_i}{\gamma r\,\omega_0^2}\;\frac{\dfrac{pg}{m\omega_0^2} - (i^2+1)}{\dfrac{pg}{m\omega_0^2} + 4\;\dfrac{mR^2}{\gamma r^2} - (i^2+1)}.$$

Слѣдовательно мѣра неравномѣрности будетъ равна:

$$\Delta = \frac{2g^2}{\gamma^2 r^2 \omega_0^4}\sum\left[\frac{\frac{pg}{m\omega_0^2}-(i^2+1)}{\frac{pg}{m\omega_0^2}+4\ \frac{mR^2}{\gamma r^2}-(i^2+1)}\right]^2 (a_i^2+b_i^2).$$

Рѣшеніе однако имѣетъ мѣсто при одномъ ограниченіи: для каждой гармонической знаменатель не долженъ быть равнымъ нулю, т. е. ни для одного i не должно быть

$$\frac{pg}{m\omega_0^2}+4\ \frac{mR^2}{\gamma r^2}=i^2+1.$$

ибо въ этомъ случаѣ произойдетъ *явленіе резонанса* и амплитуда соотвѣтственной гармонической если и не сдѣлается сразу безконечно большой, то будетъ возрастать пропорціонально времени. Тотъ коефиціентъ неподатливости пружины, при которомъ можетъ произойти явленіе резонанса, будемъ называть *критическимъ* p_k; его можно подобрать по формулѣ

$$d_{ki}=\frac{m\omega_0^2}{g}\left(i^2+1-4\ \frac{mR^2}{\gamma r^2}\right).$$

Для того чтобы установившееся движеніе машины было возможно болѣе равномѣрнымъ, необходимо конечно, чтобы p не равнялось ни одному p_{ki}, иначе мѣра неравномѣрности будетъ все увеличиваться, стремясь къ безконечности; движеніе машины и гирь будетъ очень неспокойно.

44. Выборъ наивыгоднѣйшихъ элементовъ. Для того, чтобы судить о выгодѣ или невыгодѣ изохроннаго маховика, сравнимъ его движеніе съ тѣмъ, которое получилось бы, если бы гири были закрѣплены неподвижно въ среднемъ положеніи. Уравненіе Лагранжа для этого случая напишется такъ:

$$\frac{\gamma r^2}{g}\frac{d\omega}{dt}=\frac{dL}{d\varphi}\cong\frac{1}{\omega_0}\cdot\frac{dL}{dt},$$

причемъ для сравнимости результатовъ мы нарочно будемъ пользоваться тѣми же допущеніями, которыя были приняты раньше.

Полагая

$$\omega=\omega_0+\omega_0\,\Sigma\,(c_i'\ \cos\ i\omega_0 t+d'\ \sin\ i\omega_0 t)$$

и подставивъ рядъ L, найдемъ

$$\dot{d}_i'=\frac{2g\,a_i}{\gamma\, r\omega_0^2};\quad c_i=\frac{2gb_i}{\gamma\, r\omega_0^2}.$$

Мѣра неравномѣрности будетъ:

$$\Delta' = \frac{2g^2}{\gamma^2 r^2 \omega_0^4} \Sigma (a_i^2 + b_i^2).$$

Сравнивая это выраженіе съ Δ, замѣчаемъ, что изохронный маховикъ лишь тогда навѣрно будетъ обладать значительными преимуществами въ равномѣрности вращенія, когда для всѣхъ i величина

$$\left[\frac{\frac{pg}{m\omega_0^2} - (i^2+1)}{\frac{pg}{m\omega_0^2} + 4\frac{mR^2}{\gamma r^2} - (i^2+1)}\right]^2 < 1.$$

Это неравенство выполняется въ тѣхъ случаяхъ, когда и числитель, и знаменатель положительны; если же оба они отрицательны, то оно не можетъ быть выполнено въ дѣйствительности, при положительныхъ γ и m; когда же числитель и знаменатель разныхъ знаковъ, то возможно и выполненіе, и невыполненіе неравенства.

Для сокращенія письма введемъ обозначенія:

$$\frac{pg}{m\omega_0^2} = x; \quad 4\frac{mR^2}{\gamma r^2} = y; \quad a_i^2 + b_i^2 = A_i^2; \quad \frac{2g^2}{\gamma^2 r^2 \omega_0^4} = c.$$

Тогда мѣра неравномѣрности выразится уравненіемъ:

$$\Delta = c \sum \left(\frac{x - i^2 - 1}{x + y - i^2 - 1}\right)^2 A_i^2.$$

Прежде всего отмѣтимъ, что выбравъ для какой-либо гармонической $i = j$ коефиціентъ устойчивости такъ, чтобы $x = j^2 + 1$, мы обратимъ въ нуль членъ $i = j$ ряда. Пользуясь этимъ, мы можемъ обратить въ нуль наибольшую гармоническую A_j^2. Съ другой стороны надо бояться приближенія къ значеніямъ $x + y$, удовлетворяющимъ равенству $x + y = i^2 + 1$, такъ какъ при этомъ произойдетъ явленіе резонанса и мѣра неравномѣрности Δ будетъ стремиться къ безконечности.

Для опредѣленія наивыгоднѣйшаго x надо производную:

$$\frac{d\Delta}{dx} = 2cy \sum \frac{(x - i^2 - 1) A_i^2}{(x + y - i^2 - 1)^3}$$

приравнять нулю и найти корни, удовлетворяющіе уравненію:

$$\sum \frac{(x - i^2 - 1) A_i^2}{(x + y - i^2 - 1)^3} = 0.$$

Наивыгоднѣйшее y также должно быть корнемъ этого уравненія, такъ какъ

$$\frac{d\Delta}{dy} = -2c \sum \frac{(x - i^2 - 1) A_i^2}{(x + y - i^2 - 1)^3} .$$

Въ общемъ случаѣ разысканіе корней очень длинно, такъ какъ уже при 5 гармоническихъ уравненіе будетъ 16-й степени отъ x и 15-й отъ y. Мы не будемъ тратить время на эту работу, а будемъ пользоваться тѣмъ обстоятельствомъ, что вычисленіе коефиціентовъ

$$z_i = \frac{x - i^2 - 1}{x + y - i^2 - 1} = 1 - \frac{y}{x + y - i^2 - 1}$$

не представляетъ особеннаго труда. Выбравъ возможно цѣлесообразно рядъ значеній x и y, составимъ таблицу коефиціентовъ z_1, z_2, z_3 . . . . , а затѣмъ найдемъ для каждой группы значеній x и y величину ряда z, опредѣляющаго мѣру неравномѣрности:

$$\Delta = c \, \Sigma \, z_i^2 A_i^2 = c \, (z_1^2 A_1^2 + z_2^2 A_2^2 + z_3^2 A_3^2 + \ldots) = c \, . \, Z.$$

Такъ какъ c величина постоянная, въ знаменателѣ которой стоитъ приведенный вѣсъ γ, то очевидно, для достиженія одной и той же мѣры неравномѣрности потребуется тѣмъ меньшее γ, чѣмъ меньше будетъ сумма $Z = \Sigma \, z_i^2 A_i^2$. Для облегченія выбора величинъ x и y при проектированіи изохроннаго маховика, составимъ таблицу значеній коефиціентовъ z при различныхъ значеніяхъ x и y. При этомъ будемъ стараться выбирать x такимъ образомъ, чтобы хоть одинъ коефиціентъ z_j обращался въ нуль, т. е. будемъ брать $x_j = i^2 + 1$.

Величину x вообще можемъ мѣнять отъ 1 до безконечности. При $x = 1$ мы будемъ имѣть астатическія пружины — безразличное равновѣсіе гирь; выполненіе такого маховика будетъ практически неудобно, но можно смотрѣть на значеніе $x = 1$, какъ на нижній предѣлъ, ибо очевидно придавъ x значеніе немного большее единицы, напр., $x = 1{,}01$, мы получимъ почти тѣ же значенія коефиціентовъ z_i при устойчивомъ равновѣсіи гирь. Второе предѣльное значеніе $x = \infty$ также не имѣетъ практическаго смысла, такъ какъ оно соотвѣтствуетъ неподвижному укрѣпленію всѣхъ гирь въ изохронномъ маховикѣ — это будетъ обыкновенный маховикъ, для котораго мы уже нашли мѣру неравномѣрности:

$$\Delta' = c \, (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \ldots),$$

т. е. при $x = \infty$ всѣ коефиціенты z дѣлаются равными единицѣ. Задача наша заключается въ выборѣ такихъ x и y, при которыхъ всѣ или большая часть коефиціентовъ будетъ меньше единицы.

Разсмотримъ теперь, въ какихъ предѣлахъ измѣняется величина y. Такъ какъ

$$y = 4\frac{mR^2}{\gamma r^2} = 4\frac{m\left(\frac{R}{r}\right)^2}{m\left(\frac{R}{r}\right)^2 + q_k},$$

то мы можемъ легко найти предѣльныя значенія y. Вообразимъ, что приведенный вѣсъ гирь ничтожно малъ по сравненію съ приведеннымъ вѣсомъ постояннаго маховика, тогда въ предѣлѣ $y = 0$, т. е. мы будемъ имѣть въ этомъ случаѣ простое маховое колесо постояннаго момента инерціи; легко видѣть, что всѣ коефиціенты z обращаются при этомъ въ единицу. Если же съ другой стороны q_k будетъ очень мало по сравненію съ приведеннымъ вѣсомъ гирь, то въ предѣлѣ получимъ $y = 4$. Слѣдовательно y можетъ измѣняться отъ нуля до четырехъ, причемъ значеніе $y < 1$ насъ не должны интересовать, при нихъ мы должны имѣть тяжелое маховое колесо постояннаго момента инерціи; уже при $y = 1$ приведенный вѣсъ постояннаго маховика долженъ быть въ три раза больше приведеннаго вѣса гирь. Такое соотношеніе уже не оправдываетъ усложненія конструкціи махового колеса введеніемъ перемѣщающихся гирь. Иллюстрируемъ сказанное на конкретномъ примѣрѣ.

45. Примѣръ. *Четырехтактный одноцилиндровый дизель-двигатель.* Мы уже приводили въ главѣ III перваго отдѣла рядъ, выражающій избыточную работу этого двигателя при нормальной нагрузкѣ, а именно:

$$L = 2r\left(6{,}49 + 2{,}14 \sin\frac{\varphi}{2} + 0{,}53 \sin\varphi - 1{,}96 \cos\frac{\varphi}{2} - 1{,}69 \cos\varphi - \right.$$
$$\left. - 1{,}13 \cos\frac{3}{2}\varphi - 0{,}80 \cos 2\varphi - 0{,}62 \cos\frac{5}{2}\varphi - 0{,}29 \cos 3\varphi\right).$$

Подставивъ вмѣсто φ приближенное значеніе $\varphi = \omega_0 t$, гдѣ ω_0 средняя угловая скорость, а t время, получимъ:

$$L = 2r\left(6{,}49 + 2{,}14 \sin\frac{\omega_0 t}{2} + 0{,}53 \sin\omega_0 t - 1{,}96 \cos\frac{\omega_0 t}{2} - 1{,}60 \cos\omega_0 t - \right.$$
$$\left. - 1{,}13 \cos\frac{3}{2}\omega_0 t - 0{,}80 \cos 2\omega_0 t - 0{,}62 \cos\frac{5}{2}\omega_0 t - 0{,}29 \cos 3\omega_0 t\right).$$

Слѣдовательно i принимаетъ значенія: $\frac{1}{2}$; 1; $\frac{3}{2}$; 2; $\frac{5}{2}$; 3. Величина же $i^2 + 1$ послѣдовательно равна: 1,25; 2; 3,25; 5; 7,25; 10. При составленіи таблицы значеній z мы будемъ брать x такъ же послѣдовательно равнымъ 1,25; 2 и т. д. до 10. Величину y будемъ выбирать такимъ образомъ, чтобы сумма $x + y$ ни въ коемъ случаѣ не равнялась и не была бы близка ни одному изъ значеній $i^2 + 1$, причемъ будемъ задаваться значеніями y отъ 1 до 3,75. Подставивъ выбранныя величины, вычислимъ возможно большее количество коефиціентовъ z.

Для примѣра нѣсколько значеній коефиціентовъ z_i^2 приведены въ нижеслѣдующей таблицѣ:

Таблица коефиціентовъ z_i^2 для четырехтактнаго двигателя.

x	y	z_1^2	z_1^2	$z_{\frac{3}{2}}^2$	z_2^2	$z_{\frac{5}{2}}^2$	z_3^2
1,25	1,25	0,00	2,25	7,11	2,25	1,60	1,36
	2,75	0,00	0,14	7,11	14,06	3,40	2,12
	3,00	0,00	0,11	4,00	25,00	4,00	2,31
2,00	2,25	0,06	0,00	1,56	16,00	3,06	1,94
	3,50	0,03	0,00	0,31	36,00	9,00	3,16
3,25	2,25	0,22	0,13	0,00	12,25	5,23	2,25
	2,75	0,18	0,10	0,00	3,06	10,23	2,84
	3,00	0,16	0,09	0,00	1,96	16,00	3,24
5,00	1,00	0,62	0,56	0,40	0,00	3,24	1,56
	3,00	0,31	0,25	0,14	0,00	9,00	6,25
	3,50	0,27	0,21	0,11	0,00	3,24	11,11
7,25	2,00	0,56	0,52	0,44	0,28	0,00	13,46
	3,00	0,44	0,41	0,33	0,18	0,00	12,10
	3,75	0,38	0,34	0,27	0,14	0,00	7,56
10,00	2,00	0,66	0,64	0,59	0,51	0,34	0,00
	3,00	0,56	0,53	0,48	0,39	0,23	0,00
	3,75	0,49	0,46	0,41	0,33	0,18	0,00

Подобную таблицу легко составить самому и для паровыхъ машинъ или двухтактныхъ двигателей внутренняго сгоранія или вообще машинъ, періодъ которыхъ равенъ одному обороту. На таблицѣ ясно видно, какъ значительно увеличиваются значенія z при величинахъ $x + y$ близкихъ къ резонансу.

Точно также на таблицѣ ясно видны тѣ комбинаціи x и y, которыя навѣрно дадутъ неблагопріятные или менѣе благопріятные результаты. Напр., возьмемъ $x = 7{,}25$ или $x = 10$; чѣмъ больше y, тѣмъ меньше коефиціенты z_i, тѣмъ лучшіе результаты дадутъ подвижныя гири. Можно думать, что приведенныя комбинаціи x и y до нѣкоторой степени характеризуютъ измѣненія коефиціентовъ z_i; отобравъ нѣкоторыя, наиболѣе характерныя комбинаціи, приступимъ къ вычисленію величины Z.

Для этого надо еще болѣе конкретизировать задачу, задавшись опредѣленнымъ ходомъ и скоростью. Пусть для проектируемаго двигателя $r = 0{,}3$ м. и число оборотовъ 180 въ мин. соотвѣтственно $\omega_0 = 18{,}85$ сек.$^{-1}$. Считая вѣсъ поршня равнымъ 0,3 кг./кв. см., а вѣсъ шатуна 0,2, и приведенный вѣсъ равнымъ

$$0{,}31 + 0{,}04 \cos \varphi - 0{,}20 \cos 2\varphi - 0{,}04 \cos 3\varphi,$$

найдемъ кинетическую энергію постояннаго движенія возвратно-движущихся массъ:

$$K = 2r\,(0{,}85 + 0{,}11 \cos \omega_0 t - 0{,}55 \cos 2\omega_0 t - 0{,}11 \cos 3\omega_0 t).$$

Вычитая ее изъ ряда для работы, получимъ избыточную работу

$$L = 2r\Big(5{,}64 + 2{,}14 \sin \frac{1}{2}\omega_0 t + 0{,}53 \sin \omega_0 t - 1{,}96 \cos \frac{1}{2}\omega_0 t -$$

$$- 1{,}58 \cos \omega_0 t - 1{,}13 \cos \frac{3}{2}\omega_0 t - 0{,}25 \cos 2\omega_0 t - 0{,}62 \cos \frac{5}{2}\omega_0 t -$$

$$- 0{,}18 \cos 3\omega_0 t\Big).$$

Отсюда находимъ множители:

$$A_{\frac{1}{2}}^2 = 8{,}42;\ A_1^2 = 2{,}78;\ A_{\frac{3}{2}}^2 = 1{,}28;\ A_2^2 = 0{,}06;\ A_{\frac{5}{2}}^2 = 0{,}38;\ A_3^2 = 0{,}03.$$

Очень малы A_2^2 и A_3^2, такъ что выгодными могутъ оказаться и такія комбинаціи, для которыхъ z_2 и z_3 больше единицы. Въ слѣдующей таблицѣ сведены величины произведеній $z_i^2 A_i^2$, сумма которыхъ даетъ намъ величину Z, характеризующую мѣру неравномѣрности Δ:

Таблица величинъ $z_i^2 A_i^2$ для одноцилиндроваго дизеля.

$x =$	1,25	2,00		3,25		5,00		7,25		10,0
$y =$	3,00	2,25	3,50	2,25	2,75	3,00	3,50	3,00	3,75	3,75
$z_{\frac{1}{2}}^2 A_{\frac{1}{2}}^2$	0,00	0,51	0,25	1,85	1,51	2,61	2,27	3,70	3,20	4,12
$z_1^2 A_1^2$	0,31	0,00	0,00	0,26	0,28	0,70	0,58	1,14	0,95	1,28
$z_{\frac{3}{2}}^2 A_{\frac{3}{2}}^2$	5,12	2,00	0,40	0,00	0,00	0,18	0,14	0,42	0,35	0,53
$z_2^2 A_2^2$	1,50	0,96	2,16	0,74	0,18	0,00	0,00	0,01	0,01	0,02
$z_{\frac{5}{2}}^2 A_{\frac{5}{2}}^2$	1,52	1,16	3,42	1,94	3,89	3,42	1,23	0,00	0,00	0,07
$z_3^2 A_3^2$	0,07	0,06	0,09	0,07	0,09	0,19	0,33	0,36	0,23	0,00
$Z =$	8,52	4,69	6,32	4,86	5,95	7,10	4,55	5,63	4,74	6,02

Изъ таблицы видно, что нанменьшее Z даетъ комбинація $x = 5{,}00$; $y = 3{,}50$; при чемъ $Z = 4{,}55$. Для закрѣпленныхъ гирь

$$\Delta' = c \, \Sigma A_i^2 = c \, . \, z' = c \, . \, 12{,}95.$$

Слѣдовательно, при одномъ и томъ же приведенномъ вѣсѣ и постоянной c можно уменьшить мѣру неравномѣрности при помощи изохроннаго маховика въ 2,85 раза. Почти также выгодна комбинація $x = 2{,}00$; $y = 2{,}25$ и другія. Не вдаваясь въ дальнѣйшія изысканія выгодныхъ комбинацій, перейдемъ къ опредѣленію основныхъ размѣровъ изохроннаго маховика.

Пусть желательно имѣть мѣру неравномѣрности $\Delta = 1 \, . \, 10^{-5}$ (приблизительно $\delta = 0{,}01$). Необходимый приведенный вѣсъ обыкновеннаго маховика при $Z' = 12{,}95$ долженъ бы равняться

$$q_k = \frac{g}{r\omega_0^2} \sqrt{\frac{2Z'}{\Delta}} = 138 \text{ кг./кв. см.}$$

Для изохроннаго маховика также вычисляемъ по постоянной c

$$c = \frac{\Delta}{Z} = \frac{2g^2}{\gamma^2 r^2 \omega_0^4}, \text{ вѣсъ } \gamma = \frac{g}{r\omega_0^2} \sqrt{\frac{2Z}{\Delta}} = 87{,}8 \text{ кг./кв. см,}$$

при $Z = 4{,}55$. Такъ какъ при этомъ $y = 3{,}5$, то находимъ:

$$mR^2 = 0{,}875 \, \gamma \, r^2 = 6{,}91,$$

такъ что при $R=1$ м. вѣсъ всѣхъ гирь долженъ быть равенъ $m=6{,}91$ кг. на каждый кв. см. площади поршня. Такой результатъ надо признать чрезвычайно тяжелымъ для выполненія; въ самомъ дѣлѣ, при площади поршня около 1000 кв. см. вѣсъ подвижныхъ гирь долженъ равняться 6910 кг.; центробѣжная сила этихъ гирь при среднемъ положеніи въ 1 м. будетъ равна громадной величинѣ 250 тоннъ, которые должны быть уравновѣшены пружинами. Можно думать, что подобная конструкція никогда не получитъ практическаго примѣненія. Правда, приведенный вѣсъ постоянныхъ массъ получается очень малымъ, около 11 кг./кв. см., но это не устраняетъ конструктивной невыполнимости выбранной комбинаціи.

Попробуемъ другія нѣсколько менѣе выгодныя комбинаціи, напр., $x=2$; $y=2{,}25$; $Z=4{,}69$. Найдемъ: $\gamma=89{,}1$; $mR^2=4{,}5$; немного меньше, но не настолько, чтобы устранить указанныя затрудненія. Возьмемъ еще одну, не внесенную въ таблицы комбинацію: $x=3{,}25$; $y=1{,}00$; $Z=5{,}61$; найдемъ: $\gamma=97{,}4$; $mR^2=2{,}09$. Однако, при этой комбинаціи необходимо кромѣ тяжелыхъ гирь имѣть еще довольно солидный маховикъ съ приведеннымъ вѣсомъ $q_k=69{,}7$ кг./кв. см., т. е всего лишь приблизительно въ два раза болѣе легкій, чѣмъ простое маховое колесо.

Можно думать, что уменьшая y, удастся достигнутъ выполнимой конструкціи, но несомнѣнно, что она будетъ во много разъ дороже обыкновеннаго махового колеса. Поэтому изохронный маховикъ Раффара не представляетъ собою дѣйствительнаго и практичнаго средства для улучшенія неравномѣрности вращенія машинъ.

46. Изохронный маховикъ съ принужденнымъ движеніемъ гирь. Вдумавшись, легко увидѣть причину неудачи маховика Раффара въ томъ, что гири перемѣщаются въ немъ дѣйствіемъ измѣненій центробѣжной силы, иногда улучшая, но временами и ухудшая равномѣрность вращенія. Измѣнивъ это обстоятельство и предписавъ гирямъ цѣлесообразное движеніе, мы можемъ значительно уменьшить необходимый вѣсъ гирь, а при правильномъ выборѣ ихъ движенія, можемъ получить даже совершенно равномѣрное вращеніе машины. Двѣ конструкціи такихъ маховиковъ были предложены въ 1908 г. [1]), но еще не осуществлены до сихъ поръ по причинамъ, которыя станутъ ясными изъ примѣрнаго расчета.

Самый расчетъ гораздо проще, чѣмъ маховика Раффара, такъ какъ вмѣсто системы съ двумя степенями свободы, мы будемъ имѣть механизмъ съ одной степенью свободы, который долженъ быть такъ

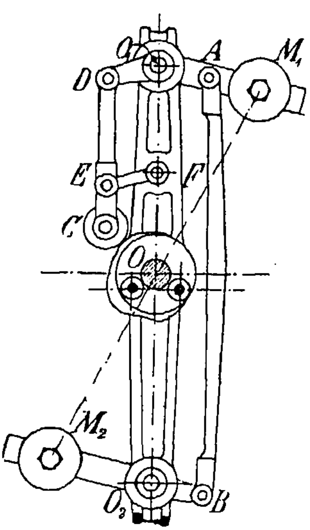
---

[1]) К. Рерихъ. Маховое колесо. Германскій патентъ № 227120 русское охранительное свидѣтельство № 37202; оба уничтожены.

подобранъ, чтобы живая сила постояннаго движенія гирь все время равнялась избыточной работѣ. Если это будетъ достигнуто, то будетъ устранена причина измѣненія средней скорости машины; проблему борьбы съ неравномѣрностью можно было бы считать рѣшенной, если бы не одно обстоятельство — при различныхъ нагрузкахъ машины избыточная работа движущихъ силъ машины протекаетъ различно и, достигнувъ вполнѣ равномѣрнаго вращенія при одной нагрузкѣ, мы все-таки должны имѣть постоянную приведенную массу для того, чтобы восполнять избытки или недостатки работы при другихъ нагрузкахъ. Поэтому правильнѣе при проектированіи ставить требованіе такимъ образомъ подобрать элементы механизма, чтобы средняя мѣра неравномѣрности имѣла наименьшую величину.

Первая изъ предложенныхъ нами конструкцій по идеѣ сходна съ изохроннымъ маховикомъ, такъ какъ состоитъ изъ гири, могущей перемѣщаться во вращающемся маховикѣ, то удаляясь отъ оси вращенія, то приближаясь къ ней.

Для принужденнаго перемѣщенія гирь по требуемому закону примѣняется механизмъ некруглаго эксцентрика и катка. Если угловой періодъ машины равенъ одному обороту, то эксцентрикъ долженъ быть укрѣпленъ неподвижно, а катящійся по немъ катокъ долженъ давать требуемыя перемѣщенія гирямъ.



Чер. 29.

На *чер. 29* изображенъ механизмъ для перемѣщенія гирь M_1, M_2, расположенныхъ симметрично и связанныхъ спарникомъ AB, благодаря которому общій центръ тяжести гирь всегда остается на оси вращенія. Катокъ C, закрѣпленный въ тягѣ DC и направляемый поводкомъ EF, приводитъ въ движеніе гири. Прижатіе катка къ эксцентрику обезпечивается центробѣжными силами, которыя такъ велики, что для уменьшенія давленій въ шарнирахъ лучше большую часть центробѣжной силы уравновѣсить пружинами.

Найдемъ приведенную массу этой системы, причемъ будемъ пренебрегать незначительной кинетической энергіей тягъ и мелкихъ частей механизма. Пусть m обозначаетъ вѣсъ обѣихъ гирь, какъ всегда отнесенный къ ед. площади поршня, ρ—разстояніе центра тяжести каждой гири до оси вращенія. Тогда мгновенная кинетическая энергія будетъ равна

$$K = \frac{m}{2g}\left[\rho^2\,\omega^2 + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2\right].$$

Для того, чтобы выразить приведенную массу аналитически въ видѣ ряда Фурье, выразимъ измѣненія мгновеннаго разстоянія ρ рядомъ:

$$\rho = R\,(1 + \Sigma\,\xi_i \cos i\varphi + \Sigma\,\eta_i \sin i\varphi),$$

гдѣ R—среднее разстояніе, а ξ_i и η_i относительныя измѣненія разстоянія, которыя можно считать настолько малыми по сравненію съ единицей, что квадратами ихъ и произведеніями можно пренебречь. Такъ какъ

$$\frac{d\rho}{dt} = R\omega\,(\Sigma\,\eta_i\, i \cos i\varphi - \Sigma\,\xi_i\, i \sin i\varphi),$$

то послѣ возведенія въ квадратъ получимъ величины второго порядка малости, которыми пренебрежемъ. Поэтому, приближенно приведенная масса выразится рядомъ:

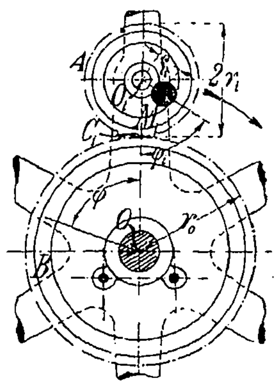
$$m\left(\frac{R}{r}\right)^2 (1 + 2\,\Sigma\,\xi_i \cos i\varphi + 2\,\Sigma\,\eta_i \sin i\varphi),$$

причемъ задача сводится къ цѣлесообразному выбору всѣхъ амплитудъ ξ_i и η_i, опредѣляющихъ перемѣщеніе центра тяжести гирь, и слѣдовательно, очертаніе эксцентрика.

Если гири снабжены пружинами съ коефиціентомъ неподатливости p на кв. см. площ. поршня, прикрѣпленными къ центру тяжести гирь, то при удаленіи гирь отъ оси вращенія не только увеличивается кинетическая энергія маховика, но и затрачивается работа на деформацію пружинъ, равная

$$\frac{p}{2}(\rho^2 - \rho_0^2) = \frac{p}{2} R^2 (1 + 2\,\Sigma\,\xi_i \cos i\varphi + 2\,\Sigma\,\eta_i \sin i\varphi) - \frac{p}{2}\rho_0^2.$$

47. Эпициклическій маховикъ. Во второй нашей конструкціи приведенная масса выражается точно рядомъ Фурье. Гиря M_i *(чер. 30)* прикрѣплена къ зубчатому колесу O_iA, ось котораго O_i помѣщается въ спицѣ вращающагося маховика. Колесо A сцѣпляется съ неподвижной зубчаткой OB. Число подвижныхъ зубчатокъ должно быть равно числу тѣхъ гармоническихъ ряда избыточной работы, которыя мы хотимъ погасить. Пусть радіусы начальныхъ окружностей зубчатокъ будутъ r_0 и r_i; пользуясь формулой Виллиса или разсматривая вращеніе колеса A вокругъ его мгновеннаго центра C_i, опредѣлимъ соотношенія абсолютныхъ угловыхъ скоростей ω_i зубчатки A и ω маховика



Чер. 30.

$$\omega_l = \omega\left(1 + \frac{r_0}{r_l}\right).$$

Обозначимъ буквой i отношеніе радіусовъ

$$\frac{r_0}{r_l} = i$$

и найдемъ соотношенія между углами поворота φ_l зубчатки и φ машины. Пусть въ тотъ моментъ, когда машина находится въ начальномъ положеніи ($\varphi = 0$), радіусъ $O_1\, M_l$ составляетъ съ линіей центровъ OO_1 уголъ α_l. Тогда послѣ поворота маховика на уголъ φ радіусъ $O_1\, M_l$ будетъ составлять съ линіей центровъ уголъ

$$\varphi_l = \frac{r_0}{r_l}\varphi + \alpha_l = i\varphi + \alpha_l.$$

Найдемъ теперь приведенную массу μ подвижного зубчатаго колеса. Пусть μ_l будетъ вѣсъ зубчатаго колеса безъ гирь, m_l—вѣсъ гири, а R_l—разстояніе центра ея тяжести до оси O_1; тогда кинетическая энергія центровъ тяжести зубчатки и гири будетъ равна

$$K_c = \frac{\mu_l\, \omega^2}{2g}(r_0 + r_l)^2 + \frac{m_l\, \omega_l^2}{2g}\, O_l\, M_l^2.$$

Изъ треугольника $O_l\, O_1\, M_l$ находимъ $O_l\, M_l^2 = r_l^2 + R_l^2 - 2R_l\, r_l \cos\varphi_l$ и кромѣ того подставивъ ω_l, будемъ имѣть:

$$K_c = \frac{(r_0 + r_l)^2\, \omega^2}{2g}\left[\mu_l + m_l\, \frac{(r_l^2 + R_l - 2R_l\, r_l \cos\varphi_l)}{r_l^2}\right].$$

Если далѣе обозначить буквой ρ_l радіусъ инерціи зубчатаго колеса вмѣстѣ съ гирей, установленной такъ, чтобы центръ ея тяжести совпадалъ съ осью вращенія O_1, то кинетическая энергія вращенія зубчатки и гири вокругъ ихъ центровъ тяжести будетъ

$$\frac{(\mu_l + m_l)}{2g}\,\omega^2\left(\frac{r_0 + r_l}{r_l}\right)^2\rho_l^2,$$

а полная кинетическая энергія равна

$$K = \frac{(r_0 + r_l)^2\,\omega^2}{2g}\left[\mu_l\left(1 + \frac{\rho_l^2}{r_l^2}\right) + m_l\left(1 + \frac{R_l^2}{r_l^2} + \frac{\rho_l^2}{r_l^2}\right) - 2m_l\,\frac{R_l}{r_l}\cos(i\varphi + \alpha_l)\right].$$

Приведенный вѣсъ получится раздѣленіемъ этого выраженія на $r^2\,\omega^2 : 2g$, гдѣ r—по прежнему радіусъ кривошипа; легко видѣть, что приведенный вѣсъ слагается изъ постоянной части

$$\left(\frac{r_0+r_i}{r}\right)^2\left[\mu_i\left(1+\frac{\rho_i^2}{r_i^2}\right)+m_i\left(1+\frac{R_i^2}{r_i^2}+\frac{\rho_i^2}{r_i^2}\right)\right]$$

и перемѣнной

$$-2\,m_i\left(\frac{r_0+r_i}{r}\right)^2\frac{R_i}{r_i}\cos\,(i\varphi+\alpha_i),$$

измѣняющейся по гармоническому закону. Слѣдовательно, имѣя много зубчатокъ съ различными i, можно создать приведенную массу, измѣняющуюся по любому закону.

48. Расчетъ маховиковъ съ принужденнымъ перемѣщеніемъ гирь. Правильнѣе всего вести расчетъ изохронныхъ маховиковъ съ принужденнымъ перемѣщеніемъ гирь такимъ образомъ, чтобы средняя мѣра неравномѣрности Δ_c, благодаря дѣйствію гирь, имѣла наименьшую величину; затѣмъ надо опредѣлить необходимый постоянный приведенный вѣсъ такимъ образомъ, чтобы при наибольшей и наименьшей нагрузкѣ имѣть требуемую мѣру неравномѣрности Δ. Послѣ всего того, что было сказано въ главѣ III оба эти расчета не представляютъ никакихъ затрудненій. Въ самомъ дѣлѣ: для опредѣленія средней мѣры неравномѣрности мы получили на стр. 103 выраженіе:

$$\Delta_c=\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x1}^{x2}\sum\frac{c_i^2+d_i^2}{2}\,dx$$

Если рядъ для избыточной работы написать въ видѣ:

$$L=2r\,(b_0+\Sigma\,b_i\cos\,i\varphi+\Sigma\,a_i\sin\,i\varphi)$$

а для приведенной массы возвратно-движущихся частей и гирь:

$$\mu=\mu_0+\Sigma\,\mu_i\cos\,i\varphi+\Sigma\,v_i\sin\,i\varphi,$$

то для опредѣленія амплитудъ ряда угловой скорости

$$\omega=\omega_c(1+\Sigma\,c_i\cos\,i\varphi+\Sigma\,d_i\sin\,i\varphi)$$

мы будемъ имѣть равенства:

$$c_i=2\,\frac{b_i-0{,}25\mu_i\,r\,\omega_c^2}{\mu_0\,r\,\omega_c^2};\ \ d_i=2\,\frac{a_i-0{,}25\,v_i\,r\,\omega_c^2}{\mu_0\,r\,\omega_c^2}.$$

Величины μ_i и v_i, дающія ей наименьшее значеніе, суть корни уравненій (ср. стр. 114)

$$\int_{x1}^{x2}\left(b_i-0{,}25\,\mu_i\,r\,\omega_c^2\right)dx=0;\ \ \int_{x1}^{x2}\left(a_i-0{,}25\,v^i\,r\,\omega_c^2\right)dx=0.$$

Принимая во вниманіе, что μ_i и v_i отъ нагрузки машины x не зависятъ, получимъ:

$$0{,}25\ \mu_i r \omega_c^2 (x_2 - x_1) = \int_{x1}^{x2} b_i\, dx;\ 0{,}25\ v_i r\, \omega_c^2 (x_2 - x_1) = \int_{x1}^{x2} a_i\, dx,$$

откуда легко найти всѣ μ_i и v_i. Когда это сдѣлано, то необходимо рѣшить, какія изъ нихъ подлежатъ осуществленію, а какія выгоднѣе для упрощенія и удешевленія маховика отбросить, такъ какъ постоянная приведенная масса μ_0 дѣлаетъ излишнимъ осуществленіе малыхъ величинъ μ_i и v_i; эти вопросы рѣшаются просто и легко, если пользоваться аналитическимъ методомъ расчета величины μ_0.

49. Примѣръ. *Маховикъ къ двухцилиндровому дизель-двигателю.* Для поясненія сказаннаго расчитаемъ изохронный маховикъ къ двухцилиндровому четырехтактному двигателю съ углами заклинки 360° избыточная работа котораго при всѣхъ нагрузкахъ выражается рядомъ [1]):

$$L = 2r \Big[7{,}72 + 5{,}24\, x + (0{,}28 + 0{,}80\, x) \sin \varphi - (1{,}90 + 1{,}48\, x) \cos \varphi -$$
$$- (1{,}12 + 0{,}48\, x) \cos 2\varphi - (0{,}46 + 0{,}12\, x) \cos 3\varphi \Big].$$

Приведенная масса собственныхъ возвратно-движущихся частей механизма выражается рядомъ:

$$\mu = 0{,}62 + 0{,}08 \cos \varphi - 0{,}40 \cos 2\varphi - 0{,}08 \cos 3\varphi \text{ кг/кв. см.};$$

мы примемъ ее во вниманіе, когда найдемъ необходимыя μ_i и v_i.

Итакъ, въ нашемъ примѣрѣ величины b_i и a_i представляютъ собою двучлены вида $g + hx$, причемъ надо найти интегралъ

$$\int_0^1 \Big(g + hx\Big) dx = g + \frac{h}{2}$$

Итакъ, въ нашемъ примѣрѣ:

$$0{,}25 \mu_1\, r\omega_c^2 = -2{,}64;\ 0{,}25\ v_1\, r\omega_c^2 = +0{,}68;\ 0{,}25\, \mu_2\ r\, \omega_c^2 = -1{,}36;$$
$$-0{,}25\, \mu_3\, r\, \omega_c^2 = -0{,}52.$$

Пусть напр. $r = 0{,}3$ м., а $\omega_c^2 = 355{,}3$ соотвѣтственно 180 об./мин. тогда, принявъ $g = 9{,}81$, найдемъ на 1 кв. см.

---

[1]) Рядъ этотъ полученъ изъ ряда стр. 104 для одноцилиндроваго двигателя складываніемъ соотвѣтственныхъ гармоническихъ; было бы точнѣе вычертить діаграмму работъ двухцилиндроваго двигателя и разложить ее въ рядъ.

$$\mu_1 = -0{,}972;\ v_1 = +0{,}251;\ \mu_2 = -0{,}501;\ \mu_3 = -0{,}192.$$

Вычтя соотвѣтственные приведенные вѣса возвратно-движущихся частей будемъ имѣть для гирь:

$$\mu_1 = -0{,}980;\ v_1 = +0{,}251;\ \mu_2 = -0{,}101;\ \mu_3 = -0{,}184 \text{ кг./кв. см.}$$

Спрашивается, стоитъ-ли осуществлять вторую и третью гарманическую, если мѣра иеравномѣрности не должна превосходить $\triangle = 1.10^{-5}$ (приблизительно $\delta = 0{,}01$)? Прежде всего отмѣтимъ, что вмѣсто зубчатаго колеса для второй гармонической проще утяжелить каждый поршень на 0,05 кг./кв. см., что не трудно сдѣлать. Предположимъ, что это утяжеленіе и зубчатка для третьей гармонической выполнены. Тогда необходимый постоянный приведенный вѣсъ для нормальной нагрузки $x = 1$ будетъ:

$$q_k^2 = \frac{2g^2}{\triangle \,.\, r^2\, \omega_c^4}(0{,}160 + 0{,}548 + 0{,}058 + 0{,}004);\ q_k = 3{,}62.$$

Если-же осуществлять только одну первую гармоническую съ утяженіемъ поршня, то $q_k = 4{,}16$, т. е. тяжеле примѣрно на 15%.

Въ эпициклическомъ маховикѣ это утяжеленіе постоянной массы будетъ навѣрно выгоднымъ, такъ какъ сдѣлаетъ излишнимъ пару зубчатыхъ колесъ. Осуществленію будетъ подлежать: одна неподвижная зубчатка и двѣ (для симметріи) подвижныхъ зубчатки; радіусы начальныхъ окружностей всѣхъ трехъ зубчатокъ должны быть равны между собою. Если напр. выбрать $r_0 = r_1 = 0{,}4$ м., а $R_1 = 0{,}2$ м., для опредѣленія m_1 будемъ имѣть равенства:

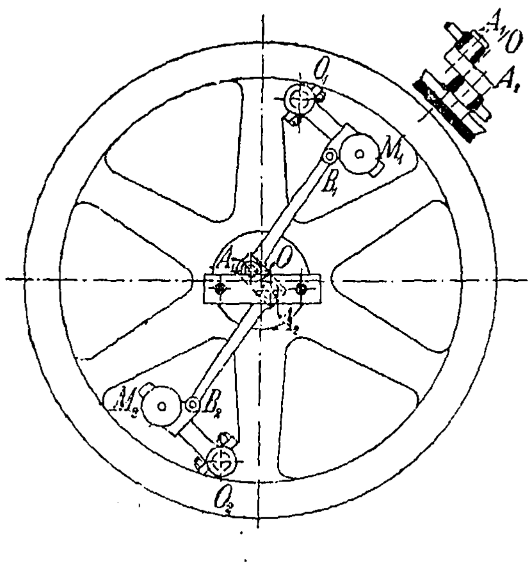
$$-\frac{64}{9} m_1 \cos \alpha_1 = -0{,}980;\ +\frac{64}{9} m_1 \sin \alpha_1 = +0{,}251,$$

откуда находимъ: $m_1 = 0{,}142;\ \alpha_1 = 14° 20'$.

Считая приближенно вѣсъ подвижныхъ зубчатокъ $\mu_1 = 0{,}5\ m_1$, а радіусъ инерціи $\rho_1 = 0{,}9\ r_1$ получимъ постоянную приведенную массу зубчатокъ и гирь равною 2,97 кг./кв. см., т. е. болѣе половины того, что требуется для достиженія требуемой мѣры неравномѣрности. Вѣроятно дополнительныя части, (спицы, кожухъ и пр.) съ избыткомъ дадутъ остальную половину.

Однако эпициклическій маховикъ не изященъ въ конструктивномъ отношеніи. Зубчатыя колеса будутъ гремѣть, такъ какъ центробѣжныя силы гирь (обыкновенныя и добавочныя) мѣняютъ направленія. Посмотримъ, во что можетъ вылиться первая конструкція.

Такъ какъ выполнять можно только одну первую гармоническую, то механизмъ катка и эксцентрика, а также дорого стоющія пружины выбросимъ и замѣнимъ ихъ слѣдующимъ болѣе простымъ механизмомъ (*чер. 31*), состоящимъ изъ неподвижнаго колѣнчатаго вала, двухъ тягъ, головками одѣтыхъ на шейки A_1 и A_2 колѣнчатаго вала, а шарнирами B_1 и B_2 соединенныхъ съ подвижными гирями M_1 и M_2. Если обозначить радіусъ колѣна буквой r_1, длину тяги $A_1\ B_1$ считать очень большой по сравненію съ радіусомъ колѣна, движеніе гирь во вращающемся маховикѣ приближенно считать происходящимъ по прямой линіи, пересѣкающей ось вращенія машины, и наконецъ обозначить буквой β тотъ уголъ, который составляетъ линія движенія гирь съ направленіемъ неподвижнаго колѣна въ тотъ моментъ, когда машина находится въ начальномъ положеніи ($\varphi = 0$),—то приближенно разстояніе гири до оси вращенія, можетъ быть выражено равенствомъ



Чер. 31.

$$\rho = R + r_1 \cos(\varphi + \beta),$$

гдѣ R—среднее разстояніе гири отъ оси вращенія маховика, приблизительно равное длинѣ тяги. Считая это разстояніе большимъ по сравненію съ r_1 найдемъ приведенную массу гирь, вѣсъ которыхъ m, состоящимъ изъ постоянной части:

$$m\left(\frac{R}{r}\right)^2 \text{ и перемѣнной } 2m\frac{Rr_1}{r^2}\cos(\varphi + \beta)$$

Если въ нашемъ примѣрѣ взять $R = 1$ м.; $r_1 = 0{,}2$ м., то должно быть

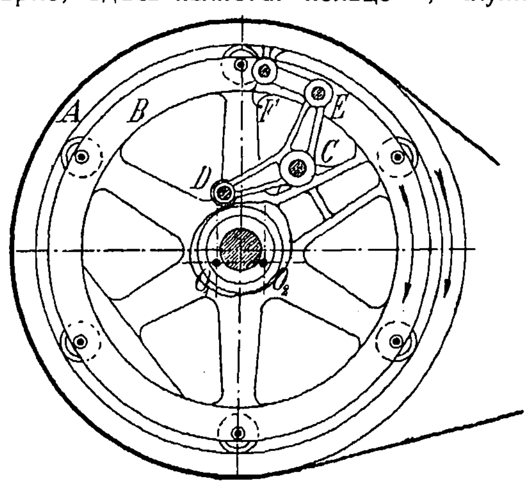
$$\frac{m \cos\beta}{0{,}225} = -0{,}980; -\frac{m \sin\beta}{0{,}225} = +0{,}251,$$

откуда находимъ $m = 0{,}228$; $\beta = 193°\ 20'$. И въ этомъ случаѣ постоянная доля приведеннаго вѣса гирь, равна 2,53 кг./кв. см., т. е. также примѣрно половина вѣса, необходимаго для достиженія требуемой мѣры неравномѣрности.

Для сравненія замѣтимъ, что безъ подвижныхъ гирь, но съ наивыгоднѣйшимъ вѣсомъ поршня приведенный вѣсъ маховика долженъ былъ-бы равняться 148 кг./кв. см.

50. Кинематическій изохронный маховикъ. Разсмотрѣнные въ этой главѣ изохронныя маховыя колеса имѣли назначеніе дать вполнѣ равномѣрное вращеніе дѣйствіемъ особыхъ подвижныхъ массъ; добавочныя центробѣжныя силы (*Коріолисовы* силы) этихъ массъ должны были то ускорять движеніе маховика въ моменты недостатка движущей силы, то замедлять его въ моменты ея избытка. Мы доказали, что полнаго изохронизма движенія, т. е. вполнѣ равномѣрнаго вращенія при всѣхъ нагрузкахъ ни одно изъ предложеній не обезпечиваетъ.

Въ концѣ главы опишемъ вкратцѣ изохронный маховикъ *Керштена* [1]), который мы назовемъ *кинематическимъ*, такъ какъ въ немъ вполнѣ равномѣрное вращеніе особаго колеса, свободно сидящаго на коренномъ валу двигателя, получается при помощи особаго механизма, связывающаго это колесо съ неравномѣрно-вращающимся маховикомъ машины. На *чер. 32* изображенъ механизмъ, предназначенный для машинъ, угловой періодъ которыхъ равенъ одному обороту. Колесомъ, вращающимся вполнѣ равномѣрно, здѣсь является кольцо A, служащее ременнымъ шкивомъ; вслѣдствіе дѣйствія механизма, оно то опережаетъ маховикъ B машины, то отстаетъ отъ его движенія. Для облегченія этихъ относительныхъ перемѣщеній кольцо покоится на каткахъ, оси которыхъ укрѣплены въ ободѣ маховика B. Механизмъ, связывающій обѣ системы, состоитъ изъ тяги FE и ломаннаго рычага ECD, ось вращенія котораго укрѣплена въ одной изъ спицъ маховика B; конецъ D рычага снабженъ каткомъ, движущимся по неподвижному некруглому эксцентрику, очертаніе котораго и должно быть опредѣлено правильно расчетомъ.

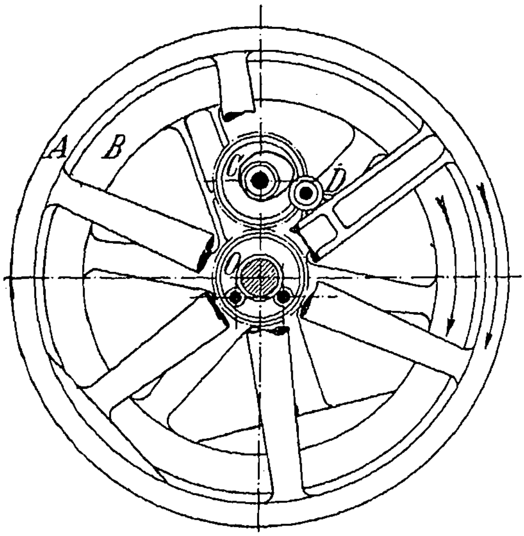


Чер. 32

Вторая конструкція (*чер. 33*), пригодная для машинъ съ любымъ угловымъ періодомъ, отличается отъ вышеописанной только тѣмъ, что

[1]) *Kersten.* Getriebe zur Ausgleichung der ungleichförmigen Drehbewegung von Schwungrädern; германскій патентъ № 206195.

ломанный рычагъ и неподвижный эксцентрикъ замѣнены въ немъ неподвижнымъ зубчатымъ колесомъ O, сцѣпляющимся съ подвижнымъ C ось вращенія котораго укрѣплена въ спицѣ маховика B. При одномъ оборотѣ маховика зубчатка C можетъ сдѣлать сколько потребуется оборотовъ (напр., для четырехтактнаго двигателя $^1/_2$ оборота), смотря по соотношенію радіусовъ начальныхъ окружностей. Вмѣстѣ съ зубчаткой C вращается и некруглый эксцентрикъ, который упирается въ катокъ D. Задача проектирующаго и здѣсь сводится къ такому очертанію эксцентрика C, чтобы вынужденныя опереженія и запаздыванія колеса A относительно B давали ему вполнѣ равномѣрное вращательное движеніе.



Чер. 33.

Изобрѣтатель, насколько можно судить по патентному описанію, ставилъ расчетъ на простую кинематическую почву и этимъ повторялъ ошибку многихъ инженеровъ, забывающихъ о динамикѣ. Неправильно было бы думать, что вопросъ вполнѣ рѣшается опредѣленіемъ движенія двигателя съ однимъ маховикомъ B въ предположеніи, что постоянное сопротивленіе рабочихъ машинъ приложено къ этому маховику; при такой постановкѣ задачи казалось бы возможнымъ, имѣя небольшой маховикъ B, обезпечивающій напр. $\delta = 0,2$, получить равномѣрное вращеніе колеса A. Въ дѣйствительности сопротивленіе приложено къ колесу A и передается маховику B черезъ механизмъ, который превратитъ постоянное сопротивленіе въ перемѣнное.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть ω_c будетъ постоянная средняя угловая скорость колеса A, а ω—мгновенная угловая скорость маховика B. Если P_a обозначаетъ касательное сопротивленіе, приложенное на плечѣ r къ колесу A, а P_b—равнодѣйствующее ему касательное усиліе на томъ же плечѣ, но въ маховикѣ B, то по закону мощностей $P_a r\omega_c = P_b r\omega$, откуда

$$P_b = P_a \frac{\omega_c}{\omega}.$$

Для того, чтобы судить, въ какихъ предѣлахъ измѣняется P_b при постоянномъ P_a, положимъ $\omega = \omega_c (1 + \eta)$, гдѣ η будетъ относительное измѣненіе мгновенной скорости, мѣняющееся въ предѣлахъ отъ $+0{,}5\delta$ до $-0{,}5\delta$. Если δ мало, то можно приближенно считать

$$P_b = P_a\,(1 - \eta),$$

откуда заключаемъ, что P_b измѣняется въ тѣхъ же предѣлахъ отъ $-0{,}5\delta$ до $+0{,}5\delta$. Такъ напр., при $\delta = 0{,}2$ мы сдѣлаемъ ошибку въ 10% въ одну, а затѣмъ въ другую сторону, принявъ P_b постояннымъ. При такой ошибкѣ нельзя будетъ говорить о равномѣрномъ вращеніи колеса A.

Другое пренебреженіе динамикой сказывается въ томъ, что механизмъ, дающій вполнѣ равномѣрное вращеніе колесу A при одной какой-либо нагрузкѣ машины, не будетъ выполнять точно свою функцію при другихъ нагрузкахъ. Между тѣмъ необходимо обезпечить колесу A извѣстную степень равномѣрности вращенія при всѣхъ нагрузкахъ. Поэтому не правильно впередъ задаться произвольными размѣрами махового колеса B, принявъ напр., произвольно $\delta = 0{,}2$, а нужно весь расчетъ повести такимъ образомъ, чтобы вѣсъ махового колеса B опредѣлился по той степени равномѣрности вращенія, которую мы желаемъ имѣть при наибольшей и наименьшей нагрузкѣ.

Расчетъ мы будемъ вести аналитически, такъ какъ графическій методъ потребовалъ бы отъ насъ нѣсколькихъ попытокъ. При этомъ будемъ придерживаться слѣдующаго плана: сначала спроектируемъ въ общемъ видѣ механизмъ, связывающій оба колеса такъ, чтобы при средней нагрузкѣ (или лучше, при планиметрическихъ среднихъ значеніяхъ амплитудъ ряда для работы L) вращеніе колеса A было вполнѣ равномѣрнымъ. Въ общемъ видѣ,—это значить, что мы найдемъ только гармоническій рядъ, опредѣляющій необходимыя опереженія и запаздыванія колеса A относительно B; причемъ приведенные вѣса q_a колеса A и q_b колеса B будутъ еще неизвѣстны. Послѣ этого найдемъ мѣру неравномѣрности вращенія колеса A при наибольшей или наименьшей нагрузкѣ и подберемъ вѣса q_a и q_b такимъ образомъ, чтобы эта мѣра не превосходила желательной величины.

Будемъ обозначать добавочнымъ индексомъ a_{ci} и b_{ci} среднія планиметрическія значенія амплитудъ ряда для работы двигателя

$$a_{ci} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x1}^{x2} a_i\,dx\,;\quad b_{ci} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x1}^{x2} b_i\,dx;$$

массу возвратно-движущихся частей машины примемъ во вниманіе вычитаніемъ $0{,}25\,\mu_i\,r\,\omega_c^2$, причемъ для сокращенія письма будемъ предполагать, что a_{ci} и b_{ci} представляютъ собою уже вычисленную разность.

Такъ какъ колеса A и B движутся различно, то будемъ различать мгновенныя ихъ угловыя скорости ω_a и ω_b, соотвѣтствующія одному и тому же углу поворота φ машины.

При средней нагрузкѣ колесо A должно вращаться равномѣрно, слѣдовательно въ этомъ случаѣ $\omega_a = \omega_c$. Колесо же B при этомъ вращается неравномѣрно, и угловая его скорость можетъ быть выражена рядомъ

$$\omega_b = \omega_c (1 + \Sigma e_i \cos i\varphi + \Sigma f_i \sin i\varphi).$$

Пусть сопротивленіе, приложенное къ колесу A на плечѣ r и отнесенное къ 1 кв. см. площади поршня, будетъ постоянно и равно P_a. Мы уже указывали, что приведенное къ пальцу кривошипа, радіусъ котораго равенъ r, оно превратится въ перемѣнное сопротивленіе $P_b = P_a - P_a\eta$. Работа постоянной части его P_a уже вычтена при вычерчиваніи діаграммы работъ L, поэтому намъ остается еще вычесть работу перемѣнной части—$P_a . \eta$, т. е. прибавить къ ряду L величину:

$$\int_0^\varphi P_a \eta \, r \, d\varphi = P_a r \int_0^\varphi (\Sigma e_i \cos i\varphi + \Sigma f_i \sin i\varphi) \, d\varphi =$$

$$= P_a r \sum \left(\frac{e_i}{i} \sin i\varphi - \frac{f_i}{i} \cos i\varphi \right).$$

Слѣдовательно, для машины съ кинематическимъ изохроннымъ маховикомъ рядъ для работы выразится такъ:

$$L = 2r \left[b_{co} + \sum \left(a_{ci} + P_a \frac{e_i}{2i} \right) \sin i\varphi + \sum \left(b_{ci} - P_a \frac{f_i}{2i} \right) \cos i\varphi \right].$$

Что касается приведенной массы, то для мелкихъ частей промежуточнаго механизма (рычага, тяги и пр.) можно пренебречь ихъ небольшими относительными движеніями во вращающихся системахъ. Поэтому приведенныя къ плечу r массы μ_a и μ_b колесъ A и B можно приближенно считать постоянными [1]). Колесо B составляетъ одно цѣлое съ машиной, колесо же A связано съ машиной механизмомъ; поэтому массу μ_a надо еще съумѣть привести къ ведущей точкѣ машины. Если механизмъ такъ спроектированъ, что при угловой скорости ω_b, выраженной рядомъ съ амплитудами e_i и f_i, угловая скорость ω_a постоянна и равна ω_c, то для приведенія массы μ_a будемъ имѣть равенства·

$$\mu_c = \mu_a \left(\frac{\omega_c}{\omega_b} \right)^2 = \mu_a \left(\frac{1}{1 + \eta} \right)^2.$$

[1]) Для второй конструкціи (*чер. 33*) массу эпициклической зубчатки легко привести на основаніи изложеннаго въ п. 47 къ ведущей точкѣ въ видѣ постоянной массы, если центръ ея тяжести лежитъ на оси вращенія.

Примѣнивъ законъ живыхъ силъ, получимъ уравненіе движенія:

$$\frac{(\mu_b + \mu_c) r^2 \omega_b^2}{2} - K_1 = L,$$

гдѣ ω_b и L обозначаютъ мгновенную угловую скорость и избыточную работу машины для нѣкотораго угла поворота φ машины, а K_1 — начальная кинетическая энергія машины въ моментъ $\varphi = 0$. Если подставить въ это уравненіе вышенайденную величину μ_c, то окажется, какъ и слѣдовало ожидать, что масса μ_a на измѣненія угловой скорости машины при равномѣрномъ вращеніи колеса A вліянія не оказываетъ. Примѣнивъ всѣ тѣ разсужденія, которыя были изложены въ главѣ III перваго отдѣла, мы получимъ рядъ уравненій для опредѣленія неизвѣстныхъ амплитудъ e_i и f_i:

$$\mu_b r \omega_c^2 e_i = 2\left(b_{ci} - P_a \frac{f_i}{2i}\right); \quad \mu_b r \omega_c^2 f_i = 2\left(a_{ci} + P_a \frac{e_i}{2i}\right).$$

Рѣшая каждую пару ихъ, находимъ:

$$e_i = 2\frac{\mu_b r \omega_c^2 b_{ci} - \frac{P_a}{i} a_{ci}}{\mu_b^2 r^2 \omega_c^4 + \frac{P_a^2}{i^2}}; \quad f_i = 2\frac{\mu_b r \omega_c^2 a_{ci} + \frac{P_a}{i} b_{ci}}{\mu_b^2 r^2 \omega_c^4 + \frac{P_a^2}{i^2}}.$$

Какъ только найдены измѣненія угловой скорости, легко найти необходимыя опереженія и запаздыванія колеса A. Пусть φ_a обозначаетъ уголъ поворота колеса A, φ_b одновременный уголъ поворота колеса B по прошествіи времени t отъ начальнаго момента, причемъ $\varphi_a = \omega_c t$. Уголъ φ_b мы найдемъ приближеннымъ интегрированіемъ, предположивъ, что рядъ ω_b имѣетъ аргументомъ не φ, а $\omega_c t$:

$$\varphi_b = \int_0^t \omega_b \,.\, dt = \omega_c t + \sum \frac{e_i}{i} \sin i\omega_c t - \sum \frac{f_i}{i} \cos i\omega_c t.$$

Разность $\varphi_a - \varphi_b$, равная:

$$\varphi_a - \varphi_b = \sum \frac{f_i}{i} \cos i\omega_c t - \sum \frac{e_i}{i} \sin i\omega_c t$$

вполнѣ опредѣляетъ намъ профиль некруглаго эксцентрика, а также и разность угловыхъ скоростей ω_a и ω_b для всѣхъ возможныхъ нагрузокъ машины:

$$\omega_a - \omega_b = \omega_c (\Sigma f_i \sin i\omega_c t + \Sigma e_i \cos i\omega_c t).$$

Поэтому въ дальнѣйшемъ расчетѣ для наибольшей нагрузки можемъ опредѣлять угловую скорость ω_b колеса B, выражая ее рядомъ

$$\omega_b = \omega_c (1 + \Sigma\, c_i \cos i\omega_c t + \Sigma\, d_i \sin i\omega_c t);$$

Угловая скорость колеса A будетъ тогда опредѣляться рядомъ:

$$\omega_a = \omega_c [1 + \Sigma\, (c_i - e_i) \cos i\omega_c t + \Sigma\, (d_i - f_i) \sin i\omega_c t].$$

Уравненіе движенія остается прежнимъ, только приведенная масса μ_c колеса B не исчезнетъ изъ него, да амплитуды ряда работъ двигателя будемъ писать съ однимъ индексомъ a_i и b_i.

Для опредѣленія амплитудъ c_i и d_i будемъ имѣть уравненія:

$$(\mu_b + \mu_c)\, r\, \omega_c^2\, c_i = 2\left(b_i - P_a \frac{f_i}{i}\right);\ (\mu_b + \mu_c)\, r\, \omega_c^2\, d_i = 2\left(a_i - P_a \frac{e_i}{i}\right).$$

При этомъ надо имѣть въ виду, что μ_c выражается рядомъ, въ которомъ первый членъ μ_a большой, а остальные малые порядка $\mu_a e_i$ и $\mu_a f_i$. Такъ какъ эти малые члены помножаются далѣе на малыя амплитуды c_i и d_i, то они даютъ величины второго порядка малости и могутъ быть опущены, что значительно упроститъ нашу задачу. Кромѣ того можно считать произведенія $P_a c_i$ и $P_a f_i$ малыми по сравненію съ a_i и b_i и въ первомъ приближеніи можно ихъ опустить. Тогда получимъ очень простыя уравненія:

$$c_i = 2 \frac{b_i}{(\mu_b + \mu_a)\, r\, \omega_c^2};\ d_i = 2 \frac{a_i}{(\mu_b + \mu_a)\, r\, \omega_c^2}.$$

Послѣ этого надо найти вычитаніемъ величины $c_i - e_i$ и $d_i - f_i$; по нимъ найти мѣру неравномѣрности колеса A, равную

$$\Delta = \frac{1}{2} \sum \left[(c_i - e_i)^2 + (d_i - f_i)^2\right];$$

рѣшивъ это уравненіе относительно μ_b, можемъ расчитать необходимое колесо B. Однако точное рѣшеніе чрезвычайно длинно. Чтобы судить о выгодности колеса можно воспользоваться сначала грубо приближеннымъ рѣшеніемъ. Прежде всего отбросимъ μ_a, затѣмъ будемъ считать P_a малымъ по сравненію съ громаднымъ произведеніемъ $\mu_b r \omega_c^2$. Тогда получимъ простыя выраженія:

$$c_i - e_i = \frac{2\,(b_i - b_{ci})}{\mu_b\, r\, \omega_c^2};\ d_i - f_i = \frac{2\,(a_i - a_{ci})}{\mu_b\, r\, \omega_c^2}.$$

и

$$\Delta = \frac{2g^2}{q_b^2\, r^2\, \omega_c^4} \sum \left[(b_i - b_{ci})^2 + (a_i - a_{ci})^2\right].$$

Обратно, по заданному Δ не трудно будетъ опредѣлить необходимую величину приведеннаго вѣса q_b. Полученное рѣшеніе будетъ приближенное; точное опредѣленіе необходимыхъ величинъ q_b и q_a возможно, но результаты получаются довольно сложные. Такъ какъ цѣлью настоящаго параграфа является лишь оцѣнка новыхъ, еще не вошедшихъ въ жизнь изобрѣтеній, то мы ограничимся ранѣе сказаннымъ, дополнивъ его лишь коротенькимъ примѣрнымъ расчетомъ. Болѣе точная и полная теорія каждаго изъ описанныхъ здѣсь изохронныхъ маховиковъ имѣла-бы смыслъ лишь въ томъ случаѣ, если бы ими заинтересовались машиностроительные заводы.

Примѣръ. Для двухцилиндроваго дизель-двигателя, которымъ мы занимались на стр. 142, будемъ имѣть: $r = 0{,}3$ м.; $\omega_c^2 = 355{,}3$; сумма окажется равной 0,770. Поэтому для $\Delta = 1.10^{-5}$ находимъ $q_b = 3{,}62$ кг./кв. см. вмѣсто 148. Кинематическій маховикъ вполнѣ равноцѣненъ динамическимъ съ принужденнымъ движеніемъ гирь.

ГЛАВА VII.

Вліяніе упругости передаточныхъ органовъ на періодическую неравномѣрность вращенія машинъ.

51. Историческія замѣчанія. Въ предыдущихъ главахъ мы считали всѣ части машины и передаточные механизмы абсолютно твердыми, т. е. не деформирующимися подъ дѣйствіемъ сколь-угодно большихъ силъ. Въ дѣйствительности, конечно, машина построена изъ упругихъ матеріаловъ, желѣза, стали и пр.; поэтому кромѣ ожидаемыхъ полезныхъ движеній, части машины могутъ имѣть еще неожиданныя побочныя движенія, часто вредно отражающіяся на ея дѣйствіи.

Не вдаваясь въ общее изслѣдованіе этихъ побочныхъ вредныхъ движеній или *вибрацій*, мы остановимся только на тѣхъ изъ нихъ, которыя вліяютъ на періодическую неравномѣрность вращенія машинъ. Первымъ, поднявшимъ въ литературѣ вопросъ о вліяніи упругости вала на вращеніе машинъ былъ Крецъ [1]), изслѣдовавшій свободныя колебанія двухъ или нѣсколькихъ массъ, связанныхъ другъ съ другомъ болѣе или менѣе длиннымъ упругимъ валомъ, или ременной передачей; ничтожное вліяніе массы упругаго вала или ремня не принималось имъ во вниманіе, такъ какъ приводимыя во вращеніе колеса предполагались очень тяжелыми. Главное вниманіе въ этомъ мемуарѣ обращено на ременную передачу и на скольженіе ремня, вызываемое его упругостью, и измѣняющее передаточное число. Вынужденныя колебанія, имѣющія гораздо большее вліяніе на неравномѣрность вращенія машины, чѣмъ свободныя, не были совершенно затронуты изслѣдованіемъ Креца.

Вопросъ о вынужденныхъ колебаніяхъ всплылъ въ технической литературѣ въ концѣ девяностыхъ годовъ прошлаго столѣтія, когда вслѣдствіе повышенія скорости вращенія судовыхъ машинъ и увеличенія длины вала, соединяющаго машину съ гребнымъ винтомъ, произошелъ цѣлый рядъ необъяснимыхъ поломокъ валовъ. Экспериментальныя изслѣдованія Бауэра [1]), а затѣмъ Фрама [2]) доказали, что истин-

---

[1]) Kretz. De l'élasticité dans les machines en mouvement. Memoires presentés par divers savants à l'académie des sciences de l'institut national de France. Sciences mathématiques et physiques. Томъ XXII 1876 (написано въ 1865 г.). Отзывъ проф. Phillips въ Comptes rendus, Vol. 76, 1873, стр. 528—536.

[1]) Bauer. Untersuchungen über die periodischen Schwankungen in der Umdrehungsgeschwindigkeit der Wellen von Schiffsmaschinen. Jahrbuch der schiffbautechnischen Gesellschaft, томъ I за 1900 г. стр. 311—346.

[2]) Frahm. Neue Untersushungen über die dynamischen Vorgänge in den Wellenleitungen von Schiffsmaschinen mit besonderer Berücksichtigung der Resonanzschwingungen. Z. d. V. d. I. 1902 г. стр. 797 и 880 или Mitteilungen über Forschungsarbeiten, № 6, стр. 33—65.

ной причиной этихъ поломокъ могли быть только громадныя напряженія, во много разъ превосходящія расчетныя, которыя возникаютъ при скручиваніи вала вслѣдствіе вынужденныхъ колебаній; когда число оборотовъ машины въ единицу времени близко къ критическому, уголъ скручиванія вала возрастаетъ настолько сильно, что валъ ломается. Бауэръ измѣрялъ неравномѣрность вращенія вала судовой машины въ различныхъ сѣченіяхъ при помощи камертона съ электрическимъ возбужденіемъ; измѣренія производились на нѣсколькихъ пароходахъ съ двухъ, трехъ и четырехъ кривошипными машинами. Коефиціентъ неравномѣрности для различныхъ сѣченій вала оказался различнымъ.

Многіе изслѣдователи вопроса о вліяніи упругости передаточныхъ органовъ на вращеніе машины (Лоренцъ[1]), Феттингеръ[2]), Тимошенко[3]), Гюмбель[4]) обращали главное вниманіе на опредѣленіе наибольшаго угла крученія вала и вызываемыя вибраціей напряженія. Въ нашихъ статьяхъ[5]) наоборотъ, все вниманіе было обращено только на измѣненіе неравномѣрности вращенія машины вслѣдствіе упругой связи рабочихъ машинъ съ поршневымъ двигателемъ. Постараемся здѣсь распространить и упростить тотъ аналитическій методъ, которымъ мы пользовались, причемъ о степени равномѣрности вращенія будемъ судить не по коефиціенту, а по мѣрѣ равномѣрности.

52. Приведеніе массъ и силъ. Когда мы имѣемъ дѣло съ поршневой машиной, связанной цѣлымъ рядомъ передаточныхъ органовъ съ машинами-орудіями, и не желаемъ принять во вниманіе упругость различныхъ передаточныхъ частей, то задача объ изслѣдованіи движенія рѣшается просто. Произвольно взятыя перемѣщеніе, скорость и ускореніе ведущей точки вызываютъ въ передаточномъ механизмѣ, состоящемъ изъ абсолютно твердыхъ, неизмѣняемыхъ тѣлъ, совершенно

---

[1]) Lorenz. Dynamik der Kurbelgetriebe, Лейпцигъ 1901. стр 133—147.

[2]) Föttinger. Effektive Macchinenleistung und effektives Drehmoment und deren experimentelle Bestimmuug mit besonderer Berücksichtigung grosser Schiffsmaschinen. Mitteilungen über Forschungsarbeiten № 25, стр. 41—97.

[3]) С. Тимошенко. Къ вопросу о явленіяхъ резонанса въ валахъ. Извѣстія СПБ. Политехническаго Института за 1905 г. T. III, стр. 55—106.

[4]) Gümbel. Verdrehungsschwingugen eines Stabes mit fester Drehachse und beliebeger zur Drehachse symmetrischer Massenverteilung unter dem Einfluss beliebiger harmonischer Kräfte. Z. d. V. d. J. 1912, стр. 1025, 1085.

[5]) К. Рерихъ. Виды на усовершенствованіе регулирующаго дѣйствія махового колеса. Извѣстія СПБ. Политехническаго Института за 1907 г. T. VII, стр. 479—491.

К. Рерихъ. Вліяніе упругости ремня на коефиціентъ неравномѣрности. Вѣстникъ Общества Технологовъ за 1911 г., стр. 311—319.

C. Röhrich. Ueber den Einfluss der elastischen Kupplung auf den Ungleichförmigkeitsgrad. Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik за 1912 г., томъ 60, стр. 225—243.

опредѣленныя перемѣщенія, скорости и ускоренія всѣхъ движущихся точекъ. Руководствуясь указаніями перваго отдѣла легко найти приведенную, мгновенную работу и приведенныя силы, т. е. свести задачу къ простому примѣненію закона живыхъ силъ или принципа Д'Аламбера.

Въ томъ случаѣ, когда мы хотимъ принять во вниманіе силы упругости передаточныхъ частей, движеніе системы ужъ не будетъ такъ просто, рѣзкое перемѣщеніе одной какой-либо, напр., ведущей точки ужъ не вызоветъ вполнѣ опредѣленнаго перемѣщенія другихъ точекъ, такъ какъ силы упругости смягчатъ рѣзкость движенія. Такимъ образомъ, мы будемъ имѣть дѣло съ системой, обладающей не одной, а нѣсколькими степенями свободы. Чтобы представить себѣ такую систему, вообразимъ длинный упругій валъ, на которомъ заклинено на различныхъ разстояніяхъ другъ отъ друга нѣсколько различныхъ маховыхъ колесъ. Кромѣ общаго вращательнаго движенія всѣхъ колесъ съ одною и тою же среднею угловою скоростью, въ случаѣ установившагося движенія возможны различныя періодическія отклоненія угловой скорости каждаго колеса отъ этой средней, которыя и необходимо умѣть предсказать.

Какъ бы ни былъ устроенъ передаточный механизмъ между машиной-двигателемъ и орудіями, мы всегда можемъ свести вопросъ объ изученіи движенія его частей къ изслѣдованію вращательнаго движенія нѣкотораго эквивалентнаго упругаго вала съ нѣсколькими колесами, который будемъ называть *динамической моделью* нашего механизма; для этого намъ достаточно умѣть приводить массы и силы какъ внѣшнія, такъ и внутреннія силы упругости.

Для приведенія массъ будемъ предполагать, что всѣ части механизма абсолютно жестки, такъ что при угловой скорости ведущаго вала ω_1 разсматриваемое колесо номеръ i должно имѣть дѣйствительную угловую скорость $\Omega_i = k_i \omega_1$, гдѣ k_i есть передаточное число или отношеніе угловыхъ скоростей соотвѣтственныхъ валовъ. Если I_i обозначаетъ моментъ инерціи массы колеса относительно дѣйствительной оси его вращенія, то равенство живыхъ силъ опредѣлитъ намъ величину приведеннаго къ ведущему валу момента инерціи J_i этого колеса:

$$J_i = k_i^2 I_i, \text{ ибо } \frac{I_i \Omega_i^2}{2} = \frac{J_i \omega_1^2}{2}.$$

Если бы моментъ инерціи какого-либо колеса былъ перемѣннымъ (напр., если бы кромѣ поршневого двигателя на ведущемъ валу, имѣлась еще машина съ перемѣнной массой возвратно-движущихся частей на одномъ изъ ведомыхъ валовъ), то послѣ приведенія моментъ инерціи этой перемънной массы измѣнялся бы по тому же закону, только величины амплитудъ были бы въ k^2 разъ больше, а частота перемѣнъ въ k разъ больше.

Эти приведенныя къ ведущему валу колеса и массы не будемъ однако сосредоточивать въ одной ведущей точкѣ, а размѣстимъ такимъ образомъ на нашемъ упругомъ валу, чтобы между двумя колесами нашей модели былъ участокъ упругаго вала, если въ дѣйствительномъ механизмѣ разсматриваемыя два колеса связаны между собою упруго (длиннымъ податливымъ валомъ, ременной передачей и т. п.). Если же какія-либо два смежныхъ колеса передаютъ движеніе одно другому жестко (напр., два зубчатыхъ колеса, червячная передача и т. п.), то приведенные моменты инерціи такихъ двухъ колесъ будемъ складывать вмѣстѣ, изображая оба однимъ колесомъ.

Если на одно изъ колесъ дѣйствуютъ внѣшнія силы, моментъ которыхъ относительно оси вращенія равенъ M_l, то въ плоскости приведеннаго колеса должны будемъ вообразить внѣшнія силы момента m_l, причемъ соотношенія между ними опредѣлятся равенствомъ мощностей

$$M_l \Omega_l = m_l \omega_1, \text{ откуда } m_l = k_l M_l.$$

Если сила эта дѣйствуетъ періодически, то, такъ же какъ и въ случаѣ періодически измѣняющейся приведенной массы, надо не забыть увеличить частоту или уменьшить угловой періодъ въ k_l разъ.

53. Степень жестности передаточныхъ органовъ. Неподатливость или жесткость упругихъ частей машины, передающихъ движеніе, также должна быть приведена къ ведущему валу и замѣнена равнодѣйствующимъ валомъ. Условимся называть *степенью жесткости* (или неподатливости) моментъ силъ упругости вала, возникающихъ при скручиваніи его на уголъ въ одинъ радіанъ на длинѣ между двумя смежными колесами. Если валъ стальной, съ модулемъ упругости сдвига $G = 850000$ кг./кв. см. и діаметромъ d см., то при скручиваніи его сѣченій, расположенныхъ въ разстояніи l см. одно отъ другого, на уголъ въ одинъ радіанъ возникнутъ силы упругости, моментъ которыхъ равенъ

$$p = \frac{\pi d^4 G}{32 \,.\, l} \text{ кг. см.}$$

Если первое колесо повернется на уголъ φ_1, а второе на φ_2, то моментъ силъ упругости, дѣйствующихъ на первое колесо, будетъ:

$$p(\varphi_2 - \varphi_1); \text{ на второе, } p(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Чѣмъ больше p, тѣмъ жестче и неподатливѣе валъ, тѣмъ большій моментъ силъ упругости развивается при скручиваніи на одинъ и тотъ же уголъ.

Теперь представимъ себѣ одинъ изъ передаточныхъ валовъ (i) діаметра d_i, длины l_i и модуля упругости G_i, вращающійся съ средней угловой скоростью, въ k_i разъ большею, нежели скорость ведущаго вала; колеса, заклиненныя на концахъ этого передаточнаго вала, уже приведены къ ведущему валу, и пусть φ_i и φ_{i+1} будутъ произвольные углы поворотовъ этихъ приведенныхъ колесъ, причемъ въ ненапряженномъ состояніи $\varphi_i = \varphi_{i+1}$. Если p_i обозначаетъ степень жесткости приведеннаго вала, то интересующій насъ моментъ силъ упругости модели выразится $p_i(\varphi_{i+1} - \varphi_i)$. Но соотвѣтствующій дѣйствительный уголъ скручиванія передаточнаго вала будетъ въ k_i разъ больше, поэтому на колесо i при выбранныхъ углахъ поворота будетъ дѣйствовать моментъ

$$\frac{\pi d_i^4 G_i}{32 l_i}(k_i \varphi_{i+1} - k_i \varphi_i).$$

Для того, чтобы привести этотъ моментъ къ ведущему валу, его надо еще разъ увеличить въ k_i разъ, откуда находимъ:

$$p_i = \frac{\pi d_i^4 G_i}{32 l_i} \cdot k_i^2.$$

Разсмотримъ случай, когда передаточнымъ органомъ служитъ *ременная передача;* обозначимъ: R—радіусъ ведущаго шкива, r—эквивалентный радіусъ ведомаго шкива (нѣсколько увеличенный противъ дѣйствительныхъ размѣровъ, чтобы учесть скольженіе ремня), f—площадь поперечнаго сѣченія ремня въ кв. см., E—модуль упругости ремня въ кг./кв. см., l—свободная длина ремня между шкивами. Пусть ведущій шкивъ дѣлаетъ въ k_i разъ больше оборотовъ, чѣмъ ведущій валъ, къ которому мы приводимъ весь механизмъ; передаточное число ведомаго вала будетъ тогда $k_i R : r = k_{i+1}$. Повернемъ то колесо, которое изображаетъ на модели первый шкивъ, на уголъ φ_i, чему соотвѣтствуетъ уголъ поворота $k_i \varphi_i$ шкива; точно также повернемъ на уголъ φ_{i+1} колесо, изображающее второй шкивъ, чему соотвѣтствуетъ уголъ поворота $k_{i+1} \varphi_{i+1}$ самого шкива. Если въ ненапряженномъ состояніи, или точнѣе въ такомъ состояніи, когда передаваемая ремнемъ полезная работа равна нулю, $\varphi_i = \varphi_{i+1}$, то легко будетъ найти удлиненіе и укороченіе каждой вѣтви ремня; въ самомъ дѣлѣ, отъ поворота на уголъ $k_i \varphi_i$ перваго шкива длина ведущей вѣтви уменьшилась, а ведомой увеличилась на длину $R k_i \varphi_i$ см.; точно также отъ поворота на уголъ $k_{i+1} \varphi_{i+1}$ второго шкива длина ведущей вѣтви увеличилась, а ведомой уменьшилась на $r k_{i+1} \varphi_{i+1}$ см. Полное измѣненіе длины каждой вѣтви ремня будетъ равно $k_i \varphi_i R - k_{i+1} \varphi_{i+1} r = k_i R(\varphi_i - \varphi_{i+1})$ относительныя удлиненія опредѣлимъ, раздѣливъ на l, поэтому моменты силъ упругости ремня на первомъ шкивѣ будутъ

$$2\frac{fE}{l} R^2 k_i (\varphi_{i+1} - \varphi_i); \text{ на второмъ, } 2\frac{fE}{l} R r k_i (\varphi_i - \varphi_{i+1}).$$

Для переноса этихъ моментовъ на упругій ведущій валъ нашей модели, найдемъ равнодѣйствующую степень его жесткости p умноженіемъ перваго выраженія на k_i, второго на k_{i+1}, что даетъ:

$$p = 2\frac{fE}{l} R^2 k_i^2$$

тождественныя выраженія въ обоихъ случаяхъ.

Вообще, какъ бы ни была устроена упругая связь между одной движущейся массой и смежной съ нею, всегда можно, задавшись произвольными углами поворота приведенныхъ массъ, найти моментъ силъ упругости, дѣйствующихъ на движущіяся массы, привести къ ведущему валу и замѣнить равнодѣйствующимъ упругимъ цилиндрическимъ валомъ модели.

При этомъ мы совершенно не будемъ принимать во вниманіе массы самого упругаго тѣла (ремня, передаточнаго вала), такъ какъ будемъ предполагать, что масса эта ничтожна по сравненію съ массой колесъ. Такимъ образомъ, на нашей модели мы будемъ считаться только съ массой приведенныхъ колесъ, упругій же валъ будемъ считать невѣсомымъ, лишеннымъ массы.

Если это допущеніе непріемлемо, то легко найти равнодѣйствующее распредѣленіе массы упругаго органа по длинѣ вала. Однако при такой постановкѣ вопроса дальнѣйшее рѣшеніе будетъ во много разъ сложнѣе, по той причинѣ, что дифференціальныя уравненія движенія при этомъ окажутся выраженными въ частныхъ производныхъ съ довольно сложными пограничными условіями для каждаго колеса. Такое усложненіе вопроса имѣетъ смыслъ только въ тѣхъ случаяхъ, когда машина не имѣетъ махового колеса или не приводитъ во вращеніе тѣлъ съ большимъ моментомъ инерціи относительно оси вращенія. Когда вращеніе машины должно быть высоко равномѣрнымъ, а именно такіе случаи мы и имѣемъ въ виду, моментъ инерціи массы вала такъ ничтоженъ по сравненію съ моментомъ инерціи маховика и другихъ тѣлъ, приводимыхъ во вращеніе машиною, что наше допущеніе вполнѣ пріемлемо. Поэтому, болѣе сложную постановку задачи отложимъ до той части курса, которая будетъ посвящена вибраціямъ машинъ и ихъ частей.

54. Двѣ массы, связанныя упруго. Разсмотримъ простѣйшій случай, когда мы имѣемъ только двѣ значительныя массы, связанныя упруго. Пусть моментъ инерціи одной изъ нихъ относительно оси вращенія равенъ J_1, гдѣ мгновенный уголъ поворота φ_1 и мгновенная угловая скорость ω_1; для другой соотвѣтственныя значенія пусть будутъ J_2, φ_2, ω_2. Степень жесткости упругой связи обозначимъ буквой p; къ первому колесу пусть будетъ приложена движущая сила, моментъ которой равенъ $P.r$, а ко второму—сопротивленіе съ моментомъ $S.r$. Тогда движеніе обѣихъ гирь должно будетъ подчиняться дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$J_1 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = P.r - p(\varphi_1 - \varphi_2);\quad J_2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = p(\varphi_1 - \varphi_2) - S.r.$$

Раздѣливъ перемѣнныя и подставивъ вмѣсто первыхъ производныхъ отъ угловъ поворота угловыя скорости, получимъ:

$$\frac{d^3\omega_1}{dt^2} + \left(\frac{p}{J_1} + \frac{p}{J_2}\right)\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{pr}{J_1 J_2}(P - S) + \frac{r}{J_1}\frac{d^2 P}{dt^2},$$

$$\frac{d^3\omega_2}{dt^2} + \left(\frac{p}{J_1} + \frac{p}{J_2}\right)\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{pr}{J_1 J_2}(P - S) - \frac{r}{J_2}\frac{d^2 S}{dt^2}.$$

Умноживъ каждое уравненіе на dt, и проинтегрировавъ отъ нуля до t, будемъ имѣть:

$$\frac{d^2\omega_1}{dt^3} + \left(\frac{p}{J_1} + \frac{p}{J_2}\right)\omega_1 = \frac{pr}{J_1 J_2}\int_0^t (P-S)\,dt + \frac{r}{J_1}\frac{dP}{dt} + C_1,$$

$$\frac{d^2\omega_2}{dt^2} + \left(\frac{p}{J_1} + \frac{p}{J_2}\right)\omega_2 = \frac{pr}{J_1 J_2}\int_0^t (P-S)\,dt - \frac{r}{J_2}\frac{dS}{dt} + C_2,$$

гдѣ C_1 и C_2 произвольныя постоянныя интегрированія, опредѣляемыя начальными данными.

Для дальнѣйшаго интегрированія этихъ дифференціальныхъ уравненій, надо знать функціи P и S. Такъ какъ наибольшій интересъ представляетъ изслѣдованіе равномѣрности динамомашинъ, то мы будемъ предполагать, что колесо второе изображаетъ динамомашину, сопротивленіе которой S при установившемся движеніи можетъ быть принято постояннымъ: $S = Const.$ Что касается силы P, то это должна быть приведенная сила двигателя, причемъ намъ интересенъ лишь тотъ случай, когда двигатель поршневой. Мы ужъ видѣли въ первомъ отдѣлѣ, что діаграмма приведенныхъ (касательныхъ) силъ поршневого двигателя представляетъ изъ себя періодическую кривую, измѣняющуюся въ теченіе половины, одного или двухъ оборотовъ двигателя (смотря по числу тактовъ) отъ нуля или даже отрицательной величины до максимума. Въ главѣ III мы выражали аналитически работу двигателя рядомъ Фурье:

$$L = \int_0^{\varphi} (P - S)\, rd\varphi = 2rF\,[b_0 + \Sigma a_i \sin i\varphi + \Sigma b_i \cos i\varphi],$$

гдѣ r—радіусъ кривошипа, а F—площадь поршня машины въ кв. см.

Если машина должна вращаться съ высокой степенью равномѣрности, то разность между мгновенной угловой ея скоростью и среднею ω_0 должна быть очень мала; поэтому мы можемъ найти интересующій насъ интегралъ и производную приближенно, положивъ: $d\varphi = \omega_0\, dt$ и $\varphi = \omega_0 t$. Вліяніе этого допущенія на результатъ, т. е. искомую величину мгновеннаго отклоненія угловой скорости отъ средней, будетъ ничтожно, если только вращеніе машины достаточно равномѣрно.

Такимъ образомъ, мы можемъ принять:

$$\int_0^{\varphi} (P - S)\, rd\varphi = r\omega_0 \int_0^{t} (P - S)\, dt = 2rF\,[b_0 + \Sigma a_i \sin i\omega_0 t + \Sigma b_i \cos i\omega_0 t].$$

Послѣ этого ужъ нетрудно будетъ найти и первую производную отъ S, которая равна нулю, и первую производную отъ P, двукратнымъ дифференцированіемъ вышенаписаннаго выраженія по времени:

$$\frac{dP}{dt} = -2F\omega_0\,[\Sigma a_i i^2 \sin i\omega_0 t + \Sigma b_i i^2 \cos i\omega_0 t].$$

Однако надо имѣть въ виду, что сходимость этого ряда гораздо хуже, чѣмъ ряда для выраженія работы, благодаря умноженію каждой гармонической на квадратъ ея номера i^2, поэтому результаты нашего изслѣдованія должны быть съ осторожностью прилагаемы къ тѣмъ случаямъ, когда высшія гармоническія пріобрѣтаютъ особенное вліяніе на равномѣрность вращенія машины. Въ этихъ случаяхъ необходимо рекомендовать провѣрку результатовъ интегрированіемъ точнаго дифференціальнаго уравненія; къ сожалѣнію общій интегралъ линейнаго дифференціальнаго уравненія, въ который входитъ гармоническій рядъ отъ зависимой перемѣнной, намъ неизвѣстенъ; поэтому провѣрка эта требуетъ ариѳметическаго интегрированія и можетъ быть выполнена только для какого-либо частнаго примѣра.

Теперь наши приближенныя дифференціальныя уравненія получаютъ видъ:

$$\frac{d^2\omega_1}{dt^2} + \left(\frac{p}{J_1} + \frac{p}{J_2}\right)\omega_1 = \frac{2prF}{J_1 J_2 \omega_0}\left[\sum a_i \left(1 - \frac{J_2 i^2 \omega_0^2}{p}\right) \sin i\omega_0 t + \right.$$

$$+\sum b_i\left(1-\frac{J_2\, i^2\, \omega_0{}^2}{p}\right)\cos i\omega_0 t\Big] + C_3 \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;(13).$$

$$\frac{d^2\omega_2}{dt^2}+\left(\frac{p}{J_1}+\frac{p}{J_2}\right)\omega_2=\frac{2prF}{J_1J_2\omega_0}\Big[\Sigma a_i \sin i\omega_0 t+\Sigma b_i \cos i\omega_0 t\Big]+C_4 \ldots (14).$$

Лѣвыя части ихъ тождественны и линейны, правыя части представляютъ собою послѣдніе члены, зависящіе только отъ времени. Какъ извѣстно, полный интегралъ подобныхъ дифференціальныхъ уравненій состоитъ изъ двухъ частей: первая изображаетъ свободныя колебанія системы, вторая—вынужденныя. Свободныя колебанія угловой скорости будутъ возникать при каждомъ нарушеніи установившагося движенія, напр., при измѣненіи нагрузки динамомашины или внезапномъ измѣненіи притока движущей силы. Изслѣдованіе свободныхъ колебаній системы не имѣетъ для насъ никакого смысла прежде всего потому, что въ этомъ случаѣ приходитъ въ дѣйствіе центробѣжный регуляторъ, и колебанія угловой скорости будутъ зависѣть въ значительной степени отъ протеканія процесса регулированія; кромѣ того, на основаніи вышенаписанныхъ уравненій мы получили бы невѣрное представленіе, будто свободныя колебанія продолжаются безконечно долго, между тѣмъ какъ опытъ показываетъ, что каждое свободное колебаніе болѣе или менѣе быстро угасаетъ благодаря дѣйствію вредныхъ сопротивленій, которыя не были приняты нами во вниманіе вслѣдствіе ихъ малости и для упрощенія задачи. Такъ какъ въ этой части мы условились говорить только объ установившемся движеніи машины, то свободныя колебанія не составляютъ задачи нашего изслѣдованія, и мы будемъ предполагать, что они погашены сопротивленіями.

Совсѣмъ иначе обстоитъ дѣло съ вынужденными колебаніями; даже значительныя сопротивленія лишь уменьшаютъ нѣсколько амплитуду, но не уничтожаютъ вынужденныхъ колебаній; незначительныя же сопротивленія оказываютъ на нихъ ничтожное вліяніе, такъ что для упрощенія нашей задачи допустимо пренебрегать сопротивленіемъ воздуха. Такъ какъ при установившемся движеніи вынужденныя колебанія, вызванныя неравномѣрностью вращающаго усилія, опредѣляютъ неравномѣрность угловой скорости, то наша задача сводится къ опредѣленію однихъ вынужденныхъ колебаній, т. е. частныхъ интеграловъ нашихъ дифференціальныхъ уравненій, которые изобразятся также рядами Фурье:

$$\omega_1=\omega_0\,[1+\Sigma c_i \cos i\omega_0 t+\Sigma d_i \sin i\omega_0 t],$$

$$\omega_2=\omega_0\,[1+\Sigma e_i \cos i\omega_0 t+\Sigma f_i \sin i\omega_0 t].$$

Для опредѣленія амплитудъ подставимъ эти значенія въ наши дифференціальныя уравненія (13) и (14) и сгруппируемъ отдѣльно члены, содержащіе cos $i\omega_0 t$ и sin $i\omega_0 t$, получимъ рядъ Фурье. Такъ какъ уравненіе должно обращаться въ тождество и равняться нулю при всякомъ значеніи t, то въ полученномъ рядѣ Фурье, содержащемъ косинусоиды и синусоиды различныхъ частотъ, амплитуды непремѣнно должны быть равны нулю, иначе рядъ этотъ изобразитъ какую-либо функцію, а не нуль; точно также и сумма постоянныхъ членовъ должна быть равна нулю. Такимъ образомъ получаемъ столько уравненій, сколько неизвѣстныхъ, и находимъ:

$$e_i = \frac{2rFb_i}{(J_1+J_2)\,\omega_0^2}\,\frac{1}{1-\dfrac{i^2\omega_0^2}{\dfrac{p}{J_1}+\dfrac{p}{J_2}}};\quad f_i = \frac{2rFa_i}{(J_1+J_2)\,\omega_0^2}\,\frac{1}{1-\dfrac{i^2\omega_0^2}{\dfrac{p}{J_1}+\dfrac{p}{J_2}}}.$$

$$c_i = \frac{2rFb_i}{(J_1+J_2)\,\omega_0^2}\,\frac{1-i^2\omega_0^2\,\dfrac{J_2}{p}}{1-\dfrac{i^2\omega_0^2}{\dfrac{p}{J_1}+\dfrac{p}{J_2}}};\quad d_i = \frac{2rFa_i}{(J_1+J_2)\,\omega_0^2}\,\frac{1-i^2\omega_0^2\,\dfrac{J_2}{p}}{1-\dfrac{i^2\omega_0^2}{\dfrac{p}{J_1}+\dfrac{p}{J_2}}}.$$

55. Выборъ упругой связи. Особенно важно знать движеніе рабочей машины, поэтому мы поставили на первое мѣсто e_i и f_i, и займемся изслѣдованіемъ полученныхъ значеній. Если бы степень жесткости p связи между маховиками была безконечно велика, то измѣненія угловой скорости опредѣлялись бы иначе, именно изъ дифференціальнаго уравненія:

$$(J_1+J_2)\frac{d\omega}{dt} = (P-S)\,r = 2r^2F\,[\Sigma\, a_i\, i\cos i\omega_0 t - \Sigma\, b_i\, i \sin i\omega_0 t]$$

мы нашли бы амплитуды ряда угловой скорости:

$$\omega = \omega_0\,[1+\Sigma\,\alpha_i \sin i\omega_0 t + \Sigma\,\beta_i \cos i\omega_0 t]$$

$$\alpha_i = \frac{2rF}{(J_1+J_2)\,\omega_0^2}\,a_i;\quad \beta_i = \frac{2rF}{(J_1+J_2)\,\omega_0^2}\,b_i.$$

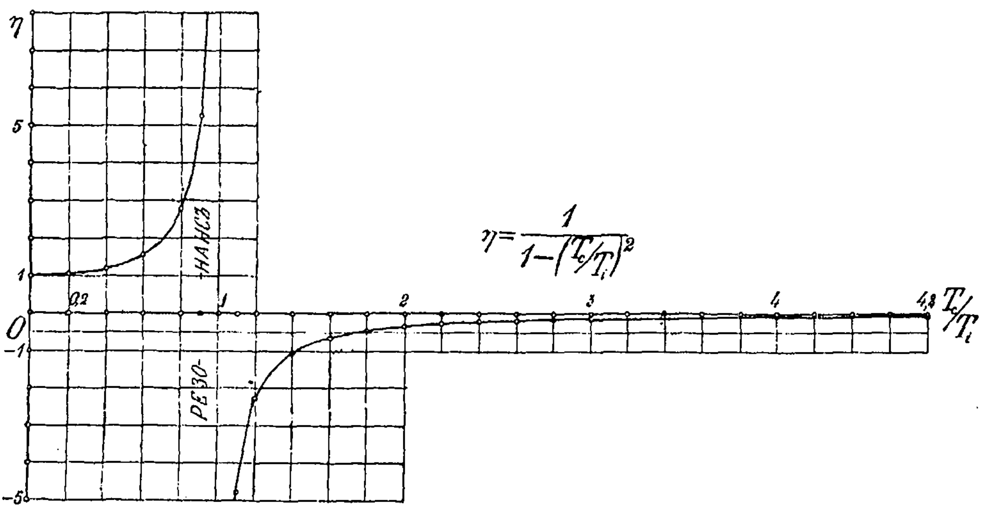
Точь-въ-точь такіе же отвѣты мы получили бы, напр., для α_i, положивъ въ выраженіяхъ f_i или d_i величину $p=\infty$. Слѣдовательно вліяніе упругости связи выражается вторымъ множителемъ выраженій e_i и f_i; если онъ больше единицы, то упругая связь ухудшаетъ равномѣрность, и наоборотъ, машина будетъ вращаться болѣе равномѣрно въ томъ случаѣ, если величина дроби

$$\eta_i = \frac{1}{1 - \frac{i^2 \omega_0^2}{\frac{p}{J_1} + \frac{p}{J_2}}} = \frac{1}{1 - \frac{T_c^2}{T_i^2}}$$

меньше единицы. Чтобы облегчить запоминаніе, вмѣсто частотъ введены періоды T_c и T_i свободнаго колебанія и гармонической раскачивающей силы порядка i, опредѣляемые равенствами:

$$T_i = \frac{2\pi}{i\omega_0}; \quad T_c = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{p}{J_1} + \frac{p}{J_2}}}.$$

Когда связь очень жесткая (p велико) періодъ T_c можетъ быть очень малъ по сравненію съ T_i; возможенъ случай, когда $T_c = T_i$, и наконецъ, при очень податливой упругой связи T_c больше T_i. На *чер. 34* изображено измѣненіе величины η_i при измѣненіи отношенія



Чер. 34.

$T_c : T_i$ отъ нуля до пяти. Пока отношеніе это меньше единицы, т. е. для жесткой связи, величина η возрастаетъ отъ 1 сначала медленно, затѣмъ очень быстро, и при $T_c = T_i$ дѣлается безконечно большой. При дальнѣйшемъ увеличеніи отношенія величина η изъ положительной превращается сразу въ отрицательную, сначала безконечно большую, а затѣмъ быстро уменьшающуюся и въ предѣлѣ достигающую нуля. То обстоятельство, что η становится отрицательнымъ, не имѣетъ для насъ большого значенія, намъ важна абсолютная его величина, опредѣляющая неравномѣрность вращенія; особенно важно знать, когда η больше и когда меньше единицы. Изъ *чер. 34* видно, что η больше единицы при измѣненіи $T_c : T_l$ отъ нуля до $\sqrt{2} = 1{,}41$ и только для абсциссъ, большихъ 1,41, величина η меньше единицы. Отсюда мы заключаемъ, что *когда связь очень жестка* (T_c мало по сравненію съ T_l) *упругость ея оказываетъ вредное вліяніе на равномѣрность вращенія и наоборотъ, очень податливая связь* (T_c больше, чѣмъ 1,41 T_l) *повышаетъ равномѣрность вращенія. Чрезвычайную опасность представляютъ тѣ случаи, когда величина T_c близка T_l*, такъ какъ при этомъ η очень велико. Въ случаѣ $T_c = T_l$ наступитъ *явленіе резонанса*, интегралъ долженъ быть написанъ иначе, причемъ амплитуда вынужденнаго колебанія будетъ возрастать пропорціонально времени, теоретически приближаясь къ безконечности. Само собою разумѣется, наши приближенныя дифференціальныя уравненія въ этомъ случаѣ ужъ не будутъ болѣе правильно выражать явленіе, такъ какъ мы предполагали, что отклоненія угловой скорости отъ средняго значенія невелики. Явленіе резонанса много разъ наблюдалось въ машинахъ, часто оно было причиной поломокъ, такъ какъ амплитуда вынужденныхъ колебаній хотя и не становится безконечно большою, благодаря дѣйствію вредныхъ сопротивленій, но все-таки настолько велика, что о равномѣрности вращенія говорить не приходится.

Поэтому при конструированіи силовыхъ установокъ надо прежде всего подумать, не произойдетъ ли явленіе резонанса? Для этого опредѣлимъ тѣ соотношенія элементовъ машины, при которыхъ какъ разъ наступитъ резонансъ и которые мы будемъ называть дальше *критическими*. Найдемъ прежде всего критическія степени жесткости p_k упругой связи изъ уравненія:

$$p\left(\frac{1}{J_1}+\frac{1}{J_2}\right)=i^2\omega_0^2 \text{ находимъ: } p_k = i^2\omega_0^2\frac{J_1 J_2}{J_2+J_2}.$$

Отсюда видимъ, что каждая машина имѣетъ не одну, а нѣсколько критическихъ степеней жесткости соотвѣтственно различнымъ значеніямъ i; другими словами, каждая гармоническая составляющая имѣетъ свою критическую степень жесткости. Выполняемая упругая связь ни въ коемъ случаѣ не должна имѣть степень жесткости равную или близкую критической; лучше всего, если конструкція допускаетъ степень жесткости въ два или болѣе разъ меньшую, нежели первая критическая ($i = 1$); если это не допускается мѣстными условіями, то надо стараться такъ подобрать всѣ величины, чтобы степень жесткости была какъ разъ по серединѣ между двумя смежными критическими.

Если степень жесткости такъ-же неудобно мѣнять, какъ и угловую скорость, то желательныхъ результатовъ можно достигнуть, измѣняя соотношеніе между величинами моментовъ инерціи J_1 и J_2, оставляя неизмѣнной ихъ сумму. Разсмотримъ зависимость частоты собственнаго колебанія отъ этого соотношенія; пусть $J_1 = x(J_1 + J_2)$, гдѣ x правильная дробь, измѣняющаяся отъ нуля (когда J_1 ничтожно мало по сравненію съ J_2) до единицы (въ обратномъ случаѣ). Легко найти, что

$$\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} = \frac{1}{J_1 + J_2} \cdot \frac{1}{x(1-x)}.$$

Подставивъ этотъ результатъ въ формулу для періода свободныхъ колебаній, получимъ:

$$T_c = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{p}{J_1} + \frac{p}{J_2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{(J_1 + J_2)(x - x^2)}{p}}.$$

Такъ какъ величины $J_1 + J_2$ и p измѣненію не подлежатъ, то періодъ зависитъ отъ величины $x - x^2$, которая измѣняется отъ нуля при $x = 0$, сначала возрастая, достигая наибольшаго значенія (0,25) при $x = 0{,}5$, а затѣмъ убывая до нуля при $x = 1$. Уменьшить періодъ собственныхъ колебаній не представляетъ, слѣдовательно, труда; однако мы доказали раньше, что для улучшенія равномѣрности надо стремиться къ увеличенію T_c, и теперь видимъ, что измѣненіемъ соотношенія между J_1 и J_2 его можно увеличивать только до нѣкотораго предѣла, которому соотвѣтствуетъ $x = 0{,}5$, т. е. равенство обоихъ моментовъ инерціи $J_1 = J_2$; при этомъ соотношеніи періодъ T_c имѣетъ наибольшую возможную величину. Дальнѣйшее его увеличеніе возможно либо уменьшеніемъ p, либо увеличеніемъ $J_1 + J_2$.

Въ заключеніе отмѣтимъ еще, что для вычисленія T_c можно вмѣсто величинъ моментовъ инерціи J_1 и J_2 пользоваться величинами приведенныхъ вѣсовъ, приходящихся на 1 кв. см. площади поршня, причемъ и степень жесткости тогда также надо относить къ 1 кв. см. площади поршня. Если q_1 и q_2 обозначаютъ приведенные къ радіусу кривошипа r вѣса обоихъ колесъ, то

$$J_1 = \frac{q_1 r^2 F}{g}; \quad J_2 = \frac{q_2 r^2 F}{g}; \; p = p_0 F; \; \frac{p}{J_1} + \frac{p}{J_2} = \frac{p_0 g}{q_1 r^2} + \frac{p_0 g}{q_2 r^2},$$

гдѣ F кв. см.—площадь поршня, а g—ускореніе силы тяжести.

56. Примѣръ. Чтобы показать ходъ подсчетовъ, вообразимъ одноцилиндровый дизель-двигатель съ діаметромъ цилиндра 40 см. и ходомъ 60 см., дѣлающій 180 об./мин. и приводящій въ движеніе динамомашину. На валу заклинено какъ можно ближе къ кривошипу маховое колесо, затѣмъ слѣдуютъ подшипникъ, жесткая свертная муфта, опять подшипникъ и динамомашина. Такъ какъ приводный валъ къ динамомашинѣ перемѣннаго діаметра, то прежде всего замѣнимъ его эквивалентнымъ валомъ произвольнаго постояннаго діаметра, напр. $d_0 = 20$ см.; длину этого вала будемъ считать сложенною изъ нѣсколькихъ участковъ, которые должны быть эквивалентны каждому изъ участковъ дѣйствительнаго вала. Если D и L суть діаметръ и длина въ см. нѣкотораго участка дѣйствительнаго вала, то на эквивалентномъ валу діаметра d_0 ему долженъ соотвѣтствовать участокъ длины l, вычисленный по формулѣ:

$$l = L\left(\frac{d_0}{D}\right)^4,$$

такъ какъ одинаковые углы скручиванія получатся тогда, когда длины валовъ пропорціональны четвертымъ степенямъ діаметровъ.

Пусть въ концѣ концовъ найдемъ $l = 1{,}6$ м., откуда полная степень жесткости вала $p = 835000$ кг. м., а отнесенная къ единицѣ площади поршня $p_0 = 664$. Приведенный вѣсъ маховика пусть будетъ $q_1 = 140$ кг./кв. см., а приведенный вѣсъ динамомашины пусть будетъ $q_2 = 35$ кг./кв. см.

Чтобы найти рядъ для избыточной работы въ случаѣ полной нагрузки (100%) двигателя, обратимся къ *чер. 25* и возьмемъ съ него всѣ амплитуды для единицы площади поршня, получимъ рядъ:

$$L_1 = 0{,}6\ [6{,}49 - 1{,}96 \cos {}^1/_2\,\varphi_1 - 1{,}69 \cos \varphi_1 - 1{,}13 \cos {}^3/_2\,\varphi_1 - 0{,}80$$
$$\cos 2\varphi_1 - 0{,}62 \cos {}^5/_2\,\varphi_1 - 0{,}29 \cos 3\varphi_1 + 2{,}14 \sin {}^1/_2\,\varphi_1 + 0{,}53 \sin\varphi_1].$$

Примемъ еще во вниманіе кинетическую энергію возвратно движущихся массъ, приходящихся на единицу площади поршня, предполагая угловую скорость кривошипа постоянною, равною $\omega_0 = 18{,}85$ сек.$^{-1}$; для этого вычтемъ изъ L_1 рядъ:

$$\frac{r^2\,\omega_0^2}{2g}\left[0{,}31 + 0{,}04 \cos \varphi_1 - 0{,}20 \cos 2\varphi_1 - 04 \cos 3\varphi_1\right].$$

Получимъ слѣдующія амплитуды: $b_0 = 5{,}65$; $a_1 = 2{,}14$; $a_2 = 0{,}53$; $b_1 = -1{,}96$; $b_2 = -1{,}80$; $b_3 = -1{,}13$; $b_4 = -0{,}26$; $b_5 = -0{,}62$; $b_6 = -0{,}18$, причемъ будемъ помнить, что величины i соотвѣтствующія каждой изъ гармоническихъ вдвое менѣе, такъ что напр. величинѣ b_3 соотвѣтствуетъ $i = 1{,}5$.

Затѣмъ вычисляемъ періодъ собственныхъ колебаній $T_c = 0{,}124$ сек. и періоды вынужденныхъ колебаній для $i = 0{,}5$; 1 и т. д.:

$$T_1 = {}^2/_3 \text{ сек.};\ T_2 = {}^1/_3;\ T_3 = {}^2/_9;\ T_4 = {}^1/_6;\ T_5 = 0{,}1333;\ T_6 = 0{,}1111 \text{ сек.}$$

Видимъ, что T_c лежитъ приблизительно по серединѣ между пятой и шестой гармонической, такъ что опасность резонанса установкѣ не грозитъ, но T_c не велико по сравненію съ T_5.

Вычислимъ теперь амплитуды ряда угловой скорости сначала для случая жесткаго соединенія обоихъ колесъ, придавъ формуламъ видъ:

$$\alpha_i = \frac{2g a_i}{(q_1 + q_2)\,\omega_0^2 r}; \quad \beta_i = \frac{2g b_i}{(q_1 + q_2)\,\omega_0^2 r}.$$

Получимъ: $\alpha_1 = +0{,}00225$; $\alpha_2 = +0{,}00056$; $\beta_1 = -0{,}00206$; $\beta_2 = -0{,}00189$; $\beta_3 = -0{,}00119$; $\beta_4 = -0{,}00013$; $\beta_5 = -0{,}00065$; $\beta_6 = -0{,}00019$.

Затѣмъ вычисляемъ отношенія періода свободнаго колебанія къ ряду послѣдовательныхъ періодовъ вынужденныхъ колебаній, получаемъ: 0,186; 0,372; 0,558; 0,745; 0,931; 1,116. Затѣмъ по *черт. 34* (стр. 162) находимъ величины η: 1,04; 1,16; 1,45; 2,25; 7,52; —4,08. Отсюда видимъ, что всѣ гармоническія вслѣдствіе недостаточной упругости вала увеличатся въ особенности четвертая, пятая и шестая (близость къ резонансу); поэтому ожидаемая степень неравномѣрности навѣрно не будетъ достигнута машиною. Это явленіе многократно констатировалось опытомъ; такъ, Гюльднеръ [1]) приводитъ примѣръ одноцилиндроваго дизель-двигателя съ маховикомъ и динамомашиной, въ которомъ измѣренный тахографомъ Хорна коефиціентъ неравномѣрности оказался равнымъ $\delta = 0{,}0125$, межъ тѣмъ какъ одни маховыя колеса были расчитаны на $\delta = 0{,}01$. Гюльднеръ пытается объяснить это грубое несовпаденіе „теоріи" съ практикой невѣрностью работы тахографа, но скорость машины (190 об./мин.) вовсе не была такъ велика, чтобы обусловить большую ошибку въ масштабѣ тахографа. Гораздо плодотворнѣе въ подобныхъ случаяхъ пересмотрѣть элементарную теорію и вскрыть, какое именно допущеніе не выполняется на практикѣ и влечетъ за собой несогласіе съ теоріей.

Перемноживши величины α_i а также β_i на η_i, получимъ величины e_i и f_i: $f_1 = +0{,}00234$; $f_2 = +0{,}00065$; $e_1 = -0{,}00214$; $e_2 = -0{,}00220$; $e_3 = -0{,}00173$; $e_4 = -0{,}00029$; $e_5 = -0{,}00489$; $e_6 = +0{,}00078$. Пятая гармоническая теперь доминируетъ надъ всѣми остальными. Подсчитаемъ мѣры нервномѣрности, для чего найдемъ суммы квадратовъ α_i β_i, а также e_i, f_i которыя и раздѣлимъ на 2. Если не принимать во вниманіе упругость вала, то получимъ $\Delta' = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$, что соотвѣтствуетъ (см. таблицу 2 на стр. 9) коефиціенту неравномѣрности 0,01. А если упругость вала принята во вниманіе то $\Delta = 4{,}29 \cdot 10^{-5}$, т. е. близко къ коефиціенту неравномѣрности 0,02; при столь высокой неравномѣрности лампы не будутъ давать пріятнаго спокойнаго освѣщенія, будутъ мигать, и установка окажется неудачной. Придется либо утяжелять маховикъ и динамомашину въ нѣсколько разъ, либо поставить особую очень упругую муфту, въ которой вращающее усиліе передавалось-бы посредствомъ мягкихъ пружинъ, либо слить динамо и маховикъ въ одно цѣлое. Впро-

---

[1]) Güldner, Entwerfen und Berechnen der Verbrennungsmotoren, 1 изд. Берлинъ, 1903, стр. 416.

чемъ, есть еще одно средство, помѣнять мѣстами динамо и маховикъ такъ, чтобы динамо была возлѣ двигателя, а маховикъ вдали. Посмотримъ, какъ это повліяетъ на равномѣрность.

Для опредѣленія коефиціента неравномѣрности δ надо написать рядъ для угловой скорости, амплитуды котораго уже найдены; затѣмъ вычислить при помощи методовъ и таблицы, указанныхъ на стр. 93. относительныя измѣненія угловой скорости (сложить рядъ); послѣ этого δ опредѣляется легко. Въ нашей работѣ [1]) вычислены для одного примѣра измѣненія δ, сведенныя въ одну діаграмму, въ зависимости отъ измѣненій степени жесткости ременной передачи, или точнѣе, разстоянія между осями шкивовъ двигателя и динамо. Изъ діаграммы этой вполнѣ ясно, что только очень упругая связь (степень жесткости въ 1,5 раза менѣе первой критической) улучшаетъ коефиціентъ равномѣрности.

57. Упругій маховикъ. Разберемъ теперь не примѣнявшуюся еще комбинацію маховика съ динамо, о которой было только что упомянуто, именно: пусть съ кривошипомъ двигателя жестко соединена динамо-машина, а маховое колесо заклинено отдѣльно на болѣе или менѣе длинномъ упругомъ валу или связано съ динамо посредствомъ упругой муфты. Сохраняя прежнія обозначенія (значки 1 для маховика, 2 для динамо), будемъ имѣть дифференціальныя уравненія:

$$J_2\frac{d^2\varphi_2}{dt^2}=(P-S)\,r-p\,(\varphi_2-\varphi_1);\quad J_1\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}=p\,(\varphi_2-\varphi_1).$$

Послѣ раздѣленія перемѣнныхъ и однократнаго интегрированія по времени получимъ:

$$\frac{d^2\omega_1}{dt^2}+\left(\frac{p}{J_1}+\frac{p}{J_2}\right)\omega_1=\frac{pr}{J_1J_2}\int_0^t\left(P-S\right)dt+C_1=\frac{2prF}{J_1J_2\,\omega_0}\left[\sum a_i\sin i\omega_0t+\right.$$

$$\left.+\sum b_i\cos i\,\omega_0\,t\right]+C_3.$$

$$\frac{d^2\omega_2}{dt^2}+\left(\frac{p}{J_1}+\frac{p}{J_2}\right)\omega_2=\frac{p\,r}{J_1J_2}\int_0^t\left(P-S\right)dt+\frac{r}{J_2}\frac{dP}{dt}+C_2=$$

$$=\frac{2p\,r}{J_1J_2}\frac{F}{\omega_0}\left[\sum a_i\left(1-\frac{J_1\,i^2\,\omega_0^2}{p}\right)\sin i\,\omega_0\,t+\sum b_i\left(1-\frac{J_1\,i^2\,\omega_0^2}{p}\right)\cos i\,\omega_0\,t\right]+C_4.$$

Для опредѣленія періодическихъ измѣненій угловой скорости динамо по-прежнему полагаемъ:

$$\omega_2=\omega_0\left[1+\sum e_i\cos i\,\omega_0t+\sum f_i\sin i\,\omega_0\,t\right];$$

[1]) К. Рерихъ. Вліяніе упругости ремня и т. д. „Вѣстн. Общества Технологовъ“ за 1912 г., стр. 311—9.

получимъ для опредѣленія e_i и f_i точь-въ-точь тѣ-же формулы, какія на стр. 161 были получены для c_i и d_i, но придадимъ имъ другой видъ, использовавъ T_c и T_i; будемъ имѣть:

$$e_i = \frac{2rFb_i}{(J_1+J_2)\,\omega_0^2}\,z_i\,;\; f_i = \frac{2rFa_i}{(J_1+J_2)\,\omega_0^2}\,z_i, \text{ гдѣ } z_i = \frac{1-\dfrac{J_1\,i^2\,\omega_0^2}{p}}{1-\dfrac{T_c^2}{T_i^2}}.$$

Чтобы уяснить себѣ реальное значеніе дроби, входящей въ числитель величины z_i, представимъ себѣ двигатель и динамомашину неподвижными и заторможенными, повернемъ затѣмъ маховое колесо на нѣкоторый уголъ φ_0, скрутивъ валъ, и внезапно отпустимъ. Вслѣдствіе упругости вала, маховое колесо вернется въ равновѣсное положеніе, но не остановится въ немъ сразу, а по инерціи скрутитъ валъ въ обратную сторону на такой же уголъ (если сопротивленій нѣтъ). Такимъ образомъ возникнетъ колебательное движеніе, подчиняющееся дифференціальному уравненію:

$$J_1\,\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}+p\,\varphi_1=0, \text{ откуда } \varphi_1=\varphi_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{p}{J_1}}\right).$$

Если обозначимъ буквой τ періодъ этого колебанія, то будемъ имѣть:

$$\frac{J_1}{p}=\frac{\tau^2}{4\pi^2} \text{ и } z_i = \frac{1-\dfrac{\tau^2}{T_i^2}}{1-\dfrac{T_c^2}{T_i^2}}.$$

Все сказанное ранѣе на стр. 162—164 относительно явленія резонанса въ полной мѣрѣ приложимо и къ разсматриваемому аггрегату машинъ, такъ какъ знаменатель величины z_i тождественъ знаменателю η_i. Но числители у нихъ существенно различны, и вмѣсто единицы мы имѣемъ теперь разность двухъ положительныхъ чиселъ, которая можетъ принимать всѣ значенія отъ отрицательной безконечности (когда τ во много разъ больше T_i) до $+1$ (когда τ близко къ нулю). Для насъ важно уменьшить амплитуду, поэтому мы должны стремиться къ тому, чтобы знаменатель былъ какъ можно больше ($T_c > 1{,}41\,T_i$), а числитель какъ можно меньше. Средство увеличить знаменатель, какъ было выяснено въ предыдущемъ п., сводится къ устройству возможно болѣе упругой связи. Теперь намъ остается позаботиться лишь объ уменьшеніи числителя, для чего достаточно чтобы отношеніе $\tau : T_i$ было больше 0 и меньше 1,41, такъ какъ тогда числитель будетъ правильной дробью положительной или отрицательной. Особенно выгоденъ случай $\tau = T_i$, когда числитель равенъ нулю. Легко доказать, что эти требованія ($\tau < 1{,}41\, T_1$ и $T_c > 1{,}41\, T_1$) несовмѣстимы, такъ какъ изъ выраженій, опредѣляющихъ τ и T_c, очевидно, что всегда величина $\tau > T_c$.

Если бы діаграмма вращающаго усилія или избыточной работы изображалась аналитически только одной синусоидой, то мы могли-бы при помощи небольшого махового колеса и цѣлесообразно подобранной упругой связи ($p = J_1\, i^2\, \omega_0^2$) получить вполнѣ равномѣрное вращеніе динамомашины [1]), лишь-бы только знаменатель не былъ одновременно равенъ нулю или очень малъ, что при такомъ выборѣ степени жесткости всегда выполняется, если J_2 не безконечно велико.

Когда же амплитуды нѣсколькихъ гармоническихъ почти одинаковы по величинѣ, то указанный выборъ величины p можетъ уничтожить лишь одну изъ нихъ, причемъ остальныя могутъ увеличиться настолько значительно, что гораздо цѣлесообразнѣе упруго связать съ двигателемъ не маховикъ, а динамомашину. Поэтому разобранная въ настоящемъ параграфѣ комбинація не можетъ быть рекомендована къ выполненію.

58. Три массы, связанныя упруго. Прежде чѣмъ перейти къ общему случаю разсмотрѣнія неравномѣрности вращенія многихъ массъ, заклиненныхъ на упругомъ эквивалентномъ валу, разсмотримъ очень часто встрѣчающійся случай трехъ массъ. На электрическихъ станціяхъ очень часто встрѣчаются машины съ двумя маховиками и одной динамомашиной или съ однимъ маховикомъ и двумя динамомашинами (генераторъ перемѣннаго тока и возбудитель постояннаго тока). Въ судовыхъ рѣчныхъ установкахъ также можно встрѣтить случай, когда два гребныхъ колеса приводятся въ движеніе зубчатой передачей отъ дизель-двигателя при посредствѣ упругой муфты.

Сохранимъ прежнія обозначенія п. 54, при чемъ значками 1 будемъ обозначать моментъ инерціи, уголъ поворота и мгновенную угловую скорость первой массы (маховика), значками 2—тѣ же величины для второй массы и 3—для третьей. Пусть P_1 обозначаетъ приведенную силу, приложенную къ первой массѣ; P_2 и P_3 пусть будутъ приведенныя сопротивленія, приложенныя ко второй и третьей массѣ. Степень жесткости упругой связи между первой и второй массой обозначимъ буквой p_{12}, а между второй и третьей—p_{23}. Предполагая, что P_1 движущая сила, а P_2 и P_3 сопротивленія, будемъ имѣть три дифференціальныхъ уравненія движенія:

$$J_1 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = P_1 r - p_{12}(\varphi_1 - \varphi_2);\; J_2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = p_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) - P_2 r - p_{23}(\varphi_2 - \varphi_3);$$

---

[1]) Этотъ выводъ составлялъ тему нашего доклада Научно-Техническому Кружку преподавателей Политехническаго Института въ октябрѣ 1908 года.

$$J_3 \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} = p_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) - P_3 r.$$

Въ случаѣ иного распредѣленія движущей силы и сопротивленій не трудно измѣненіемъ знаковъ при P получить правильныя дифференціальныя уравненія. Раздѣляя перемѣнныя, получимъ три дифференціальныхъ уравненія, содержащихъ въ лѣвой части производныя отъ φ причемъ коефиціенты при производныхъ будутъ во всѣхъ трехъ уравненіяхъ одни и тѣ же подобно тому, какъ это было и въ случаѣ двухъ массъ. Общій видъ лѣвой части будетъ слѣдующій:

$$\frac{d^6\varphi}{dt^6} + \frac{d^4\varphi}{dt^4}\left(\frac{p_{12}}{J_1} + \frac{p_{12}+p_{23}}{J_2} + \frac{p_{23}}{J_3}\right) + \frac{d^2\varphi}{dt^2} p_{12} p_{23}\left(\frac{1}{J_1 J_2} + \frac{1}{J_2 J_3} + \frac{1}{J_3 J_4}\right) = D(\varphi).$$

Въ правую часть уравненій войдутъ величины P и ихъ производныя съ соотвѣтственными коефиціентами, именно получимъ:

$$D(\varphi_1) = \frac{p_{12}p_{23}}{J_1 J_2 J_3}\left(P_1 - P_2 - P_3\right)r + \left(\frac{p_{12}+p_{23}}{J_1 J_2} + \frac{p_{23}}{J_1 J_3}\right) r \frac{d^2 P_1}{dt^2} + \frac{r}{J_1}\frac{d^4 P_1}{dt_4} -$$
$$- \frac{p_{12}\, r}{J_1 J_2}\frac{d^2 P_2}{dt^2}.$$

$$D(\varphi_2) = \frac{p_{12}p_{23}}{J_1 J_2 J_3}\left(P_1 - P_2 - P_3\right) r + \frac{p_{12}\, r}{J_1 J_2}\frac{d^2 P_1}{dt^2} - \left(\frac{p_{12}}{J_1 J_2} + \frac{p_{23}}{J_2 J_3}\right) r \frac{d^2 P_2}{dt^2} -$$
$$- \frac{r}{J_2}\frac{d^4 P_2}{dt^2} - \frac{p_{23}\, r}{J_2 J_3}\frac{d^2 P_3}{dt^2}.$$

$$D(\varphi_3) = \frac{p_{12}\, p_{23}\, r}{J_1 J_2 J_3}\left(P_1 - P_2 - P_3\right) - \frac{p_{23}\, r}{J_2 J_3}\frac{d^2 P_2}{dt^2} - \left(\frac{p_{12}}{J_1 J_3} + \frac{p_{12}+p_{23}}{J_2 J_3}\right) r \frac{d^2 P_3}{dt^2} -$$
$$- \frac{r}{J_3}\frac{d^4 P_3}{dt^4}.$$

Займемся прежде всего изученіемъ свободныхъ колебаній системы, для чего надо найти общій интегралъ лѣвой части, приравнявъ ее нулю. Для сокращенія письма введемъ обозначенія:

$$2k^2 = \frac{p_{12}}{J_1} + \frac{p_{12}+p_{23}}{J_2} + \frac{p_{23}}{J_3};\quad n^4 = p_{12} p_{23}\left(\frac{1}{J_1 J_2} + \frac{1}{J_2 J_3} + \frac{1}{J_3 J_1}\right).$$

Тогда дифференціальное уравненіе свободныхъ колебаній каждой изъ трехъ массъ приметъ, если замѣнить уголъ поворота угловой скоростью и интегрировать одинъ разъ по времени, слѣдующій видъ:

$$\frac{d^4\omega}{dt^4} + 2k^2 \frac{d^2\omega}{dt^2} + n^4\omega = 0.$$

Полагая $\omega = A \sin(xt + \alpha)$, гдѣ A и α постоянныя, опредѣляемыя начальными условіями, найдемъ биквадратное характеристическое уравненіе для опредѣленія частоты x:

$$x^4 - 2k^2 x^2 + n^4 = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

откуда $x_1 = \sqrt{k^2 + \sqrt{k^4 - n^4}}$; $x_2 = \sqrt{k^2 - \sqrt{k^4 - n^4}}$.

Остальные два корня, $-x_1$ и $-x_2$, не должны быть приняты во вниманіе, что легко вывести изъ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. Если $k^4 > n^4$, оба корня дѣйствительны; обозначимъ буквами T_c' и T_c'' два періода главныхъ колебаній и отмѣтимъ, что по свойствамъ корней уравненія $(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) = 0$. Перейдемъ теперь къ вынужденнымъ колебаніямъ, причемъ будемъ предполагать $P_2 = const.$ и $P_3 = const$ т. е. вторая и третья массы суть динамомашины. Послѣ интегрированія по времени послѣдніе члены нашихъ дифферанціальныхъ уравненій примутъ видъ (постоянныя отброшены):

$$D(\omega_1) = \frac{p_{12}\, p_{23}\, r}{J_1 J_2 J_3} \int_0^t \Big(P_1 - P_2 - P_3\Big) dt + \left(\frac{p_{12} + p_{23}}{J_1 J_2} + \frac{p_{23}}{J_1 J_3}\right) r \frac{dP_1}{dt} + \frac{r}{J_1} \frac{d^3 P_1}{dt^3}.$$

$$D(\omega_2) = \frac{p_{12}\, p_{23}\, r}{J_1 J_2 J_3} \int_0^t \Big(P_1 - P_2 - P_3\Big) dt + \frac{p_{12}\, r}{J_1 J_2} \frac{dP_1}{dt}.$$

$$D(\omega_3) = \frac{d^4 \omega_3}{dt^4} + 2k^2 \frac{d^2 \omega_3}{dt^2} + n^4 \omega_3 = \frac{p_{12}\, p_{23}\, r}{J_1 J_2 J_3} \int_0^t \Big(P_1 - P_2 - P_3\Big) dt.$$

Полагая попрежнему

$$r \int_0^t \Big(P_1 - P_2 - P_3\Big) dt = \frac{2rF}{\omega_0} \Big[b_0 + \sum a_i \sin i\omega_0 t + \sum b_i \cos i\omega_0 t\Big].$$

$$r \frac{dP_1}{dt} = -2rF\omega_0 \Big[\sum a_i i^2 \sin i\omega_0 t + \sum b_i i^2 \cos i\omega_0 t\Big],$$

$$r \frac{d^3 P_1}{dt^3} = 2rF\omega_0^3 \Big[\sum a_i i^4 \sin i\omega_0 t + \sum b_i i^4 \cos i\omega_0 t\Big],$$

будемъ искать частные интегралы, причемъ ω_1 и ω_2 выразимъ рядами Фурье, написанными на стр. 160, а для ω_3 напишемъ рядъ:

$$\omega_3 = \omega_0 \Big[1 + \sum g_i \cos i\omega_0 t + \sum h_i \sin i\omega_0 t\Big].$$

Подстановка этихъ рядовъ въ наши дифференціальныя уравненія и рѣшеніе дадутъ намъ возможность опредѣлить всѣ амплитуды c_i, d_i, e_i, f_i, g_i и h_i; именно будемъ имѣть:

$$c_i = \frac{2r\,F\,b_i}{(J_1 + J_2 + J_3)\,\omega_0^2}\;\frac{n^4\left[1 - i^2\,\omega_0^2\left(\frac{J_2 + J_3}{p_{12}} + \frac{J_3}{p_{23}}\right) + i^4\omega_0^4\,\frac{J_2\,J_3}{p_{12}\,p_{23}}\right]}{i^4\,\omega_0^4 - 2k^2\,i^2\,\omega_0^2 + n^4}$$

$$e_i = \frac{2r\,F\,b_i}{(J_1 + J_2 + J_3)\,\omega_0^2}\;\frac{n^4 - i^2\,\omega_0^2\,n^4\,\frac{J_3}{p_{23}}}{i^4\omega_0^4 - 2k^2\,i^2\,\omega_0^2 + n^4}\,;$$

$$f_i = \frac{2r\,F\,a_i}{(J_1 + J_2 + J_3)\,\omega_0^2}\;\frac{n^4 - i^2\,\omega_0^2\,n^4\,\frac{J_3}{p_{23}}}{i^4\,\omega_0^4 - 2k^2\,i^2\,\omega_0^2 + n^4}\,;$$

$$g_i = \frac{2r\,F\,b_i}{(J_1 + J_2 + J_3)\,\omega_0^2}\;\frac{n^4}{i^4\,\omega_0^4 - 2k^2\,i^2\,\omega_0^2 + n^4}\,;$$

$$h_i = \frac{2r\,F\,a_i}{(J_1 + J_2 + J_3)\,\omega_0^2}\;\frac{n^4}{i^4\,\omega_0^4 - 2k^2\,i^2\,\omega_0^2 + n^4}\,.$$

Формула для d_i не написана; стоитъ замѣнить въ формулѣ для c_i множитель b_i величиной a_i, чтобы получить выраженіе для d_i. Всѣ шесть формулъ содержатъ одинъ и тотъ-же множитель (первая дробь), который, какъ уже было доказано въ п. 55 представляетъ собою соотвѣтственную амплитуду для случая безпредѣльно жесткой связи между тремя массами. Точно также и знаменатели вторыхъ дробей всѣхъ формулъ одинаковы. Чтобы было удобнѣе судить объ измѣненіяхъ величины знаменателя, разложимъ его на первоначальныхъ множителей; отмѣтимъ, что знаменатель отличается отъ характеристическаго уравненія (15) только тѣмъ, что въ немъ x замѣнено величиной $i\,\omega_0$. Кромѣ того замѣчаемъ, что въ числители вторыхъ дробей входитъ множителемъ величина n^4. Поэтому можемъ преобразовать вторыя дроби слѣдующимъ образомъ:

$$u_i = \frac{n^4}{i^4\,\omega_0^4 - 2k^2\,i^2\,\omega_0^2 + n^4} = \frac{n^4}{(x_1^2 - i^2\,\omega_0^2)\,(x_2^2 - i^2\,\omega_0^2)} =$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{i^2\,\omega_0^2}{x_1^2}\right)\left(1 - \frac{i^2\,\omega_0^2}{x_2^2}\right)},$$

такъ какъ согласно свойствамъ корней $x_1^2\,x_2^2 = n^4$. Введемъ теперь вмѣсто частотъ періоды раскачивающей силы T_i и главныхъ собственныхъ колебаній системы T_c' и T_c'', для опредѣленія которыхъ имѣемъ:

$$T_i = \frac{2\pi}{i\,\omega_0}\,;\;\; T_c' = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 + \sqrt{k^4 - n^4}}}\,;\;\; T_c'' = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - \sqrt{k^4 - n^4}}}\,.$$

получимъ:

$$u_i = \frac{1}{\left(1 - \frac{T_c'^2}{T_i^2}\right)\left(1 - \frac{T_c'^2}{T_i^2}\right)}\,.$$

Теперь ужъ нетрудно будетъ изслѣдовать измѣненія амплитуды вынужденныхъ колебаній. Прежде всего каждый разъ, когда $T_i = T_c'$ или $T_i = T_c''$, наступитъ явленіе резонанса и неравномѣрность вращенія машины будетъ во много разъ больше той, какая ожидалась согласно элементарному расчету. То-же самое будетъ имѣть мѣсто и въ случаяхъ, когда T_i близко одному изъ періодовъ T_c' или T_c''. Необходимо такъ подобрать упругія связи и моменты инерціи, чтобы для каждой гармонической i не произошло явленія резонанса. Замѣтимъ далѣе, что $T_c' < T_c''$, и обратимся къ *чер. 34.* Когда T_i больше T_c'', то интересующая насъ величина u_i будетъ больше единицы, такъ какъ оба множителя въ знаменателѣ будутъ правильныя дроби; въ этомъ случаѣ упругая связь ухудшаетъ равномѣрность вращенія машины. Когда T_i меньше 1,41 T_c'', то оба множителя въ знаменателѣ будутъ больше единицы, а дробь меньше единицы—въ этомъ случаѣ упругая связь улучшаетъ равномѣрность вращенія машины. Наконецъ, когда $T_c' < T_i < T_c''$, возможно ухудшеніе и улучшеніе равномѣрности. Итакъ, равномѣрность вращенія третьей массы легко улучшить соотвѣтственнымъ выборомъ упругой связи. Перейдемъ теперь къ анализу величинъ e_i и f_i, опредѣляющихъ неравномѣрность вращенія второй массы.

Все сказанное только что относительно знаменателя второй дроби величинъ g_i и h_i въ полной мѣрѣ приложимо и къ знаменателю второй дроби величинъ e_i и f_i. Послѣ сокращенія на n^4 будемъ имѣть

$$w_i = \frac{1 - i^2\omega_0^2\,\frac{J_3}{p_{23}}}{\left(1 - \frac{T_c'^2}{T_i^2}\right)\left(1 - \frac{T_c''^2}{T_i^2}\right)}\,;$$

но числитель этой дроби равенъ не единицѣ, какъ въ u_i, а

$$1 - \frac{i^2\,\omega_0^2}{\frac{p_{23}}{J_3}} = 1 - y^2 = 1 - \frac{\tau_3^2}{T_i^2}\,;\;\; \tau_3 = 2\pi\sqrt{\frac{J_3}{p_{23}}}$$

Мы встрѣчаемся здѣсь, такимъ образомъ, съ тѣмъ же явленіемъ, какое было кратко изслѣдовано въ n. 57. Если выбрать $p_{23} = J_3\, i^2{}_0\omega^2$, то можно совершенно уничтожить одну гармоническую номера i, такъ какъ при такомъ выборѣ $y^2 = 1$ и числитель обращается въ нуль. Если y^2 не болѣе двухъ, то числитель все-таки будетъ правильной дробью и дастъ улучшеніе равномѣрности. Если-же $y^2 > 2$, то числитель будетъ больше единицы и будетъ вызывать ухудшеніе равномѣрности вращенія второй массы.

Легко видѣть, что τ_3 есть періодъ свободнаго колебанія третьей массы въ томъ случаѣ, когда вторая масса закрѣплена неподвижно. Точно также нетрудно найти реальное значеніе числителя второй дроби въ формулѣ для c_i, которому можно придать видъ:

$$\frac{J_2 J_3}{p_{12}p_{23}}\left[\, i^4\,\omega_0{}^4 - i^2\,\omega_0{}^2\,\left(\frac{p_{12}}{J_2}+\frac{p_{23}}{J_2}+\frac{p_{23}}{J_3}\right)+\frac{p_{12}p_{23}}{J_2 J_3}\right].$$

Вообразимъ, что первая масса закрѣплена неподвижно, а второй и третьей сообщены произвольные начальные углы поворота; предоставимъ затѣмъ ихъ дѣйствію силъ упругости вала и найдемъ тѣ колебанія, которыя онѣ будутъ совершать. Раздѣляя перемѣнныя совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій:

$$J_2\,\frac{d^2\,\varphi_2}{dt^2} = -p_{12}\,\varphi_2 + p_{23}\,(\varphi_3 - \varphi_2)\,;\quad J_3\,\frac{d^2\,\varphi_3}{dt^2} = p_{23}\,(\varphi_2 - \varphi_3)\,,$$

получимъ два тождественныхъ уравненія вида:

$$\frac{d^4\,\varphi}{dt^4} + \frac{d^4\,\varphi}{dt^2}\left(\frac{p_{12}}{J_2}+\frac{p_{23}}{J_2}+\frac{p_{23}}{J_3}\right)+\frac{p_{12}p_{23}}{J_2 J_3}\,\varphi = 0.$$

Если обозначить частоты колебаній буквами z_1 и z_2, а періоды τ_1 и τ_2, то изъ характеристическаго уравненія: $z^4 - 2k_1{}^2\,z^2 + n_1{}^4 = 0$, гдѣ

$$2k_1{}^2 = \frac{p_{12}+p_{23}}{J_2}+\frac{p_{23}}{J_3}\,;\quad n_1{}^4 = \frac{p_{12}\,p_{23}}{J_2\,J_3}\,,$$

находимъ

$$z_1 = \sqrt{k_1{}^2 + \sqrt{k_1{}^4 - n_1{}^4}}\,;\quad z_2 = \sqrt{k_1{}^2 - \sqrt{k_1{}^4 - n_1{}^4}}\,;$$

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{z_1}\,;\ \tau_2 = \frac{2\pi}{z_2}\,.$$

Поэтому интересующій насъ числитель можемъ написать такъ:

$$\frac{J_2 J_3}{p_{12} p_{23}} \left(i^2 \omega_0^2 - z_1^2 \right) \left(i^2 \omega_0^2 - z_2^2 \right) = \left(1 - \frac{z_1^2}{T_i^2} \right) \left(1 - \frac{z_2^2}{T_i^2} \right),$$

такъ какъ $z_1^2 \, z_2^2 = n_1^4$. Слѣдовательно и движенiе первой массы можетъ быть также легко изслѣдовано, если понадобится.

59. Примѣръ. Въ 1910 году вблизи Петрограда была построена электрическая станцiя, состоящая изъ четырехцилиндроваго четырехгактнаго двигателя внутренняго сгоранiя въ 160 лош. с. при 187 об./мин.; на валу двигателя было заклинено одно маховое колесо, одна динамомашина перемѣннаго тока и небольшая возбудительная динамомашина. Согласно элементарному расчету одно только маховое колесо обезпечивало двигателю коефицiентъ неравномѣрности $\delta = 0{,}004$. Однако при пробномъ испытанiи машинъ было обнаружено очень непрiятное быстрое миганiе какъ фонарей, такъ и лампъ накаливанiя. Изслѣдованiе динамо доказало полную ея исправность. Тахометрическое-же изслѣдованiе машины, произведенное при помощи тахографовъ Хорна, показало слѣдующее: вблизи динамомашины коефицiентъ неравномѣрности вала, вмѣсто ожидавшагося 0,004, оказался равнымъ 0,1, а вблизи маховика около 0,04 т. е. въ 10—20 разъ больше того, который долженъ былъ имѣть мѣсто согласно элементарной теорiи. Такимъ образомъ, несомнѣнной причиной миганiя лампъ оказывалось очень неравномѣрное вращенiе динамомашины перемѣннаго тока, вызванное вынужденными крутильными колебанiями вала. Тахометрическое изслѣдованiе, произведенное затѣмъ при различныхъ среднихъ числахъ оборотовъ двигателя указало, что 188,6 об./мин. есть критическое число оборотовъ машины,—такъ какъ при этой скорости неравномѣрность наибольшая, т. е. имѣетъ мѣсто резонансъ; такъ какъ въ теченiе одного оборота было четыре волнообразныхъ измѣненiя скорости, то это было четвертое критическое число оборотовъ.

Для того, чтобы теоретически изслѣдовать этотъ интересный случай, надо было бы имѣть точныя данныя относительно моментовъ инерцiи всѣхъ машинъ, заклиненныхъ на валу. Такiя точныя данныя могли бы быть получены только опытнымъ путемъ; надо было-бы привести во вращенiе отдѣльно каждое колесо, посредствомъ особаго груза, повторнымъ опытомъ исключить силу тренiя въ подшипникахъ, и по времени, въ теченiе котораго грузъ проходитъ опредѣленный путь, и вѣсу груза вычислить моментъ инерцiи колесъ. Эти опыты не были произведены, и тѣ данныя, которыя приводятся ниже, представляютъ изъ себя произвольныя расчетныя величины.

Прежде всего надо опредѣлить длину эквивалентнаго цилиндрическаго вала, такъ какъ дiаметръ вала между маховикомъ и динамомашинами мѣняется отъ 250 до 140 мм. Возьмемъ дiаметръ эквивалентнаго вала равнымъ $d_0 = 150$ мм. и найдемъ пересчетомъ длинъ отдѣльныхъ участковъ длину эквивалентнаго вала между маховикомъ и динамомашиной перемѣннаго тока $l = 1765$ мм., а между динамо перемѣннаго и постояннаго тока $= 520$ мм. Принявъ модуль упругости сдвига равнымъ 850000 кг./кв. см., найдемъ $p_{12} = 23900$ кг. м.; $p_{23} = 81100$ кг. м.

Для маховаго колеса расчетная величина $GD^2 = 25000$ кг. м.^{2}, дѣля эту величину на четыре и на ускореніе силы тяжести, найдемъ приблизительное значеніе момента инерціи маховика $J_1 = 638$ кг. м. сек.^{2} Для динамомашины перемѣннаго тока можно взять приблизительно $GD^2 = 20000$ кг. м.^{2}, откуда находимъ $J_2 = 510$ кг. м. сек.^{2} Наконецъ для возбудителя возьмемъ приближенно $J_3 = 13$ кг. м. сек.^{2} По формуламъ (стр. 170 и сл.) находимъ сначала $n^4 = 332000$ сек.$^{-4}$, затѣмъ $2k^2 = 6482$ сек.$^{-2}$. Отсюда находимъ $k^4 = 10\,504\,090$ сек.$^{-4}$. Вычитаемъ n^4 и извлекаемъ квадратный корень, получимъ 3158 сек.$^{-2}$; складывая съ $k^2 = = 3241$ сек.$^{-2}$ и вычитая изъ него, извлекаемъ изъ результатовъ квадратный корень, получимъ $x_1 = 79{,}9$ сек.$^{-1}$; $x_2 = 9{,}11$ сек.$^{-1}$, откуда $T_c' = 0{,}0786$ сек.; $T_c'' = 0{,}69$ сек.

Такъ какъ насъ интересуетъ главнымъ образомъ движеніе динамомашинъ, то находимъ еще (стр. 173) періодъ $\tau_3 = 0{,}0796$ сек. Такимъ образомъ нами найдено все, необходимое для вычисленія амплитудъ или, вѣрнѣе, множителей, характеризующихъ вліяніе упругости приводнаго вала; для опредѣленія неравномѣрности вращенія возбудителя вычислимъ значенія u_i, а для динамомашины перемѣннаго тока значенія w_i для первыхъ шести гармоническихъ ($i = 1, 2, \ldots 6$)

Прежде всего вычислимъ значенія T_i для 187 об./мин., найдемъ: $T_1 = 0{,}321$; $T_2 = 0{,}1605$; $T_3 = 0{,}107$; $T_4 = 0{,}080$; $T_5 = 0{,}064$; $T_6 = 0{,}054$ сек. Отсюда видимъ, что періоды вынужденныхъ и свободныхъ колебаній такъ расположены, что возможно и ухудшеніе, и улучшеніе равномѣрности вращенія; можно ожидать, что четвертая гармоническая будетъ значительно увеличена вслѣдствіе близости T_4 къ T_c' (разница періодовъ менѣе 2%). Однако съ другой стороны и числитель будетъ также очень малъ, такъ какъ τ_3 тоже близко T_4. Кромѣ того второй множитель въ знаменателѣ великъ (отъ —3,6 до—162); поэтому при выбранныхъ значеніяхъ близость къ резонансу мало отразится на амплитудѣ колебаній. Вычисленіе дастъ слѣдующія значенія u: —0,265;—0,076; —0,054;—0,391;—0,018;—0,006. Для w:—0,248;—0,0574;—0,0242;—0,0047; +0,0097;+0,007. Такимъ образомъ ясно, что выбранныя нами основныя величины не соотвѣтствуютъ дѣйствительности.

Если варіировать въ небольшихъ предѣлахъ эти величины, то обнаружится слѣдующее: небольшія измѣненія величинъ p_{12}, J_1 и J_2 вызываютъ не особенно значительныя измѣненія періодовъ свободныхъ колебаній; измѣненія же p_{23} и J_3 влекутъ за собой очень ощутительныя измѣненія всѣхъ трехъ періодовъ.

Не приводя здѣсь этихъ вполнѣ произвольныхъ комбинацій, разсмотримъ *мѣры борьбы съ резонансомъ*. При расчетѣ машины можно предусмотрѣть всѣ явленія и подобрать соотношенія отдѣльныхъ элементовъ такимъ образомъ, чтобы машина вращалась съ требуемой степенью равномѣрности. Но когда машина уже построена, то значительныя измѣненія всѣхъ величинъ будутъ стоить дорого. Такъ, напр., въ описываемой установкѣ были произведены слѣдующія измѣненія: 1) маховое колесо было замѣнено новымъ болѣе тяжелымъ съ почти вдвое большимъ моментомъ инерціи $J_1 = 1020$ кг. м. сек.^{2} 2) къ ротору динамомашины были привинчены два тяжелыхъ чугунныхъ кольца почти по 1 тоннѣ вѣсомъ. Когда это не помогло, то пришлось 3) сломать и передѣлать фундаментъ и укоротить валъ, уничтоживши одинъ подшипникъ и устроивъ свертную муфту внутри втулки махового колеса. Въ результатѣ получился убытокъ около 10000 рублей, и установка стояла, не работая цѣлый годъ. Перечисленныя мѣры ясно показываютъ безпомощность инженеровъ-конструкторовъ, предпринимавшихъ очень дорогія передѣлки въ слѣпую, безъ всякаго плана, на удачу. Такъ, напр., для насъ ясно, что утяжеленіе колесъ и укороченіе вала суть мѣры, взаимно уничтожающія другъ друга, такъ какъ при этомъ увеличивается и числитель, и знаменатель дробей, опредѣляющихъ $2k^2$ и n^4; возможны такія увеличенія, при которыхъ періоды нисколько не измѣнятся; кромѣ того это чрезвычайно дорогія мѣры, осуществленіе которыхъ требуетъ много времени.

Что можно было бы рекомендовать для этой установки? Прежде всего можно было бы не прерывать работы станціи и имѣть достаточно равномѣрное вращеніе динамомашинъ, если бы на время просто снять маховое колесо; если одинъ маховикъ обезпечивалъ двигателю коефиціентъ неравномѣрности $\delta = 0{,}004$, то по своему моменту инерціи одна динамомашина обезпечивала ему $\delta = 0{,}005$, т. е. $^1/_{200}$, что вполнѣ достаточно. Послѣ этого надо было бы попытаться измѣненіемъ p_{23} или J_3 достигнуть еще болѣе равномѣрнаго вращенія уже всего аггрегата (съ надѣтымъ маховикомъ); проще и дешевле всего измѣнять J_3 прикрѣпленіемъ небольшихъ и слѣдовательно дешевыхъ маховиковъ вблизи возбудительной динамомашины. Можно было бы также измѣнять и J_1 и J_2, но отнюдь не въ сторону увеличенія, стоющаго дорого, а въ сторону уменьшенія одного изъ нихъ стачиваніемъ, напр., боковыхъ поверхностей колеса динамомашины перемѣннаго тока. Само собою разумѣется, правильнѣе всего каждое предпринимаемое измѣненіе дѣлать сознательно, продѣлавши необходимые подсчеты періодовъ и множителей u_i и w_i.

Заклиниваніе небольшого добавочнаго маховика на валу, все равно гдѣ, вблизи ли возбудителя, или между маховикомъ и машиной перемѣннаго тока, даетъ возможность исправить каждую установку, однако необходимо отмѣтить, что сознательное пользованіе этой мѣрой требуетъ особаго теоретическаго изслѣдованія, такъ какъ мы имѣли бы не три, а четыре массы, связанныя упруго. Кромѣ того необходимо имѣть въ виду, что какъ ни мала постоянная доля приведеннаго вѣса возвратно-движущихся массъ, все-таки она существуетъ, и поэтому болѣе правильно каждый кривошипъ и каждое колѣно двигателя представлять себѣ въ видѣ колеса, радіусъ инерціи котораго равенъ радіусу кривошипа и масса котораго равна постоянной долѣ приведеннаго вѣса возвратно-движущихся массъ. Такимъ образомъ мы должны изучить неравномѣрность вращенія многихъ массъ, связанныхъ другъ съ другомъ упруго.

60. Нѣсколько массъ, связанныхъ упруго. Пусть J_1, J_2 . . . J_{n-1}, J_n суть моменты инерціи n колесъ или массъ, заклиненныхъ на нашемъ эквивалентномъ валу; φ_1 . . . φ_n, ω_1 . . . ω_n суть мгновенные углы поворотовъ и мгновенныя угловыя скорости этихъ колесъ. Степени жесткости вала между двумя смежными колесами обозначимъ буквами p_{12}, p_{23} . . . $p_{n-1,n}$. Пусть P_1r, P_2r . . . P_nr суть моменты силъ, приложенныхъ къ каждому изъ колесъ, причемъ движущія силы даютъ положительный моментъ, сопротивленія—отрицательный. Силы, дѣйствующія періодически, или мгновенныя ихъ работы надо представить въ видѣ ряда Фурье по аргументамъ $i\omega_0 t$.

Тогда движеніе будетъ опредѣляться системою n совокупныхъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ постоянными коефиціентами:

$$J_1 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = p_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) + P_1 r$$

$$J_2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = p_{23}(\varphi_3 - \varphi_2) + p_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + P_2 r$$

. . . .

$$J_n \frac{d^2\varphi_n}{dt^2} = p_{n-1,n}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) + P_n r.$$

и начальными данными, которыя мы не будемъ приводить, такъ какъ насъ интересуютъ только вынужденныя измѣненія угловой скорости.

Чтобы имѣть уравненія, опредѣляющія измѣненія угловой скорости, а не угловъ поворота, продифференцируемъ каждое уравненіе одинъ разъ по времени, получимъ:

$$J_1 \frac{d^2\omega_1}{dt^3} - p_{12}\omega_2 + p_{12}\omega_1 = r\frac{dP_1}{dt}$$

$$J_2 \frac{d^2\omega_2}{dt^2} - p_{12}\omega_1 + (p_{12} + p_{23})\omega_2 - p_{23}\omega_3 = r\frac{dP_2}{dt}$$

. . . .

$$J_n \frac{d^2 \omega_n}{dt^2} - p_{n-1,n}\,\omega_{n-1} + p_{n-1,n}\,\omega_n = r\frac{dP_n}{dt} =$$

Для изслѣдованія движенія необходимо прежде всего раздѣлить перемѣнныя; методъ послѣдовательной подстановки и дифференцированія даетъ быстрый результатъ только для опредѣленія движенія перваго и послѣдняго колеса. Въ общемъ же случаѣ, когда насъ интересуетъ движеніе каждаго изъ колесъ, раздѣленіе перемѣнныхъ длинно и сложно. Чтобы не затрудняться выборомъ хода операцій раздѣленія перемѣнныхъ, опишемъ чрезвычайно удобный символическій методъ [1]) раздѣленія перемѣнныхъ, сводящій всю задачу къ рѣшенію системы алгебраическихъ уравненій.

Обозначимъ m-ую производную зависимой перемѣнной ω символомъ:

$$\frac{d^m \omega}{dt^m} = \delta^m \,.\, \omega\,,$$

который будемъ читать такъ: δ въ m-ой степени, умноженное на ω. Отрицательную степень δ будемъ представлять себѣ, какъ интегралъ, взятый столько разъ, сколько отрицательныхъ единицъ въ показателѣ степени, отъ той перемѣнной, на которую умножено δ. Замѣняя въ нашихъ дифференціальныхъ уравненіяхъ производныя символами, получимъ символъ системы совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій:

$$
\begin{aligned}
&(J_1\delta^2 + p_{12})\,\omega_1 - p_{12}\,\omega_2 = r\delta P_1\\
&-p_{12}\,\omega_1 + (J_2\delta^2 + p_{12} + p_{23})\,\omega_2 - p_{23}\,\omega_3 = r\delta P_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-p_{k-1,k}\,\omega_{k-1} + (J_k\delta^2 + p_{k-1,k} + p_{k,k+1})\,\omega_k - p_{k,k+1}\,\omega_{k+1} = r\delta P_k\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-p_{n-1,n}\,\omega_{n-1} + (J_n\delta^2 + p_{n-1,n})\,\omega_n = r\delta P_n
\end{aligned}
$$

Пока будемъ производить операцію раздѣленія, будемъ считать эти уравненія алгебраическими отъ неизвѣстныхъ перемѣнныхъ величинъ $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$, самое же раздѣленіе перемѣнныхъ сведемъ къ опредѣленію неизвѣстныхъ $\omega_1 \ldots \omega_n$ изъ написанной системы линейныхъ алгебраическихъ уравненій.

---

[1]) Forsyth. Treatise on differential equations, Лондонъ, 1903.

Проф. Крыловъ, А. Н. О нѣкоторыхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ математической физики, имѣющихъ приложенія въ техническихъ вопросахъ. СПБ. 1913, стр. 22 и слѣд.

Въ случаѣ, если массъ не особенно много, рѣшеніе этихъ алгебраическихъ уравненій не представляетъ затрудненій; когда же число массъ значительно, наиболѣе удобный общій способъ рѣшенія ихъ дадутъ опредѣлители. Для сокращенія письма обозначимъ коефиціенты при неизвѣстныхъ ω какой-нибудь буквой, напр., a съ двойными значками и перепишемъ общій членъ нашего уравненія такъ:

$$a_{k,\,k-1}\,\omega_{k-1} + a_{k,\,k}\,\omega_k + a_{k,\,k+1}\,\omega_{k+1} = r\delta P_k\,,$$

причемъ $a_{k,k}$ содержитъ δ^2, а два другихъ коефиціента каждаго уравненія—отрицательныя постоянныя. Рѣшая полученныя n уравненій относительно каждой неизвѣстной ω_k, получимъ n уравненій вида:

$$D\,.\,\omega_k = D_k\,,$$

гдѣ D обозначаетъ опредѣлитель, составленный изъ коефиціентовъ a, а D_k — тотъ же опредѣлитель, но въ которомъ вертикальный столбецъ номера k сверху до низу замѣненъ правыми частями нашихъ уравненій $r\delta P_k$. Именно:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & 0\;, & 0\;, & \ldots \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & 0\;, & \ldots \\ 0\;, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34}, & \ldots \\ 0\;, & 0\;, & a_{43}, & a_{44}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix};$$

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & 0\;, & \ldots, & r\delta P_1, & \ldots \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \ldots, & r\delta P_2, & \ldots \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & r\delta P_i, & \ldots \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & a_{k,\,k-1}, & r\delta P_k, & a_{k,\,k+1}, \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Когда оба опредѣлителя будутъ развернуты въ строку, расположены по степенямъ δ и почленно умножены на ω_k, мы расшифруемъ символъ δ, замѣнивъ его соотвѣтственной производной, и получимъ въ лѣвой части линейное дифференціальное уравненіе отъ перемѣнной ω_k, а въ правой части—послѣдній членъ, содержащій производныя величинъ P_k.

Легко прежде всего заключить, разсматривая видъ опредѣлителя D, что полученное дифференціальное уравненіе будетъ порядка $2n$ и будетъ содержать только четныя производныя. Опредѣлитель D_k будетъ содержать δ въ степени не выше $2n-1$, такъ, что производныя отъ P_k будутъ порядка не выше $2n-1$; если вмѣсто P_k подставить мгновенную работу L_k силъ, дѣйствующихъ на соотвѣтственное колесо, то правая часть будетъ содержать производную отъ L_k порядка $2n$.

Такимъ образомъ, вопросъ сводится къ интегрированію линейнаго дифференціальнаго уравненія порядка $2n$ съ послѣднимъ членомъ.

Подобно тому, какъ это было сдѣлано въ предыдущихъ параграфахъ, мы изслѣдуемъ сначала свободныя колебанія системы, опредѣляемыя дифференціальнымъ уравненіемъ, символическаго вида

$$D \,.\, \omega = 0\,.$$

Эти уравненія будутъ тождественны для всѣхъ ω, поэтому можемъ написать ω безъ значка и искать рѣшеніе въ видѣ $\omega = A\cos(xt + \alpha)$. Подставляя это рѣшеніе въ дифференціальное уравненіе, получимъ характеристическое уравненіе, вообще говоря, степени $2n$. Если наинизшая степень δ въ опредѣлителѣ D, по его развертываніи и приведеніи будетъ δ^2 (а не δ^0), то двукратнымъ умноженіемъ на dt и интегрированіемъ можно уменьшить степень характеристическаго уравненія до $2n - 2$, (какъ это было сдѣлано въ предыдущихъ параграфахъ для $n = 2$ и $n = 3$).

Такъ какъ $\delta^2 \,.\, \omega = -x^2 \,.\, \omega$; $\delta^4 \,.\, \omega = + x^4 \,.\, \omega$ и т. д., то характеристическое уравненіе легко можетъ быть написано безъ написанія дифференціальнаго уравненія; для этого развертываемъ опредѣлитель, группируемъ его члены по степенямъ δ^2; если послѣ приведенія члены, не содержащіе δ^2 взаимно уничтожаются, то умножаемъ обѣ части уравненія на δ^{-2} (интегрируемъ дважды по времени) и понижаемъ такимъ образомъ порядокъ уравненія; затѣмъ замѣняемъ δ^{2k} на $+x^{2k}$, если k четное, и на $-x^{2k}$, если k нечетное, получаемъ характеристическое уравненіе для опредѣленія частотъ свободныхъ колебаній $x_1, x_2, \ldots$ Зная частоты, находимъ періоды свободныхъ колебаній системы T_c', T_c'', ... Амплитуда свободныхъ колебаній насъ не интересуетъ.

Затѣмъ приступаемъ къ изслѣдованію вынужденныхъ колебаній системы, которыя будемъ искать въ видѣ гармоническаго ряда

$$\omega_k = \omega_0 \left[1 + \Sigma\, c_{ki} \cos \omega_0 it + \Sigma\, d_{ki} \sin \omega_0 it\right],$$

гдѣ c_{ki} и d_{ki} неизвѣстныя пока амплитуды, для опредѣленія которыхъ подставляемъ вышенаписанный рядъ въ дифференціальное уравненіе

$$D \,.\, \omega_k = D_k\,.$$

Въ правой части этого уравненія пусть будетъ гармоническій рядъ расположенный также по аргументамъ кратнымъ $\omega_0 t$. Для опредѣленія амплитудъ c_{ki} и d_{ki} гармонической номера i, выдѣлимъ изъ правой части члены, содержащіе $\cos \omega_0 it$ и подставимъ въ лѣвую часть вмѣсто ω_k величину $c_{ki} \cos \omega_0 it$, получимъ по сокращеніи обѣихъ частей на $\cos \omega_0 it$ уравненіе, опредѣляющее c_{ki}. Такимъ же образомъ опредѣлимъ и d_{ki}.

Замѣтимъ при этомъ, что такъ какъ $\delta^2 \,.\, c_{ki} \cos \omega_0 it = - c_{ki}\, \omega_0^2\, i^2 \cos \omega_0 it$, а $\delta^4 \,.\, c_{ki} \cos \omega_0 it = + \omega_0^4\, i^4 c_{ki} \cos \omega_0 it$ и т. д., то въ лѣвой части множитель при $c_{\kappa l}$ будетъ тождественъ характеристическому уравненію, съ той только разницей, что вмѣсто x^2 будетъ стоять $\omega_0^2 i^2$. Это чрезвычайно важно, такъ какъ намъ теперь легко будетъ опредѣлить всѣ случаи, когда множитель при $c_{\kappa l}$ равенъ нулю, т. е. случаи резонанса. Только тогда, когда какая-либо частота $x_\kappa = \omega_0 i$ или періодъ свободнаго колебанія $T_c = T_l$, величина c_{kl} и d_{kl} будетъ съ теченіемъ времени безпредѣльно увеличиваться и дастъ очень неравномѣрное вращеніе соотвѣтствующаго колеса.

Выполнивъ тѣ же преобразованія, какія были произведены на стр. 172, можемъ представить множитель при c_{kl} и d_{kl} въ видѣ произведенія двучленовъ:

$$\left(1 - \frac{T_c'^2}{T_l^2}\right)\left(1 - \frac{T_c''^2}{T_l^2}\right) \text{ и т. д.}$$

Точно также и правую часть можно представить въ видѣ суммы членовъ, каждый изъ которыхъ представляетъ собою произведеніе двучленовъ вида

$$\left(1 - \frac{\tau_1^2}{T_l^2}\right)\left(1 - \frac{\tau_2^2}{T_l^2}\right) \text{ и т. д.,}$$

гдѣ τ_1, τ_2 и т. д. періоды свободныхъ колебаній той же системы, но въ случаѣ, когда одно изъ колесъ неподвижно.

Точное доказательство возможности такого преобразованія правой части можетъ быть выведено изъ анализа опредѣлителя D_κ. Въ самомъ дѣлѣ, при его развертываніи мы можемъ представить D_κ, какъ сумму произведеній членовъ k-аго столбца на соотвѣтственныя миноры:

$$D_\kappa = D_{\kappa 1} \,.\, r\delta P_1 + D_{\kappa 2} \,.\, r\delta P_2 + \ldots .$$

Приравнивая каждое изъ вышенаписанныхъ слагаемыхъ нулю и опредѣляя тѣ значенія $\omega_0^2 i^2$, при которыхъ это слагаемое обращается въ нуль, мы получимъ возможность сдѣлать для каждаго слагаемаго тѣ преобразованія, которыя были изложены на стр. 174, ибо минора $D_{\kappa l}$ будетъ функціей $2n - 2$ степени отъ δ^2; при умноженіи на P_l, т. е. написаніи производныхъ члена $a_{li} \sin i\omega_0 t + b_{li} \cos i\omega_0 t$ мы получимъ множители $i^{2k} \omega_0^{2k}$.

Послѣ этого ужъ не составитъ большихъ затрудненій вычисленіе амплитудъ ряда угловой скорости, мѣры неравномѣрности и коефиціента неравномѣрности.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

Приборы для измѣренія періодической неравномѣрности вращенія машинъ.

61. Тахографы. Точное измѣреніе дѣйствительной неравномѣрности вращенія машинъ надо считать однимъ изъ самыхъ трудныхъ техническихъ измѣреній по двумъ причинамъ: 1) измѣненія угловой скорости малы, 2) протекаютъ чрезвычайно быстро. Такъ напр., если паровая машина дѣлаетъ 120 об./мин., то каждыя полъ секунды угловая скорость будетъ два раза увеличиваться и уменьшаться. Если коефиціентъ неравномѣрности равенъ 0,01, и мы желаемъ измѣрить его съ относительной точностью въ одинъ процентъ, то степень чувствительности прибора, измѣряющаго мгновенную угловую скорость, должна быть равна 0,0001 т. е. головокружительна. Даже при степени точности въ 10% мы должны имѣть очень высокую чувствительность въ 0,001.

Вотъ почему современная техника до сихъ поръ не обладаетъ вполнѣ удовлетворительнымъ заводскимъ приборомъ для изслѣдованія періодической неравномѣрности вращенія машинъ, а лишь болѣе или менѣе сложными и болѣе или менѣе дорогими лабораторными методами.

Цѣль настоящаго прибавленія будетъ сводиться къ критическому описанію нѣкоторыхъ методовъ, не вполнѣ исчерпывающему всего имѣющагося матеріала и не углубляющемуся въ спеціальныя изслѣдованія. Мы скажемъ лишь нѣсколько словъ объ измѣреніи коефиціента неравномѣрности посредствомъ камертона, тахографа Хорна и нѣскольких электрическихъ приборовъ. Объ остальныхъ упомянемъ лишь вскользь.

Первый приборъ для измѣренія коефиціента неравномѣрности, литературные слѣды котораго намъ удалось разыскать, принадлежитъ проф. Хартигу [1]; ремень или фрикціонный катокъ приводитъ во вращеніе шкивъ прибора и коническое зубчатое колесо, сцѣпляющееся съ дифференціаломъ, т. е. двумя тождественными коническими зубчатками, оси которыхъ укрѣплены въ небольшомъ маховомъ колесѣ; эти двѣ зубчатки въ свою очередь сцѣпляются съ четвертой конической зубчаткой, прикрѣпленной къ витой пружинѣ, второй конецъ которой закрѣпленъ неподвижно.

Приборъ этотъ не получилъ распространенія; динамическое его изслѣдованіе, которое безъ труда можетъ быть сдѣлано самостоятельно

[1]) Rosenkranz. Instrument zur Messung des Ungleichförmigkeitsgrades von Dampfmaschinen und Transmiossionen von Prof. Hartig in Dresden, Z. d. V. d. J. 1867 г. стр. 69—74.

каждымъ, усвоившимъ содержаніе этой книги (особенно главу VII), показываетъ, что повороты четвертой зубчатки зависятъ отъ соотношенія между моментами инерціи маховичка и зубчатокъ, а также отъ соотношенія между періодомъ свободнаго колебанія маховичка (при неподвижной первой зубчаткѣ) и періодомъ измѣненій угловой скорости машины. При очень мягкой пружинѣ и быстроходной машинѣ приборъ можетъ давать нѣкоторые результаты, но надо имѣть въ виду, что онъ будетъ записывать не измѣненія угловой скорости, а кривую разстояній данной машины по отношенію къ средѣ, равномѣрно-вращающейся съ среднею угловой скоростью данной машины.

Къ этой-же категоріи приборовъ, могущихъ записать лишь кривую угловъ опереженія и запаздыванія машины по отношенію къ средѣ, вращающейся равномѣрно, надо отнести и *стробоскопическіе приборы* [1]), однако достаточно взглянуть на отвратительные фотографическіе снимки, приложенные къ статьѣ Вагнера, чтобы потерять всякій интересъ къ этому методу, съ одной стороны сложному и кропотливому, съ другой,— требующему хорошей фотографической техники. Само собой разумѣется, стробоскопическій методъ также не получилъ распространенія.

Переходнымъ методомъ къ приборамъ, записывающимъ измѣненія угловой скорости, надо считать *методъ камертона*, несмотря на кропотливость, дающій удовлетворительные результаты [2]).

---

[1]) Cornu, Méthode optique, permettant de déterminer la loi de variation périodique de la vittesse d'un mobile en rotation. Bulletins de la Société internationale des electriciens. 1901 стр. 519—529.

Wagner, Apparat zur strobographischen Aufzeichnung von Pendeldiagrammen. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete Ingenieurwesens. № 33 стр. 1—29.

[2]) Идея примѣненія камертона для опредѣленія коефиціента неравномѣрности принадлежить, согласно литературнымъ розыскамъ, Ransom, The cyclical velocity-variations of steam and other engines. Minutes of proceedings of the Institution of civil engineers. 1889 т. 98 стр. 357—368. Въ описанныхъ опытахъ примѣнялся камертонъ, дѣлающій 500 колебаній въ секунду. Опытъ производился такъ: подсчитывалось число волнъ, записанныхъ въ теченіе 1 оборота машины на закопченомъ цилиндрѣ, заклиненномъ на валу машины; салазки камертона перемѣщалися винтомъ вдоль оси цилиндра съ закопченой бумагой, что даетъ возможность изслѣдовать нѣсколько оборотовъ вала; по періоду камертона и радіусу цилиндра вычислялась средняя длина 10 волнъ, которая затѣмъ сравнивалась съ дѣйствительной длиной 10 волнъ, взятыхъ на различныхъ участкахъ. Улучшенный приборъ Ренсома описанъ въ журналѣ Engineering т. 53 за 1892 г. стр. 23. „Ransome's cyclometer". Въ немъ камертонъ приводится въ постоянныя колебанія электромагнитнымъ возбудителемъ. Частное отъ дѣленія разности наибольшей длины десяти волнъ и наименьшей на среднюю даетъ величину коефиціента неравномѣрности.

Камертономъ пользовались также Fränzel (Marine-Rundschau, 1897) Bauer (Jahrbuch der schiffbautechnischen Gesellschaft, 1900) при опредѣленіи измѣненій угла крученія судовыхъ валовъ.

См. также Göpel, Die Bestimmung des Ungleichförmigkeitsgrades rotirender Maschinen durch das Stimmgabelverfahren, Z. d. V. d. J. 1900 стр. 1359, 1431.

Наиболѣе употребительнымъ въ настоящее время приборомъ для измѣренія коефиціента неравномѣрности машинъ является тахографъ Хорна [1]), состоящій изъ валика, приводимаго во вращеніе изслѣдуемою машиною посредствомъ ремня или тесьмы; на концахъ перекладины, заклиненной на этомъ валикѣ, укрѣплены оси двухъ неравноплечихъ ломаныхъ рычаговъ, короткое плечо которыхъ несетъ небольшія гирьки (около 200 гр.), а длинное плечо сочленено шаровымъ шарниромъ съ стержнемъ, ось котораго совпадаетъ съ осью валика. Если передача отъ машины къ валику выбрана такъ, что средняя его угловая скорость соотвѣтствуетъ 500 об./мин., то центробѣжная сила гирекъ будетъ имѣть вполнѣ опредѣленную величину, которую легко уравновѣсить двумя витыми пружинами, стягивающими обѣ гирьки. Перемѣнная угловая скорость валика будетъ вызывать перемѣнныя центробѣжныя силы гирекъ, которыя начнутъ совершать колебательныя движенія относительно средняго равновѣснаго ихъ положенія. Эти колебанія передадутся ломанымъ рычагомъ стерженьку, на которомъ укрѣпленъ карандашъ, записывающій эти колебанія на равномѣрно движущейся бумажной лентѣ.

Читатель, изучившій п. п. 41—45 и 54 этой книги, конечно сейчасъ же замѣтитъ: для того, чтобы правильно опредѣлить изъ тахограммы дѣйствительныя измѣненія угловой скорости машины, необходимо продѣлать чрезвычайно сложный динамическій расчетъ, именно разложить кривую вынужденныхъ колебаній гирекъ въ рядъ Фурье и, по соотношенію періода собственнаго колебанія гирекъ при равномѣрномъ вращеніи тахогрофа съ неизмѣнной средней угловой скоростью и періодовъ раскачивающихъ силъ, вычислить амплитуды колебаній угловой скорости; переводный множитель будетъ при этомъ различнымъ для различныхъ гармоническихъ. На практикѣ, конечно, никто такихъ расчетовъ не дѣлалъ, и тутъ мы встрѣчаемся съ обычнымъ легкомысленнымъ пренебреженіемъ динамикою измѣрительныхъ приборовъ.

Какъ выяснилось при посѣщеніи двухъ заводовъ, изготовляющихъ тахографы, масштабъ относительныхъ измѣненій угловой скорости, напечатанный на бумажныхъ лентахъ тахографа, получается и провѣряется слѣдующимъ образомъ; давая валику точно 500 об./мин., отмѣчаютъ карандашомъ среднюю или нулевую линію ленты; затѣмъ измѣняютъ число оборотовъ валика на 3 или на 6% и дѣлятъ разстоянія между соотвѣтственными отмѣтками карандаша на число процентовъ измѣненія скорости. Этимъ масштабомъ, правильнымъ лишь при очень медленныхъ измѣненіяхъ угловой скорости (напр. при тѣхъ, которыя наблюдаются въ процессѣ регулированія центробѣжными регуляторами),

[1]) Небольшой чертежикъ этого прибора можно найти въ Z. d. V. d. J. 1912 г. стр. 220.

пользуются затѣмъ безъ всякихъ оговорокъ и при быстрыхъ періодическихъ измѣненіяхъ скорости. Подробное изслѣдованіе, которое мы не будемъ здѣсь приводить [1]), легко доказываетъ, что каждая пружина тахографа имѣетъ свой рядъ критическихъ скоростей, при которыхъ соотвѣтственная гармоническая ряда угловой скорости имѣетъ сильно преувеличенную амплитуду. Такъ, для трех-процентной пружины изслѣдованнаго нами тахографа завода Морелля приблизительныя величины критическихъ чиселъ оборотовъ въ минуту будутъ: 420; 210; 140; 105; 84 и т. д.; для шести-процентной и двѣнадцати-процентной пружинъ получимъ числа оборотовъ приблизительно въ 1,7 и въ 2,8 раза большія (Римъ нашелъ для 3% пруж. 447 об./мин.).

Такимъ образомъ, несомнѣнно, помимо погрѣшностей, вводимыхъ въ показанія прибора упругимъ ременнымъ приводомъ, мы почти всегда будетъ имѣть дѣло съ преувеличенными гармоническими высшихъ порядковъ. Поэтому къ показаніямъ тахографа надо относиться съ сугубой осторожностью и употреблять его только для сравнительныхъ изслѣдованій зависимости періодической неравномѣрности всегда при одной и той-же средней скорости машины. Результаты же изслѣдованій машинъ съ различными средними скоростями между собой не сравнимы.

Въ заключеніе лишь упомянемъ о совершенно безсмысленной идеѣ примѣнить резонансный счетчикъ оборотовъ Фрама для измѣренія періодической неравномѣрности машинъ. Этотъ счетчикъ состоитъ изъ большого числа тоненькихъ стальныхъ пластинокъ, собранныхъ на общей пластинѣ, такъ что получается видъ гребешка. Измѣняя длину пластинокъ и напаивая небольшія свинцовые грузики на концахъ, можно получить желательную закономѣрность измѣненія періода свободныхъ колебаній отдѣльныхъ пластинокъ. Если такой гребешокъ съ пластинками прикрѣпить къ фундаменту машины, вращающейся съ нѣкоторой неизмѣнной угловой скоростью, то вслѣдствіе неполнаго уравновѣшиванія частей машины фундаментъ будетъ совершать колебанія, хотя-бы и безконечно-малыя, неощутимыя. Періодъ этихъ колебаній будетъ равенъ періоду раскачивающей силы машины, т. е. продолжительности одного оборота. Тѣ пластинки, періодъ собственнаго колебанія которыхъ разнится отъ періода машины, останутся, какъ это явствуетъ изъ теоріи вынужденныхъ колебаній, неподвижными, вслѣдствіе малости колебаній фундамента, и только одна изъ нихъ, періодъ собственнаго колебанія которой равенъ или очень близокъ

[1]) Оно было доложено въ 18-омъ собраніи Научно-Механическаго Кружка Общества Технологовъ 12-го февраля 1913 г. Докладъ этотъ не напечатанъ потому, что въ концѣ того-же года появилась работа Рима, въ которой кратко освѣщенъ тотъ-же вопросъ (стр. 17 и 18 Mitt. über Forscharb. № 137).

періоду машины, будетъ сильно колебаться, вслѣдствіе резонанса. Стоитъ противъ каждой пластинки написать то число оборотовъ машины, при которомъ она резонируетъ, чтобы получить грубый счетчикъ оборотовъ. Грубый потому, что если угловая скорость машины возрастетъ или уменьшится напр. на 0,1 процента, то пластинка обыкновенно продолжаетъ колебаться. Совершенно безграмотно утвержденіе старыхъ рекламныхъ брошюръ нѣмецкаго завода Lux, что стоитъ набрать гребешокъ изъ пластинокъ, разность періодовъ которыхъ мала напр. 0,1 или 0,05 проц., и мы получимъ измѣритель неравномѣрности; всякому знакомому съ вынужденными колебаніями ясно, что всѣ пластинки, близкія къ резонансной, будутъ совершать вынужденныя колебанія, періодъ которыхъ будетъ равенъ продолжительности одного оборота машины, и лишь амплитуды этихъ колебаній будутъ различны: наибольшую амплитуду будетъ имѣть резонирующая пластинка, а сосѣднія съ ней будутъ колебаться съ тѣмъ меньшими амплитудами, чѣмъ больше разность между періодомъ собственнаго колебанія данной пластинки и продолжительностью одного оборота; число пластинокъ, колебанія которыхъ замѣтны нашему глазу, будетъ зависѣть при этомъ вовсе не отъ коефиціента неравномѣрности машины, а отъ амплитуды колебанія фундамента. На хорошо уравновѣшенной машинѣ, вращающейся хотя-бы и очень наравномѣрно, число замѣтно колеблющихся пластинокъ будетъ очень мало, а на неуравновѣшенной машинѣ, вращающейся хотя-бы и совершенно равномѣрно (напр. на плохомъ электродвигателѣ), число колеблющихся пластинокъ можетъ быть значительно. Этимъ и объясняется то обстоятельство, что въ теченіе 12 лѣтъ никто не опубликовалъ результатовъ опредѣленія коефиціента неравномѣрности вращенія машинъ этимъ приборомъ.

62. Электрическіе методы измѣренія неравномѣрности. Изъ сказаннаго въ предыдущемъ параграфѣ вполнѣ выяснено отсутствіе надежнаго и не кропотливаго способа измѣренія періодической неравномѣрности; этимъ объясняется не прекращающаяся работа изобрѣтателей. Поисками чувствительныхъ методовъ измѣренія мгновенной угловой скорости занялись также и электромеханики, которымъ приходится терпѣть значительныя непріятности отъ неравномѣрнаго вращенія генераторовъ постояннаго и перемѣннаго тока. Число предложенныхъ методовъ настолько значительно, что мы обойдемъ молчаніемъ ту группу ихъ, которая служитъ для измѣренія угловъ опереженія и отставанія машины по отношенію къ равномѣрно вращающейся системѣ, т. е. дающихъ кривую разстояній машины, и сосредоточимъ наше вниманіе на приборахъ, дающихъ возможность опредѣлить измѣненія угловой скорости, при чемъ въ хронологическомъ порядкѣ первымъ является ундографъ инж. Мадера [1]), уже знакомаго намъ по анализатору (стр. 77). Дѣйствіе его прибора основано на принципѣ электромагнитнаго тормоза, употребляемаго иногда взамѣнъ тормоза Прони. Если заставить постоянный магнитный потокъ какого-либо электромагнита пронизывать движущееся тѣло, то между электромагнитомъ и тѣломъ возникнутъ силы взаимодѣйствія, прямо пропорціональныя относительной скорости движенія этихъ системъ, и зависящія кромѣ того отъ числа магнитныхъ силовыхъ линій и магнитнаго сопротивленія. На этомъ давно извѣстномъ принципѣ основано дѣйствіе одного изъ довольно чувствительныхъ современныхъ тахометровъ [2]). Однако конструктивное осуществленіе этого принципа въ ундографѣ Мадера надо считать неудачнымъ; прежде всего методъ, примѣненный имъ, заключается въ отдѣльномъ измѣреніи амплитуды каждой гармонической, при чемъ измѣреніе требуетъ точнаго „настраиванія" прибора на резонансъ; ужъ одно это показываетъ, что приборъ этотъ никогда не будетъ примѣняться въ заводской практикѣ. Кромѣ того на показанія прибора вліяетъ треніе въ шарнирахъ и сопротивленіе воздуха, а также ловкость изслѣдователя, что дѣлаетъ приборъ чрезвычайно капризнымъ. Мы не будемъ подробно описывать тѣхъ разновидностей прибора, которыя были построены и испытаны настойчивымъ изобрѣтателемъ, а перейдемъ къ изложенію интересныхъ результатовъ произведенныхъ имъ опытовъ. Прежде всего былъ поставленъ и удачно разрѣшенъ по идеѣ мюнхенскаго профессора Лейнена (Lynen) вопросъ о провѣркѣ показаній тахографовъ вообще. Для этого изобрѣтатель воспользовался электродвигателемъ, приводящимъ въ движеніе болѣе или менѣе тяжелый маховичекъ, обезпечивающій вполнѣ равномѣрное вращательное движеніе. Это движеніе преобразуютъ кинематически въ неравномѣрное, законъ котораго извѣстенъ; проще всего пользоваться при этомъ шарниромъ Гука, неравномѣрность вращенія котораго опредѣляется угломъ между осями; можно также пользоваться двукривошипно-кулисснымъ механизмомъ (такъ наз. ускорительнымъ механизмомъ строгательныхъ станковъ). Провѣрка ундографа Мадера показала, что погрѣшность его показаній можетъ достигнуть отъ + 13 до — 100%, что ременный приводъ при большихъ неравномѣрностяхъ вращенія недопустимъ и что съ шарниромъ Гука работать труднѣе, чѣмъ съ двукривошипно-кулисснымъ механизмомъ, такъ какъ

---

[1]) Mader, Der Resonanz-Undograph, ein Mittel zur Messung der Winkel-Abweichung, Dinglers Polytechnisches Journal. 1909 т. 324 стр. 529—533, 549—553, 567—571, 581—583, 597—600. Хотя въ заглавіи приборъ названъ авторомъ измѣрителемъ угловыхъ отклоненій, но онъ можетъ служить и для измѣренія колебаній угловой скорости.

[2]) Hoffmann, Prüfung von Geschwindigkeitsmessern, Mitteilungen über Forschungsarbeiten, № 100 стр. 49—86.

труднѣе достигается точная установка. Несмотря на столь неудовлетворительные результаты, изобрѣтатель перешелъ къ изслѣдованію двухъ машинъ. Сначала былъ изслѣдованъ одноцилиндровый дизель-двигатель въ 35 лош. с. при 190 об./мин. Приведенные въ таблицѣ IV результаты измѣренія дугъ опереженія и отставанія показываютъ чрезвычайную грубость и ненадежность показаній прибора, поэтому нѣтъ смысла приводить здѣсь результаты изслѣдованія. Тѣмъ не менѣе авторъ приступилъ къ изслѣдованію равномѣрности вращенія мощнаго генератора перемѣннаго тока на 50 пер./сек. при 83,5 об./мин., приводимаго во вращеніе двухкривошипной паровой машиной тройного расширенія мощностью въ 1200 лош. с. Опыты производились при полной нагрузкѣ, половинной и холостомъ ходѣ машины, при чемъ для сравненія неравномѣрность вращенія измѣрялась также тахографомъ Хорна; для полной нагрузки были также построены теоретическія діаграммы измѣненій угловой скорости. Результаты измѣреній между собой не совпадаютъ; при полной нагрузкѣ тахографъ показалъ коефиціентъ неравномѣрности вдвое больше теоретическаго, а ундографъ въ 1,6 раза меньше теоретическаго; минимальная угловая скорость, показанная какъ тахографомъ, такъ и ундографомъ, сдвинута относительно теоретической впередъ на уголъ примѣрно на 120°. При половинной нагрузкѣ коеф. неравном., показанный тахографомъ въ 1,5 раза болѣе, показаннаго ундографомъ, а при холостомъ ходѣ, наоборотъ, показанія ундографа въ 2,2 раза выше, нежели показанія тахографа; фазы не совпадаютъ, расходясь на 75—90°. Авторъ приводитъ еще нѣсколько поразительныхъ явленій, напр. полное и внезапное исчезновеніе первой гармонической какъ на показаніяхъ ундографа, такъ и тахографа при измѣненіи нагрузки всего на 5 Амп. (съ 45 на 50); наоборотъ при приближеніи къ полной нагрузкѣ въ 100 Амп. внезапно уменьшается въ 4 раза вторая гармоническая. Авторъ объясняетъ всѣ эти явленія упругими колебаніями спицъ генератора (машина не имѣетъ отдѣльнаго маховика, роль котораго выполняется тяжелымъ генераторомъ); воздѣйствіе электрическаго тока было устранено тѣмъ, что генераторъ весь свой токъ отдавалъ синхронному преобразователю, питавшему батарею. Вслѣдствіе ненадежности и малочисленности произведенныхъ Мадеромъ испытаній невозможно дать серьезный отвѣтъ на поднятые имъ вопросы.

Гораздо удачнѣе рѣшена конструктивная задача Римомъ [1]), пользовавшимся тѣмъ же принципомъ электромагнитнаго тормоза, но придавшимъ вращательное движеніе не диску, какъ въ только что

---

[1]) Riehm, Ueber die experimentelle Bestimmung des Unglsichförmigkeitsgrades. Mitt. über Forsch. arb. № 137 стр. 1—32. или Z. d. V. d. J. 1913 стр. 1101—1108. См. также отчетъ о бесѣдахъ въ Вѣстникѣ Общества Технологовъ за 1913 г., томъ 20, стр. 891—892, гдѣ помѣщенъ чертежъ прибора и одна изъ діаграммъ.

разсмотрѣнномъ ундографѣ, а магнитамъ. Это на видъ не существенное измѣненіе дало прекрасные результаты, такъ какъ массу диска не трудно сдѣлать чрезвычайно малой и тѣмъ устранить необходимость измѣренія каждой гармонической отдѣльно. Къ плоскому диску, приводимому во вращеніе отъ изслѣдуемой машины фрикціоннымъ или ременнымъ приводомъ, прикрѣплены симметрично четыре цилиндрическихъ электромагнитныхъ катушки, оси которыхъ параллельны оси вращенія диска; къ свободному концу сердечника каждой катушки прикрѣпленъ желѣзный полюсный наконечникъ, а къ полому валику диска прикрѣпленъ желѣзный цилиндрикъ такъ, что между нимъ и наконечниками остается тонкое воздушное кольцевое пространство; благодаря чередованію сѣвернаго и южнаго полюсовъ электромагнитовъ, при замыканіи тока, подводимаго щеточками къ двумъ мѣднымъ кольцамъ, возникаетъ магнитный потокъ, идущій изъ вращающихся наконечниковъ черезъ воздушную прислойку въ вращающійся вмѣстѣ съ электромагнитами желѣзный цилиндрикъ и обратно въ сосѣдній полюсный наконечникъ. Если теперь въ воздушное кольцевое пространство помѣстить тоненькую алюминіевую цилиндрическую шапочку, то она будетъ увлекаться электромагнитами въ вращеніе съ силою, прямо пропорціональною мгновенной угловой скорости электромагнитовъ; стоитъ уравновѣсить эту силу сопротивленіемъ пружинки, чтобы получить уже упоминавшійся на стр. 269 электромагнитный тахометръ. Для того, чтобы онъ хорошо показывалъ быстро смѣняющіяся измѣненія угловой скорости электромагнитовъ, необходимо уменьшить вліяніе инерціи, возникающей при поворотахъ шапочки, до нуля; это достигается выборомъ размѣровъ и матеріала (алюминій) шапочки съ одной стороны и жесткой пружиной съ другой; чтобы масса пружины не увеличивала массы шапочки, роль пружинки исполняетъ тонкая стальная проволока, проходящая вдоль геометрической оси вращенія электромагнита черезъ полый валикъ диска, и закрѣпленная неподвижно по концамъ. Такимъ образомъ, при вращеніи электромагнитовъ, шапочка, припаянная къ проволочкѣ, будетъ ее скручивать, при чемъ уголъ крученія прямо пропорціоналенъ мгновенной угловой скорости электромагнитовъ; при неравномѣрномъ вращеніи электромагнитовъ уголъ крученія проволоки будетъ увеличиваться съ возростаніемъ угловой скорости и уменьшаться съ ея убываніемъ, т. е. шапочка будетъ совершать колебательное вращеніе тѣмъ большаго размаха, чѣмъ неравномѣрнѣе вращеніе. Показанія прибора будутъ вѣрны только въ томъ случаѣ, когда періодъ собственныхъ колебаній проволоки очень малъ по сравненію съ періодомъ измѣненій угловой скорости. Слѣдовательно, и этотъ приборъ имѣетъ свои критическія угловыя скорости, при которыхъ его показанія завѣдомо невѣрны; разница по сравненію съ тахографомъ Хорна заключается въ томъ, что эти критическія скорости не трудно сдѣлать очень высокими, не достижимыми въ обыкновенныхъ поршневыхъ машинахъ; такъ, въ пробномъ приборѣ было легко достигнута критическая скорость ок. 2000 об./мин. (періодъ = 0,03 сек.). Единственнымъ недостаткомъ прибора является свѣтовой методъ записи быстрыхъ колебаній шапочки; нечего конечно и думать о какой-либо стрѣлкѣ, показывающей или записывающей измѣненія угла крученія проволочки; масса этой стрѣлки тотчасъ понизила-бы критическую скорость прибора и сдѣлала его ненадежнымъ. Для записи колебанія проволочки примѣняется лучъ свѣта, лишенный массы, а именно, къ проволокѣ вблизи шапочки прикрѣплено легенькое маленькое металлическое зеркальце, отражающее лучъ свѣта въ особую фотографическую камеру безъ объектива, замѣненнаго вертикальной щелью, и съ равномѣрно движущейся свѣточувствительной пленкой. Чтобы избѣжать фотографированія, можно для опредѣленія коефиціента неравномѣрности спроектировать лучъ на неподвижный экранъ, при чемъ длина пути зайчика, образующаго на экранѣ освѣщенную полосу, будетъ пропорціональна коефиціенту неравномѣрности.

Для провѣрки точности показаній прибора былъ примѣненъ шарниръ Гука съ угломъ между валами въ 30^0, теоретическій коефиціента неравномѣрности котораго долженъ былъ равняться 28,9$^0/_0$; измѣренный коефиціентъ неравномѣрности въ одномъ опытѣ оказался равнымъ 28,1, въ другомъ 28,2$^0/_0$, такимъ образомъ относительная погрѣшность прибора оказалась менѣе 2,8$^0/_0$.

Приборъ былъ примѣненъ изобрѣтателемъ для изслѣдованія неравномѣрности вращенія лабораторнаго маломощнаго газоваго двигателя. Цѣлью опытовъ являлась прежде всего провѣрка теоретической кривой угловыхъ скоростей, построенной при помощи діаграммы массъ и работъ. Кромѣ того было изучено измѣненіе коефиціента неравномѣрности въ зависимости отъ измѣненія нагрузки, числа оборотовъ, степени сжатія и содержанія смѣси. Машина нагружалась во время опытовъ электромагнитнымъ тормозомъ, дѣйствовавшимъ на маховое колесо, а приборъ приводился во вращеніе пеньковой лентой съ натяжнымъ роликомъ отъ шкива, насаженнаго на лѣвый свободный конецъ коренного вала машины; такимъ образомъ была разумно устранена возможность различныхъ осложняющихъ явленій, напр. упругихъ колебаній вала. Манипуляціи во время опыта слѣдующія: натяженіемъ ролика приводятъ во вращеніе магниты, замыкаютъ возбудительный токъ и поворотомъ проволоки и зеркальца направляютъ зайчикъ на дверцу щели камеры; измѣняя силу тока, можно получить желательный масштабъ кривой измѣненій угловой скорости; прежде чѣмъ произвести фотографированіе, размыкаютъ токъ на нѣсколько минутъ, чтобы остыла шапочка.

Результаты значительнаго количества опытовъ могутъ быть резюмированы слѣдующимъ образомъ: коефиціентъ неравномѣрности прямо пропорціоналенъ индикаторной мощности машины, причемъ коефиціентъ пропорціональности медленно возрастаетъ съ увеличеніемъ степени сжатія и убываетъ съ возрастаніемъ угловой скорости машины. Зависимость коефиціента неравномѣрности отъ степени сжатія линейная, зависимость-же его отъ угловой скорости машины выражается довольно точно кубической параболой при измѣненіи средняго числа оборотовъ машины отъ 110 до 200 въ минуту.

Но самымъ важнымъ результатомъ надо считать то, что теоретическая кривая измѣненія угловыхъ скоростей почти точно соотвѣтствуетъ результатамъ опытовъ, если устранена возможность упругихъ колебаній частей машины; находились инженеры, глубоко недовѣряющіе примѣнимости законовъ механики къ машинамъ и относящіеся скептически къ теоретическому изученію явленій движенія въ машинахъ. Они, конечно, упускаютъ изъ виду, что каждое теоретическое изслѣдованіе опирается на опредѣленныя упрощающія предположенія, и что совпаденіе или несовпаденіе результатовъ опыта съ выводами теоріи зависитъ главнымъ образомъ отъ правильности принятыхъ предпосылокъ. Такъ напр., еслибы Римъ тормозилъ свою машину не электромагнитнымъ тормозомъ, который тушитъ колебанія, а обыкновеннымъ тормозомъ Прони, то вслѣдствіе упругости спицъ махового колеса законъ измѣненій угловой скорости обода маховика могъ-бы довольно значительно исказиться по сравненію съ теоретическимъ, найденнымъ въ предположеніи, что маховое колесо представляетъ собою абсолютно твердое тѣло.

Въ заключеніе остановимъ вниманіе читателя на примѣненіи осцилпографа Дудделя къ изслѣдованію періодической неравномѣрности вращенія машинъ, предложенномъ А. А. Чернышевымъ и М. В. Шулейкинымъ[1]. Осциллографъ служитъ для фотографической записи кривой измѣненій напряженія перемѣннаго тока частоты до 50 періодовъ въ секунду; угловая скорость поршневыхъ машинъ измѣняется обыкновенно нѣсколько медленнѣе, и лищь изрѣдка ея періодъ достигаетъ 10 въ секунду. Слѣдовательно, никакихъ измѣненій въ самомъ осцилографѣ, періодъ собственныхъ колебаній котораго очень малъ, вносить не надо. Приборъ долженъ состоять изъ маленькой динамомашины постояннаго тока, приводимой во вращеніе отъ того мѣста машины, неравномѣрность вращенія котораго надо изучить; такъ какъ

[1]) А. Чернышевъ и М. Шулейкинъ. Примѣненіе осциллографа къ изученію движенія машинъ. Извѣстія СПБ. Политехническаго Института Императора Петра Великаго т. 20 за 1913 г. стр. 293—297.

напряженіе тока, развиваемаго динамомашинкой, прямо пропорціонально мгновенной угловой ея скорости, то мы получимъ постоянный токъ болѣе или менѣе значительнаго напряженія, въ зависимости отъ средней скорости вращенія динамомашинки, и налагающійся на него перемѣнный токъ, обусловливаемый измѣненіями мгновенной ея угловой скорости; постоянный токъ не трудно уничтожить, включивъ навстрѣчу ему аккумуляторную батарею, электродвижущая сила которой, регулируемая введеннымъ въ цѣпь реостатомъ, приблизительно равна электродвижущей силѣ динамомашинки; оставшійся нескомпенсированнымъ перемѣнный токъ небольшой разности потенціаловъ пропускается въ петлю осциллографа и фотографируется. Къ сожалѣнію, авторы не разработали предложеннаго ими лабораторнаго метода до степени заводскаго прибора; было-бы очень интересно придумать такую динамомашинку, въ которой уничтоженіе постояннаго тока происходило бы автоматически внутри прибора, и тогда вольтметръ перемѣннаго тока могъ-бы служить для грубаго опредѣленія величины коефиціента неравномѣрности интересующаго насъ мѣста машины.

Въ произведенномъ авторами изслѣдованіи трехцилиндроваго четырехтактнаго дизель-двигателя они пользовались постояннымъ токомъ большой динамомашины, заклиненной на коренномъ валу двигателя; на снятую кривую измѣненія угловой скорости наложились какія-то свободныя колебанія съ періодомъ около 0,002 сек. амплитуда которыхъ не особенно мала; природа этихъ колебаній осталась невыясненной въ статьѣ; вѣроятно, это собственное колебаніе осциллографа, но возможно также измѣненіе напряженія постояннаго тока динамомашины, вызванное числомъ ея полюсовъ, зубцовъ, пластинъ коллектора и т. п. Необходимо также отмѣтить одно крупное недоразумѣніе съ продолжительностью одной пульсаціи разности потенціаловъ, которая опредѣлена въ 0,1 сек.; между тѣмъ при 221 об./мин. періодъ машины (продолжительность двухъ оборотовъ) равенъ 0,544 сек., и если даже, не обращая вниманія на дѣйствіе возвратно-движущихся массъ, принять, что періодъ измѣненій скорости равенъ періоду движущей силы машины т. е. $^2/_3$ оборота, то и тогда получимъ 0,181 сек., а не 0,1. Вѣроятно измѣненія скорости въ этой установкѣ вызываются шестой гармонической (0,544: 6=0,091 близко 0,1), обыкновенно очень малой, но увеличившейся вслѣдствіе близости къ резонансу, вполнѣ возможному, такъ какъ на коренномъ валу машины заклинено нѣсколько тяжелыхъ массъ.