Sammlung Göschen

Mathematische Formelsammlung

Von

Prof. O. Th. Bürklen

Mit 18 Figuren

GJG

Sammlung Göschen

Formelsammlung
und
Repetitorium der Mathematik

enthaltend

die wichtigsten Formeln und Lehrsätze

der

Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, mathematischen Geographie, analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes, der Differential- und Integralrechnung

von

O. Th. Bürklen
† Professor am Realgymnasium in Schw. Gmünd

Mit 18 Figuren

Dritte Auflage

Neudruck

Berlin und Leipzig
Vereinigung wissenschaftlicher Verleger
Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.
1920

Druck von
C. G. Röder G. m. b. H., Leipzig.
819720.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Mathematische Geographie.

Analytische Geometrie.

Arithmetik, Algebra und algebraische Analysis.

I. Abschnitt.

Arithmetik und Kombinatorik.

§ 1. Potenzierung und Zerlegung von Binomien.

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
2. $(a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + b^2$
   $+ 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2$
3. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.
4. $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$.
5. Binomialtafel:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

usf.

(Binomischer Lehrsatz s. § 20.)

6. $\begin{cases} a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^3 + b^4) \end{cases}$

usf.

7. $\begin{cases} a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + a b^3 + b^4) \end{cases}$

usf.

8. $\begin{cases} a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \\ a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a + b)(a - b)(a^2 + b^2) \\ \qquad = (a + b)(a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3) \\ \qquad = (a - b)(a^3 + a^2 b + a b^2 + b^3) \end{cases}$

usf.

§ 2. Proportionen.

Wenn $a : b = c : d$, dann ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und

1. $\left\{ \begin{array}{l|l} a : c = b : d, & c : a = d : b, \\ b : a = d : c, & c : d = a : b, \\ b : d = a : c, & d : b = c : a, \\ & d : c = b : a, \end{array} \right.$ d. h.:

In einer Proportion kann man die inneren Glieder unter sich, die äußeren Glieder unter sich vertauschen und es dürfen die inneren Glieder zu äußeren, und die äußeren zu inneren gemacht werden.

2. $ad = bc$, d. h.:

Das Produkt der äußeren Glieder ist gleich dem Produkt der inneren.

Umgekehrt: Sind zwei Produkte aus je zwei Faktoren einander gleich, so kann aus denselben eine Proportion gebildet werden. Die Faktoren des einen Produktes werden die äußeren, die des anderen die inneren Glieder der Proportion.

3. $\begin{cases} a\,m : b\,m = c : d\,, \\ a\,m : b = c\,m : d\,, \end{cases}$ $\Bigg|$ $\begin{aligned} (a : m) : (b : m) &= c : d\,, \\ (a : m) : b &= (c : m) : d\,, \end{aligned}$ d. h.:

In einer Proportion darf ein inneres und ein äußeres Glied zugleich mit derselben Zahl multipliziert oder dividiert werden.

4. $a^n : b^n = c^n : d^n\,, \quad \Big| \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}\,.$

5. Korrespondierende Addition:

$$a : (a + b) = c : (c + d) \quad \Big| \quad b : (a + b) = d : (c + d)\,.$$

Korrespondierende Subtraktion:

$$a : (a - b) = c : (c - d) \quad \Big| \quad b : (a - b) = d : (c - d)\,.$$

Korrespondierende Addition und Subtraktion:

$$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)\,.$$

Das erste oder zweite Glied einer Proportion verhält sich zur Summe oder Differenz des ersten und zweiten, wie das dritte oder vierte Glied zur Summe oder Differenz des dritten und vierten.

Die Summe des ersten und zweiten Gliedes verhält sich zur Differenz derselben, wie die Summe des dritten und vierten Gliedes zur Differenz derselben.

6. Wenn $a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = \ldots = w : 1$, dann ist

$$(a + b + c + \ldots) : (a_1 + b_1 + c_1 + \ldots) = a : a_1 = \ldots = w : 1\,,$$

und

$$(a\,m + b\,n + c\,p + \ldots) : (a_1\,m + b_1\,n + c_1\,p + \ldots) = a : a_1 = \ldots w : 1\,.$$

7. Wenn $a : b = c : d$
$\underline{a_1 : b_1 = c_1 : d_1\,,}$ dann ist

$$\begin{cases} (a\,a_1) : (b\,b_1) = (c\,c_1) : (d\,d_1) \quad \text{und} \\ (a : a_1) : (b : b_1) = (c : c_1) : (d : d_1)\,. \end{cases}$$

8. Wenn $a:b=c:d$ und
$$\frac{a:b=c:x\,,}{x=d\,.}$$ dann ist

9. Stetige Proportion: $a:x=x:b$.

10. Harmonische Proportion:
$$(a-b):(c-d)=a:d\,;$$
stetige harmonische Proportion:
$$(a-x):(x-b)=a:b\,.$$

11. a) Arithmetisches Mittel aus a und b:
$$x=\frac{a+b}{2}\,.$$
b) Geometrisches Mittel aus a und b:
$$x=\sqrt{ab}\,.$$
c) Harmonisches Mittel aus a und b:
$$x=\frac{2ab}{a+b}\,,\quad \text{also}\quad \frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$
Bei n Größen $a_1,\ a_2 \dots a_n$ ist

a) $x=\dfrac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$, b) $x=\sqrt[n]{a_1\,a_2\,\dots\,a_n}$,

c) $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dots+\dfrac{1}{a_n}\right)$,

d) Cauchys Satz:
$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}>\sqrt[n]{a_1\,a_2\dots a_n}>1:\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}\right).$$

§ 3. Potenzen mit ganzen Exponenten.

I. Positive, ganze Exponenten.

$$\begin{cases} a^3=a\cdot a\cdot a \\ a^m=a\cdot a\dots a \text{ (m Faktoren)}, \end{cases}$$
a heißt Basis, m Exponent, a^m Potenz.

1. $a^1 = a,\ 0^n = 0,\ 1^n = 1,\ a^0 = 1;\ a^\infty = \begin{cases} 0 \\ 1, & \text{wenn } a \lesseqgtr 1. \\ \infty \end{cases}$

2. $\begin{cases} (-1)^{2n} = +1, & (-1)^{2n+1} = -1 \\ (-a)^{2n} = +a^{2n}, & (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1} \\ (a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}, & (a-b)^{2n+1} = -(b-a)^{2n+1}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} a^m \cdot a^r = a^{m+r} \\ a^m : a^r = \begin{cases} a^{m-r}, & \text{wenn } m > r \\ 1, & \text{wenn } m = r \\ \dfrac{1}{a^{r-m}}, & \text{wenn } m < r. \end{cases} \end{cases}$

4. $(a\,b)^m = a^m b^m.$

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}.$ 6. $(a^m)^r = a^{mr}.$

7. $\begin{cases} \dfrac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2} b + a^{m-3} b^2 + \ldots \\ \qquad + a\,b^{m-2} + b^{m-1}. \end{cases}$

8. $\left.\dfrac{a^m - b^m}{a - b}\right|_{a=b} = \dfrac{0}{0} = m\,a^{m-1}.$

II. Negative, ganze Exponenten.

Erklärung: $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}.$

1. $\begin{cases} a^m \cdot a^{-r} = a^{m-r} \\ a^{-m} \cdot a^r = a^{-m+r} \\ a^{-m} \cdot a^{-r} = a^{-m-r} = a^{-(m+r)}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} a^m : a^{-r} = a^{m+r} \\ a^{-m} : a^r = a^{-m-r} \\ a^{-m} : a^{-r} = a^{-m+r}. \end{cases}$

3. $(a\,b)^{-m} = a^{-m} b^{-m}.$

4. $$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m}.$$

5. $$\begin{cases} (a^m)^{-r} = a^{-mr} \\ (a^{-m})^r = a^{-mr} \\ (a^{-m})^{-r} = a^{mr}. \end{cases}$$

§ 4. Wurzeln.

Erklärung: Wenn $x^n = a$, dann $x = \sqrt[n]{a}$, also

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \quad \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Benennungen: Bei $\sqrt[n]{a}$ heißt a Radikand n Wurzelexponent; $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

I. Wurzelformeln:

1. $\sqrt[n]{1} = 1; \quad \sqrt[n]{0} = 0; \quad \sqrt[2n+1]{1} = 1; \quad \sqrt[2n+1]{-1} = -1.$

2. $$\begin{cases} \sqrt[1]{a} = a; \quad \sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a; \quad \sqrt[2n+1]{-a^{2n+1}} = -a; \\ \sqrt[2n]{(-a)^{2n}} = -a. \end{cases}$$

3. $$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

4. $$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

5. $$\sqrt[n]{a^r} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^r.$$

6. $$\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[nx]{a^{rx}}; \quad \sqrt[-n]{a^r} = \sqrt[n]{a^{-r}}.$$

7. $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

8. $$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}\,.$$

II. Rationalmachen des Nenners:

1. $$\frac{z}{\sqrt{a}} = \frac{z\sqrt{a}}{a}\,; \qquad \frac{z}{\sqrt[n]{a}} = \frac{z\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}\,.$$

2. $$\begin{cases} \dfrac{z}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{z\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}\,; \\[2ex] \dfrac{z}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}} = \dfrac{z\left(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{a\,b}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a\pm b}\,. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \dfrac{z}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \dfrac{z\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-c} \\[2ex] = \dfrac{z\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(a+b-c-2\sqrt{a\,b}\right)}{(a+b-c)^2-4\,a\,b}\,; \end{cases}$$

besonderer Fall $a+b=c$.

4. $$\begin{cases} \dfrac{z}{\sqrt{a+\sqrt{b}}} = \dfrac{z\sqrt{a+\sqrt{b}}}{a+\sqrt{b}} = \dfrac{z\sqrt{a+\sqrt{b}}\left(a-\sqrt{b}\right)}{a^2-b} \\[2ex] = \dfrac{z\sqrt{\left(a^2-b\right)\left(a-\sqrt{b}\right)}}{a^2-b}\,. \end{cases}$$

III. Zerlegung einer Quadratwurzel:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+r}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-r}{2}}\,, \text{ wobei } r = \sqrt{a^2-b}\,.$$

IV. Beispiele für Quadrat- und Kubikwurzelausziehung:

1.
$$
\begin{array}{rl}
 & \sqrt{12|53|16} = 354 \\
 & 9 = a^2 \\
2a = & 6|353 \\
 & 325 = 2ab + b^2 \\
2(a+b) = & 70|2816 \\
 & 2816 = 2(a+b)c + c^2 \\
 & \cdot\cdot\cdot\cdot
\end{array}
$$

2.
$$
\begin{array}{rl}
 & \sqrt[3]{44|361|864} = 354 \\
 & 27 = a^3 \\
3a^2 = 27 & |17361 \\
 & |135 = 3a^2b \\
 & 225 = 3ab^2 \\
 & 125 = b^3 \\
3(a+b)^2 = 3675 & |1486864 \\
 & |14700 = 3(a+b)^2c \\
 & 1680 = 3(a+b)c^2 \\
 & 64 = c^3 \\
 & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot
\end{array}
$$

3.
$$
\sqrt{\left(25x^6 - 30x^5 + 79x^4 - 57x^3 + 58x^2 - 21x + \frac{9}{4}\right)} = 5x^3 - 3x^2 + 7x - \frac{3}{2}
$$

$$
\begin{array}{rl}
 & \pm 25x^6 \\
10x^3 & | -30x^5 + 79x^4 \\
 & | \mp 30x^5 \pm 9x^4 \\
10x^3 - 6x^2 & | +70x^4 \\
 & | \pm 70x^4 \mp 42x^3 \pm 49x^2 \\
10x^3 - 6x^2 + 14x & | -15x^3 + 9x^2 \\
 & | \mp 15x^3 \pm 9x^2 \mp 21x \pm \frac{9}{4}
\end{array}
$$

4. $\sqrt[3]{(125x^9 - 225x^8 + 660x^7 - 657x^6 + 924x^5 - 441x^4 + 343x^3)} = 5x^3 - 3x^2 + 7x$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \pm 125x^9 \\
\hline
75x^6 & -225x^8 \\
 & \mp 225x^8 \pm 135x^7 \mp 27x^6 \\
\hline
75x^6 - 90x^5 + 27x^4 & +525x^7 - 630x^6 \\
 & \pm 525x^7 \mp 630x^6 \pm 189x^5 \\
 & \qquad\qquad \pm 735x^5 \mp 441x^4 \pm 343x^3 \\
\hline
 & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{array}
$$

§ 5. Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Erklärung:

$$a^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{a^r}; \qquad a^{-\frac{r}{n}} = a^{\frac{-r}{n}} = a^{\frac{r}{-n}} = \frac{1}{a^{\frac{r}{n}}} = \sqrt[n]{a^{-r}}$$

$$= \sqrt[-n]{a^r} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^r}}.$$

1. $1^{\frac{r}{n}} = 1; \qquad 0^{\frac{r}{n}} = 0.$
2. $a^{\frac{r}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{r}{n} + \frac{p}{q}}.$
3. $a^{\frac{r}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{r}{n} - \frac{p}{q}}.$
4. $(a\,b)^{\frac{r}{n}} = a^{\frac{r}{n}}\, b^{\frac{r}{n}}.$
5. $(a:b)^{\frac{r}{n}} = a^{\frac{r}{n}} : b^{\frac{r}{n}}.$
6. $\left(a^{\frac{r}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{r}{n} \cdot \frac{p}{q}}.$

§ 6. Imaginäre und komplexe Zahlen.

Erklärung:

$\sqrt{-1} = i$ (imaginäre Einheit),
$\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$ (imaginäre Zahl),
$a + b\,i$ (komplexe Zahl; Normalform).

1. $$\begin{cases} i = i & i^{4n} = +1 \\ i^2 = -1 & i^{4n+1} = +i \\ i^3 = -i & i^{4n+2} = -1 \\ i^4 = +1 & i^{4n+3} = -i. \end{cases}$$

2. $$\left|\begin{array}{c} \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = i^2\sqrt{a\,b} = -\sqrt{a\,b}; \quad (\sqrt{-a})^2 = -a; \\ \sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \sqrt{a:b}. \end{array}\right.$$

3. Konjugierte komplexe Zahlen: $a + b i$ und $a - b i$,
$$(a + b i)(a - b i) = a^2 + b^2 .$$
4. Wenn $a + b i = 0$, dann ist $a = 0$ und $b = 0$,
wenn $a + b i = x + i y$, dann ist $a = x$, $b = y$.
5. Setzt man: $a = r \cos\varphi$ (φ Anomalie = Richtungswinkel),
$b = r \sin\varphi$ (r Modulus),
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$, dann ist
$\underline{a \pm b i = r(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)}$ (Kanonische oder goniometrische Form),
allgemeiner:
$a \pm b i = r[\cos(\varphi + 2 k \pi) \pm i \sin(\varphi + 2 k \pi)]$ (k ganze Zahl),
6. $$\begin{cases} (\cos\varphi \pm i \sin\varphi)(\cos\psi \pm i \sin\psi) \\ = \cos(\varphi + \psi) \pm i \sin(\varphi + \psi) . \end{cases}$$
7. Moivres Formel:
$$(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}(2 k \pi + \varphi) \pm i \sin\frac{m}{n}(2 k \pi + \varphi) ;$$
im einzelnen: $(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)^n = \cos n \varphi \pm i \sin n \varphi$
$$(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2 k \pi + \varphi}{n} \pm i \sin\frac{2 k \pi + \varphi}{n} .$$

§ 7. Logarithmen.

Erklärung: Wenn $c^x = a$, dann ist $x = \overset{c}{\log} a$, daher
$$c^{\overset{c}{\log} a} = a ; \quad \overset{c}{\log}(c^n) = n ; \quad \overset{c}{\log}(c^{-n}) = -n .$$
c heißt die Basis, a der Logarithmand, n der Logarithmus.

1. $\log(a b) = \log a + \log b$	3. $\log a^n = n \log a$
2. $\log\frac{a}{b} = \log a - \log b$	4. $\log\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a$

5. $\overset{c}{\log} c = 1$; $\overset{c}{\log} 1 = 0$; $\overset{c}{\log} 0 = \pm\infty$, je nachdem $c \lessgtr 1$;
$\overset{c}{\log}\infty = \pm\infty$, je nachdem $c \gtrless 1$.

6. Die Basis der künstlichen, oder gemeinen, oder Briggschen Logarithmen ist 10; die Basis der natürlichen Logarithmen, welche mit log nat, oder logn oder l bezeichnet werden, ist $e = 2{,}71828\ldots$ (s. § 21).

7. Aus $a = b^{\overset{b}{\log} a}$ folgt $\overset{c}{\log} a = \overset{b}{\log} a \cdot \overset{c}{\log} b$.

log b

8. Umrechnung der gemeinen in natürliche Logarithmen:

a) $$l\,10 = \overset{e}{\log} 10 = \frac{\overset{10}{\log} 10}{\overset{10}{\log} e} = \frac{1}{0{,}43429\ldots} = 2{,}30259\ldots$$

b) $$l\,a = \overset{e}{\log} a = \frac{\overset{10}{\log} a}{\overset{10}{\log} e} = \overset{10}{\log} a \cdot 2{,}30259\ldots$$

Weiteres über Logarithmen s. § 21.

§ 8. Kettenbrüche.

1. Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Kettenbruch:

a) $$\frac{14}{47} = \frac{1}{\frac{47}{14}} = \frac{1}{3+\frac{5}{14}} = \frac{1}{3+\frac{1}{\frac{14}{5}}} = \frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{4}{5}}}$$

$$= \frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{5}{4}}}} = \frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}}$$

b)

$$\begin{array}{r|r|r|r|l}
14 & 47 & 3 & & \\
 & 42 & & & \\
\hline
 & 5 & 14 & 2 & \\
 & & 10 & & \\
\hline
 & & 4 & 5 & 1 \\
 & & & 4 & \\
\hline
 & & & 1 & 4 \mid 4
\end{array}$$

die Nenner sind 3, 2, 1, 4.

2. Statt eines Kettenbruches k kann man stets folgenden schreiben:

$$\cfrac{1}{0+\cfrac{1}{0+k}},$$ dessen erster Näherungswert $\frac{1}{0}$, dessen zweiter $\frac{0}{1}$ ist.

3. Verwandlung eines Kettenbruches in einen gewöhnlichen Bruch:

Ist $\frac{A}{B}$ der wahre Wert und sind $\frac{A_1}{B_1}$, $\frac{A_2}{B_2}$ usf. die einzelnen Näherungswerte des Kettenbruches

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}+\dots}},$$

so ist:

$$\frac{A_{r+1}}{B_{r+1}}=\frac{a_{r+1}A_r+A_{r-1}}{a_{r+1}B_r+B_{r-1}};\quad \frac{A_1}{B_1}=\frac{1}{a_1};\quad \frac{A_2}{B_2}=\frac{a_2}{a_2 a_1+1}$$

usf.

Schema:

		a_1	a_2	a_3
$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{a_1}$	$\frac{a_2}{a_2 a_1+1}$	$\frac{a_3 a_2+1}{a_3(a_2 a_1+1)+a_1}$

		3	2	1	4
$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{14}{47}$

4. $$A_{r-1} \cdot B_r - A_r \cdot B_{r-1} = (-1)^r$$

$$\frac{A_{r-1}}{B_{r-1}} - \frac{A_r}{B_r} = \frac{(-1)^r}{B_{r-1} \cdot B_r}$$

$$\frac{A}{B} - \frac{A_r}{B_r} < \frac{(-1)^r}{B_r \cdot B_{r+1}} < \frac{(-1)^r}{B_r^2}$$

5. Sätze:

a) Die aufeinanderfolgenden Näherungswerte (N.-W.) eines Kettenbruches sind abwechselnd größer und kleiner als der wahre Wert desselben und zwar sind die ungeraden (der 1., 3. ...) größer, die geraden (der 2., 4. ...) kleiner als der wahre Wert des Kettenbruches.

b) Jeder N.-W. liegt dem wahren Wert des K.-Br. näher als der vorhergehende.

c) Der Unterschied des wahren Wertes des K.-Br. und eines N.-W. ist kleiner als der reziproke Wert des Quadrates vom Nenner dieses N.-W.

d) Die N.-W. eines K.-Br. sind in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, d. h. Zähler und Nenner sind relative Primzahlen.

e) Kein Bruch, dessen Nenner kleiner ist als der Nenner eines N.-W., kommt dem wahren Wert des K.-Br. näher als dieser N.-W.

§ 9. Kombinationslehre.

I. Permutationen.

1. Die Permutationen aus n Elementen bestehen aus den Komplexionen, in denen sämtliche Elemente vorkommen; die Komplexionen unterscheiden sich nur durch die Stellung der Elemente.

Die Permutationen von a, b, c, d sind in lexikographischer Anordnung:

abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcba

2. Die Anzahl der Permutationen aus n verschiedenen Elementen ist:

$$P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n = n! \text{ („n Fakultät")}.$$

3. Sind unter den n Elementen α unter sich gleiche Elemente, ebenso ferner β und γ je unter sich gleiche Elemente, so ist die Anzahl der Permutationen:

$$\underset{(\alpha, \beta, \gamma)}{P(n)} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}.$$

Bestehen die n Elemente aus zwei Gruppen von r und $n-r$ je unter sich gleichen Elementen, dann ist die Anzahl:

$$\underset{(r, n-r)}{P(n)} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

$$= \binom{n}{r}, \text{ vgl. § 12.}$$

4. Irgend zwei Elemente einer Komplexion bilden eine Nichtfolge (Inversion), wenn das erste Element höher ist als das zweite.

Durch Vertauschung zweier Elemente einer Komplexion ändert sich die Zahl der Nichtfolgen um eine ungerade Zahl.

II. Variationen.

5. Die Variationen aus n Elementen der r-ten Klasse bestehen aus allen Komplexionen, die sich aus je r der n Elemente bilden lassen. Die Variationen zweiter Klasse der vier Elemente a b c d sind:

ohne Wiederholung			mit Wiederholung			
ab	ac	ad	aa	ab	ac	ad
ba	bc	bd	ba	bb	bc	bd
ca	cb	cd	ca	cb	cc	cd
da	db	dc	da	db	dc	dd

6. Die Anzahl der Variationen aus n Elementen zur r-ten Klasse ist

$$V_r(n) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \binom{n}{r} \cdot r! \text{ (s. § 12)}$$

$$V_n(n) = n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n! \text{ (Permutationen.)}$$

7. Die Anzahl der Variationen mit Wiederholung ist: $V'_r(n) = n^r$.

III. Kombinationen.

8. Die Kombinationen aus n Elementen zur r-ten Klasse sind die Komplexionen, die sich aus je r der n Elemente bilden lassen, wobei aber die Reihenfolge der Elemente außer Betracht bleibt.

Die Kombinationen der vier Elemente a, b, c, d zur zweiten Klasse sind:

ohne Wiederholung: ab, ac, ad, bc, bd, cd;
mit „ : aa, ab, ac, ad; bb, bc, bd; cc, cd, dd.

9. Die Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur r-ten Klasse ist

$$K_r(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Aus den Kombinationen ergeben sich die Variationen, wenn man die Elemente der einzelnen Kombinationen permutiert.

10. Die Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur r-ten Klasse mit Wiederholung ist

$$K'_r(n) = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{r!} = \binom{n+r-1}{r}.$$

§ 10. Determinanten.

1. $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Unter der **Determinante** eines Systems von n^2 Elementen $a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$ versteht man die Summe $\Sigma(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots)$, in welcher jedes Glied alle Buchstaben und Indices ohne Wiederholung enthält und welche zugleich alle möglichen Produkte umfaßt, die durch Permutation der Indices gebildet werden können. Jedes (alphabetisch geordnete) Glied ist positiv oder negativ zu setzen, je nachdem die Anzahl der Nichtfolgen der Indices gerade oder ungerade ist.

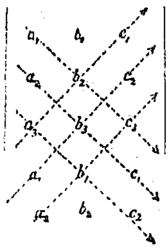
2. Der Wert einer Determinante wird nicht geändert, wenn die Vertikal- als Horizontalreihen und umgekehrt geschrieben werden. Z. B.:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

3. Werden irgend zwei Parallelreihen miteinander vertauscht, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

4. Sind in einer Determinante zwei Parallelreihen entsprechend gleich oder proportional, so ist der Wert der Determinante gleich Null.

5. Regel von Sarrus: Um eine dreigliedrige Determinante zu entwickeln, setzt man die beiden ersten Horizontalreihen der Reihe nach unter die letzte; alsdann schreibt man die sechs Produkte an aus je drei Elementen, welche auf den Diagonalen des Quadrates und auf Parallelen dazu liegen. Dabei ist den Produkten, welche in der Richtung der Diagonale des Anfangselementes liegen, das Vorzeichen $+$, den andern das Vorzeichen $-$ zu geben.



$$= a_1\, b_2\, c_3 + a_2\, b_3\, c_1 + a_3\, b_1\, c_2$$
$$- a_1\, b_3\, c_2 - a_2\, b_1\, c_3 - a_3\, b_2\, c_1\,.$$

[Man kann auch die beiden ersten Vertikalreihen hinter die letzte setzen und dann ebenso entwickeln.]

6. Bezeichnet man in einer Determinante Δ den Faktor von a_r mit A_r (Unterdeterminante), den von b_r mit B_r, dann ist

$$\begin{aligned}\Delta &= a_1\, A_1 + a_2\, A_2 + \ldots + a_n\, A_n \\ &= b_1\, B_1 + b_2\, B_2 + \ldots + b_n\, B_n \\ &= \ldots,\ \text{ferner ist}\end{aligned}$$

$$b_1\, A_1 + b_2\, A_2 + \ldots + b_n\, A_n = c_1\, A_1 + c_2\, A_2 + \ldots + c_n\, A_n = 0.$$

7. Jede Unterdeterminante ist wieder eine Determinante. Die Unterdeterminante zu einem Element, das in der i-ten Horizontal- und der k-ten Vertikalreihe

steht, wird erhalten, indem man die Horizontal- und die Vertikalreihe, welche in diesem Element sich kreuzen, durchstreicht und die dadurch entstehende Determinante mit $(-1)^{i+k}$ multipliziert. Hieraus ergibt sich die Entwicklung einer viergliedrigen Determinante, usf. Es ist also:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$+ a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

8. Wenn alle Elemente einer Horizontal- oder einer Vertikalreihe mit demselben Faktor multipliziert sind, so ist die Determinante mit diesem Faktor multipliziert. Z. B.:

$$\begin{vmatrix} k\,a_1 & b_1 & c_1 \\ k\,a_2 & b_2 & c_2 \\ k\,a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Sind alle Elemente einer Reihe 0, so ist die ganze Determinante gleich Null.

9. Wenn jedes Element einer Reihe eine Summe zweier Größen ist, so ist die Determinante in die Summe zweier Determinanten zerlegbar; z. B.:

$$\begin{vmatrix} a_1 + \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

oder:

$$(a_1 + \alpha_1) A_1 + (a_2 + \alpha_2) A_2 + (a_3 + \alpha_3) A_3 = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 .$$

Bestehen die Glieder einer Reihe aus m, die einer andern aus n und die einer dritten aus p Summanden, so ist die Determinante in $m \cdot n \cdot p$ Determinanten zerlegbar.

10. Der Wert einer Determinante bleibt unverändert, wenn man zu den Elementen einer Reihe beliebige, gleich vielfache der entsprechenden Elemente einer parallelen Reihe addiert; z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + k\,a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + k\,a_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + k\,a_3 \end{vmatrix}.$$

11. Wenn

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \text{ dann ist}$$

$$D \cdot \Delta = \begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 + b_1 \beta_1 + c_1 \gamma_1 & a_1 \alpha_2 + b_1 \beta_2 + c_1 \gamma_2 & a_1 \alpha_3 + b_1 \beta_3 + c_1 \gamma_3 \\ a_2 \alpha_1 + b_2 \beta_1 + c_2 \gamma_1 & a_2 \alpha_2 + b_2 \beta_2 + c_2 \gamma_2 & a_2 \alpha_3 + b_2 \beta_3 + c_2 \gamma_3 \\ a_3 \alpha_1 + b_3 \beta_1 + c_3 \gamma_1 & a_3 \alpha_2 + b_3 \beta_2 + c_3 \gamma_2 & a_3 \alpha_3 + b_3 \beta_3 + c_3 \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

12. Wenn alle diejenigen Elemente einer Determinante verschwinden, welche m Vertikal- mit $n - m$ Horizontalreihen gemeinschaftlich haben, so läßt sich dieselbe in das Produkt zweier Determinanten zerlegen; z. B.:

$$\left|\begin{array}{cc:ccc} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ \hdashline 0 & 0 & c_3 & d_3 & e_3 \\ 0 & 0 & c_4 & d_4 & e_4 \\ 0 & 0 & c_5 & d_5 & e_5 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & d_3 & e_3 \\ c_4 & d_4 & e_4 \\ c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}.$$

13. Jede Determinante kann auf folgende Weise erweitert werden:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \beta_4 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

§ 11. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1. Ist für ein Ereignis die Anzahl aller möglichen Fälle m, die der günstigen Fälle (Treffer) t, so ist die **Wahrscheinlichkeit** für das Eintreffen eines günstigen Falles:

$$w = \frac{t}{m},$$

für das Nichteintreffen

$$u = \frac{m-t}{m} = 1 - w, \quad \text{also}$$

$$\text{I.} \qquad w + u = 1.$$

2. Ist bei m möglichen Fällen $w_1 = \frac{t_1}{m}$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses E_1 und $w_2 = \frac{t_2}{m}$ diejenige für das Eintreffen von E_2, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß entweder E_1 oder E_2 eintrifft,

$$\text{II.} \qquad W = w_1 + w_2.$$

3. Die Wahrscheinlichkeit, daß mehrere Ereignisse E_1: $E_2, E_3 \ldots$ **gleichzeitig** (oder nacheinander) eintreffen, ist:

$$\text{III.} \qquad W = w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \ldots$$

4. Die Wahrscheinlichkeit, daß von zwei Ereignissen E_1 und E_2 das erste eintrifft, ist:

$$\text{IV.} \qquad W = \frac{w_1}{w_1 + w_2}.$$

5. Soll von zwei Ereignissen E_1 und E_2 eintreten:
a) E_1 und E_2, so ist $W = w_1 \cdot w_2$;
b) E_1, aber nicht E_2, so ist $W = w_1(1 - w_2)$;
c) E_1 nicht, aber E_2, so ist $W = (1 - w_1) \cdot w_2$;
d) eines, aber nicht beide, so ist
$$W = w_1(1 - w_2) + (1 - w_1) \cdot w_2;$$
e) höchstens eines von beiden, so ist $W = 1 - w_1 w_2$;
f) wenigstens eines von beiden, so ist
$$W = w_1 + w_2 - w_1 w_2;$$
g) beide oder keines, so ist
$$W = 1 - w_1(1 - w_2) - (1 - w_1) w_2;$$
h) E_1 n mal, E_2 m mal in bestimmter Reihenfolge, dann ist $W = w_1^n \cdot w_2^m$; ist die Reihenfolge beliebig, dann ist
$$W = \frac{(n+m)!}{n!\,m!} w_1^n \cdot w_2^m.$$

§ 12. Binomialkoeffizienten.

1. Der Bruch $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} = \binom{n}{r}$, gelesen „n über r", heißt Binomialkoeffizient.

2. Ist n positiv und ganz, so wird $\binom{n}{r} = 0$, wenn $r > n$; ist aber n gebrochen oder negativ, so wird $\binom{n}{r}$ für keinen Wert von r Null.
$$\binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{0} = 1.$$

3. $$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}.$$

4. $$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}.$$

5. $\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n-1}{r} + \binom{n-2}{r} + \ldots + \binom{r}{r}$

6. $$\begin{cases} \binom{m+n}{r} = \binom{m}{r}\binom{n}{0} + \binom{m}{r-1}\binom{n}{1} + \binom{m}{r-2}\binom{n}{2} \\ \qquad + \ldots + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \binom{m}{0}\binom{n}{r}. \end{cases}$$

II. Abschnitt.

Reihen.

A) Endliche Reihen.

§ 13. Arithmetische Reihen erster Ordnung.

Reihe: $a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots\ a+(n-1)d$.

1. $z = a + (n-1)d$.

2. $s = \frac{(a+z)\cdot n}{2} = \frac{[2a+(n-1)d]\cdot n}{2}$.

§ 14. Geometrische Reihen.

Reihe: $a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3 \ldots aq^{n-1}$.

1. $z = aq^{n-1}$.

2. $s = \frac{a(q^n - 1)}{q-1} = \frac{qz - a}{q-1}$.

3. Ist $n = \infty$ und $0 < |q| < 1$, dann ist $s = \frac{a}{1-q}$.

4. $$\left.\begin{cases} 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x} \\ 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \frac{1}{1+x} \end{cases}\right\} \text{wobei } x^2 < 1.$$

§ 15. Zinseszins- und Rentenrechnung.

Zinsfuß $p\,\%$, Zinsfaktor $q\left(= 1 + \frac{p}{100}\right)$, ursprüngliches Kapital a, angewachsenes b, Zahl der Zinsperioden (Jahre) n, Rente r.

1. $b = a\,q^n$ (Zinseszinsformel).

2. $b = a\,q^n \pm \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$ (erste Rentenformel).

3. $b = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$ (zweite Rentenformel).

4. $b = \frac{r\,q\,(q^n - 1)}{q - 1}$ (dritte Rentenformel).

5. $a = r \cdot \frac{q^n - 1}{(q - 1) \cdot q^n} = \frac{r}{q - 1}\left(1 - \frac{1}{q^n}\right).$

5′. $a = \frac{r}{q - 1} \quad (n = \infty).$

6. $a\,q^n = a\,\frac{p_1}{100} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$

1. Gibt den Endwert an, auf den das Kapital a in n Jahren durch Zinseszins anwächst.

2. Gibt den Endwert an, den a durch Zinseszins erreicht, wenn dasselbe am Ende jedes Jahres noch um r vermehrt oder vermindert wird; wird a in n Jahren aufgezehrt, so ist $b = 0$.

3. Gibt die Summe an, welche bis zum Ende des n-ten Jahres erreicht ist, durch eine am Ende jedes Jahres erfolgende Zahlung r.

4. Stellt denselben Wert dar wie 3., wofern die Zahlung r am Jahresanfang geleistet wird.

5. a ist das Ablösungskapital (Mise) einer n mal am Jahresende wiederkehrenden Rente.

5′. a Ablösungskapital einer immerwährenden Rente.

6. Amortisation. Die Gleichung gibt die Bedingung an, unter der ein Kapital a in n Jahren durch

Verzinsung mit p_1% getilgt werden kann, wenn der Zinsfaktor (bei dem üblichen Zinsfuß p) q ist.

§ 16. Arithmetische Reihen höherer Ordnung.

1. Reihe: $y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \cdots y_n$
erste Differenzenreihe: $\Delta y_0 \quad \Delta y_1 \quad \Delta y_2 \quad \Delta y_3 \ldots$
zweite „ $\Delta^2 y_0 \quad \Delta^2 y_1 \quad \Delta^2 y_2 \ldots$
dritte „ $\Delta^3 y_0 \quad \Delta^3 y_1 \ldots$

$$\Delta^{r+1} y_m = \Delta^r y_{m+1} - \Delta^r y_m .$$

Ist die r-te Differenzenreihe konstant, so ist die Reihe von der r-ten Ordnung.

2. Bestimmung des allgemeinen Gliedes:

$$y_n = y_0 + \binom{n}{1} \Delta y_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{n}{3} \Delta^3 y_0 + \ldots + \binom{n}{r} \Delta^r y_0 .$$

Wenn die Reihe mit y_1 anfängt, dann ist:

$$y_n = y_1 + \binom{n-1}{1} \Delta y_1 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 y_1 + \binom{n-1}{3} \Delta^3 y_1 + \ldots + \binom{n-1}{r} \Delta^r y_1 .$$

3. Summe der Glieder von y_0 bis zum Glied y_n (einschl.):

$$S_n = \binom{n+1}{1} y_0 + \binom{n+1}{2} \Delta y_0 + \binom{n+1}{3} \Delta^2 y_0 + \ldots + \binom{n+1}{r+1} \Delta^r y_0 ,$$

oder bei der zweiten Bezeichnung:

$$s_n = \binom{n}{1} y_1 + \binom{n}{2} \Delta y_1 + \binom{n}{3} \Delta^2 y_1 + \ldots + \binom{n}{r+1} \Delta^r y_1$$

4. Sätze: a) Das allgemeine Glied einer Reihe r-ter Ordnung ist eine Funktion r-ten Grades in n.

b) Setzt man in der rationalen ganzen Funktion

$$\varphi(n) = a_0 n^r + a_1 n^{r-1} + \ldots + a_r,$$

welche in Beziehung auf n vom r-ten Grade ist, für n der Reihe nach die Zahlen $0, 1, 2 \ldots$, so bilden die Werte $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2) \ldots$ eine Reihe r-ter Ordnung mit der Schlußdifferenz $r!\,a_0$.

c) Setzt man in $\varphi(n)$ für n nacheinander die Zahlen $\alpha, \alpha + h, \alpha + 2h \ldots$, welche eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden, so bilden die Funktionswerte $\varphi(\alpha), \varphi(\alpha + h), \varphi(\alpha + 2h) \ldots$ eine arithmetische Reihe r-ter Ordnung mit der Schlußdifferenz $r!\,a_0 \cdot h^r$.

5. $$\begin{cases} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}(2n+1)(n+1) \cdot n\,; \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2 \cdot n^2. \end{cases}$$

6. Figurierte Zahlen:

a) Polygonalzahlen:

Dreieckszahlen: 1 3 6 10 15 21 ..., $\binom{n}{1} + 1\binom{n}{2}$,

Viereckszahlen: 1 4 9 16 25 ..., $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} = n^2$,

r-Eckszahlen: $\binom{n}{1} + (r-2)\binom{n}{2}$,

b) Pyramidalzahlen:

dreiseitige: 1 4 10 20 35 ..., $\binom{n+1}{2} + 1 \cdot \binom{n+1}{3}$,

vierseitige: 1 5 14 30 55 ..., $\binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$,

r-seitige: $\binom{n+1}{2} + (r-2)\binom{n+1}{3}$.

§ 17. Interpolation.

1. Einschaltung bei arithmetischen Reihen.

Sollen bei einer arithmetischen Reihe r-ter Ordnung, deren allgemeines Glied gegeben ist durch die Formel y_n (s. § 16_2), zwischen je zwei Glieder p weitere Glieder so eingeschaltet werden, daß die neue Reihe wieder eine Reihe r-ter Ordnung ist, so geschieht dies, indem man in dem Ausdruck für das allgemeine Glied für n der Reihe nach

$$\frac{1}{p+1}, \quad \frac{2}{p+1}, \quad \frac{3}{p+1} \cdots \frac{p}{p+1}, \quad 1+\frac{1}{p+1},$$
$$1+\frac{2}{p+1}, \quad \ldots, \quad 2+\frac{1}{p+1} \cdots$$

setzt. Die Schlußdifferenz der neuen Reihe ist

$$\left(\frac{1}{p+1}\right)^r \varDelta^r y_0 .$$

Häufig ist es zweckmäßig, nur so viel Glieder der neuen Reihe zu berechnen, daß sich daraus die Anfänge der Differenzenreihen ergeben, und dann die Reihe von der Schlußdifferenz aus weiter zu berechnen.

2. Einschaltung bei Versuchsreihen.

a) Interpolationsformel von Lagrange.

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ldots(x_0-x_n)} \cdot y_0$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)} y_1 + \ldots$$

Hierbei sind $y_0, y_1, y_2 \ldots$ die zu $x_0, x_1, x_2 \ldots$ gehörigen Funktionswerte. Ist bekannt, daß die zunächst unbekannte Funktion $y = f(x)$ für alle Werte zwischen x_0 und x_n eine ganze Funktion von höchstens n-tem

Grade ist, so ist sie durch Lagranges Formel vollständig bestimmt; andernfalls liefert letztere eine Annäherung.

b) Newtons Interpolationsformel:

$$y_x = y_0 + A_0(x - x_0) + A_1(x - x_0)(x - x_1) + A_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots$$

$$A_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad B_0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad C_0 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \quad \text{usf.}$$

$$A_1 = \frac{B_0 - A_0}{x_2 - x_0}, \quad B_1 = \frac{C_0 - B_0}{x_3 - x_1}, \quad C_1 = \frac{D_0 - C_0}{x_4 - x_2} \quad \text{usf.}$$

$$A_2 = \frac{B_1 - A_1}{x_3 - x_0}, \quad B_2 = \frac{C_1 - B_1}{x_4 - x_1}, \quad \text{usf.}$$

B) Unendliche Reihen.

§ 18. Konvergenzbedingungen.

1. Eine Reihe $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ heißt konvergent, wenn die Grenze von s_n bei unbegrenzt wachsendem n eine endliche Zahl ist.

Die Reihe heißt divergent, wenn $\lim s_n$ nicht endlich ist. Dies ist u. a. der Fall, wenn $\lim a_n$ nicht 0 ist.

2. Die abnehmende geometrische Reihe ist konvergent; also $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ ist konvergent, wenn der absolute Betrag von $x < 1$, sie ist divergent, wenn $|x| > 1$.

3. Eine Reihe ist konvergent, wenn sie von einem bestimmten Glied an konvergent ist und kein vorangehendes Glied unendlich groß ist.

4. Eine Reihe ist konvergent, wenn jedes Glied derselben kleiner ist als das gleichvielte einer konvergenten Reihe.

5. Erste Hauptkonvergenzbedingung: Eine Reihe von positiven Gliedern ist konvergent, wenn von

einem bestimmten Glied ab der Quotient aus einem Glied und dem vorhergehenden < 1 und wenn auch

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}\bigg|_{n=\infty} < 1 \, .$$

Ist der Grenzwert gleich 1, so kann nur eine besondere Untersuchung über Konvergenz oder Divergenz entscheiden.

6. **Zweite Hauptkonvergenzbedingung:** Eine Reihe mit abwechselnden Zeichen konvergiert, wenn die Glieder von einer bestimmten Stelle an abnehmen und $\lim a_n = 0 \ldots$ Ist $\lim a_n \gtrless 0$, so nimmt s_n zwei verschiedene Grenzwerte an, je nachdem man eine gerade oder ungerade Anzahl unendlich vieler Glieder summiert; die Reihe heißt dann **oszillierend.**

(Bei einer Reihe mit gleichen Zeichen ist die Bedingung $\lim a_n = 0$ für die Konvergenz notwendig, aber nicht hinreichend.)

7. Jede Reihe mit negativen oder abwechselnden Gliedern ist konvergent, wenn sie konvergiert, falls man alle Glieder positiv setzt.

8. Ist $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ eine konvergente Reihe aus positiven Gliedern und sind $k_1, k_2, k_3 \ldots$ positive oder negative Zahlen, die ihrem absoluten Werte nach unter einer endlichen Grenze bleiben, so ist auch $k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + \ldots$ konvergent.

9. **Abels Satz:** Ist $S(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots$ und ist $A = a_1 + a_2 + a_3 \ldots$, so ist, wenn sich x von kleineren Werten der Grenze 1 nähert,

$$\lim S(x)_{x=1} = A \, .$$

§ 19. Satz von der Koeffizientenvergleichung.

Ist

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$
$$= B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots$$

und sind beide Reihen konvergent (null innerhalb des Konvergenzbereichs), so ist

$$A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1, \quad A_2 = B_2 \text{ usf.}$$

Dieser Satz dient zur Entwicklung von Funktionen in Reihen.

§ 20. Binomischer Lehrsatz — Newtonsche Reihe.

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{r}x^r + \ldots$$

Für negative und gebrochene Werte von n wird die Reihe unendlich. Sie ist konvergent für

$$1 > x > -1;$$

ferner für $x = +1$, wenn $n > -1$
$x = -1$, wenn $n > 0$

$$(a \pm b)^n = a^n\left(1 \pm \frac{b}{a}\right)^n = a^n\left(1 \mp \frac{b}{a \pm b}\right)^{-n}, \quad a > b.$$

Beispiel:

$$\sqrt{a^2+b^2} = a\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = a\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{a^2}+\binom{\frac{1}{2}}{2}\frac{b^4}{a^4}+\ldots\right).$$

Ist b gegen a sehr klein, dann ist

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2a} \text{ (Näherungsformel);}$$

$$\sqrt[3]{a^3 \pm b} = a \pm \frac{b}{3a^2} \text{ (Näherungsformel).}$$

§ 21. Exponentialreihe; logarithmische, trigonometrische und zyklometrische Reihen.

1.
$$\begin{cases} e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots \quad -\infty < x < +\infty \\ e = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots = \lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n_{n=\infty} \\ \quad = 2{,}7182818284\ldots \end{cases}$$

2. $\begin{cases} a^x = e^{x\,l a} = 1 + \frac{x\,l a}{1!} + \frac{(x\,l a)^2}{2!} + \frac{(x\,l a)^3}{3!} + \ldots \\ -\infty < x < +\infty \end{cases}$

3. $l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots, \quad 1 \geqq x > -1.$

4. $l(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots \; 1 > x \geqq -1.$

5. $\begin{cases} l\,\frac{1+x}{1-x} = 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right\} \; 1 > x > -1 \text{ oder} \\ l\,z = 2\left\{\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\right\} \\ 0 < z < \infty. \end{cases}$

6. $l(a+h) - l a = 2\left\{\frac{h}{2a+h} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{h}{2a+h}\right)^3 + \ldots\right\}$

7. Übergang vom natürlichen zum Briggschen System:

$$10^{\overset{10}{\log} z} = z; \quad \overset{10}{\log} z \cdot l\,10 = l\,z$$

$$\overset{10}{\log} z = \frac{l\,z}{l\,10} = M_{10} \cdot l\,z$$

M_{10} = Modulus des Briggschen Systems $= \frac{1}{l\,10}$
$= 0{,}4342945 \ldots$ (s. auch § 7_8).

8. $\begin{cases} \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \end{cases}$ $\sphericalangle$ x in Bogenmaß, $-\infty < x < +\infty$.

9. $\begin{cases} \cos x + i \sin x = e^{ix} \\ \cos x - i \sin x = e^{-ix} \end{cases}$

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} . \end{cases}$$

10. $e^{\varphi} = e^{\varphi + 2k\pi i}$; $\quad e^{2k\pi i} = 1$, $\quad e^{(2k+1)\pi i} = -1$.

11. Ist $y = e^x = e^{x + 2k\pi i}$, so ist

$$l\,y = x + 2k\pi i .$$

$$l(-1) = (2k+1)\pi i; \quad l(-y) = l\,y + (2k+1)\pi i .$$

Ist $y + iz = r e^{\varphi i}$, so ist

$$l(y + iz) = l\,r + (\varphi + 2k\pi) i .$$

12. $$\begin{cases} \operatorname{arc\,sin} x = x + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{x^5}{5} \\ \qquad + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{x^7}{7} + \ldots \quad 1 > x > -1 \\ \operatorname{arc\,tg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \ldots \quad 1 \geqq x \geqq -1 \\ \dfrac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} 1 = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \ldots \end{cases}$$

(Leibnizsche Reihe).

Zur Berechnung von π können folgende Reihen und Formeln benutzt werden:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} \quad \text{(Machinsche Formel)}.$$

$$\frac{\pi}{4} = 8 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{10} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} - 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{515} \quad \text{(Meiselsche Formel)}.$$

III. Abschnitt.

Gleichungen.

§ 22. Gleichungen ersten Grades.

a) Umformungs- und Versetzungsregeln:

1. Jede Gleichung bleibt richtig, wenn auf jeder Seite dieselbe Operation mit derselben Zahl vorgenommen wird.

2. Ein freier Summand der einen Seite kann auf die andere Seite als Subtrahend gesetzt werden und umgekehrt.

3. Eine Zahl, welche Faktor der gesamten einen Seite ist, kann auf die andere Seite als Divisor derselben gesetzt werden und umgekehrt.

4. Eine Zahl, welche Potenzexponent der gesamten einen Seite ist, kann auf die andere Seite als Wurzelexponent derselben gesetzt werden und umgekehrt.

b) Gleichungen mit einer Unbekannten.

5. Aus
$$\begin{cases} x + a = b & \text{folgt} \quad x = b - a \\ x - a = b & \text{folgt} \quad x = b + a\,. \end{cases}$$
$$\begin{cases} a\,x = b & \text{folgt} \quad x = \dfrac{b}{a} \\ \dfrac{x}{a} = b & \text{folgt} \quad x = a\,b \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^n = a & \text{folgt} \quad x = \sqrt[n]{a} \\ \sqrt[n]{x} = a & \text{folgt} \quad x = a^n \\ a + x = b + x & \text{folgt} \quad x = \infty\,. \end{cases}$$

6. Aus
$$\begin{cases} a\,x = 0 & \text{folgt} \quad x = 0 \\ a\,(x - b) = 0 & \text{folgt} \quad x - b = 0 \\ (x - a)(x - b) = 0 & \text{folgt} \quad x - a = 0 \ \text{ und } \ x - b = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a\,x + b\,x = c\,x & \text{folgt} \quad x = 0 \\ a\,(x - b) + c\,(x - b) = d\,(x - b) & \text{folgt} \quad x - b = 0\,. \end{cases}$$

Ist die linke Seite einer auf Null gebrachten Gleichung ein Produkt, das x oder Ausdrücke in x als Faktoren enthält, so ist jeder dieser Faktoren gleich Null zu setzen.

Kann eine Gleichung mit x oder einem Ausdruck, der x enthält, durchdividiert werden, so ist x, bzw. dieser Ausdruck, gleich Null zu setzen.

c) Gleichungen mit zwei und mehr Unbekannten.

7. Aus $\begin{cases} a x + b y = c \\ a_1 x + b_1 y = c_1 \end{cases}$, folgt

$$y = \frac{c - a x}{b},$$

$$y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1}, \quad \text{daher}$$

I. $\dfrac{c - a x}{b} = \dfrac{c_1 - a_1 x}{b_1}$ (Gleichsetzungsmethode),

II. $a x + b \cdot \dfrac{c_1 - a_1 x}{b_1} = c$ (Einsetzungsmethode),

III.
$$\begin{cases} a b_1 x + b b_1 y = c b_1 \\ a_1 b x + b b_1 y = c_1 b \\ \hline x (a b_1 - a_1 b) = c b_1 - c_1 b \\ x = \dfrac{c b_1 - c_1 b}{a b_1 - a_1 b} \end{cases}$$

(Kombinationsmethode),

IV.
$$\begin{cases} 1) & a x + b y = c \quad | \; m \\ 2) & a_1 x + b_1 y = c_1 \quad | \\ \hline 3) & (a m + a_1) x + (b m + b_1) y = c m + c_1, \end{cases}$$

setze $b\,m + b_1 = 0$, so ist $m = -\frac{b_1}{b}$, dies in 3) eingesetzt gibt

$$\left(-\frac{a\,b_1}{b} + a_1\right)x = -\frac{c\,b_1}{b} + c_1 \,, \quad \text{oder}$$

$$(-a\,b_1 + a_1\,b)\,x = -c\,b_1 + c_1\,b$$

$$x = \frac{c\,b_1 - c_1\,b}{a\,b_1 - a_1\,b};$$

ebenso wird y bestimmt.

(Methode der unbestimmten Koeffizienten von Bézout.)

8. Hat man drei Gleichungen mit drei Unbekannten:

$$\left|\begin{array}{l} a\,x + b\,y + c\,z = d \\ a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z = d_1 \\ a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z = d_2 \end{array}\right|,$$

so stellt man durch zweimalige Elimination derselben Unbekannten, z. B. von z, zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten und dann hieraus eine Gleichung mit einer Unbekannten her. — Bei vier Gleichungen mit vier Unbekannten eliminiert man dieselbe Unbekannte dreimal und erhält dadurch drei Gleichungen mit drei Unbekannten usf.

9. Lösung durch Determinanten:

$$\begin{array}{l|l} a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z = d_1 & A_1 \\ a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z = d_2 & A_2 \\ \underline{a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z = d_3} & A_3 \,. \end{array}$$

Durch Multiplikation mit den angeschriebenen Unterdeterminanten und Addition folgt:

$$(a_1\,A_1 + a_2\,A_2 + a_3\,A_3)\,x = d_1\,A_1 + d_2\,A_2 + d_3\,A_3 \,, \quad \text{also}$$

$$x = \frac{d_1\,A_1 + d_2\,A_2 + d_3\,A_3}{a_1\,A_1 + a_2\,A_2 + a_3\,A_3}.$$

Der Nenner ist die Determinante $\varDelta$ des Systems der linken Seiten. — Für y und z folgt ebenso:

$$y = \frac{d_1 B_1 + d_2 B_2 + d_3 B_3}{\varDelta}$$

$$z = \frac{d_1 C_1 + d_2 C_2 + d_3 C_3}{\varDelta} .$$

Die Zähler sind ebenfalls Determinanten, die man erhält, wenn man in $\varDelta$ der Reihe nach a_1, a_2, a_3, dann b_1, b_2, b_3 und c_1, c_2, c_3 durch d_1, d_2, d_3 ersetzt.

10. Die Bedingung für das gleichzeitige Bestehen von n homogenen Gleichungen ist die gleich Null gesetzte Determinante des Systems, z. B. für

$$\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0 \end{array} \quad \text{ist} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

§ 23. Gleichungen zweiten Grades und Exponentialgleichungen.

a) Mit einer Unbekannten.

1. $$\begin{cases} x^2 = a \\ x = \pm\sqrt{a} . \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} a x^2 + b x + c = 0 \\ x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} . \end{cases}$$

Die Gleichung liefert:

$$\left.\begin{array}{l} \text{zwei verschiedene reelle Werte} \\ \text{zwei gleiche reelle Werte} \\ \text{zwei verschiedene imaginäre Werte} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{je nachdem} \\ b^2 - 4ac \gtreqless 0 . \end{array}$$

$b^2 - 4ac$ heißt Diskriminante der Gleichung.

Ist $a = 1$, so wird $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$; hieraus folgt:

3. Sind x_1 und x_2 die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + bx + c = 0\,, \quad \text{so ist}$$

$$x_1 + x_2 = -b\,; \qquad x_1 \cdot x_2 = c\,.$$

Die Gleichungen $x^2 + bx + c = 0$ und $x^2 - bx + c = 0$ haben gleiche, aber mit entgegengesetztem Zeichen versehene Wurzeln.

4. Die Gleichung

$x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$ hat die Wurzeln $x_1 = a$, $x_2 = \frac{1}{a}$,

$x - \frac{1}{x} = a - \frac{1}{a}$ hat die Wurzeln $x_1 = a$, $x_2 = -\frac{1}{a}$.

5. Gleichungen, die durch Einführung einer neuen Unbekannten oder durch Zerlegung auf quadratische zurückgeführt werden können:

1. $a x^4 + b x^2 + c = 0$, setze $x^2 = y$
2. $a x^{2m} + b x^m + c = 0$, setze $x^m = y$
3. $a x + b\sqrt{x} + c = 0$, setze $\sqrt{x} = y$
4. $a\sqrt[m]{x^{2r}} + b\sqrt[m]{x^r} + c = 0$, setze $\sqrt[m]{x^r} = y$
5. $a u^{2x} + b u^x + c = 0$, setze $u^x = y$ (§ 23c)
6. $(x^2 + ax)^2 + b(x^2 + ax) + c = 0$, setze $x^2 + ax = y$
7. $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^2 + \frac{ax+b}{cx+d} + e = 0$, setze $\frac{ax+b}{cx+d} = y$.

6. Symmetrische Gleichungen:

1. $a x^3 + b x^2 + b x + a = 0$, $a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0$,

zerfällt in

I. $x+1=0$ und II. $a(x^2-x+1)+bx=0$.

2. $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, Division mit x^2,

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0\,;$$

$$\text{setze } x+\frac{1}{x}=y\,,\qquad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2\,.$$

3. $$\begin{cases} ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0\,, \\ a(x^5+1)+bx(x^3+1)+cx^2(x+1)=0\,. \end{cases}$$

Abspaltung von $x+1=0$, Restgleichung symmetrisch vom vierten Grad.

b) Mit zwei Unbekannten.

Für die Auflösung quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten kann keine allgemeine, einfache Methode angegeben werden, da die Elimination einer der Unbekannten im allgemeinen auf eine Gleichung vierten Grades führt. (Über die allgemeine Behandlung s. § 25, 14.) Es ergibt sich jedoch in vielen Fällen, in welchen die eine der Gleichungen oder beide nicht alle möglichen Glieder enthalten, die Schlußgleichung als quadratische oder sonst lösbare. In jedem einzelnen Falle ist nach Maßgabe der Eigenschaften der vorliegenden Gleichungen zu verfahren. Die wichtigsten Fälle sind:

1. Die eine der beiden Gleichungen ist vom ersten Grad; man drücke eine Unbekannte aus und setze in die andere Gleichung ein.

2. Durch Elimination der quadratischen Glieder entsteht eine Gleichung ersten Grades.

3. Es läßt sich eine Vereinfachung durch Absonderung eines Faktors erzielen.

4. Die Einführung einer neuen Unbekannten in die eine Gleichung bewirkt, daß dieselbe nur noch diese Unbekannte enthält, oder es wird das ganze System durch Einführung neuer Unbekannten vereinfacht.

5. Durch Addition und Subtraktion, Multiplikation oder Division der beiden gegebenen Gleichungen, oder auch durch korrespondierende Addition und Subtraktion bei einer derselben, entsteht eine Gleichung, in der für $x + y$, $x - y$, xy oder $\frac{x}{y}$ oder einen sonstigen Ausdruck in x und y eine neue Unbekannte eingeführt werden kann.

6. Die Gleichung ist homogen; man dividiert mit y^2 durch und bestimmt $\frac{x}{y}$.

7. Es kommen außer dem Absolutglied in jeder Gleichung nur quadratische Glieder vor; man eliminiert die Absolutglieder, so erhält man eine homogene Gleichung. Oder: Man bringt die quadratischen Glieder nach links, dividiert die eine Gleichung durch die andere, dividiert dann Zähler und Nenner durch y^2, setzt $\frac{x}{y} = t$ und bestimmt t.

8. Man kann z. B. aus $x^2 + y^2 = a$, $2xy = b$ durch Addition und Subtraktion der zweiten $(x + y)^2 = a + b$ und $(x - y)^2 = a - b$ bilden und hieraus $x + y$ und $x - y$ bestimmen.

c) Exponentialgleichungen (logarithmische Gleichungen).

1. Grundaufgabe:

$$a^x = b;$$

$$x \log a = \log b, \qquad x = \frac{\log b}{\log a}.$$

2. Besondere Fälle:

1. $$a^x = a^r\,; \qquad x = r\,.$$

2. $$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \left(\frac{b}{a}\right)^m; \qquad x = -m\,.$$

3. $$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{c}{d}\,; \qquad x = \frac{\log c - \log d}{\log a - \log b}\,.$$

4. $$(a\,b)^{\frac{m+x}{n\,x}} = a \cdot b^{\frac{n+x}{r+x}}\,.$$

Logarithmiere, sammle die Glieder mit x nach links, die ohne x nach rechts, und löse nach x auf.

5. $a\,b^x + c\,(d + b^{-x}) = e$; setze und bestimme zunächst $y = b^x$.

6. $$a^{x+p} + a^{x+q} = b^{x+m} + b^{x+n}\,;$$
$$a^x\,(a^p + a^q) = b^x\,(b^m + b^n)\,;$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{b^m + b^n}{a^p + a^q}\,;$$ hieraus folgt x.

7. $$x^r\,x^{\log x} = b\,;$$
$$r \log x + \log x \cdot \log x = \log b\,,$$
setze und bestimme $y = \log x$ usf.

8. $$\log(a\,x + b) + \log(c\,x + d) = m\,;$$
es ist $\log[(a\,x + b)\,(c\,x + d)] = m$, also
$$(a\,x + b)\,(c\,x + d) = 10^m\,,$$
woraus x folgt.

9. $$a^x\,b^y = p\,, \qquad c^x\,d^y = q\,;$$
logarithmiere, bestimme aus den erhaltenen Gleichungen $\log x$ und $\log y$ und hieraus x und y.

§ 24. Diophantische Gleichungen ersten Grades.

a) Mit zwei Unbekannten.

1. Eulersche Methode. (Absonderung der größten Ganzen.) Beispiel:

$$61x + 7y = 1000$$

$$y = \frac{1000 - 61x}{7} = 143 - 9x + \frac{2x - 1}{7} (= u)$$

$$x = \frac{7u + 1}{2} = 3u + \frac{u + 1}{2} (= v)$$

$u = 2v - 1$, also

$$x = \frac{14v - 7 + 1}{2} = 7v - 3$$

$$y = \frac{1000 - 61(7v - 3)}{7} = 169 - 61v\,.$$

v	x	y
0	−3	169
1	4	108
2	11	47
3	18	−14

$\begin{cases} 4 \\ 108 \end{cases}$ $\begin{cases} 11 \\ 47 \end{cases}$ sind also die brauchbaren Werte für die Unbekannten.

2. Kettenbruchmethode von Lagrange:

Ist 1. $ax + by = c$ gegeben, so setze man

2. $a_1 x + b_1 y = t$, dann folgt:

3. $$\begin{cases} x = \dfrac{b_1 c - b t}{a b_1 - a_1 b}, \\[2ex] y = \dfrac{a t - a_1 c}{a b_1 - a_1 b}, \end{cases}$$

x und y sind dann ganze Zahlen, wenn $a b_1 - a_1 b = \pm 1$.

Dies ist der Fall, wenn $\frac{a_1}{b_1}$ vorletzter Näherungswert des in einen Kettenbruch verwandelten Bruches $\frac{a}{b}$ ist (s. § 8_4).

Beispiel:

1. $$61x + 7y = 1000 .$$

Näherungswerte des in einen Kettenbruch verwandelten Bruches $\frac{7}{61}$ sind: $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{3}{26}$, $\frac{7}{61}$, also

2. $26x + 3y = t$

3. $$x = 3000 - 7t = 7(429 - t) - 3 = 7v - 3$$

4. $$y = \frac{t - 26x}{3} = \frac{429 - v - 182v + 78}{3} = 169 - 61v.$$

v	0	1	2	3
x	−3	4	11	18
y	169	108	47	−14

Res.: $\begin{cases} 4 \\ 108 \end{cases}$ $\begin{cases} 11 \\ 47 \end{cases}$.

3. Ist $x = p$, $y = q$ eine Einzellösung der Gleichung $ax \pm by = c$, so ist $x = p + bt$, $y = q \mp at$ die allgemeine Lösung.

b) Mit drei Unbekannten.

4. Man eliminiere aus den zwei gegebenen Gleichungen eine der drei Unbekannten, z. B. z, dann löse man die erhaltene Gleichung nach a) auf und berechne z vermittels der erhaltenen Werte von x und y aus einer der gegebenen Gleichungen.

§ 25. Allgemeine Sätze über höhere Gleichungen.

1. Hat $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$ die Wurzel $x = \alpha$, so ist $f(x)$ durch $x - \alpha$ ohne Rest teilbar.

2. Eine Gleichung n-ten Grades hat n, aber auch nur n Wurzeln.

3. Sind $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, so ist

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) \text{ und}$$

4. **Symmetrische Funktionen der Wurzeln:**

$$a_1 = -\Sigma K_1(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = -\Sigma \alpha_r;$$

$$a_2 = \Sigma K_2(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \dots + \alpha_2 \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1} \alpha_n = \Sigma \alpha_r \alpha_s;$$

$$a_3 = -\Sigma K_3(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) = -(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \dots + \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 + \dots + \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \alpha_n) = -\Sigma \alpha_r \alpha_s \alpha_t.$$

. . . .

$$a_n = (-1)^n \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \dots \alpha_n.$$

Newtons Formeln für die Potenzsummen der Wurzeln:

Setzt man $\alpha_1^k + \alpha_2^k + \dots + \alpha_n^k = s_k$, so ist

$$s_1 + a_1 = 0$$

$$s_2 + a_1 s_1 + 2 a_2 = 0$$

$$s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3 a_3 = 0$$

. . . .

Allgemeine rekurrierende Formel:

$$s_r + a_1 s_{r-1} + a_2 s_{r-2} + \dots + a_n s_{r-n} = 0,$$

sie ist auch noch gültig für $r \gtreqless n$, hierbei ist $s_0 = n$.

Unabhängige Formel:

$$s_r = (-1)^r \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 2\,a_2 & a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ 3\,a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r\,a_r & a_{r-1} & a_{r-2} & \ldots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Um aus den Potenzsummen der Wurzeln die Koeffizienten der Gleichung zu berechnen, hat man:

$$a_r = \frac{(-1)^r}{r!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_r & s_{r-1} & s_{r-2} & s_{r-3} & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

5. Satz von Descartes. Eine Gleichung mit reellen Koeffizienten hat höchstens so viel reelle positive Wurzeln als Zeichenwechsel und höchstens so viel reelle negative Wurzeln als Zeichenfolgen (die fehlenden Glieder sind mit ± 0 zu ergänzen).

Eine Gleichung von ungeradem Grad hat mindestens eine reelle Wurzel, deren Vorzeichen entgegengesetzt ist dem Vorzeichen von a_n.

Hat eine Gleichung geraden Grades a_n negativ, so sind mindestens zwei reelle, mit verschiedenen Vorzeichen versehene Wurzeln vorhanden.

6. Bei einer Gleichung, die nur reelle Wurzeln haben kann, ist die Anzahl der positiven gleich der der Zeichenwechsel, die Anzahl der negativen gleich der der Zeichenfolgen (Bestimmung der Hauptachsen einer Fläche II. Ordn.).

7. Ist $p + q i$ eine Wurzel einer Gleichung mit reellen Koeffizienten, so ist auch $p - q i$ eine Wurzel. Die Gleichung hat, wenn sie imaginäre Wurzeln hat, stets eine gerade Anzahl derselben.

8. Sind die Koeffizienten der r niedersten Potenzen von x (x^0 eingeschlossen) gleich Null, so hat die Gleichung r mal die Wurzel Null; sind die der r höchsten Potenzen 0, so hat sie r mal die Wurzel ∞.

9. Ist α eine Wurzel der Gleichung 1., so ergibt sich aus derselben durch Division mit $x - \alpha$ die Gleichung $n - 1$-ten Grades.

$$\frac{f(x)}{x-\alpha} = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2} x + b_{n-1} = 0,$$

dann ist $$b_r = b_{r-1} \cdot \alpha + a_r.$$

Beispiel: $3x^5 - 7x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 7x - 2 = 0$

soll durch $x - 2$ dividiert werden.

	3	−7	+2	+4	−7	−2
2	3	−1	0	+4	+1	0

Res.: $3x^4 - x^3 + 4x + 1 = 0$.

Durch diese Division wird festgestellt, ob $x = 2 (= \alpha)$ eine Wurzel der ursprünglichen Gleichung ist.

Um die ganzen rationalen Wurzeln einer Gleichung aufzufinden, zerlege man a_n in Faktoren $p_1, p_2 \ldots$ und versuche, ob $x - p_1$, $x - p_2 \ldots$ ohne Rest in die Gleichung aufgeht (s. auch § $29_{1,a}$).

10. Wurzelverkleinerung. Soll die Gleichung

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

in die Gleichung

$$\varphi(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0$$

umgewandelt werden, so daß die Wurzeln der letzteren Gleichung um k kleiner sind als die der gegebenen, so muß $f(x) = \varphi(x - k)$, also

$$a_0 x_n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = p_0 (x - k)^n + p_1 (x - k)^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(x - k) + p_n$$

sein und es sind daher $p_n, p_{n-1}, \ldots p_0$ die Reste, die sich ergeben, wenn man f(x) fortlaufend mit $x - k$ dividiert.

Beispiel: $x^4 - 4x^3 - 39x^2 + 46x + 80 = 0$

$$\begin{array}{llllll}
4) & 1 & 0 & -39 & -110 & -360 = p_n \\
4) & 1 & 4 & -23 & -202 = p_{n-1} & \\
4) & 1 & 8 & +9 = p_{n-2} & & \\
4) & 1 & 12 = p_1 & & & \\
4) & 1 = p_0, & & & &
\end{array}$$

die gesuchte Gleichung ist:

$$x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 202x - 360 = 0.$$

11. Wegschaffung des zweiten Gliedes. Soll die Gleichung $f(x) = 0$ durch die Einsetzung $x = y + k$ so umgeformt werden, daß das zweite Glied der neuen Gleichung 0 ist, so ist, da $p_1 = a_1 + n k a_0 = 0$,

$$k = -\frac{a_1}{n a_0}.$$

Beispiel:

$x^3 - 18x^2 + 105x - 196 = 0$; $\quad k = -\frac{-18}{3} = +6$;

$$\begin{array}{llll}
6) & 1 - 12 + 33 + 2 & & y = x - 6; \\
6) & 1 - \ \ 6 - \ \ 3 & & \\
6) & 1 \quad\ \ 0 & & \text{Res.: } y^3 - 3y + 2 = 0.
\end{array}$$

12. Mehrfache Wurzeln: Haben $f(x) = 0$ und $f'(x) = 0$ einen gemeinschaftlichen Teiler von der Form $(x - \alpha_1)^k (x - \alpha_2)^l \ldots$, so ist α_1 eine $k + 1$ fache, α_2 eine $l + 1$ fache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$.

13. Gemeinschaftliche Wurzeln zweier Gleichungen, Resultante. — Eine gemeinschaftliche Wurzel zweier Gleichungen $f(x) = 0$ und $\varphi(x) = 0$ ist Wurzel der Gleichung, die man durch Nullsetzen des gemeinschaftlichen Teilers von $f(x)$ und $\varphi(x)$ erhält.

Die Bedingung für das Bestehen einer gemeinschaftlichen Wurzel zweier Gleichungen heißt die Resultante derselben; sie ist das Resultat der Elimination der Unbekannten aus den zwei Gleichungen. Sind diese

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$
$$b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m = 0,$$

so ist die Resultante

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & \ldots & a_{n-1} & a_n & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & a_0 & & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_m & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & b_0 & & \ldots & b_m \end{vmatrix}.$$

Man findet den Wert der gemeinsamen Wurzel aus

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & \ldots & & a_n & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ (b_0 x + b_1) & b_2 & \ldots & & b_m & \ldots & 0 \\ b_0 & b_1 & \ldots & & b_m & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix} = 0.$$

14. Elimination einer Unbekannten aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y. — Man ordne beide Gleichungen nach Potenzen der einen Unbekannten, z. B. von x, und bilde die Resultante aus beiden, indem man die Koeffizienten jener Unbekannten als bekannte Größen betrachtet. Die Resultante verschwindet wegen des gleichzeitigen Bestehens beider Gleichungen. Diese Resultante, das Eliminationsresultat von x, ist im allgemeinen eine Gleichung vom $m \cdot n$-ten Grade in y.

§ 26. Binomische Gleichungen.

1. $$\begin{cases} x^n = +1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi\,; \\ x = \sqrt[n]{+1} = (+1)^{\frac{1}{n}} = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}\,, \end{cases}$$

wobei k alle ganzen Werte von 0 bis $n-1$ erhält.

2. $$\begin{cases} x^n = -1 = \cos(2k+1)\pi + i\sin(2k+1)\pi\,; \\ x = \sqrt[n]{-1} = \cos\dfrac{2k+1}{n}\pi + i\sin\dfrac{2k+1}{n}\pi\,. \end{cases}$$

3. Beispiele.

1. $x^3 = 1\,;$

$$\begin{array}{ll} \text{mit } k = 0 \;\ldots & \left\{\begin{array}{l} x = 1\,, \\ x = \cos 120^0 \pm i\sin 120^0 = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \begin{cases}\alpha \\ \beta\end{cases}. \end{array}\right. \\ \text{mit } k = \begin{cases}1 \\ 2\end{cases} \ldots & \end{array}$$

2. $x^3 = -1\,;$

$$\begin{array}{ll} \text{mit } k = \begin{cases}0 \\ 2\end{cases} \ldots & \left\{\begin{array}{l} x = \cos 60^0 \pm i\sin 60^0 = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \begin{cases}-\beta \\ -\alpha\end{cases}, \\ x = -1\,. \end{array}\right. \\ \text{mit } k = 1 \;\ldots & \end{array}$$

4. $$\left\{\begin{array}{l|l} x^n = a & x^n = -a \\ x = \left(\sqrt[n]{a}\right)\cdot\sqrt[n]{+1} & x = \left(\sqrt[n]{a}\right)\cdot\sqrt[n]{-1}\,, \end{array}\right.$$

wobei $(\sqrt[n]{a})$ den absoluten, reellen Wert von $\sqrt[n]{a}$ bedeutet, welchen man durch direkte Wurzelausziehung oder logarithmische Berechnung erhält, während $\sqrt[n]{+1}$ und $\sqrt[n]{-1}$ jeden der durch 1. und 2. bestimmten Werte darstellen.

§ 27. Kubische Gleichungen.

1. $$\left\{\begin{array}{l|l} x^3 - a = 0 & x^3 + a = 0 \\ x = \sqrt[3]{a} = \begin{cases} (\sqrt[3]{a}) \\ (\sqrt[3]{a}) \cdot \alpha \\ (\sqrt[3]{a}) \cdot \beta \end{cases} & x = \sqrt[3]{-a} = \begin{cases} -(\sqrt[3]{a}) \\ -(\sqrt[3]{a}) \cdot \alpha \\ -(\sqrt[3]{a}) \cdot \beta \end{cases} \end{array}\right.$$

s. § 26, $3_{1,2}$.

2. $$x^3 + a x^2 + b x + c = 0 .$$

Transformiere die Gleichung (durch Wurzelverkleinerung um $-\frac{a}{3}$ oder Substitution von $x = y - \frac{a}{3}$ s. § 25_{10}) auf die Form

$$y^3 + 3 p y + 2 q = 0$$

und setze $y = u + v$ und $u^3 + v^3 + 2 q = 0$, dann ist

$$\left\{\begin{array}{l} u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} \\ v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \end{array}\right. \quad \text{(Diskriminante: } q^2 + p^3\text{)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = u + v \\ y_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\,(u - v) \\ y_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\,(u - v) \end{array}\right. \quad \text{(Cardansche Formeln).}$$

Die Cardanschen Formeln führen zu einer Lösung nur solange $q^2 + p^3 > 0$; sie liefern dann eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln.

3. Fall der drei reellen Wurzeln (casus irreducibilis). Ist $q^2 + p^3 \leqq 0$, so hat die Gleichung drei reelle Wurzeln (die Cardanschen Formeln liefern sie aber, wenn $q^2 + p^3 < 0$, in imaginärer Form); dann

$$\left\{\begin{aligned} &\cos\varphi = \frac{-q}{\sqrt{-p^3}} \\ &y_1 = 2\sqrt{-p}\cdot\cos\frac{\varphi}{3} \\ &y_2 = -2\sqrt{-p}\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 60^0\right) \\ &y_3 = -2\sqrt{-p}\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{3} - 60^0\right). \end{aligned}\right.$$

4. Trigonometrische Auflösung für Fall 2:

$$q^2 + p^3 > 0 .$$

1. $p > 0$

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{p^3}}{q}. \qquad \sqrt[3]{\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}} = \operatorname{tg}\psi \\ &y_1 = \mp 2\sqrt{p}\cdot\operatorname{ctg} 2\psi \\ &y_2 = \pm\sqrt{p}\left(\operatorname{ctg} 2\psi + \frac{i\sqrt{3}}{\sin 2\psi}\right) \\ &y_3 = \pm\sqrt{p}\left(\operatorname{ctg} 2\psi - \frac{i\sqrt{3}}{\sin 2\psi}\right); \end{aligned}\right.$$

hierbei sind die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen, je nachdem $q \gtrless 0$.

2. $p < 0$

$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{+q}; \quad \sqrt[3]{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}} = \operatorname{tg}\psi \\ y_1 = \mp 2\sqrt{-p} \cdot \dfrac{1}{\sin 2\psi} \\ y_2 = \pm\sqrt{-p}\left(\dfrac{1}{\sin 2\psi} + i\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2\psi\right) \\ y_3 = \pm\sqrt{-p}\left(\dfrac{1}{\sin 2\psi} - i\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2\psi\right). \end{cases}$$

Zeichen wie oben bei 1. zu nehmen.

§ 28. Biquadratische Gleichungen.

1. Besondere Fälle s. § 23, 6_1, 7_2.
2. Eulersche Methode.
   1. Transformierung der Gleichung auf die Form
      $$x^4 + a x^2 + b x + c = 0.$$
   2. Bildung der Resolvente
      $$y^3 + \frac{a}{2} y^2 + \frac{a^2 - 4c}{16} y - \frac{b^2}{64} = 0.$$

Sind die Wurzeln dieser Gleichung y_1, y_2, y_3, dann ist

$$\begin{cases} x_1 = \pm(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}) \\ x_2 = \pm(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}) \\ x_3 = \pm(-\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}) \\ x_4 = \pm(-\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}), \end{cases}$$

wobei die Vorzeichen so zu wählen sind, daß

$$\sqrt{y_1} \cdot \sqrt{y_2} \cdot \sqrt{y_3} = -\frac{b}{8}.$$

§ 29. Höhere numerische Gleichungen. — Näherungsmethoden.

1. Ganze Wurzelwerte. Dieselben sind in den Faktoren des Absolutgliedes a_n enthalten. Die Bestimmung derjenigen Faktoren, welche zugleich Wurzeln der Gleichung sind, wird erleichtert durch folgendes: a) Es können nur diejenigen Faktoren in Betracht kommen, welche innerhalb der Wurzelgrenzen liegen (s. u. 3); b) nimmt man eine Wurzelverkleinerung (s. § 25) z. B. um 1 vor und zerlegt in der neuen Gleichung ebenfalls das Absolutglied a'_n, so kann als Wurzel der ursprünglichen Gleichung nur ein solcher Faktor von a_n in Betracht kommen, welcher um 1 größer ist als ein Faktor von a'_n.

2. Wird $f(x)$ für $x = p$ negativ und für $x = q$ positiv, so liegt eine ungerade Zahl von Wurzeln, also mindestens eine, zwischen p und q.

3. Ist $-a_m$ der erste, und $-a_p$ der numerisch größte negative Koeffizient, so ist $x < 1 + \sqrt[m]{a_p}$ eine obere Grenze für die positiven Wurzeln. Vertauscht man x mit $-x$ und sucht in der neuen Gleichung wieder die obere Grenze für die positiven Wurzeln, so ist dieselbe mit negativem Zeichen versehen die untere Grenze für die negativen Wurzeln der gegebenen Gleichung.

4. Satz von Budan(-Fourier). Bildet man die Reihe $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x) \ldots f^{(n)}(x)$ und setzt man hierin $x = a$ und $x = b$, wobei $a < b$, so hat die Gleichung $f(x) = 0$ nicht mehr Wurzeln zwischen a und b, als die Reihe Zeichenwechsel verliert, wenn man von a zu b übergeht.

5. Satz von Sturm. Sind $f_2(x)$, $f_3(x) \ldots f_m(x)$ die mit umgekehrten Zeichen genommenen Reste, die

sich bei der Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Teilers der Funktion $f(x)$ und ihres Differentialquotienten $f'(x)$ ergeben, und setzt man in der Reihe der Funktionen $f, f', f_1, f_2, f_3 \ldots f_m$ für x einmal a, das andere Mal b, so hat die erste Reihe gerade so viel Zeichenwechsel mehr als die zweite, wie die Gleichung $f(x) = 0$ Wurzeln zwischen a und b hat.

6. Newtons Methode. Hat man durch Versuche (oder durch Aufzeichnung der Kurve) gefunden, daß α annähernd eine Wurzel der Gleichung

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

ist, so ist an α noch eine Korrektion anzubringen, um den wirklichen Wert zu erhalten. Die erste Korrektion p ergibt sich aus (Taylors Satz s. § 87)

$$p = \frac{-(a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \ldots + a_n)}{n a_0 \alpha^{n-1} + (n-1) a_1 \alpha^{n-2} + \ldots + a^{n-1}} = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

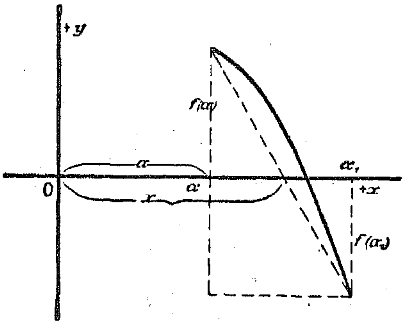
Setzt man nun $\alpha + p$ an Stelle von α, so erhält hiermit aus der angegebenen Beziehung eine weitere Korrektion p_1 usf.

7. Regula falsi. Hat die Gleichung $f(x) = 0$ eine Wurzel zwischen α und α_1 [$f(\alpha)$ und $f(\alpha_1)$ haben also entgegengesetzte Vorzeichen], so erhält man einen angenäherten Wert für die Wurzel, wenn man an Stelle des Schnittpunktes der Kurve mit der X-Achse den der Sehne setzt, welche die zu den Abszissen α und α_1 gehörigen Kurvenpunkte verbindet; man hat dann:

$$\frac{x - \alpha}{f(\alpha)} = \frac{x - \alpha_1}{f(\alpha_1)}, \quad \text{somit}$$

$$x = \alpha + \frac{(\alpha_1 - \alpha) f(\alpha)}{f(\alpha) - f(\alpha_1)}.$$

Mit dem neuen Wert und einem benachbarten kann das Verfahren wiederholt werden usf. — Dieses Verfahren ist bei algebraischen und transzendenten Gleichungen anwendbar. Beispiel:



$$x^x = 100\,, \quad \text{also}$$

$$x \log x = 2 \quad \text{oder} \quad x \log x - 2 = 0\,.$$

Ausrechnung:

x	$f(x) = x \log x - 2$
1	-2
2	$-1{,}4$
3	$-0{,}5687$
4	$+0{,}4084$

$$x = 3 + \frac{1 \cdot 0{,}57}{0{,}98} = 3{,}58$$

3,58	$+0{,}0171$
3,60	$-0{,}0027$

$$x = 3{,}58 + \frac{0{,}02 \cdot 0{,}0171}{0{,}0198}$$

$$= 3{,}58 + 0{,}01727 = 3{,}59727 \text{ usf.}$$

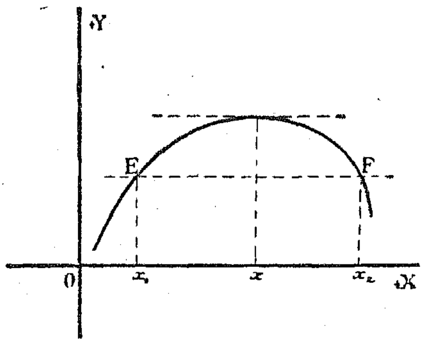
(die richtige Wurzel liegt zwischen 3,59728 und 3,59729).

§ 30. Größte und kleinste Werte.
(Elementare Behandlung.)

Ist y eine Funktion von x, also eine von x abhängige Größe, und z. B.

1. $$y = a x^3 + b x^2 + c x + d ,$$

so können hierbei die verschiedenen Werte von x als Abszissen, die von y als Ordinaten einer Kurve betrachtet werden.



Zieht man eine Parallele EF zur X-Achse, welche die betreffende Funktionskurve in den Punkten E, F, deren Abszissen x_1 und x_2 sind, schneidet, so hat y in diesen Punkten E und F die gleichen Werte, es ist also für obiges Beispiel 1:

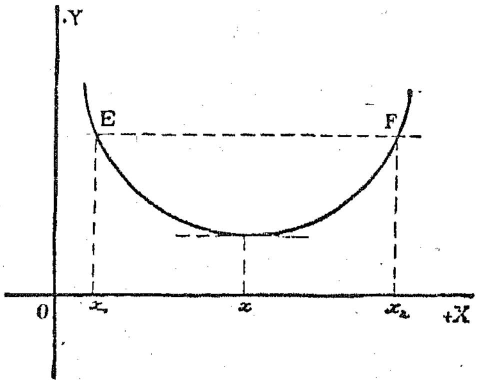
$$a x_1^3 + b x_1^2 + c x_1 + d = a x_2^3 + b x_2^2 + c x_2 + d ,$$

woraus $a(x_1^3 - x_2^3) + b(x_1^2 - x_2^2) + c(x_1 - x_2) = 0$, folglich nach Division mit $x_1 - x_2$

2. $$a(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) + b(x_1 + x_2) + c = 0 .$$

Wenn sich nun EF parallel weiter bewegt, so werden x_1 und x_2 für den Punkt, wo y einen größten oder kleinsten Wert erreicht, einander gleich. Ist die Abszisse dieses Punktes x, so ergibt sich demnach aus 2.

3. $$3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c = 0\,.$$



Durch Auflösen dieser Gleichung findet man die Werte von x, welche y zu einem Maximum oder Minimum machen.

Das Verfahren läßt sich nach Vorstehendem in folgender Weise fassen*):

Um einen größten oder kleinsten Wert (oder mehrere) einer abhängigen Größe zu finden, muß man:

1. die Funktion in einer unabhängigen veränderlichen Größe x ausdrücken;

2. in diesen Ausdruck x_1 und dann x_2 einsetzen und die sich ergebenden Ausdrücke einander gleich setzen;

3. die gleich hohen Glieder zusammenfassen, so daß sich mit dem Faktor $x_1 - x_2$ durchdividieren läßt.

*) Vgl. hierzu: Martus, Maxima und Minima, Berlin 1861.

4. Nachdem mit $x_1 - x_2$ durchdividiert ist, hat man in der hierdurch erhaltenen Gleichung $x_1 = x_2 = x$ zu setzen und die Gleichung aufzulösen. Für die gefundenen Werte von x erreicht y ein Maximum oder Minimum.

5. Ob ein größter oder kleinster Wert vorliegt, ergibt sich aus der Natur der Aufgabe oder durch Berechnung der Werte von y für solche Werte von x, die dem gefundenen benachbart sind.

Bemerkungen: 1. Bei Funktionen, in denen eine Quadratwurzel vorkommt, muß vor dem Dividieren mit $x_1 - x_2$ in der Regel noch umgeformt werden.

Beispiel:

$$m x_1 + n + \sqrt{a x_1^2 + b x_1 + c} = m x_2 + n + \sqrt{a x_2^2 + b x_2 + c},$$

$$m(x_1 - x_2) + \sqrt{a x_1^2 + b x_1 + c} - \sqrt{a x_2^2 + b x_2 + c} = 0,$$

woraus

$$m(x_1 - x_2) + \frac{a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2)}{\sqrt{a x_1^2 + b x_1 + c} + \sqrt{a x_2^2 + b x_2 + c}} = 0,$$

$$\text{folglich} \quad m + \frac{a(x_1 + x_2) + b}{\sqrt{a x_1^2 + b x_1 + c} + \sqrt{a x_2^2 + b x_2 + c}} = 0.$$

Nun ist $x_1 = x_2 = x$ zu setzen usf.

2. Das Anwendungsgebiet der obigen, elementaren Methode ist begrenzt; allgemeine Verfahren für Auffindung größter und kleinster Werte gibt die höhere Analysis (s. § 89).

Ebene Geometrie.

§ 31. Gerade Linien und Winkel am Kreis; regelmäßiges Vieleck.

1. Ein Punkt liegt innerhalb, auf oder außerhalb einer Kreislinie, je nachdem sein Mittelpunktsabstand $\lesseqgtr$ als der Halbmesser ist.

2. Eine Gerade hat mit einem Kreis zwei, einen oder keinen Punkt gemeinschaftlich, d. h. sie schneidet, berührt oder trifft nicht, je nachdem ihr Mittelpunktsabstand $\lesseqgtr$ als der Halbmesser ist.

3. a) Gleiche Sehnen haben gleiche Mittelpunktsabstände und umgekehrt.

b) Von zwei ungleichen Sehnen hat die größere den kleineren Mittelpunktsabstand und umgekehrt.

4. Zu gleichen Zentriwinkeln in gleichen Kreisen oder in demselben Kreis gehören gleiche Bögen, Sehnen, Aus- und Abschnitte und umgekehrt.

5. Ein Peripheriewinkel ist die Hälfte des zugehörigen Zentriwinkels.

6. Alle Peripheriewinkel über demselben Bogen sind einander gleich.

Datum a, r, α.

7. Der Tangentensehnenwinkel ist gleich dem Peripheriewinkel im nicht eingeschlossenen Bogen.

8. a) Im **Kreisviereck** ist die Summe zweier Gegenwinkel gleich der Summe der zwei andern, d. h. 2 R.

b) Wenn in einem Viereck die Summe zweier Gegenwinkel 2 R ist, so ist es ein Kreisviereck.

9. a) Im **Tangentenviereck** ist die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der zwei andern.

b) Wenn in einem Viereck die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der zwei andern ist, so ist das Viereck ein Tangentenviereck.

10. **Tangentenabschnitte** beim Dreieck

	an den Inkreis,	an den Ankr. d. Gegens.
von der Ecke A	$\frac{b+c-a}{2}$ $(=s-a)$,	$\frac{b+c+a}{2}=s$
von der Ecke B	$\frac{c+a-b}{2}$ $(=s-b)$,	$\frac{b+c+a}{2}=s$
von der Ecke C	$\frac{a+b-c}{2}$ $(=s-c)$,	$\frac{b+c+a}{2}=s$.

Datum s, ϱ_1, α.

11. **Zwei Kreise** K und K_1

a) berühren sich, wenn sie einen Punkt der Zentrale gemeinschaftlich haben,

b) haben einen Punkt der Zentrale gemeinschaftlich, wenn sie sich berühren.

c) K und K_1 berühren sich, wenn $z = r \pm \varrho$;

K und K_1 schneiden sich, wenn $\begin{cases} z < r + \varrho \text{ und} \\ z > r - \varrho . \end{cases}$

K liegt innerhalb K_1, wenn $z < r - \varrho$;

K liegt außerhalb K_1, wenn $z > r + \varrho$,

z Zentrale, r der größere, ϱ der kleinere Halbmesser.

12. Kreisteilung. Zu einem Zentriwinkel von $\frac{4}{n}R$ — oder einem Peripheriewinkel von $\frac{2}{n}R$ — gehört der n-te Teil der Kreislinie.

13. Regelmäßiges Vieleck.

Eckenzahl:	3	4	5	6	... n
Zentriwinkel:	$\frac{4}{3}R$	$1R$	$\frac{4}{5}R$	$\frac{2}{3}R$	... $\frac{4}{n}R$
Polygonwinkel:	$\frac{2}{3}R$	$1R$	$\frac{6}{5}R$	$\frac{4}{3}R$	... $\frac{2n-4}{n}R$.

§ 32. Proportionalität von Strecken, Ähnlichkeit.

1. Werden die Schenkel eines Winkels oder zweier Scheitelwinkel von zwei Parallelen geschnitten, so sind die Abschnitte auf dem einen Schenkel proportional den entsprechenden auf dem andern und die Parallelen verhalten sich wie die zugehörigen Scheitelabschnitte desselben Schenkels. — Umkehrung des ersten Teils.

2. Die Halbierungslinie eines Winkels im Dreieck teilt die Gegenseite innerlich im Verhältnis der Anseiten; die Halbierungslinie des Außenwinkels teilt sie äußerlich in demselben Verhältnis. — Umkehrung.

3. Werden die Schenkel eines Winkels oder zweier Scheitelwinkel von zwei Parallelen geschnitten, so sind die abgeschnittenen Dreiecke einander ähnlich.

4. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn

a) zwei Seiten proportional und der eingeschlossene Winkel gleich,

b) zwei Winkel gleich,

c) die drei Seiten proportional,

d) zwei Seiten proportional der Gegenwinkel des einen Paares gleich und die Gegenwinkel des andern

Paares gleichartig sind. — (Besonderer Fall: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei Seiten proportional und den Gegenwinkel der größeren gleich haben.)

5. Zwei Höhen eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Seiten, oder wie die reziproken Werte dieser Seiten und umgekehrt; also

$$h : h' : h'' = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = bc : ac : ab\,.$$

6. a) Zieht man von zwei ähnlich liegenden Punkten bei zwei ähnlichen Vielecken Strahlen nach allen entsprechenden Ecken, so entstehen paarweis ähnliche Dreiecke.

Besonderer Fall: Durch die Diagonalen aus zwei entsprechenden Ecken werden zwei ähnliche Vielecke in paarweis ähnliche Dreiecke zerlegt.

b) Entstehen durch Strahlen, die man von zwei Punkten nach den Ecken zweier Vielecke zieht, paarweis ähnliche, in gleicher Reihenfolge liegende Dreiecke, so sind die Vielecke ähnlich und die beiden Punkte ähnlich liegend.

Besondere Fälle: α) Werden zwei Vielecke durch die Diagonalen aus zwei Ecken in paarweis ähnliche in gleicher Reihenfolge liegende Dreiecke zerlegt, so sind die Vielecke ähnlich.

β) Zwei Parallelogramme sind ähnlich, wenn sie einen Winkel gleich und die einschließenden Seiten proportional haben.

7. Regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenzahl sind ähnlich.

8. In ähnlichen Vielecken sind entsprechende Winkel einander gleich und entsprechende Längen

proportional; die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich daher wie entsprechende Seiten.

9. a) Sind zwei Vielecke in perspektivischer Lage und $n-1$ Seitenpaare (worunter keines, das mit einem Strahl zusammenfällt) parallel, so ist auch das n-te Paar parallel und die Vielecke sind ähnlich.

b) Sind zwei Vielecke ähnlich und zwei Seitenpaare parallel, so sind auch die übrigen parallel und die Vielecke sind in perspektivischer Lage.

10. a) Die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

b) Die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist mittlere Proportionale zu den Hypotenusenabschnitten.

11. Ist in einem gleichschenkligen Dreieck die Basis gleich dem größeren Abschnitt des stetig geteilten Schenkels, so ist der Winkel an der Spitze $\frac{2}{5}R$ und umgekehrt. (Bestimmungsdreieck des regelmäßigen Zehnecks.)

12. a) Sekantensatz. Werden die Schenkel eines Winkels oder zweier Scheitelwinkel von einem Kreis geschnitten, so sind die Scheitelabschnitte des einen Schenkels innere, die des andern äußere Glieder einer Proportion, d. h. das Produkt der Scheitelabschnitte ist konstant. (Potenz eines Punktes in Beziehung auf einen Kreis $= PO^2 - r^2$.)

Besonderer Fall: Wird der eine Schenkel eines Winkels von einem Kreis geschnitten, der andere berührt, so ist das Quadrat des Tangentenabschnitts gleich dem Produkt der Scheitelabschnitte der Sekante.

b) Sind auf jedem Schenkel eines Winkels oder zweier Scheitelwinkel vom Scheitel aus je zwei Stücke abgetragen und ist das Produkt der Abschnitte des einen Schenkels gleich dem Produkt der Abschnitte des andern, so liegen die vier Endpunkte der Abschnitte auf einem Kreis.

Besonderer Fall: Sind auf dem einen Schenkel eines Winkels zwei Abschnitte, auf dem andern ein Abschnitt vom Scheitel aus abgetragen und ist das Produkt der Abschnitte des ersten Schenkels gleich dem Quadrat des Abschnitts auf dem zweiten Schenkel, so berührt der durch die Endpunkte der drei Abschnitte gelegte Kreis den zweiten Schenkel.

§ 33. Flächenvergleichung, Inhaltsbeziehungen.

1. Parallelogramme und ebenso Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich.

2. Ein Dreieck ist halb so groß als ein Parallelogramm von gleicher Grundlinie und Höhe.

3. Ein Trapez ist inhaltsgleich mit einem Parallelogramm, wenn beide gleiche Höhe haben und wenn die Grundlinie des Parallelogramms gleich der Mittellinie des Trapezes ist. Trapeze sind gleich, wenn sie gleiche Höhe und gleiche Mittellinie haben.

4. Datum für Parallelogramm und Dreieck: a, h, f^2, für das Trapez: $b+d$, h, f^2.

5. Ein Kreis ist gleich einem Dreieck, dessen Grundlinie gleich dem Umfang und dessen Höhe gleich dem Halbmesser ist.

6. Parallelogramme und ebenso Dreiecke, die einen Winkel gleich haben, verhalten sich wie die Produkte der den gleichen Winkel einschließenden Seiten.
Datum: α, (bc), f^2.

7. Ähnliche Vielecke verhalten sich dem Inhalt nach wie die Quadrate entsprechender Längen.

8. Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

9. Das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten.

10. Pythagoreischer Lehrsatz:

a) Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten.

b) Allgemeiner Pythagoreischer Lehrsatz: Konstruiert man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Figuren, so ist die Figur über der Hypotenuse gleich der Summe der Figuren über den Katheten.

c) Pythagoreischer Lehrsatz für das schiefwinklige Dreieck: Das Quadrat über einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der Quadrate der andern Dreiecksseiten vermehrt oder vermindert um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der andern auf sie, je nachdem der Gegenwinkel der ersten Seite stumpf oder spitz ist (vgl. § 48, 6).

11. Ptolemäischer Lehrsatz, s. § 35, 22.

§ 34. Längen- und Flächenberechnungen.

1. Inhalt des Rechtecks: $a \cdot b$.

2. Inhalt des Quadrats: a^2.

3. Inhalt des Parallelogramms: $a h$.

4. Inhalt J des Dreiecks: $a + b + c = 2s$, ϱ Halbmesser des Inkreises, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 Halbmesser des Ankreises an der Seite a, bzw. b, c)

$$J = \frac{a h}{2} = \varrho \cdot s = \varrho_1 (s - a) = \varrho_2 (s - b) = \varrho_3 (s - c)$$
$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{a b c}{4 r}.$$

5. Inhalt des Trapezes: $\frac{h(b+d)}{2}$.

6. Inhalt des regelmäßigen n-Ecks: $\frac{n \cdot a \cdot \varrho}{2}$.

7. Umfang des Kreises:

$$2 r \pi = d \pi; \quad \left(\text{Näherungsw. v. } \pi = 3{,}1416; \quad = \frac{22}{7}\right).$$

8. Inhalt des Kreises: $r^2 \pi = \frac{d^2}{4} \pi$.

9. Bogen : $2 r \pi = \alpha^0 : 360^0$; Bogen $= \frac{\alpha^0 r \pi}{180^0}$.

10. Sektor : $r^2 \pi = \alpha^0 : 360^0$; Sektor $= \frac{\alpha^0 r^2 \pi}{360^0} = \frac{b r}{2}$.

11. Bogenlänge im Kreis vom Halbmesser 1:

$$\operatorname{arc} \alpha^0 = \frac{\alpha^0 \pi}{180^0} = \frac{\alpha^0}{\frac{180^0}{\pi}}.$$

Regelmäßige Vielecke:

12. Dreieck.

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{3 r}{2} = 3 \varrho$$

$$r = \frac{2}{3} h = \frac{a}{3}\sqrt{3} = 2 \varrho$$

$$\varrho = \frac{h}{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3} = \frac{r}{2}$$

$$J = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{h^2}{3}\sqrt{3} = \frac{3 r^2}{4}\sqrt{3} = 3 \varrho^2 \sqrt{3}.$$

13. Sechseck.

$$r = a = \frac{2}{3}\varrho\sqrt{3}\,; \qquad \varrho = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

$$J = \frac{3\,a^2}{2}\sqrt{3} = \frac{3\,r^2}{2}\sqrt{3} = 2\,\varrho^2\sqrt{3}\,.$$

14. Quadrat.

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{2} = \varrho\sqrt{2}\,; \qquad \varrho = \frac{a}{2} = \frac{r}{2}\sqrt{2}$$

$$J = a^2 = 2\,r^2 = 4\,\varrho^2\,.$$

15. Achteck.

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = \varrho\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

$$\varrho = \frac{a}{2}(\sqrt{2} + 1) = \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$a = r\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 2\,\varrho\,(\sqrt{2} - 1)$$

$$J = 2\,a^2(\sqrt{2} + 1) = 2\,r^2\sqrt{2} = 8\,\varrho^2(\sqrt{2} - 1)\,.$$

16. Fünfeck.

$$r = \frac{a}{10}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}} = \varrho(\sqrt{5} - 1)$$

$$\varrho = \frac{a}{10}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = \frac{r}{4}(\sqrt{5} + 1)$$

$$a = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 2\,\varrho\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

$$d = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1) = \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \varrho\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

$$J = \frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = \frac{5\,r^2}{8}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 5\,\varrho^2\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\,.$$

17. Zehneck.

$$r = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1) = \frac{\varrho}{5}\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}$$

$$\varrho = \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$a = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1) = \frac{2\varrho}{5}\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}$$

$$J = \frac{5a^2}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \frac{5r^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2\varrho^2\sqrt{25-10\sqrt{5}}.$$

§ 35. Zusammenstellung von Daten; weitere Formeln.

A) Datumsbeziehungen. Wo nichts bemerkt ist, beziehen sie sich auf das Dreieck.

1. $h, m, (\beta - \gamma)$.
2. $\begin{cases} h + h', \ a + b, \ \gamma. \\ h - h', \ b - a, \ \gamma. \end{cases}$
3. a, r, α.
4. $\begin{cases} s - a, \ \varrho, \ \alpha. \\ s, \ \varrho_1, \ \alpha. \end{cases}$
5. a, h, f^2.

   Trapez: $b + d, h, f^2$.
6. $\begin{cases} s, \ \varrho, \ f^2. \\ s - a, \ \varrho_1, \ f^2. \end{cases}$

   Tangentenviereck: $a + b + c + d, \varrho, f^2$.
7. $(bc), \alpha, f^2$.
8. $b^2 - c^2, (p + q), (p - q)$ s. u. C_{17}.

B) Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck.

9. $b^2 = ap$, $c^2 = aq$, (a Hyp., p und q Abschn. derselben).

10. $h^2 = pq$.

11. $a^2 = b^2 + c^2$; $a = \sqrt{b^2 + c^2}$.

12. $bc = ah$.

13. Rationale rechtwinklige Dreiecke sind bestimmt durch

$$a = u^2 + v^2, \quad b = u^2 - v^2, \quad c = 2uv.$$

u	v	$u^2 + v^2$ a	$u^2 - v^2$ b	$2uv$ c
2	1	5	3	4
3	1	10	8	6
3	2	13	5	12
4	1	17	15	8
4	2	20	12	16
4	3	25	7	24
5	1	26	24	10
5	2	29	21	20

C) Beziehungen am schiefwinkligen Dreieck.

14. $bp = cq$ (p Projekt. von c auf b, q Projekt. von b auf c).

15. $a^2 = b^2 + c^2 \mp 2cq$ (Pyth. Lehrsatz für das schiefwinklige Δ), (q Projekt. von b auf c). $\alpha \lesseqgtr R$.

16. $bc = 2rh$.

17. $b^2 - c^2 = p_1^2 - q_1^2$ (p_1 und q_1 Projekt. von b und c auf a).

18.
$$\begin{cases} a^2 + 4\,t^2 = 2\,(b^2 + c^2) \\ 4\,(t^2 + t'^2 + t''^2) = 3\,(a^2 + b^2 + c^2) \\ \qquad a^2 = \dfrac{4}{9}\,(2\,t'^2 + 2\,t''^2 - t^2)\,. \end{cases}$$

19. $m^2 = b\,c - v\,w$ (v und w Abschnitte der Seite a, erzeugt durch Winkelhalbierende m).

20. Dreiecksinhalt s. § 34_4.

21.
$$\begin{cases} \varrho \cdot \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3 = J^2 \\ \dfrac{1}{\varrho_1} + \dfrac{1}{\varrho_2} + \dfrac{1}{\varrho_3} = \dfrac{1}{\varrho}\,. \end{cases}$$

22. Sehnenviereck (Ptolemäischer Lehrsatz)

$$e\,e_1 = a\,c + b\,d\,.$$

Inhalt des Sehnenvierecks:

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\,,$$

wobei
$$s = \frac{a + b + c + d}{2}\,.$$

§ 36. Geometrische Örter.

A) Der geometrische Ort für einen Punkt, der

1. von einem Punkt A die Entfernung r hat, ist die Kreislinie um A mit r;

2. von einer Geraden L auf bestimmter Seite derselben die Entfernung h hat, ist die Parallele zu L auf jener Seite im Abstand h;

3. von zwei Punkten A und B gleiche Entfernung hat, ist das Mittellot zu AB;

4. von den Schenkeln eines Winkels gleichen Abstand hat, ist die Halbierungslinie des Winkels;

5. von zwei Parallelen gleichen Abstand hat, ist die Parallele im mittleren Abstand.

B) Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises, der

6. den Halbmesser r hat und durch Punkt A geht, ist die Kreislinie um A mit r;

7. den Halbmesser r hat und die Gerade L auf bestimmter Seite berührt, ist die Parallele im Abstand r auf jener Seite;

8. durch die Punkte A und B gehen soll, ist das Mittellot zu AB;

9. die Schenkel eines Winkels berühren soll, ist die Halbierungslinie des Winkels;

10. zwei Parallelen berührt, ist die mittlere Parallele;

11. eine Gerade L im Punkte A berührt, ist das Lot zu L in A;

12. eine Kreislinie im Punkte A berührt, ist die Verbindungslinie des Mittelpunkts mit A;

13. den Halbmesser ϱ hat und eine Kreislinie K vom Halbmesser r von außen oder innen berührt, ist ein zu K konzentrischer Kreis mit dem Halbmesser $r + \varrho$ oder $r - \varrho$, bzw. $\varrho - r$.

C) Der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke auf derselben Seite über der gemeinsamen Grundlinie a mit

14. demselben Winkel α an der Spitze, ist der Kreisbogen über a, welcher den Winkel α faßt;

15. dem gleichen Inhalt, ist eine Parallele zur Grundlinie;

16. demselben Verhältnis $m:n$ für die Seiten b und c ist ein Halbkreis über der Strecke zwischen den beiden Punkten, welche a innerlich und äußerlich im Verhältnis $m:n$ teilen (Satz des Apollonius).

§ 37. Besondere Linien und Punkte am Dreieck.

In einem Dreieck schneiden sich

1. die Mittellote zu den Seiten in einem Punkt, der von den Ecken gleiche Entfernungen hat (Umkreismittelpunkt 0);

2. die Halbierungslinien der Winkel in einem Punkt, der von den Seiten gleiche Entfernungen hat (Inkreismittelpunkt M); desgleichen die Halbierungslinie eines Winkels und die der beiden Außenwinkel an der Gegenseite (Ankreismittelpunkte M_1, M_2, M_3);

3. die Schwerlinien (seitenhalbierende Transversalen) in einem Punkt und teilen sich gegenseitig im Verhältnis 2 : 1 (Schwerpunkt S);

4. die Höhen in einem Punkt (Höhenschnittpunkt H).

In einem Dreieck liegen:

5. der Höhenschnittpunkt, der Schwerpunkt und der Umkreismittelpunkt in gerader Linie, und es ist hierbei $HS : SO = 2 : 1$;

6. die drei Fußpunkte der Höhen, die drei Halbierungspunkte der Seiten und die drei Halbierungspunkte der oberen Höhenabschnitte auf einem Kreis (Feuerbachscher Kreis).

§ 38. Harmonische Teilung.

1. Wenn die Strecke AB durch die Punkte P und Q innerlich bzw. äußerlich nach demselben Verhältnis geteilt ist, dann heißen A, B, P, Q, harmonische Punkte; A und B, ebenso P und Q heißen zugeordnet. — PQ wird ebenfalls durch A und B harmonisch geteilt.

2. Gehen die Strahlen eines Büschels durch vier harmonische Punkte, so heißt dasselbe ein harmonisches Büschel; je zwei Strahlen, welche durch zwei zugeordnete Punkte gehen, heißen selbst zugeordnet.

3. Zu einem Teilpunkt einer Strecke gibt es nur einen harmonisch zugeordneten Punkt; zu einem Teilstrahl eines Winkels gibt es nur einen harmonisch zugeordneten Strahl.

4. Der zum Halbierungspunkt einer Strecke (in bezug auf die Endpunkte) harmonisch zugeordnete Punkt ist der unendlich ferne Punkt; der zur Halbierungslinie eines Winkels in bezug auf die Schenkel harmonisch zugeordnete Strahl ist das Lot zur Halbierungslinie.

5. a) Wenn man zu einem Strahl eines harmonischen Büschels eine Parallele zieht, so wird das Stück derselben zwischen dem andern Paar zugeordneter Strahlen von dem zum ersten zugeordneten Strahl halbiert. (Bestimmung des vierten harmonischen Elementes zu drei gegebenen.)

b) Umgekehrt: Werden durch drei Strahlen eines Büschels auf einer Geraden gleiche Strecken abgeschnitten und ist der vierte Strahl dieser Geraden parallel, so bilden die vier Strahlen ein harmonisches Büschel.

6. Jede Gerade schneidet ein harmonisches Büschel in harmonischen Punkten.

7. In einer Nebenecke eines vollständigen Vierecks wird der Winkel zweier Gegenseiten durch die Strahlen nach den andern Nebenecken harmonisch geteilt.

8. Auf einer Nebenseite eines vollständigen Vierseits wird der Abstand zweier Gegenecken durch die andern Nebenseiten harmonisch geteilt.

9. Harmonische Proportion, harmonisches Mittel s. § $2_{10, 11}$.

10. Ist M Halbierungspunkt der durch P und Q harmonisch geteilten Strecke AB, so ist:

$$AM^2 = MP \cdot MQ.$$

§ 39. Kreispolaren.

1. Sind A, B, P, Q vier harmonische Punkte und beschreibt man über der Entfernung AB des einen zugeordneten Paares als Durchmesser einen Kreis und errichtet in P ein Lot auf AB, so heißt dieses Lot die Polare von Q in Beziehung auf den Kreis. — Ebenso ist das Lot in Q die Polare von P; P und Q heißen zugeordnete Pole.

2. Die Berührungssehne der von einem Punkt an einen Kreis gezogenen Tangenten ist Polare jenes Punktes. — Eine Tangente ist Polare ihres Berührungspunktes. — Die Polare des Mittelpunktes ist die unendlich ferne Gerade und der Pol eines Durchmessers ist ein unendlich ferner Punkt.

3. Die Polaren aller Punkte einer Geraden schneiden sich in einem Punkt, dem Pole dieser Geraden.

4. Die Pole aller durch einen Punkt gehenden Geraden liegen auf einer Geraden, der Polaren dieses Punktes.

5. Die Polare des Schnittpunktes zweier Geraden ist die Verbindungslinie der Pole derselben.

6. Der Pol der Verbindungslinie zweier Punkte ist der Schnittpunkt der Polaren derselben.

7. Jede durch einen Punkt gehende Sekante wird durch diesen, durch seine Polare und die Kreislinie harmonisch geteilt.

8. In jedem Sehnenviereck ist eine Nebenecke der Pol zur Verbindungslinie der beiden andern Nebenecken.

9. In jedem Tangentenvierseit ist eine Nebenseite die Polare zum Schnittpunkt der beiden andern Nebenseiten.

§ 40. Ceva-, Menelaos-, Pascal-, Brianchon-Satz.

1. Satz des Ceva: Schneiden sich drei Ecktransversalen eines Dreiecks in einem Punkt innerhalb oder außerhalb des Dreiecks, so ist das Produkt dreier nicht aneinanderliegender Seitenabschnitte gleich dem Produkt der drei andern. — (Umkehrung).

2. Satz des Menelaos: Schneidet eine Transversale eines Dreiecks die drei Seiten oder ihre Verlängerungen, so ist das Produkt dreier nicht aneinanderliegender Seitenabschnitte gleich dem Produkt der drei andern. — (Umkehrung).

3. Satz des Pascal: Die drei Schnittpunkte je zweier Gegenseiten eines Sehnensechsecks liegen in einer Geraden.

4. Satz des Brianchon: Die drei Verbindungslinien je zweier Gegenecken eines Tangentensechsecks schneiden sich in einem Punkt.

§ 41. Ähnlichkeitspunkte, Potenzlinien (Chordalen).

1. Zieht man in zwei Kreisen zwei gegenläufige oder gleichläufige parallele Halbmesser, so geht die Verbindungslinie der Endpunkte jedes Paares stets für sich durch denselben festen Punkt. Diese beiden Punkte teilen die Zentrale innerlich und äußerlich im Verhältnis der Halbmesser; sie heißen innerer bzw. äußerer Ähnlichkeitspunkt.

2. Satz des Monge: Die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise, ebenso je zwei innere und ein äußerer liegen auf einer Geraden (Ähnlichkeitsachse).

3. Die Potenzlinie zweier Kreise (d. h. die gerade Linie deren sämtliche Punkte in bezug auf zwei Kreise gleiche Potenz haben, s. § $32,_{12\,a.}$) steht senkrecht auf der Zentrale. Wenn gemeinschaftliche, gleichartige Tangenten vorhanden sind, halbiert sie dieselben; schneiden oder berühren sich die Kreise, so ist die Potenzlinie gemeinschaftliche Sekante oder Tangente im Berührungspunkt; sind die Kreise konzentrisch, so liegt sie in unendlicher Entfernung. Die von einem Punkt der Potenzlinie an die beiden Kreise gezogenen Tangenten sind einander gleich.

4. Die Potenzlinien je zweier von drei gegebenen Kreisen schneiden sich in einem Punkt, dem Potenz- oder Chordalpunkt derselben, oder sie sind parallel.

Stereometrie.

§ 42. Gerade Linien und Ebenen.

1. a) Eine Gerade ist einer Ebene parallel, wenn sie einer in der Ebene liegenden Geraden parallel ist.

b) Ist eine Gerade einer Ebene parallel, so schneidet jede durch die Gerade gelegte Ebene die erste Ebene in einer parallelen Geraden.

c) Ist eine Gerade einer Ebene parallel und zieht man durch einen Punkt der Ebene eine Parallele zu der Geraden, so fällt die Parallele ganz in die Ebene hinein.

2. a) Legt man durch jede von zwei Parallelen eine Ebene, welche die andere schneidet, so ist die Schnittlinie der beiden Ebenen den beiden Geraden parallel.

b) Sind zwei Geraden einer dritten parallel, so sind sie einander selbst parallel.

3. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind die Schnittlinien parallel.

4. Sind die Schenkel zweier Winkel parallel, so sind auch ihre Ebenen parallel.

5. Sind die Schenkel zweier Winkel parallel und beide Paare gleichläufig oder beide gegenläufig, so sind die Winkel gleich; ist das eine Schenkelpaar gleich-, das andere gegenläufig, so sind die Winkel supplementär.

6. Sind zwei Ebenen einer dritten parallel, so sind sie einander selbst parallel.

7. a) Steht eine Gerade zu zwei Geraden einer Ebene senkrecht, so steht sie auf allen in der Ebene liegenden Geraden senkrecht, d. h. sie ist senkrecht zur Ebene.

b) Alle Geraden, welche in demselben Punkte zu einer Geraden senkrecht sind, liegen in einer Ebene, die senkrecht ist zu der Geraden.

8. Zu einer Ebene läßt sich durch einen Punkt auf oder außerhalb derselben nur ein Lot ziehen.

9. Zu einer Geraden läßt sich durch einen auf oder außerhalb derselben gelegenen Punkt nur eine senkrechte Ebene legen.

10. a) Jede Ebene durch ein Lot zu einer Ebene ist zu dieser Ebene senkrecht.

b) Eine Gerade, welche innerhalb einer von zwei zueinander senkrechten Ebenen senkrecht zu deren Schnittlinie ist, ist auch senkrecht zur andern Ebene.

c) Eine Gerade, welche senkrecht zu einer von zwei senkrechten Ebenen ist, fällt ganz in die andere oder ist ihr parallel.

d) Sind zwei sich schneidende Ebenen senkrecht zu einer dritten, so ist auch ihre Schnittlinie senkrecht zur dritten.

11. Ist ein Winkel, dessen einer Schenkel in der Projektionsebene liegt, ein R, so ist auch seine Projektion ein R; umgekehrt ist die Projektion ein R, so ist der Winkel selbst ein R.

12. a) Stehen zwei Geraden auf derselben Ebene senkrecht, so sind sie parallel.

b) Ist die eine von zwei parallelen Geraden senkrecht zu einer Ebene, so ist es auch die andere.

13. a) Stehen zwei Ebenen auf derselben Geraden senkrecht, so sind sie parallel.

b) Ist die eine von zwei parallelen Ebenen zu einer Geraden senkrecht, so ist es auch die andere.

14. Das Lot von einem Punkt auf eine Ebene ist die kürzeste Strecke zwischen Punkt und Ebene und umgekehrt.

15. Diejenigen Strecken zwischen einer Ebene und einem Punkt außerhalb derselben sind einander gleich, deren Endpunkte von der Projektion des ersten Punktes gleichweit entfernt sind, und umgekehrt.

Die gleichen Strecken machen mit der Ebene gleiche Winkel und umgekehrt.

16. Von zwei von einem Punkt nach einer Ebene gezogenen Strecken ist diejenige die kleinere, deren Endpunkt näher bei der Projektion jenes Punktes liegt, und umgekehrt.

Die kleinere der Strecken macht mit der Ebene den größeren Winkel und umgekehrt.

17. Der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene ist kleiner als der Winkel der Geraden mit irgend einer Geraden in der Ebene.

18. Alle parallelen Strecken zwischen zwei parallelen Ebenen sind gleich und machen mit derselben Ebene gleiche Winkel.

19. Die kürzeste Strecke zwischen zwei windschiefen Geraden ist diejenige, die auf beiden Geraden senkrecht steht.

20. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind:

a) entsprechende Keile
b) innere Wechselkeile
c) äußere Wechselkeile

} einander gleich,

und d) innere Gegenkeile
e) äußere Gegenkeile
f) gemischte Wechselkeile

betragen zusammen zwei rechte Keile.

Jeder der sechs Sätze ist umkehrbar.

§ 43. Kugel-, Zylinder-, Kegelfläche.

A) Lagebeziehungen.

1. Ein Punkt liegt innerhalb, auf, außerhalb einer Kugel, eine Gerade und ebenso eine Ebene schneidet, berührt, liegt ganz außerhalb der Kugel, je nachdem der Mittelpunktsabstand $\lesseqgtr$ r ist. (r Halbmesser.)

2. Ein Punkt und ebenso eine zur Achse parallele Gerade liegt innerhalb, auf, außerhalb einer Zylinderfläche, eine zur Achse nicht parallele Gerade und eine zur Achse parallele Ebene schneidet, berührt sie, trifft sie nicht, je nachdem der Abstand von der Achse $\lesseqgtr$ r ist. (r Grundkreishalbmesser.)

3. Eine durch die Spitze eines Kegels gehende Gerade liegt innerhalb, auf, außerhalb einer Kegelfläche, eine durch die Spitze gehende Ebene schneidet, berührt sie, trifft sie nicht, je nachdem der Winkel der Geraden oder der Ebene mit der Achse $\lesseqgtr$ der erzeugende Winkel α ist.

4. Eine Ebene, welche eine Kugel schneidet, schneidet sie in einer Kreislinie. — Eine zur Achse parallele Schnittebene einer Zylinderfläche schneidet diese in zwei zur Achse parallelen Mantellinien. — Eine durch die Spitze eines Kegels gehende Schnittebene schneidet die Kegelfläche in zwei Mantellinien.

5. Eine Berührungsebene an eine Kugel ist (u. a.) bestimmt durch zwei Tangenten im Berührungspunkt,

eine Berührungsebene an eine Zylinder- und ebenso an eine Kegelfläche ist bestimmt durch Berührungsmantellinie und Grundkreistangente.

6. Das Lot vom Kugelmittelpunkt auf eine Kugelkreisebene, Berührungsebene, Sehne der Kugel geht bzw. durch den Kreismittelpunkt, Berührungspunkt, Halbierungspunkt derselben.

Umkehrungen.

7. Zwei Kugeln berühren sich, wenn sie einen Punkt der Zentrale gemeinschaftlich haben, und umgekehrt.

Die Zentrale zweier sich berührender Kugeln ist gleich der Summe oder gleich der Differenz der Halbmesser.

8. Ein Punkt der Kugelfläche ist Pol eines Kugelkreises, wenn er von drei Punkten desselben gleiche sphärische Entfernungen hat; er ist Pol eines Großkreises, wenn er von zwei Punkten desselben sphärische Entfernungen von 90^0 hat.

B) Größenbeziehungen.

9. Der Großkreisbogen ist die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten auf der Kugelfläche.

10. Ist ein sphärisches Dreieck Polardreieck zu einem zweiten, so ist auch das zweite Polardreieck zum ersten.

11. Die Bogengrade der Seiten eines sphärischen Dreiecks ergänzen die Winkelgrade der entsprechenden Winkel des Polardreiecks und die Winkelgrade des sphärischen Dreiecks ergänzen die Bogengrade der entsprechenden Seiten des Polardreiecks zu 180^0.

(Nr. 10 und 11 gelten ebenso für Dreikant und Polardreikant.)

12. Zwei sphärische Dreiecke gleicher Kugeln oder zwei Dreikante sind entsprechend gleich, wenn

a) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel,

b) eine Seite und zwei anliegende Winkel,

c) die drei Seiten,

d) die drei Winkel,

e) zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen gleich sind und der Gegenwinkel der andern in beiden zugleich $\lesseqgtr 90^0$ ist,

f) zwei Winkel und die Gegenseite des einen gleich sind und die Gegenseite des andern in beiden zugleich $\lesseqgtr 90^0$ ist.

13. In jedem sphärischen Dreieck und jedem Dreikant

a) liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber und umgekehrt,

b) liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber und umgekehrt,

c) sind zwei Seiten zusammen größer als die dritte,

d) sind zwei Winkel zusammen kleiner als der um 2 R vermehrte dritte,

e) ist, wenn die Summe zweier Seiten $\gtrless 180^0$, auch die Summe der Gegenwinkel $\gtrless 180^0$ und umgekehrt.

14. Ein sphärisches Zweieck verhält sich zur Kugeloberfläche wie sein Winkel zu 4 R; oder

$$\text{sphärisches Zweieck} = 2\,R^2 \operatorname{arc}\alpha\,.$$

15. Der Inhalt des sphärischen Dreiecks verhält sich zur Kugeloberfläche wie der sphärische Exzeß zu 8 R; oder

$$\text{sphärisches Dreieck} = R^2 \operatorname{arc}(\alpha + \beta + \gamma - 2\,R)\,.$$

16. In einem sphärischen Dreieck liegt

a) die Summe der Winkel zwischen 2 R und 6 R,

b) die Summe der Seiten zwischen 0 und 4 R.

§ 44. Geometrische Örter.

1. Eine um Punkt A mit dem Halbmesser r beschriebene Kugel ist geometrischer Ort

a) für jeden Punkt, der von A den Abstand r hat,

b) für jede Gerade, die von A den Abstand r hat,

c) für jede Ebene, die von A den Abstand r hat,

d) für den Mittelpunkt jeder Kugel vom Halbmesser r, die durch A geht.

2. Eine um die Gerade L als Achse mit dem Grundkreishalbmesser r beschriebene Zylinderfläche ist geometrischer Ort

a) für jeden Punkt, der von L den Abstand r hat,

b) für jede Gerade, die von L den Abstand r hat,

c) für jede Ebene, die von L den Abstand r hat,

d) für den Mittelpunkt jeder Kugel vom Halbmesser r, die L berührt.

3. Eine Kegelfläche mit der Achse L, der Spitze A und dem erzeugenden Winkel α ist geometrischer Ort

a) für jede durch A gehende Gerade, welche mit L den Winkel α bildet,

b) für jede durch A gehende Ebene, welche mit L den Winkel α bildet,

c) für jede durch A gehende Ebene, welche mit einer zu L senkrechten Ebene den Winkel $R - \alpha$ bildet.

4. Eine zu einer Ebene E im Abstand r auf einer Seite derselben parallel gelegte Ebene ist geometrischer Ort

a) für jeden Punkt auf dieser Seite, der von E den Abstand r hat,

b) für jede parallele Gerade auf dieser Seite, die von E den Abstand r hat,

c) für den Mittelpunkt jeder Kugel auf dieser Seite, die E berührt und den Halbmesser r hat,

d) für die Achse jedes Zylinders auf dieser Seite, der den Grundkreishalbmesser r hat und E berührt.

5. Die Mittellotebene zu einer Strecke AB ist geometrischer Ort

a) für jeden Punkt, der von A und B gleiche Entfernungen hat,

b) für jede Gerade, die von A und B gleiche Entfernungen hat und mit AB einen rechten Winkel bildet,

c) für den Mittelpunkt jeder Kugel, die durch A und B geht.

6. Die Mittellotebene zu einem Winkel ABC ist geometrischer Ort

a) für jeden Punkt, der von den Schenkeln gleichen Abstand hat,

b) für jede durch B gehende Gerade, die mit den Schenkeln gleiche Winkel bildet,

c) für den Mittelpunkt jeder Kugel, welche beide Schenkel berührt.

7. Die Halbierungsebene eines Keils (MQ) ist geometrischer Ort

a) für jeden Punkt, der von M und Q gleichen Abstand hat,

b) für den Mittelpunkt jeder Kugel, welche M und Q berührt.

8. Das Lot zur Ebene eines Dreiecks ABC im Umkreismittelpunkt O desselben ist geometrischer Ort

a) für jeden Punkt, der von A, B und C gleiche Abstände hat,

b) für den Mittelpunkt jeder Kugel, die durch A, B und C geht.

9. Das Lot zur Ebene eines Dreiecks ABC im Inkreismittelpunkt oder einem Ankreismittelpunkt desselben ist geometrischer Ort

a) für jeden Punkt, der von den drei Seiten gleiche Entfernungen hat,

b) für den Mittelpunkt jeder Kugel, welche die drei Seiten berührt.

10. Die Schnittlinie der drei Mittellotebenen der Seiten eines Dreikants ist geometrischer Ort

a) für jeden Punkt, der von den drei Kanten gleiche Abstände hat,

b) für den Mittelpunkt jeder Kugel, welche die drei Kanten berührt. Die Schnittlinie ist Achse des dem Dreikant umbeschriebenen Kegels.

11. Die Schnittlinie der Halbierungsebenen der drei Keile eines Dreikants ist geometrischer Ort

a) für jeden Punkt, der von den drei Seitenflächen gleichen Abstand hat,

b) für den Mittelpunkt jeder Kugel, welche die drei Seitenflächen berührt.

Die Schnittlinie ist Achse des dem Dreikant einbeschriebenen Kegels.

§ 45. Sätze über Polyeder. Formeln für Oberflächen, Rauminhalte.

A) Allgemeine Sätze.

1. Eulers Satz: Bei jedem Vielflächner ist die Summe der Anzahl der Ecken und Flächen um 2 größer als die Zahl der Kanten,

$$E + F = K + 2 .$$

2. Die Anzahl der Kanten ist halb so groß als die der Winkel,

$$K = \frac{1}{2} W .$$

3. Ein Parallelschnitt einer Pyramide ist ein der Grundfläche ähnliches Vieleck und es verhält sich der Inhalt des Parallelschnittes zu dem der Grundfläche wie die Quadrate ihrer Entfernungen oder derjenigen entsprechender Ecken von der Spitze der Pyramide.

4. Satz des Cavalieri: Haben zwei Körper gleiche Höhe und gleiche Grundflächen und sind alle Parallelschnitte, die in denselben Entfernungen von den entsprechenden Grundflächen gelegt sind, einander gleich, so sind die Körper selbst inhaltsgleich.

5. Ähnliche Körper verhalten sich der Oberfläche nach wie die Quadrate, dem Inhalt nach wie die Kuben entsprechender Längen.

B) Berechnungen.

M Mantel, O Oberfläche, G Grundfläche, Q Querschnitt, h Höhe, r Grundkreishalbmesser, R Kugelhalbmesser, a, b, c Kanten, s Mantellinie, S Mittelschnitt, V Rauminhalt.

6. Quader: $O = 2(ab + bc + ca)$;
$V = abc$.

7. Prisma: $V = G \cdot h = Q \cdot s$.

8. Pyramide: $V = G \cdot \frac{h}{3}$.

9. Zylinder: $M = 2r\pi h$;
$O = 2r\pi(h + r)$; $V = r^2\pi h$.

Für den Hohlzylinder: $V = (r^2 - r_1^2)\pi h$.

10. Kegel: $M = r\pi s$; $O = r\pi(s + r)$;
$s = \sqrt{r^2 + h^2}$; $V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$.

11. Pyramidenrumpf:

$$V = \frac{h}{3}\left(G + \sqrt{G G_1} + G_1\right).$$

12. Kegelrumpf:

$$M = (r + r_1)\pi s = 2 p \pi h$$

(p Mittellot zur Mantellinie bis zur Achse);

$$V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + r r_1 + r_1^2).$$

13. Prismatoid:

$$V = \frac{h}{6}(G + G_1 + 4 S).$$

14. Schiefabgeschnittenes dreiseit. Prisma:

$$V = Q \cdot \frac{a + b + c}{3}.$$

15. Kugel: $O = 4 R^2 \pi$; $V = \frac{4 R^3 \pi}{3}$;

Kugelzone: $O = 2 R \pi h$;

$$V = \frac{\pi h}{6}(3 r^2 + 3 r_1^2 + h^2);$$

Kugelabschnitt:

$$O = 2 R \pi h = (r^2 + h^2)\pi;$$

$$V = \frac{\pi h}{6}(3 r^2 + h^2) = \frac{\pi h^2}{3}(3 R - h);$$

Kugelausschnitt: $V = \frac{2}{3} R^2 \pi h$;

Kugelkeil: $V = \frac{\pi R^3 \cdot \alpha^0}{270^0}$;

Ellipsoid: $V = \frac{4}{3} \pi a b c$;

Drehungsellipsoid: $\frac{4}{3}\pi a b^2$ (2 a Drehachse);

Drehungsparaboloid: $V = \frac{1}{2} r^2 \pi h$;

Abgestumpftes Drehungsparaboloid:

$$V = \frac{1}{2}\pi (R^2 + r^2) h$$

(R, r Halbmesser der Endflächen, h Höhe);

Wulst: $V = 2\pi^2 R r^2$; $O = 4\pi^2 R r$

(r Halbmesser des gedrehten Kreises, R Abstand seines Mittelpunktes von der Drehachse);

Schief abgeschnittener, gerader Kreiszylinder: $V = \pi r^2 \frac{h_1 + h_2}{2}$; $M = \pi r (h_1 + h_2)$

(h_1 kürzeste, h_2 längste Mantellinie);

Zylinderhuf: $V = \frac{h}{3b}[a(3r^2 - a^2) + 3r^2(b - r)\varphi]$;

$$M = \frac{2rh}{b}[(b - r)\varphi + a]$$

(h längste Mantellinie, 2 a Hufkante, b Länge des Lotes vom Fußpunkt von h auf 2 a, 2 φ Länge des Bogens bezogen auf den Halbm. 1).

16. Guldins Sätze. a) Die Oberfläche einer Drehfläche ist gleich dem Produkt aus der Länge der erzeugenden Linie und dem Wege des Schwerpunktes derselben.

Besteht die Erzeugende l aus den Teilen $l_1, l_2, l_3 \ldots$, deren Schwerpunkte die Abstände $s_1, s_2, s_3 \ldots$ von der Achse haben, während der Abstand des Gesamtschwerpunktes der Erzeugenden s ist, so ist

$$s l = s_1 l_1 + s_2 l_2 + s_3 l_3 + \ldots$$

b) Der Inhalt eines Drehkörpers ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt der erzeugenden Fläche und dem Weg des Schwerpunktes derselben.

Zerlegt man die erzeugende Fläche i in die Teile i_1, i_2, i_3 ... und sind die Achsenabstände der Schwerpunkte der ganzen Fläche und der Teile s, s_1, s_2, s_3 .... so ist

$$s\,i = s_1 i_1 + s_2 i_2 + s_3 i_3 + \dots$$

17. Regelmäßige Körper. R Halbmesser der umbeschriebenen, r derjenige der einbeschriebenen Kugel, a Kante.

Tetraeder: $R = \frac{a}{4}\sqrt{6}$; $\quad r = \frac{a}{12}\sqrt{6}$;

$O = a^2\sqrt{3}$; $\quad V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$.

Würfel: $R = \frac{a}{2}\sqrt{3}$; $\quad r = \frac{a}{2}$;

$O = 6\,a^2$; $\quad V = a^3$.

Oktaeder: $R = \frac{a}{2}\sqrt{2}$; $\quad r = \frac{a}{6}\sqrt{6}$;

$O = 2\,a^2\sqrt{3}$; $\quad V = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}$.

Dodekaeder: $R = \frac{a}{4}(1+\sqrt{5})\sqrt{3}$;

$$r = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{50+22\sqrt{5}}{5}} = a \operatorname{ctg} 36^0 \cos 36^0;$$

$$O = 3\,a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})};$$

$$V = \frac{12\,F \cdot r}{3} = 4\,F \cdot r \quad \text{(F Seitenfläche)}$$

$$= \frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5}) = 5\,a^3 \operatorname{ctg}^2 36^0 \cos 36^0.$$

Ikosaeder: $R = \frac{a}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$;

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}} = \frac{a}{4}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\,a\cos^2 36^0}{\sqrt{3}};$$

$$O = 5\,a^2\sqrt{3};$$

$$V = \frac{20\cdot F\cdot r}{3} = \frac{5\,a^3}{12}(3+\sqrt{5})$$

$$= \frac{10\,a^3}{3}\cos^2 36^0.$$

Ebene Trigonometrie.

I. Goniometrie.

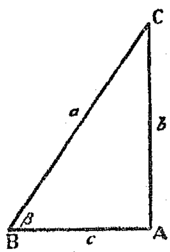
§ 46. Funktionen einfacher Winkel.

1. Erklärung der Funktionen.

a) Am rechtwinkligen Dreieck (a Hypotenuse, b und c Katheten).

$$\begin{cases} \sin\beta = \frac{b}{a}; & \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c}; \\ \cos\beta = \frac{c}{a}; & \operatorname{ctg}\beta = \frac{c}{b}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{cosec}\beta = \frac{a}{b}; \\ \sec\beta = \frac{a}{c}. \end{cases}$$



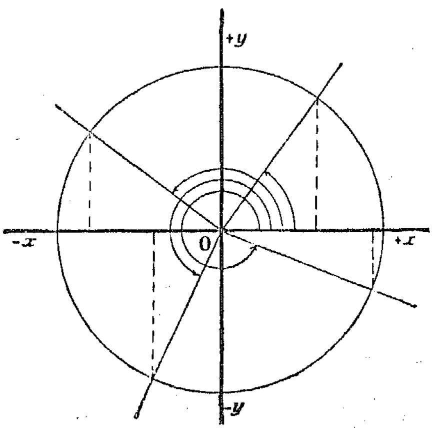
b) Am Koordinatensystem (r Fahrstrahl, x und y Abszisse und Ordinate).

$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{y}{r}; & \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}; \\ \cos\alpha = \dfrac{x}{r}; & \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}. \end{cases}$$

Der sin hat das Vorzeichen der Ordinate, der cos das der Abszisse, tg und ctg haben gleiches Vorzeichen.

c) Vorzeichen in den vier Quadranten:

	sin	cos	tg	ctg
I.	+	+	+	+
II.	+	—	—	—
III.	—	—	+	+
IV.	—	+	—	—



2.	$-\alpha$	$R \pm \alpha$	$2R \pm \alpha$	$3R \pm \alpha$	$4nR \pm \alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin(\pm\alpha)$
cos	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos(\pm\alpha)$
tg	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}(\pm\alpha)$
ctg	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(\pm\alpha)$

3. Grenzwerte und besondere Werte:

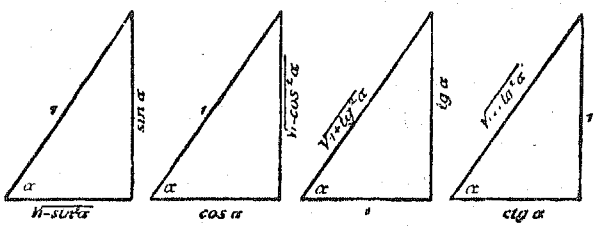
	0^0 360^0	90^0	180^0	270^0	45^0	30^0	60^0
sin	0	1	0	-1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
cos	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
tg	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
ctg	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	1	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$

4. Zusammenhang der Funktionen:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{tg}\,\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha} \\ \mathrm{ctg}\,\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} \\ \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha &= 1 \\ 1 + \mathrm{tg}^2\alpha &= \frac{1}{\cos^2\alpha} \\ 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha &= \frac{1}{\sin^2\alpha}. \end{aligned}\right.$$

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin\alpha =$		$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha =$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$		$\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha =$	$\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha =$	$\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	



§ 47. Funktionen zusammengesetzter Winkel.

1. a)

$$\left\{\begin{aligned}
\sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\\
\cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\\
\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\\
\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta) &= \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\mp1}{\operatorname{ctg}\beta\pm\operatorname{ctg}\alpha}.
\end{aligned}\right.$$

b)
$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\,; & \sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\,; & \cos\alpha = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2} \\ \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\,; & \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} \\ \operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}\,; & \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2} - 1}{2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}\,. \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha\,; & 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha \\ 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha\,; & 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha \\ \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}} = \dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\,. \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \\ \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,. \end{cases}$$

2. Umformung von Summen und Differenzen.

a)
$$\begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\,. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cdot\sin(45^0+\alpha) \\ \cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\cdot\cos(45^0+\alpha) \\ \dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(45^0+\alpha) \\ \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-1} = \operatorname{ctg}(45^0-\alpha)\,. \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{\sin 2\alpha} \\ \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg} 2\alpha\,. \end{cases}$$

II. Das Dreieck etc.

§ 48. Formeln über das schiefwinklige Dreieck.

1. $$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 2\,\mathrm{R}\,; \qquad \dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}+\dfrac{\gamma}{2} = \mathrm{R} \\ \sin(\beta+\gamma) = \sin(2\,\mathrm{R}-\alpha) = \sin\alpha \\ \cos(\beta+\gamma) = \cos(2\,\mathrm{R}-\alpha) = -\cos\alpha \\ \sin\dfrac{\beta+\gamma}{2} = \sin\left(\mathrm{R}-\dfrac{\alpha}{2}\right) = \cos\dfrac{\alpha}{2} \\ \cos\dfrac{\beta+\gamma}{2} = \cos\left(\mathrm{R}-\dfrac{\alpha}{2}\right) = \sin\dfrac{\alpha}{2}\,. \end{cases}$$

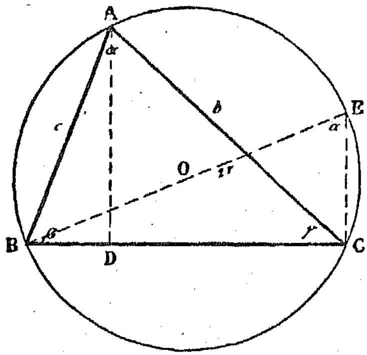
2. $\mathbf{a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma}.$ (Sinussatz.)

$$\begin{cases} a\sin\beta = b\sin\alpha = h'' \\ b\sin\gamma = c\sin\beta = h \qquad \text{(Höhenformel.)} \\ c\sin\alpha = a\sin\gamma = h'\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2r \\ a = 2r\sin\alpha \qquad \text{(Sehnenformel.)} \\ b = 2r\sin\beta \\ c = 2r\sin\gamma\,. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} a = b\cos\gamma + c\cos\beta \\ b = c\cos\alpha + a\cos\gamma \qquad \text{(Projektionssatz.)} \\ c = a\cos\beta + b\cos\alpha\,. \end{cases}$$

4. $$\left\{\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}\right.$$ (Nepersche Gleichungen.)



5. $$\left\{\begin{aligned}(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}&=a\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\\(b-c)\cos\frac{\alpha}{2}&=a\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\end{aligned}\right.$$ (Mollweidesche Gleichungen.)

6. Pythagoreischer Lehrsatz für das schiefwinklige Dreieck:

1. $$a^2=b^2+c^2-2\,b\,c\cdot\cos\alpha\,.$$

Folgerungen:

2. $$a^2=\left\{\begin{array}{l}(b+c)^2-4\,b\,c\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\\[2ex](b-c)^2+4\,b\,c\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\,.\end{array}\right.$$

$a+b+c=2s$	$a-b+c=2(s-b)$
$-a+b+c=2(s-a)$	$a+b-c=2(s-c)\,.$

3. $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$.

4. $\sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

5. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \frac{\varrho}{s-a}$.

7. Inhalt, In- und Ankreishalbmesser.

1. $2J = ab\sin\gamma = bc\sin\alpha = ca\sin\beta$.

2. $J = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{abc}{4r}$.

3. $$\begin{cases} J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ \quad = \varrho\cdot s = \varrho_1(s-a) = \varrho_2(s-b) = \varrho_3(s-c). \end{cases}$$

4. $\varrho\cdot\varrho_1\cdot\varrho_2\cdot\varrho_3 = J^2$.

5. $$\begin{cases} \varrho = (s-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = (s-b)\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = (s-c)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \\ \varrho_1 = s\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}; \quad \varrho_2 = s\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}; \quad \varrho_3 = s\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} \varrho = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\ s = 4r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}. \end{cases}$$

§ 49. Berechnungen.

I. Das rechtwinklige Dreieck.

(a Hypotenuse.)

1. Gegeben a, β.

$b = a\sin\beta$, $c = a\cos\beta$.

2. Gegeben b, β.

$$a = \frac{b}{\sin\beta}; \qquad c = b \operatorname{ctg}\beta.$$

3. Gegeben a, b.

$$\sin\beta = \frac{b}{a}; \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = a\cos\beta = b\operatorname{ctg}\beta.$$

4. Gegeben b, c.

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c}; \quad a = \sqrt{b^2 + c^2} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\cos\beta}.$$

$$2\,J = b\,c = a\,b\cos\beta = \frac{a^2}{2}\sin 2\beta = b^2\operatorname{ctg}\beta.$$

II. Das gleichschenklige Dreieck.

1. Gegeben b, β.

$$a = 2\,b\cos\beta; \qquad h = b\sin\beta.$$

2. Gegeben a, α.

$$b = \frac{a}{2\cos\beta}; \qquad h = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\beta.$$

3. Gegeben a und b.

$$\cos\beta = \frac{a}{2b}; \quad h = b\sin\beta = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\beta = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$J = \frac{b^2}{2}\sin\alpha = \frac{a^2}{4}\operatorname{tg}\beta.$$

III. Das regelmäßige Vieleck.

1. Gegeben a.

$$r = \frac{a}{2} : \sin\frac{180^0}{n}$$

$$\varrho = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^0}{n}; \qquad J = \frac{n\,a^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^0}{n}.$$

2. Gegeben r.

$$a = 2\,r \sin\frac{180^0}{n}\,; \qquad \varrho = r\cos\frac{180^0}{n}\,; \qquad J = \frac{n\,r^2}{2}\sin\frac{360^0}{n}\,.$$

3. Gegeben ϱ.

$$r = \varrho : \cos\frac{180^0}{n}\,; \qquad a = 2\,\varrho\,\mathrm{tg}\,\frac{180^0}{n}\,; \qquad J = n\,\varrho^2\,\mathrm{tg}\,\frac{180^0}{n}\,.$$

IV. Segment.

$$\text{Sektor} = \frac{r^2\pi\alpha^0}{360^0} = \frac{r^2}{2}\,\mathrm{arc}\,\alpha\,.$$

$$\triangle = \frac{r^2}{2}\sin\alpha$$

$$\text{Segment} = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha^0}{180^0} - \sin\alpha\right) = \frac{r^2}{2}(\mathrm{arc}\,\alpha - \sin\alpha)\,.$$

V. Das schiefwinklige Dreieck.

1. Gegeben a, β, γ.

$$\alpha = 180^0 - (\beta+\gamma)\,; \qquad b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}\,; \qquad c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}\,.$$

2. Gegeben b, c, α.

$$\frac{\beta+\gamma}{2} = R - \frac{\alpha}{2}$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b-c}{b+c}\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta+\gamma}{2}$$

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{\beta+\gamma}{2} + \dfrac{\beta-\gamma}{2} \\[2ex] \gamma = \dfrac{\beta+\gamma}{2} - \dfrac{\beta-\gamma}{2} \end{cases}$$

$$a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\left(= \sqrt{b^2+c^2-2\,b\,c\cdot\cos\alpha}\right)$$

oder:

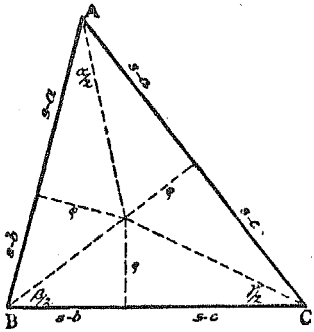
$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b\sin\alpha}{c - b\cos\alpha}$$

$$a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c - b\cos\alpha}{\cos\beta}\,.$$

3. Gegeben a, b, c.

1. $J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

2. $\varrho = \frac{J}{s}$. $(2s = a + b + c)$.



3. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a}$; $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s-b}$; $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s-c}$.

Proben:

1. $(s-a) + (s-b) + (s-c) = s$.

2. $s \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \varrho$.

3. $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^0$.

4. Gegeben a, b, β.

a) $b > a$.

1. $\sin\alpha = \frac{a \sin\beta}{b}$; $\alpha < 90^0$.

2. $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$.

3. $$c = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

b) $b < a$; $$\sin \alpha = \frac{a \sin \beta}{b};$$

hierbei α und $180^0 - \alpha$ brauchbar, daher 2 Werte für c:

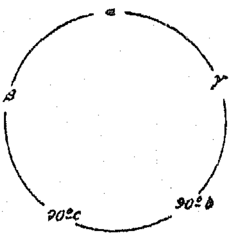
$$c_1 = a \cos \beta + b \cos \alpha; \qquad c_2 = a \cos \beta - b \cos \alpha.$$

Sphärische Trigonometrie.

§ 50. Das rechtwinklige sphärische Dreieck.

I. Formeln (a Hypotenuse).

1. $\cos a = \cos b \cos c$.
2. $\cos a = \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma$.
3. $\cos \beta = \cos b \cdot \sin \gamma$; $\cos \gamma = \cos c \cdot \sin \beta$.
4. $\sin \beta = \dfrac{\sin b}{\sin a}$; $\sin \gamma = \dfrac{\sin c}{\sin a}$.
5. $\cos \beta = \dfrac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a}$; $\cos \gamma = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}$.
6. $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\sin c}$; $\operatorname{tg} \gamma = \dfrac{\operatorname{tg} c}{\sin b}$.
7. Nepers Regel. Der cos irgend eines der wie nebenstehend angeschriebenen Stücke ist gleich dem Produkt der sin der getrennten und gleich dem Produkt der ctg der anliegenden Stücke.



Hierdurch können die Formeln 1—6 mechanisch abgeleitet werden.

II. Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks.

1. Gegeben a, b.

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}; \quad \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin a}; \quad \cos \gamma = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}.$$

Anm. b und β sind gleichzeitig kleiner oder größer als 90°.

2. Gegeben b, c.

$$\cos a = \cos b \cos c\,; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}; \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}.$$

3. Gegeben a, β.

$$\operatorname{ctg}\gamma = \cos a \operatorname{tg}\beta\,.$$

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos\beta\,; \quad \sin b = \sin a \sin\beta.$$

Vgl. Anm. zu 1.

4. Gegeben b, β.

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin\beta} \text{ (zwei Werte für a)}.$$

$$\sin c = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg}\beta}; \quad \sin\gamma = \frac{\cos\beta}{\cos b}.$$

5. Gegeben b, γ.

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos\gamma}; \quad \operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg}\gamma\,; \quad \cos\beta = \cos b \sin\gamma\,.$$

6. Gegeben β, γ.

$$\cos a = \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma\,; \quad \cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma}; \quad \cos c = \frac{\cos\gamma}{\sin\beta}.$$

Determ. Sind β und γ gleichartig, so muß $\beta + \gamma > 90^0$ und $< 270^0$ sein; sind β und γ ungleichartig, so muß $\beta - \gamma$ oder $\gamma - \beta < 90^0$ sein (s. 43, $13_{c,d}$).

§ 51. Das schiefwinklige Dreieck.

A) Formeln.

$$\text{I.} \begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha \\ \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos\beta \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma \end{cases} \quad \begin{matrix} a, b, c, \alpha; \\ \text{Kosinussatz.} \end{matrix}$$

$$\text{II.} \begin{cases} \sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma\,; \\ \sin a \sin\beta = \sin b \sin\alpha = h'' \\ \sin b \sin\gamma = \sin c \sin\beta = h \\ \sin c \sin\alpha = \sin a \sin\gamma = h' \end{cases} \quad \begin{matrix} a, b, \alpha, \beta; \\ \text{Sinussatz.} \end{matrix}$$

$$\text{III.}\quad\begin{cases}\sin a\cos\beta=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos\alpha\,; & a, b, c, \alpha, \beta;\\ \sin a\cos\gamma=\cos c\sin b-\sin c\cos b\cos\alpha\,; & \\ \sin b\cos\gamma=\cos c\sin a-\sin c\cos a\cos\beta\,; & \\ \sin b\cos\alpha=\cos a\sin c-\sin a\cos c\cos\beta\,; & \\ \sin c\cos\alpha=\cos a\sin b-\sin a\cos b\cos\gamma\,; & \\ \sin c\cos\beta=\cos b\sin a-\sin b\cos a\cos\gamma\,. & \end{cases}$$

$$\text{IV.}\quad\begin{cases}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b+c}{2}=\sin\frac{a}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}; & a,\ b\pm c,\ \beta\pm\gamma;\\ \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b+c}{2}=\cos\frac{a}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} & \text{Delambresche}\\ \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b-c}{2}=\sin\frac{a}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2} & \text{bzw. Gaußsche}\\ \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b-c}{2}=\cos\frac{a}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2} & \text{Gleichungen.}\end{cases}$$

$$\text{V.}\quad\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{b+c}{2}=\operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\dfrac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}} & \left|\begin{array}{l}a,\ b\pm c,\ \beta+\gamma,\ \beta-\gamma\\ a,\ \beta\pm\gamma,\ b+c,\ b-c\end{array}\right.\\ \operatorname{tg}\frac{b-c}{2}=\operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\dfrac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}} & \\ \operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}} & \text{Nepersche Gleichungen.}\\ \operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}} & \end{cases}$$

$$\text{VI.}\quad\begin{cases}a+b+c=2s\,.\\ \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\,; \quad \alpha,\ a,\ b,\ c\,.\end{cases}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}.$$

VII. $$\begin{cases} S = \sqrt{\sin s \cdot \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)} \\ \sin\alpha = \dfrac{2\,S}{\sin b \sin c}; \qquad \alpha, a, b, c. \\ \text{(S Eckensinus.)} \end{cases}$$

VIII. $$\begin{cases} k = \sqrt{\dfrac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}} \\ \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin(s-a)}{k}; \qquad \alpha, a, b, c. \end{cases}$$

IX. $$\begin{cases} \varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ \quad \text{(sph. Exzeß)} \\ \operatorname{tg}\dfrac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{s}{2}\operatorname{tg}\dfrac{s-a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{s-b}{2}\operatorname{tg}\dfrac{s-c}{2}} \\ \operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\varepsilon}{4}\right) = \sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{s-b}{2}\operatorname{tg}\dfrac{s-c}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{s}{2}\operatorname{tg}\dfrac{s-a}{2}}}. \\ \text{(L'Huiliersche Gleichung.)} \end{cases}$$

Polarformeln.

Ib) $$\begin{cases} \cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a; \quad a, \alpha, \beta, \gamma. \\ \cos\beta = -\cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos b \\ \cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c. \end{cases}$$

IIIb) $$\begin{cases} \sin\alpha\cos b = \cos\beta\sin\gamma + \sin\beta\cos\gamma\cos a; \quad a, b, \\ \sin\alpha\cos c = \cos\gamma\sin\beta + \sin\gamma\cos\beta\cos a \quad \alpha, \beta, \gamma. \\ \sin\beta\cos c = \cos\gamma\sin\alpha + \sin\gamma\cos\alpha\cos b \\ \sin\beta\cos a = \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma\cos b \\ \sin\gamma\cos a = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta\cos c \\ \sin\gamma\cos b = \cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha\cos c. \end{cases}$$

VII b)
$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=2\sigma\,; \\ \Sigma=\sqrt{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}\,; \\ \sin a=\dfrac{2\Sigma}{\sin\beta\sin\gamma}\,; \\ \sin b=\dfrac{2\Sigma}{\sin\gamma\sin\alpha}\,; \quad \sin c=\dfrac{2\Sigma}{\sin\alpha\sin\beta}\,. \end{cases}$$

VIII b)
$$\begin{cases} k'=\sqrt{\dfrac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{-\cos\sigma}}\,; \\ \operatorname{tg}\dfrac{a}{2}=\dfrac{\cos(\sigma-\alpha)}{k'}\,; \\ \operatorname{tg}\dfrac{b}{2}=\dfrac{\cos(\sigma-\beta)}{k'}\,; \quad \operatorname{tg}\dfrac{c}{2}=\dfrac{\cos(\sigma-\gamma)}{k'}\,. \end{cases}$$

IX b)
$$\begin{cases} d=360^0-(a+b+c)\ \text{(sphär. Defekt)}; \\ \operatorname{tg}\dfrac{d^0}{4}= \\ \sqrt{-\operatorname{tg}\left(45^0+\dfrac{\sigma}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^0-\dfrac{\sigma-\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^0-\dfrac{\sigma-\beta}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^0-\dfrac{\sigma-\gamma}{2}\right)}\,; \\ \operatorname{tg}\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{d}{4}\right)=\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\sigma-\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\sigma-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\sigma}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\sigma-\alpha}{2}}}\,. \end{cases}$$

X. Sphärischer Umkreishalbmesser R.
$$\begin{cases} \dfrac{\sin a}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin b}{\sin\beta}=\dfrac{\sin c}{\sin\gamma}=2\operatorname{tg}R\cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{b}{2}\cos\dfrac{c}{2} \\ \operatorname{ctg}R=k'\ \text{(s. VIII)}. \end{cases}$$

XI. Sphärischer Inkreishalbmesser ϱ.
$$\operatorname{tg}\varrho=k\ \text{(s. VIII)}.$$

XII. Inhalt des sphär. Dreiecks s. § 43_{15}.

B) Berechnungen.

1. Gegeben a, b, c.

1. $a+b+c=2s$, $s-a=\ldots$, $s-b=\ldots$, $s-c=\ldots$

2. k aus VIII.

3. $$\begin{cases} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin(s-a)}{k}; \qquad \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{\sin(s-b)}{k}; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\sin(s-c)}{k}. \end{cases}$$

Proben: 1. $(s-a)+(s-b)+(s-c)=s$.

2. $\frac{1}{\sin s}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{k}$.

2 Gegeben α, β, γ.

1. $2\sigma=\alpha+\beta+\gamma$; $\sigma-\alpha=\ldots$, $\sigma-\beta=\ldots$, $\sigma-\gamma=\ldots$

2. k' aus VIII b).

3. $\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\frac{\cos(\sigma-\alpha)}{k'}$, usw. s. VIII b).

Proben: 1. $(\sigma-\alpha)+(\sigma-\beta)+(\sigma-\gamma)=\sigma$.

2. $-\frac{1}{\cos\sigma}\cdot\operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{b}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\frac{1}{k'}$.

3. Gegeben b, c, α.

1. $$\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b+c}{2}}=\frac{Z}{N} \quad \text{(s. V.)}.$$

2. $$\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b+c}{2}}=\frac{Z'}{N'} \quad \text{(s. V.)}.$$

3. $$\begin{cases} \beta=\frac{\beta+\gamma}{2}+\frac{\beta-\gamma}{2} \\ \gamma=\frac{\beta+\gamma}{2}-\frac{\beta-\gamma}{2}. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} \cos\frac{a}{2} = \dfrac{Z}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}} \overset{\text{od.}}{=} \dfrac{N}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}} \text{ (s. IV.), oder} \\ \sin\frac{a}{2} = \dfrac{Z'}{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}} = \dfrac{N'}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}} . \end{cases}$$

Ist nur a verlangt, dann dies aus I.

4. Gegeben β, γ, a.

1. $$\operatorname{tg}\frac{b+c}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{Z}{N} \text{ (s. V.).}$$

2. $$\operatorname{tg}\frac{b-c}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{a}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{Z'}{N'} .$$

3. $$\begin{cases} b = \dfrac{b+c}{2} + \dfrac{b-c}{2} \\ c = \dfrac{b+c}{2} - \dfrac{b-c}{2} . \end{cases}$$

4. $$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{Z}{\sin\frac{b+c}{2}} \text{ oder} = \frac{N}{\cos\frac{b+c}{2}} \text{ (s. IV.), oder}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{Z'}{\sin\frac{b-c}{2}} = \frac{N'}{\cos\frac{b-c}{2}} .$$

Ist nur α verlangt, dann dieses aus Ib.

5. Gegeben a, b, α.

1. $$\sin\beta = \frac{\sin b \sin\alpha}{\sin a}.$$

2. $$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \quad \text{oder}$$

$$= \operatorname{tg}\frac{a-b}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} \quad \text{(s. V.).}$$

3. $$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}$$

$$= \operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}.$$

Determination. Für β ergeben sich aus 1. im allgemeinen zwei Werte. Bei der Bestimmung ist zu berücksichtigen, daß

$$\text{wenn } a \gtreqless b, \quad \text{dann } \alpha \gtreqless \beta,$$

$$\text{und } a+b \gtrless 180^0, \quad \text{dann } \alpha+\beta \gtrless 180^0$$

(s. § 43, 13 b und e).

6. Gegeben α, β, a.

1. $$\sin b = \frac{\sin a \sin\beta}{\sin\alpha}.$$

2. $$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \text{s. } 5,_{3}\,.$$

3. $$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \text{s. } 5,_{2}\,.$$

Determination s. ebenfalls vorige Aufgabe.

Anmerkung. Die Aufgaben 2, 4, 6 sind die Polarfälle zu den Aufgaben 1, 3, 5; ihre Lösung kann daher durch Übergang auf das Polardreieck auf die Lösung der Aufgaben 1, 3, 5 zurückgeführt werden.

Mathematische Geographie.

I. Beobachtungsmittel.

§ 52. Koordinatensysteme.

A) Zenitlinie, Horizont.

1. Zenitlinie = Vertikallinie durch den Beobachtungsort; ihre Schnittpunkte mit der Himmelskugel heißen Zenit (Scheitelpunkt) und Nadir (Fußpunkt).

2. Horizont (wahrer Horizont), die durch den Erdmittelpunkt senkrecht zur Zenitlinie gelegte Ebene; scheinbarer Horizont = Berührungsebene an die Erdkugel im Beobachtungsort; scheinbarer Horizont parallel dem wahren. — Horizontalkreise senkrecht zur Zenitlinie.

3. Ost- und Westpunkt, Schnittpunkte des Horizonts mit dem Himmelsäquator (s. B); Süd- und Nordpunkt je um 90° vom Ost- und Westpunkt abstehend, Mittagslinie verbindet diese beiden.

4. Vertikalkreise (Höhenkreise), Schnittkreise der durch die Zenitlinie gelegten Ebenen mit der Himmelskugel, sie sind senkrecht zum Horizont; erster Vertikal geht durch Ost- und Westpunkt.

B) Weltachse, Äquator.

5. Weltachse, verlängerte Erdachse, Drehungsachse der Himmelskugel; Weltpole (Nordpol, Südpol) Schnittpunkte der Weltachse mit der Himmelskugel.

6. Äquatorebene durch den Erdmittelpunkt senkrecht zur Weltachse.

7. **Meridiane oder Deklinationskreise**, Großkreise durch die Weltpole, senkrecht zum Äquator; **Hauptmeridian** durch Zenit, durch Süd- und Nordpunkt.

8. **Polhöhe** = Neigungswinkel der Weltachse gegen den Horizont. **Äquatorhöhe** = Neigungswinkel der Äquatorebene gegen den Horizont.

Polhöhe = geographische Breite.

Die Polhöhe h_p wird bestimmt durch Beobachtung der Äquatorhöhe h_a zur Äquinoktialzeit, $h_p = 90^0 - h_a$ oder als arithmetisches Mittel aus oberer und unterer Kulminationshöhe eines Zirkumpolarsternes. — Aus der Polhöhe erhält man die geographische Breite.

9. **Sichtbare Sterne** für einen Ort von der geographischen Breite φ sind diejenigen, deren Abstand vom sichtbaren Pol $< 180^0 - \varphi$, vom unsichtbaren $> \varphi$ ist.

10. **Zirkumpolarsterne**, Abstand vom sichtbaren Pol $\leqq \varphi$.

C) Ekliptik, Achse der Ekliptik.

11. **Ekliptik** = scheinbare jährliche Bahn der Sonne, Ebene der Erdbahn.

12. **Schiefe** der Ekliptik = Neigung der Ekliptik gegen den Äquator; sie ist veränderlich, für den Anfang des Jahres 1919 $23^0\ 26'\ 59''$ (jährl. Abn. $0{,}47''$).

13. **Achse** der Ekliptik = Lot im Erdmittelpunkt auf der Ekliptik; Endpunkte dieser Achse **Pole** der Ekliptik.

14. **Tag- und Nachtgleichepunkte** = Schnittpunkte der Ekliptik mit dem Äquator, **Frühlingsäquinoktium** (Frühlings- oder Widderpunkt ♈) und **Herbstäquinoktium**; Sonnenwendepunkte oder **Solstitien** stehen von den vorigen je um 90^0 ab.

15. **Breitenkreise**, Großkreise durch die Ekliptikpole, $\perp$ zur Sonnenbahn.

§ 53. Lagebestimmung.

1. System A. — Grundkreise: Hauptmeridian und Horizont.

Höhe h gezählt auf dem Vertikalkreise vom Horizont aus, $0^0 - 90^0$ nördl. oder südl.

Azimut a (A) gezählt auf dem Horizont vom Südpunkt aus über W, N, O von $0^0 - 360^0$. Ermittlung dieser Koordinaten durch den Theodolit, Höhe auch durch den Sextanten und annähernd durch Schattenlänge $\left(\operatorname{tg} h = \frac{1}{s}\right)$.

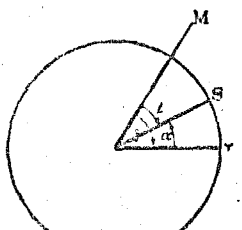
2. System B.

a) Deklination δ, nördlich (+) oder südlich (—), sphärischer Abstand des Sterns vom Äquator; Poldistanz $90^0 - \delta$.

Stundenwinkel t = Äquatorialbogen zwischen Meridian des Beobachtungsortes und Meridian des Sterns, gezählt von dem ersteren aus von $0^0 - 360^0$ über W und N (wie das Azimut); statt Gradzählung auch Stundenzählung ($15^0 = 1$ St.) ringsherum $0 - 24^h$, oder nach beiden Seiten.

Messung durch Äquatoreal.

b) Deklination δ, wie in a, und



Rektaszension α (A. R.), gezählt im Äquator vom Frühlingspunkt (♈) aus, entgegengesetzt dem Sinn der täglichen Bewegung der Sonne von $0^0 - 360^0$.

Sternzeit Θ = Stundenwinkel des Frühlingspunktes, z. B. 1^h Sternzeit, wenn Stundenwinkel des Frühlingspunktes 15^0. $\Theta - t = \alpha$.

Messung mit Passage-Instrument und Uhr nach Sternzeit.

3. System C.

Breite β nördlicher oder südlicher Abstand des Sterns von der Ekliptik, gezählt von der Ekliptik aus.

Länge λ, Bogen der Ekliptik zwischen Frühlingspunkt und Breitenkreis, gezählt vom Frühlingspunkt aus im Sinn von α, von 0^0—360^0.

4. Sternbilder.

Die zwölf Sternbilder des Tierkreises sind:

Widder	♈	Löwe	♌	Schütze	♐
Stier	♉	Jungfrau	♍	Steinbock	♑
Zwillinge	♊	Wage	♎	Wassermann	♒
Krebs	♋	Skorpion	♏	Fische	♓

§ 54. Die Zeit.

1. Sterntag zu 24 Sternstunden = Zeit zwischen zwei oberen Kulminationen eines Sterns, = Zeit einer vollständigen Umdrehung der Erde. 0^h Sternzeit, wenn der Frühlingspunkt im Meridian; Dauer eines Sterntags $23{,}935^h = 23^h\ 56^m\ 4{,}1^s$ m. Z.

2. Mittlerer Sonnentag = bürgerlicher Tag, = Zeit zwischen zwei Kulminationen der gedachten, im Äquator mit gleichförmiger Geschwindigkeit laufenden Sonne, $= 24^h\ 3^m\ 56{,}6^s$ Sternzeit.

3. Zeitgleichung = Differenz zwischen mittlerer und wahrer Zeit.

4. Tropisches Jahr = scheinbare Umlaufszeit der Sonne, von ♈ Punkt zu ♈ Punkt = 365,2422 m. T. = 365 T. $5^h\ 48^m\ 46^s$ m. Z. = 366,2422 Sterntage.

5. Siderisches Jahr = wirkliche Umlaufszeit der Erde von Fixstern zu Fixstern = 365,2564 mittl. Tage = 365 T. $6^h\ 9^m\ 11^s$ m. Z. = 366,2564 Sterntage.

6. Siderischer Monat = Umlauf von Fixstern zu Fixstern = 27,32 Tg.

7. **Synodischer Monat** = Zeit von Neumond zu Neumond (d. h. von Sonne zu Sonne) 29,53 Tg.

8. **Astronomische Jahreszeiten.**

Beginn des Frühlings am 21. März, Sonne im Äquator, im ♈ Punkt, Tag- und Nachtgleiche.

Beginn des Sommers am 21. Juni, Sonne im Wendekreis des Krebses, längster Tag (Sommersolstitium).

Beginn des Herbstes am 23. September, Sonne im Äquator, Tag- und Nachtgleiche.

Beginn des Winters am 22. Dezember, Sonne im Wendekreis des Steinbocks, kürzester Tag (Wintersolstitium).

II. Das Sonnensystem.

§ 55. Die Erde.

A) Gründe für die Kugelgestalt.

1. Erscheinungen infolge der Ortsveränderungen auf einem Meridian oder einem Parallelkreis.
2. Schattenform bei Mondfinsternissen und die Gestalt der andern Himmelskörper.
3. Depression des Horizontes.
4. Umschiffungen der Erde in verschiedenen Richtungen.
5. Ergebnisse der Gradmessungen.

B) Gründe für die Rotation.

1. Ablenkung der Luftströmungen.
2. Östliche Abweichung fallender Körper,
3. Foucaultscher Pendelversuch (Größe der scheinbaren Drehung in der Sternstunde $15^0 \sin \varphi$, wo φ = geogr. Breite.)
4. Rotation anderer Weltkörper,
5. Abplattung der Erde ($^1/_{296}$ bis $^1/_{300}$).

§ 56. Planeten, Sonne und Mond.

	Äquatorial-halbmesser	Mittlere Entfernung von der Sonne	Dichte	Masse	Rotations-dauer	Siderische Umlaufzeit	Anzahl der Tra-banten
Merkur ☿	0,380	0,3871	0,89	0,06	88 T.	87,969 T.	—
Venus ♀	0,955	0,7233	0,807	0,81	34^h ?	224,701 T.	—
Erde ♁	1 (= 6378,2 km)	1*)	1**)	1	24^h		1
Mars ♂	0,53	1,5237	0,711	0,105	$24^1/_2{}^h$	1 J. 321,730 T.	2
Planetoiden		2,2—4,3				3—9 J.	—
Jupiter ♃	11,22	5,2028	0,242	311	10^h	11 J. 314,730 T.	9
Saturn ♄	9,25	9,5388	0,13	93,4	$10^1/_4{}^h$	29 J. 166,951 T.	10
Uranus ♅	3,94	19,1910	0,195	14,4	12^h ?	84 J. 4,93 T.	4
Neptun ♆	5,11	30,0707	0,300	16,7		164 J. 287,14 T.	1
Sonne ☉	108,56	—	0,253	326800	25,19 T.		
Mond ☾	0,273	60,3 Erdhalbm. Entf. v. d. Erde	0,615	0,012	27,32 T.		

*) 148,7 Millionen km = 20 Millionen Meilen.
**) Auf Wasser = 1 bezogen ist die Dichte der Erde 5,5.

§ 57. Weltsysteme.

1. Ptolemäisches System. Die Erde ist Mittelpunkt des Weltalls, um sie bewegen sich Mond, Merkur, Venus, Sonne, Mars, Jupiter, Saturn. Unregelmäßigkeiten in der Bewegung werden durch Epizykeln erklärt.

2. Kopernikanisches System. Die Sonne steht still, um sie bewegen sich Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn in kreisförmigen, exzentrischen Bahnen.

3. Keplers Gesetze.

1. Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Der Planet bewegt sich so, daß der Leitstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreibt.

3. Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Achsen.

§ 58. Berechnungsaufgaben.

1. Flächeninhalt J einer Zone zwischen den geographischen Breiten φ_1 und φ_2:

$$J = 2\,r\,\pi\,h = 2\,r\,\pi\,(r \sin \varphi_1 - r \sin \varphi_2)$$
$$= 4\,r^2\,\pi \cos\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \sin\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2};$$

der Teil dieser Zone, der von den Meridianen zur Länge λ_1 und λ_2 begrenzt wird, ist

$$J = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^0}{360^0}\, 4\,r^2\,\pi \cos\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \sin\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}.$$

(Berechnung des Inhalts von Kartenblättern.)

2. Kimm und Kimmtiefe. — Kimm = Kreis, welcher den scheinbaren Horizont begrenzt (Halbmesser s = Sohne = Bogen); Kimmtiefe (α'') = Winkel zwischen

dem Sehstrahl nach der Kimm und der Horizontalen, Höhe des Beobachtungspunktes h.

1. $$a = \sqrt{2rh},$$

2. $$\alpha'' : \frac{180 \cdot 60 \cdot 60''}{\pi} = a : r \text{ oder } \alpha'' = \sqrt{\frac{2h}{r}} \cdot 206265'',$$

hierbei ist von der Strahlenbrechung, welche a vergrößert und α verkleinert, abgesehen.

3. Beziehungen zwischen den Koordinaten der Systeme A und B (s. § 51). In dem Dreieck Zenit-Pol-Stern sind die Seiten $ZP = 90^0 - \varphi$, $ZS = 90^0 - h$, $PS = 90^0 - \delta$; die ZS und PS gegenüberliegenden Winkel sind t (bzw. $360^0 - t$) und $180^0 - a$. Aus den Formeln I—III des § 51 folgt, wenn

1. a und h gegeben, t und δ gesucht (φ ist als bekannt vorausgesetzt):

$$\begin{cases} \sin\delta = \sin h \sin\varphi - \cos h \cos\varphi \cos a \\ \cos\delta \sin t = \cos h \sin a \\ (\cos\delta \cos t = \sin h \cos\varphi + \cos h \sin\varphi \cos a) . \end{cases}$$

2. t und δ gegeben, gesucht a und h.

$$\begin{cases} \sin h = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos t \\ \cos h \sin a = \cos\delta \sin t \\ (\cos h \cos a = -\sin\delta \cos\varphi + \cos\delta \sin\varphi \cos t) . \end{cases}$$

4. Parallaxe; Entfernung eines Gestirns.

a) Höhenparallaxe p = Winkel, unter welchem vom Gestirn aus der zum Beobachtungsort gehörige Erdhalbmesser r erscheint, = Unterschied der Höhenwinkel über dem wahren und über dem scheinbaren Horizont

$$p = h' - h ;$$

die Entfernung R des Gestirns ist dann

$$R = \frac{r \cos h}{\sin p} .$$

b) Ist das Gestirn im Horizont, dann heißt p die Horizontalparallaxe (π),

$$R = \frac{r}{\sin \pi}.$$

Ist der in Frage kommende Halbmesser ein Äquatorhalbmesser, so heißt p die Äquatorial-Horizontalparallaxe.

c) Bei Fixsternen ist die Parallaxe des Erdhalbmessers (tägl. Parallaxe) verschwindend; man benützt für sie die Parallaxe des Erdbahnhalbmessers, die jährliche Parallaxe; sie ist bei keinem Fixstern über 1″.

d) Die Parallaxe des Mondes kann aus direkter Beobachtung ermittelt werden; die Horizontalparallaxe beträgt für denselben im Mittel 57′ 2,5″.

e) Die Parallaxe der Sonne ist zur Bestimmung durch direkte Beobachtung zu klein; die mittlere Äquatorial-Horizontal-Parallaxe kann gefunden werden aus den Marsoppositionen und dem dritten Keplerschen Gesetz (aus der Parallaxe des Mars zunächst seine Entfernung $d = R_1 - R$ von der Erde, dann folgt aus

$$R_1^3 : R^3 = t_1^2 : t^2, \quad (R_1 - R) : R = \left(\sqrt[3]{t_1^2} - \sqrt[3]{t^2}\right) : \sqrt[3]{t^2}),$$

oder durch die Methode der Venusdurchgänge, oder aus der Messung der Parallaxe eines Planetoiden (z. B. Flora); ihr Wert ist etwa 8,85″.

f) Außer vermittels der Parallaxe kann die Entfernung der Sonne noch durch andere Mittel gefunden werden, insbesondere aus der Geschwindigkeit des Lichts und der Zeit, welche dasselbe braucht, um von der Sonne zur Erde zu gelangen (Verfinsterung der Jupitertrabanten).

5. **Auf- und Untergang der Gestirne, Tageslänge.** Aus § $58_{3,2}$ folgt für $h = 0$

$$\cos t_0 = -\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi .$$

Die **Tageslänge** ist gleich dem doppelten Stundenwinkel t_0 (für $h = 0$) der Sonne. Ergibt sich aus δ und φ z. B. $t_0 = 120^0 = 8^h$, so ist die Tageslänge 16^h.

Für **Morgen- und Abendweite** w (Bogen zwischen Ost- und Aufgangspunkt, bzw. zwischen West- und Untergangspunkt) ist

$$\sin w = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi} .$$

Für das Azimut a_0 des Aufgangspunktes ist

$$\cos a_0 = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi} .$$

6. **Entfernung** e **zweier Punkte** $(\lambda_1, \varphi_1; \lambda_2, \varphi_2)$ auf der Erdoberfläche

$$\cos e = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) .$$

Liegen beide auf demselben Meridian, dann ist $e = \varphi_1 - \varphi_2$.

Liegen sie auf demselben Parallelkreis, dann ist $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ und daher

$$\sin\frac{e}{2} = \cos\varphi \sin\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} .$$

Analytische Geometrie.

I. Geometrie der Ebene.

§ 59. Änderung des Koordinatensystems.

x, y Koordinaten, OX, OY Achsen des ursprünglichen Systems, x', y' Koordinaten, OX', OY' Achsen des neuen Systems, a, b Koordinaten des neuen Ursprungs.

1. Parallele Verschiebung der Achsen:

$$\begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y'. \end{cases}$$

2. Drehung eines rechtwinkligen Systems um den Ursprung um den Winkel φ:

$$\begin{cases} x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \,. \end{cases}$$

3. Verschiebung und Drehung jeder Achse (Änderung des Winkels zwischen den Achsen):

$$\begin{cases} x = a + \dfrac{x' \sin(X'Y) + y' \sin(Y'Y)}{\sin(XY)} \\ y = b + \dfrac{x' \sin(X'X) + y' \sin(Y'X)}{\sin(YX)} \,. \end{cases}$$

§ 60. Allgemeine Sätze.

1. Der Grad einer Gleichung wird durch Verwandlung des Koordinatensystems nicht geändert.

2. Die Bedingung dafür, daß der Punkt mit den Koordinaten x_1, y_1 auf der Linie liegt, deren Gleichung $F(x, y) = 0$, ist $F(x_1, y_1) = 0$.

3. Die aus den beiden Gleichungen $F(x, y) = 0$ und $f(x, y) = 0$ sich ergebenden Werte von x und y sind die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden durch jene Gleichungen dargestellten Linien.

Setzt man in $F(x, y) = 0$ für y den Wert Null, so ergeben sich aus der erhaltenen Gleichung die Abszissen der Schnittpunkte der betreffenden Linie mit der X-Achse; mit $x = 0$ ergeben sich die Ordinaten der Schnittpunkte mit der Y-Achse.

4. Ist λ ein Zahlenfaktor, so stellt

$$F(x, y) + \lambda f(x, y) = 0$$

die Gleichung einer Linie dar, welche durch die Schnittpunkte der durch $F(x, y) = 0$ und $f(x, y) = 0$ dargestellten Linien geht.

Linie erster Ordnung, gerade Linie.

§ 61. Gleichungsformen. Lagebeziehungen.

Es seien a und b die Abschnitte der Geraden auf den Achsen (Koordinaten der Schnittpunkte mit den Achsen), φ der Winkel der Geraden mit der + X-Achse, p die Länge des Lotes vom Ursprung auf die Gerade, α der Winkel, den p mit der + X-Achse bildet.

1. Gleichung der Geraden*):

erste allgem. Form $Ax + By + C = 0$,

zweite " $y = mx + b$,

dritte " $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$,

vierte " $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$ (Normalform).

*) Wenn sich eine der Gleichungen oder Formeln auf ein schiefwinkliges System beziehen soll, ist dies besonders bemerkt.

Symbolische Abkürzung der Gleichung

für die allgemeine Form $L = 0$,

für die Normalform $l = 0$.

Achsenabschnitte: $a = -\frac{C}{A} = -\frac{b}{m}$; $b = -\frac{C}{B}$.

Winkel mit der X-Achse bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{A}{B} = m = -\frac{b}{a} = -\operatorname{ctg}\alpha .$$

2. Besondere Fälle:

$x = a$ Gleichung einer Geraden $\parallel$ zur Y-Achse,

$y = b$ Gleichung einer Geraden $\parallel$ zur X-Achse,

$\left.\begin{cases} Ax + By = 0 \\ y = mx \end{cases}\right\}$ Gleichung einer Geraden durch den Ursprung,

$y = 0$ Gleichung der X-Achse,

$x = 0$ Gleichung der Y-Achse,

$0 \cdot x + 0 \cdot y + C = 0$ Gleichung der ∞ fernen Geraden.

3. Gerade durch Punkt (x_1, y_1):

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 , \quad \text{oder}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) , \quad \text{oder}$$

$$(x - x_1)\cos\alpha + (y - y_1)\sin\alpha = 0$$

(durch ein veränderliches m, bzw. α erhält man ein Strahlenbüschel).

4. Gerade durch zwei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2):

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \text{oder} \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

oder $(x_1 - x_2)\,y - (y_1 - y_2)\,x = x_1 y_2 - x_2 y_1$, oder

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

(Zugleich Bedingung dafür, daß drei Punkte in gerader Linie liegen.)

Gerade durch den Ursprung und Punkt (x_1, y_1):

$$x_1 y - y_1 x = 0 .$$

5. Zwei parallele Gerade:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Ax + By + C_1 = 0 \end{cases} \text{ oder } \begin{cases} y = mx + b \\ y = mx + b_1 \end{cases}, \text{ oder}$$

$$\begin{cases} x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0 \\ x \cos\alpha + y \sin\alpha - p_1 = 0 . \end{cases}$$

Zwei gerade Linien $Ax + By + C = 0$ und $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ sind parallel, wenn $A : A_1 = B : B_1$.

6. Gerade durch Punkt (x_1, y_1) parallel zu einer gegebenen Geraden.

Gegebene Gleichung:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{oder} \quad y = mx + b ,$$

gesuchte Gleichung:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 \quad \text{oder} \quad y - y_1 = m(x - x_1) .$$

7. Zwei senkrechte Gerade:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 & \text{oder} \\ Bx - Ay + C_1 = 0 & \text{oder} \end{cases} \quad \begin{cases} y = mx + b \\ y = -\dfrac{1}{m} x + b_1 . \end{cases}$$

Die Geraden

$$\begin{matrix} & Ax + By + C = 0 \\ \text{und} & A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \end{matrix} \Bigg\} \text{ oder } \begin{matrix} y = mx + b \\ y = m_1 x + b_1 \end{matrix} \quad \text{und}$$

sind senkrecht, wenn

$$AA_1 + BB_1 = 0 \quad \text{oder} \quad mm_1 + 1 = 0 .$$

Gleichung einer Geraden, welche durch Punkt (x_1, y_1) geht und senkrecht zu der Geraden $Ax + By + C = 0$ ist:

$$(x - x_1) : A = (y - y_1) : B .$$

8. Drei Gerade $Ax + By + C = 0$, $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ gehen durch einen Punkt, oder eine Gerade geht durch den Schnittpunkt der beiden andern, wenn

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

d. h. wenn

$$A(B_1 C_2 - B_2 C_1) + B(C_1 A_2 - C_2 A_1) + C(A_1 B_2 - A_2 B_1) = 0$$

oder wenn die Zahlfaktoren λ, λ_1, λ_2 sich so bestimmen lassen, daß

$$\lambda(Ax + By + C) + \lambda_1(A_1 x + B_1 y + C_1) \\ + \lambda_2(A_2 x + B_2 y + C_2) \equiv 0 .$$

§ 62. **Größenbestimmungen und -Beziehungen.**

1. Koordinaten (x, y) des Teilpunktes P einer Strecke P_1P_2, Endpunkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), $[P_1P : PP_2 = m : n = \lambda : 1]$:

$$x = \frac{m x_2 + n x_1}{m + n} \overset{\text{od.}}{=} \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

$$y = \frac{m y_2 + n y_1}{m + n} \overset{\text{od.}}{=} \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} .$$

Sind m und n ungleichzeichig, bzw. ist λ negativ, so liegt P außerhalb P_1P_2.

Für den Halbierungspunkt ist:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} .$$

2. Beziehungen zwischen den Koordinaten von vier harmonischen Punkten (x_1, y_1), (x_2, y_2), (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2):

$$2(x_1 x_2 + \xi_1 \xi_2) = (x_1 + x_2)(\xi_1 + \xi_2)$$

$$2(y_1 y_2 + \eta_1 \eta_2) = (y_1 + y_2)(\eta_1 + \eta_2) .$$

3. Vier durch den Ursprung gehende Gerade

$$y = m_1 x \qquad\qquad y = n_1 x$$

$$y = m_2 x \qquad\qquad y = n_2 x$$

bilden ein harmonisches Büschel, wenn

$$2(m_1 m_2 + n_1 n_2) = (m_1 + m_2)(n_1 + n_2) .$$

4. Entfernung zweier Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2):

$$|e| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} .$$

Im schiefwinkligen System mit Achsenwinkel ω:
$$|e| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\omega}\,.$$

5. Gerade durch Punkt (x_1, y_1), welche mit der X-Achse den $\sphericalangle\,\varphi$ bildet:
$$y - y_1 = (x - x_1)\operatorname{tg}\varphi\,.$$

6. Winkel zwischen zwei Geraden L und L_1 bestimmt durch
$$\operatorname{tg}(LL_1) = \frac{AB_1 - A_1B}{AA_1 + BB_1} = \frac{m_1 - m}{m\,m_1 + 1} \quad (\text{vgl. § } 61_5 \text{ u. }_7).$$

7. Gerade, welche mit $y = mx + b$ den $\sphericalangle\,\varphi$ bildet und durch Punkt (x_1, y_1) geht:
$$y - y_1 = \frac{m + \operatorname{tg}\varphi}{1 - m\operatorname{tg}\varphi}(x - x_1)\,.$$

8. Abstand p des Ursprungs von der Geraden $Ax + By + C = 0$, oder $y = mx + b$:
$$p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{b}{\pm\sqrt{m^2+1}}\,;$$
das Zeichen wird so gewählt, daß p positiv wird.

9. Abstand e des Punktes (x_1, y_1) von der Geraden $Ax + By + C = 0$, oder $y = mx + b$, oder $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$:
$$e = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{y_1 - mx_1 - b}{\pm\sqrt{m^2+1}}$$
$$= -(x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p)\,.$$
Das Vorzeichen der Wurzel wird so gewählt, daß für einen Punkt, der mit dem Ursprung auf derselben Seite der Geraden liegt, e positiv wird.

10. Entfernung e zweier paralleler Geraden (s. § 61_5):
$$|e| = \frac{C_1 - C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{C_1 - C}{\pm\sqrt{m^2+1}} = p_1 - p\,.$$

11. Halbierungslinie des Winkels zweier Geraden:

$$\frac{A x + B y + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \quad \text{oder}$$

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = \pm (x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1) .$$

Sind die Geraden gegeben durch die symbolischen Gleichungen $l = 0$, $l_1 = 0$, dann ist die Gleichung der Winkelhalbierenden

$$l \mp l_1 = 0 .$$

12. Inhalt J eines Dreiecks, aus den Ecken (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3):

$$\pm J = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)] .$$

Liegen die drei Punkte in gerader Linie, so ist $J = 0$, vgl. § 61_4. Fällt (x_3, y_3) in den Ursprung, so ist

$$\pm J = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1) .$$

13. Inhalt eines Vielecks aus den Koordinaten der Ecken:

$$\pm 2 J = x_1 (y_2 - y_n) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_4 - y_2) + \dots + x_n (y_1 - y_{n-1})$$

§ 63. Polargleichung der Geraden.

r Fahrstrahl, φ Azimut, p Lot vom Pol auf die Gerade, α Winkel zwischen P und der Polarachse.

1. Lot zur Polarachse:

$$r \cos \varphi = p .$$

2. Parallele zur Polarachse:

$$r \sin \varphi = p .$$

3. Gleichurg der Geraden:

$$r \cos (\varphi - \alpha) = p .$$

4. Zwei parallele Gerade:

$$\begin{cases} r\cos(\varphi - \alpha) = p \\ r\cos(\varphi - \alpha) = p_1 \,. \end{cases}$$

5. Zwei Gerade sind senkrecht, wenn

$$\alpha_1 - \alpha = R \,.$$

6. Entfernung e zweier Punkte (φ_1, r_1), (φ_2, r_2):

$$e = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2\, r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \,.$$

7. Inhalt des Dreiecks CP_1P_2:

$$J = \pm \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \,.$$

8. Inhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$:

$$J = \pm \frac{1}{2} \{ r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + r_2 r_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) + r_3 r_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) \} \,.$$

9. Bedingung dafür, daß drei Punkte in gerader Linie liegen:

$$r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + r_2 r_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) + r_3 r_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) = 0 \,.$$

10. Gleichung der Verbindungslinie der beiden Punkte (φ_1, r_1), (φ_2, r_2):

$$r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + r_2 r \sin(\varphi - \varphi_2) + r r_1 \sin(\varphi_1 - \varphi) = 0 \,.$$

§ 64. Strahlbüschel, Doppelverhältnis, projektivische Strahlbüschel.

(Abgekürzte Bezeichnung der Gleichung der Geraden.)

1. Strahlbüschel. Sind $l_1 = 0$, $l_2 = 0$ die Gleichungen zweier Geraden in Normalform, so ist die allgemeine Gleichung einer dritten Geraden (Teilstrahl), die durch den Schnittpunkt der beiden ersten geht,

$$l_1 - \lambda l_2 = 0 \,.$$

λ ist das Verhältnis der von irgend einem Punkt des Teilstrahls l_3 auf l_1 und l_2 gefällten Lote (Sinusteilverhältnis).

$$\lambda = \frac{\sin(l_1 l_3)}{\sin(l_3 l_2)}.$$

Ist der Zahlenfaktor λ veränderlich, so ist durch die Gleichung ein Strahlbüschel dargestellt.

Sind die ersten Geraden durch ihre allgemeine Gleichung $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ gegeben, so ist die Gleichung des Teilstrahls

$$L_1 - \varkappa L_2 = 0 .$$

$\varkappa$ unterscheidet sich von dem Verhältnis der Abstände durch einen konstanten Faktor.

2. Vier sich in einem Punkt schneidende Gerade können dargestellt werden durch die Gleichungen

$$\begin{cases} l_1 = 0 & l_1 - \lambda_1 l_2 = 0 \\ l_2 = 0 & l_1 - \lambda_2 l_2 = 0 . \end{cases}$$

Das **Doppelverhältnis** (anharmonisches Verhältnis) (a, b, c, d) der vier Strahlen a, b, c, d ist

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = (a, b, c, d) = \frac{\sin(a\,c)}{\sin(c\,b)} : \frac{\sin(a\,d)}{\sin(d\,b)}.$$

Satz: Wenn vier von einem Punkt ausgehende Strahlen a, b, c, d von einer beliebigen Geraden in den Punkten A, B, C, D geschnitten werden, so ist das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte konstant und gleich dem Doppelverhältnis des Büschels, d. h.

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{\sin(a\,c)}{\sin(c\,b)} : \frac{\sin(a\,d)}{\sin(d\,b)}.$$

Für einen gegebenen Wert des Doppelverhältnisses ist zu drei Strahlen der vierte eindeutig bestimmt.

Das Doppelverhältnis des Büschels

$$\begin{cases} l_1 - \lambda_1 l_2 = 0 \\ l_1 - \lambda_2 l_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_1 - \lambda_3 l_2 = 0 \\ l_1 - \lambda_4 l_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ist}$$

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} .$$

3. Harmonisches Büschel. Ist das Doppelverhältnis der vier Strahlen $= -1$, so ist das Büschel ein harmonisches; es ist dargestellt durch

$$\begin{cases} l_1 = 0 \\ l_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_1 - \lambda_1 l_2 = 0 \\ l_1 + \lambda_1 l_2 = 0 . \end{cases}$$

Die Beziehungen in Nr. 2 und 3 gelten auch, wenn die Geraden durch Gleichungen von der Form $L_1 - \lambda_1 L_2 = 0$ usw. gegeben sind.

4. Projektivische Strahlbüschel. Sind

$$L_1 - \lambda_1 L_2 = 0 , \qquad L_1 - \lambda_2 L_2 = 0 \quad \text{usf.},$$
$$M_1 - \lambda_1 M_2 = 0 , \qquad M_1 - \lambda_2 M_2 = 0 \quad \text{usf.}$$

die Gleichungen der Strahlen zweier Büschel, so ist das Doppelverhältnis von vier Strahlen des einen Büschels gleich dem Doppelverhältnis der entsprechenden Strahlen des andern; solche Büschel heißen **projektivisch.**

Durch drei Paare entsprechender Strahlen sind die Büschel vollständig und eindeutig bestimmt.

§ 65. Homogene Gleichung der Geraden, trimetrische Punkt-Koordinaten.

Sind $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, $l_3 = 0$ die Gleichungen dreier nicht durch einen Punkt gehender Geraden, so kann die Gleichung jeder andern Geraden in die Form gebracht werden:

$$\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \lambda_3 l_3 = 0 .$$

Hierbei können l_1, l_2, l_3 auch aufgefaßt werden als Größen, die den Abständen eines Punktes der Geraden von den Seiten des Dreiecks, das von l_1, l_2, l_3 gebildet wird, proportional sind (Dreieckskoordinaten). Jeder Abstand ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem er gleich- oder gegenläufig ist zu dem von einem Punkt im Innern des Dreiecks auf dieselbe Seite gefällten Lot.

§ 66. Linienkoordinaten; Gleichung des Punktes; Punktreihe; projektivische Punktreihen und Strahlbüschel.

1. Ist die Gleichung irgend einer Geraden

$$ux + vy + 1 = 0\,,$$

so ist die Lage der Geraden durch die Konstanten u und v gegeben; sie heißen daher die Koordinaten jener geraden Linie oder Linienkoordinaten. u und v sind die negativen reziproken Werte der Abschnitte, welche die Gerade auf den Koordinatenachsen macht.

2. Alle Geraden, deren Koordinaten einer Gleichung

$$\text{(1)} \qquad Au + Bv + C = 0$$

genügen, gehen durch einen Punkt, dessen Koordinaten $x = \frac{A}{C}$ und $y = \frac{B}{C}$ sind; die Gleichung (1) heißt allgemeine Gleichung des Punktes. Die Gleichung

$$\text{(2)} \qquad au + bv + 1 = 0$$

heißt die Normalform der Gleichung des Punktes.

3. Eine Gleichung n-ten Grades in u und v stellt eine von Geraden eingehüllte Kurve dar; bestimmt man aus dieser Gleichung und der Gleichung eines Punktes die gemeinschaftlichen Werte von u und v, so ergeben sich aus denselben n Tangenten an die Kurve; diese

heißt eine **Linie n-ter Klasse**. Die Ordnungszahl gibt die Zahl der Schnittpunkte der Kurve mit einer Geraden an, die Klassenzahl die Anzahl der Tangenten der Kurve, die durch einen bestimmten Punkt gehen.

4. Sind $\Sigma = 0$ und $\Sigma_1 = 0$ die Gleichungen zweier Umhüllungslinien, so stellt $\Sigma + \lambda \Sigma_1 = 0$ eine Umhüllungslinie dar, welche alle gemeinschaftlichen Tangenten von $\Sigma = 0$ und $\Sigma_1 = 0$ berührt (vgl. § 60_4).

5. Sind $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ die Gleichungen zweier Punkte P_1 und P_2, so ist

$$U_1 - \lambda U_2 = 0$$

die Gleichung eines Punktes auf der Verbindungslinie von P_1 und P_2; ist λ veränderlich, so hat man die Gleichung einer **Punktreihe**.

6. **Doppelverhältnis.** Sind

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} U_1 - \lambda_1 U_2 = 0 \\ U_1 - \lambda_2 U_2 = 0 \end{cases}$$

vier Punkte auf einer Geraden, so ist das Doppelverhältnis derselben ausgedrückt durch $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

7. **Harmonische Punkte.** Wenn $\lambda_1 : \lambda_2 = -1$, so sind die vier Punkte (von Nr. 6) harmonische Punkte; sie sind also dargestellt durch

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} U_1 - \lambda U_2 = 0 \\ U_1 + \lambda U_2 = 0 \, . \end{cases}$$

8. **Projektivische Punktreihen.** Zwei Punktreihen $U_1 - \lambda U_2 = 0$ und $V_1 - \lambda V_2 = 0$ sind projektivisch.

Eine Punktreihe $U_1 - \lambda U_2 = 0$ und ein Strahlbüschel $L_1 - \lambda L_2 = 0$ sind projektivisch.

§ 67. Homogene Gleichung des Punktes, trimetrische Linienkoordinaten.

Sind $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ die Gleichungen dreier nicht auf einer Geraden liegender fester Punkte, so kann die Gleichung jedes andern Punktes in die Form gebracht werden:

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0 .$$

Linien zweiter Ordnung (Kegelschnitte).

A) Der Kreis.

§ 68. Kurvengleichung; Sekante, Tangente, Polare etc.

Koordinaten des Mittelpunktes (a, b), Halbmesser r.

1. Allgemeine Gleichung des Kreises:

(1) $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

2. (2) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

$$a = -\frac{A}{2}, \quad b = -\frac{B}{2}, \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}.$$

Ist $A^2 = 4C$, oder $B^2 = 4C$, dann berührt der Kreis die X-, bzw. die Y-Achse; ist $C = 0$, so geht der Kreis durch den Ursprung. — Für die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Achsen ist $x_1 + x_2 = 2a$, $y_1 + y_2 = 2b$.

3. Der Ursprung ist Mittelpunkt:

(3) $x^2 + y^2 = r^2$ (Mittelpunktsgleichung).

4. Mittelpunkt auf der X-Achse im Abstand r vom Ursprung:

$$y^2 = 2rx - x^2 \quad \text{(Scheitelgleichung).}$$

5. Gleichung für ein schiefwinkliges System:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + 2(x - a)(y - b)\cos\omega = r^2 .$$

6. Sekante durch die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), Mittelpunkt im Ursprung:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = -\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2} \quad \text{oder} \quad y-y_1 = -\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}(x-x_1)\,.$$

7. Tangente, Berührungspunkt (x_1, y_1), Mittelpunkt $(0, 0)$:

$$(1) \qquad x\,x_1 + y\,y_1 = r^2\,,$$

Mittelpunkt (a, b):

$$(2) \qquad (x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = r^2\,.$$

Tangenten vom Punkt (x_1, y_1) an den Kreis um 0 mit r:

$$(3) \qquad y - y_1 = \frac{-x_1 y_1 \pm r\sqrt{x_1^2+y_1^2-r^2}}{r^2-x_1^2}(x-x_1)\,.$$

8. Polare (s. § 39) des Punktes (x_1, y_1) in Beziehung auf den Kreis $x^2+y^2=r^2$:

$$x\,x_1 + y\,y_1 = r^2\,.$$

Die Koordinaten des Pols der Geraden

$$A\,x + B\,y + C = 0 \quad \text{sind}$$

$$x_1 = -\frac{A\,r^2}{C}\,, \qquad y_1 = -\frac{B\,r^2}{C}\,.$$

9. Kreis durch drei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3); er ist bestimmt durch die vier Gleichungen

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2,\\ (x_1-a)^2 + (y_1-b)^2 &= r^2,\\ (x_2-a)^2 + (y_2-b)^2 &= r^2,\\ (x_3-a)^2 + (y_3-b)^2 &= r^2;\end{aligned}$$

seine Gleichung ist daher

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2, & x, & y, & 1\\ x_1^2+y_1^2, & x_1, & y_1, & 1\\ x_2^2+y_2^2, & x_2, & y_2, & 1\\ x_3^2+y_3^2, & x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

(Zugleich Bedingung dafür, daß vier Punkte auf einem Kreis liegen.)

10. Zwei Kreise

$$x^2+y^2+A\,x+B\,y+C=0$$
$$x^2+y^2+A_1x+B_1y+C_1=0$$

sind konzentrisch, wenn $A=A_1$, $B=B_1$.

11. Potenzlinie (s. § 41) zweier Kreise (s. Nr. 10):

$$(A-A_1)\,x+(B-B_1)\,y+C-C_1=0$$

(Differenz der Kreisgleichungen, vgl. § 41_3 und § 60_4).

§ 69. Polarkoordinaten.

Ist O der Pol (Anfangspunkt), M der Mittelpunkt, OX die Polarachse, $\sphericalangle MOX=\alpha$, $\sphericalangle POX=\varphi$, $OP=\varrho$, $OM=d$, so ist

1. die Gleichung des Kreises

$$(\varrho\cos\varphi-d\cos\alpha)^2+(\varrho\sin\varphi-d\sin\alpha)^2=r^2 \quad \text{oder}$$
$$\varrho^2-2\,\varrho\,d\cos(\varphi-\alpha)+d^2=r^2\,.$$

Fällt OM mit OX zusammen (Mittelpunkt auf der Polarachse), so ist die Gleichung des Kreises

$$\varrho^2-2\,\varrho\,d\cos\varphi+d^2=r^2\,.$$

Liegt außerdem O auf dem Kreis, so ist

$$\varrho=2\,r\cos\varphi\,.$$

2. Für den berührenden Leitstrahl ist

$$d\sin(\varphi-\alpha)=r\,.$$

B) Parabel, Ellipse, Hyperbel.

§ 70. Kurvengleichungen; Sekante, Tangente, Polare etc.

1. Stücke und Bezeichnungen.

Große (reelle) Achse 2 a } bei Ellipse und Hyperbel;
kleine (imag.) Achse 2 b }

Parameter 2 p (= Sehne durch einen Brennpunkt parallel zu der Leitlinie); für Ellipse und Hyperbel ist

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Lineare Exzentrizität (Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkt) ist bei der

Ellipse: $f = \sqrt{a^2 - b^2}$; $f < a$;

Hyperbel: $f = \sqrt{a^2 + b^2}$; $f > a$;

Parabel: Abstand des Brennpunktes vom Scheitel $\frac{p}{2}$.

Numerische Exzentrizität bei Ellipse und Hyperbel $\varepsilon = \frac{f}{a}$.

ε gibt zugleich das Verhältnis der Entfernung eines Kurvenpunktes vom Brennpunkt und seines Abstandes von der zugehörigen Leitlinie an. Es ist für die Ellipse, Parabel, Hyperbel bzw. $\varepsilon \lesseqgtr 1$.

Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie $= \frac{p}{\varepsilon}$.

2. Scheitelgleichung. Erste Form:

I. $y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2$ oder $y^2 = 2px + qx^2$ (gemeinschaftliche Gleichung).

Diese Gleichung stellt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem $\varepsilon \lesseqgtr 1$, bzw. $q \lesseqgtr 0$. $\varepsilon = 0$ gibt die Scheitelgleichung eines Kreises.

Zweite Form:

$$\text{II.} \quad \begin{cases} y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 & \text{(Ellipse);} \\ y^2 = 2px & \text{(Parabel);} \\ y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2 & \text{(Hyperbel).} \end{cases}$$

3. Mittelpunktsgleichung:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 & \text{(Ellipse);} \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 & \text{(Hyperbel).} \end{cases}$$

4. Polargleichung.

1. Der Brennpunkt ist Pol, die Achse bzw. große Achse ist Polarachse, φ ist von dem Scheitel aus gezählt, der dem Pol am nächsten liegt.

$$\varrho=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}.$$

Die Kurve ist eine Ellipse, Parabel, Hyperbel je nachdem $\varepsilon \lesseqgtr 1$.

2. Der Mittelpunkt ist Pol, die große Achse Polarachse.

$$\varrho^2=\frac{b^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi} \quad \text{(Ellipse);}$$

$$\varrho^2=\frac{-b^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi} \quad \text{(Hyperbel).}$$

Die folgenden Gleichungen sind bei der Parabel auf die Scheitel-, bei Ellipse und Hyperbel auf die Mittelpunktsgleichung zu beziehen.

5. Sekante durch die beiden Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) der

1. Parabel:

$$(y_1+y_2)\,y-y_1 y_2=2\,p\,x \quad \text{oder}$$

$$y-y_1=\frac{2\,p}{y_1+y_2}(x-x_1);$$

2. Ellipse:

$$\frac{(x_1+x_2)\,x}{a^2}+\frac{(y_1+y_2)\,y}{b^2}=\frac{x_1\,x_2}{a^2}+\frac{y_1\,y_2}{b^2}+1\,,\quad \text{oder}$$

$$y-y_1=-\frac{b^2\,(x_1+x_2)}{a^2\,(y_1+y_2)}(x-x_1)\,;$$

3. Hyperbel:

$$\frac{(x_1+x_2)\,x}{a^2}-\frac{(y_1+y_2)\,y}{b^2}=\frac{x_1\,x_2}{a^2}-\frac{y_1\,y_2}{b^2}+1\,,\quad \text{oder}$$

$$y-y_1=\frac{b^2\,(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}(x-x_1)\,.$$

6. Tangente im Punkt $(x_1,\ y_1)$ der

1. Parabel: $y\,y_1=p\,(x+x_1)\,;$

2. Ellipse: $\dfrac{x\,x_1}{a^2}+\dfrac{y\,y_1}{b^2}=1\,;$

3. Hyperbel: $\dfrac{x\,x_1}{a^2}-\dfrac{y\,y_1}{b^2}=1\,.$

7. Asymptoten der Hyperbel:

$$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0\,.$$

Ist der Asymptotenwinkel $2\,\varphi$, so ist $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{b}{a}$.

Bei der gleichseitigen Hyperbel stehen die Asymptoten aufeinander senkrecht.

Ein Durchmesser $y=m\,x$ schneidet, berührt in einem unendlich fernen Punkt (ist also Asymptote), trifft die Hyperbel nicht, je nachdem $m^2 \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} \dfrac{b^2}{a^2}$.

8. Normale im Punkt $(x_1,\ y_1)$ der

1. Parabel: $p(y-y_1)+y_1(x-x_1)=0$, oder
$x\,y_1+p\,y=y_1\,(x_1+p)\,;$

2. Ellipse: $$\frac{a^2 x}{x_1} - \frac{b^2 y}{y_1} = a^2 - b^2, \quad \text{oder} \quad y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1);$$

3. Hyperbel: $$\frac{a^2 x}{x_1} + \frac{b^2 y}{y_1} = a^2 + b^2, \quad \text{oder} \quad y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

9. Bezeichnet man die Abszisse des Schnittpunktes der Tangente im Punkt (x_1, y_1) mit der X-Achse mit x_0, die **Subtangente** (Projektion des Tangentenstückes zwischen Berührungspunkt und X-Achse auf die X-Achse) mit ST, die Subnormale mit SN, so ist

	x_0	ST	SN
1. für die Parabel:	$-x_1$	$2 x_1$	p,
2. für die Ellipse:	$\frac{a^2}{x_1}$	$\frac{a^2 - x_1^2}{x_1}$	$-\frac{b^2 x_1}{a^2}$,
3. für die Hyperbel:	$\frac{a^2}{x_1}$	$\frac{x_1^2 - a^2}{x_1}$	$\frac{b^2 x_1}{a^2}$.

Aus dem Wert von x_0 ergibt sich für jede Kurve eine Konstruktion der Tangente im Punkte (x_1, y_1).

10. **Tangenten** vom Punkt (x_1, y_1) an die

1. Parabel:
$$y - y_1 = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 2 p x_1}}{2 x_1}(x - x_1);$$

2. Ellipse:
$$y - y_1 = \frac{-x_1 y_1 \pm \sqrt{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 - a^2 b^2}}{a^2 - x_1^2}(x - x_1);$$

3. Hyperbel:
$$y - y_1 = \frac{-x_1 y_1 \pm \sqrt{-b^2 x^2 + a^2 y_1^2 + a^2 b^2}}{a^2 - x_1^2}(x - x_1).$$

11. Allgemeine Gleichung der Tangente (Richtung gegeben) für die

1. Parabel: $y - m x = \frac{p}{2 m}$;
2. Ellipse: $y - m x = \pm\sqrt{m^2 a^2 + b^2}$;
3. Hyperbel: $y - m x = \pm\sqrt{m^2 a^2 - b^2}$.

12. Zieht man durch einen Punkt P eine Sekante eines Kegelschnittes, so heißt der Ort des zu P in Beziehung auf die beiden Schnittpunkte zugeordneten vierten harmonischen Punktes die Polare von P in Beziehung auf den Kegelschnitt.

Polare des Punktes (x_1, y_1) in Beziehung auf die

1. Parabel: $y y_1 = p(x + x_1)$;
2. Ellipse: $\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$;
3. Hyperbel: $\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1$.

Liegt Punkt (x_1, y_1) auf der Kurve, so ist seine Polare zugleich Tangente. Die Polare des Mittelpunktes ist die unendlich ferne Gerade; die Polare eines unendlich fernen Punktes ist ein Durchmesser.

13. Koordinaten des Pols der Geraden $A x + B y + C = 0$ für die

1. Parabel: $x_1 = + \frac{C}{A}$, $y_1 = - \frac{B p}{A}$;
2. Ellipse: $x_1 = - \frac{a^2 A}{C}$, $y_1 = - \frac{b^2 B}{C}$;
3. Hyperbel: $x_1 = - \frac{a^2 A}{C}$, $y_1 = \frac{b^2 B}{C}$.

14. Zwei Gerade heißen konjugiert in bezug auf einen Kegelschnitt, wenn jede durch den Pol der andern geht.

1. Ist bei der Parabel ein unendlich ferner Punkt gegeben durch die Richtung $y = mx$, so ist der zugeordnete Durchmesser

$$y = \frac{p}{m}.$$

2. Gleichungen für zwei **konjugierte Durchmesser** bei der

$$\text{Ellipse:} \quad Ax - By = 0 \quad \text{und} \quad \frac{Bx}{a^2} + \frac{Ay}{b^2} = 0;$$

$$\text{Hyperbel:} \quad Ax + By = 0 \quad \text{und} \quad \frac{Bx}{a^2} + \frac{Ay}{b^2} = 0.$$

Jede Asymptote der Hyperbel und ihr konjugierter Durchmesser fallen zusammen.

15. Gleichung in Beziehung auf zwei konjugierte Durchmesser $2a_1$, $2b_1$ der

1. Ellipse:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1; \quad \text{Beziehung:} \quad a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2;$$

2. Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1; \quad \text{Beziehung:} \quad a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2.$$

Sind φ und φ_1 die Winkel, welche zwei konjugierte Durchmesser mit der Hauptachse bilden, so ist für die

3. Ellipse:

$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{b^2}{a^2}; \quad a_1 b_1 \sin(\varphi - \varphi_1) = ab \text{ (s. § } 71,_{26});$$

4. Hyperbel:

$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varphi_1 = +\frac{b_2}{a^2}; \quad a_1 b_1 \sin(\varphi - \varphi_1) = ab \text{ (s. § } 71,_{27}).$$

Gleichung der Hyperbel in Beziehung auf die beiden Asymptoten als Koordinatenachsen

$$x\,y = c^2 = \frac{f^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{4};$$

gleichseitige Hyperbel $x\,y = \frac{1}{2}a^2$.

16. Leitlinie (Direktrix), d. h. Polare des Brennpunktes für die

1. Parabel: $x = -\frac{p}{2}$; Brennpunkt $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$;
2. Ellipse: $x = \frac{a^2}{f} = \frac{a}{\varepsilon}$; f.d. Brennpunkt $(f, 0)$;
3. Hyperbel: $x = \frac{a^2}{f} = \frac{a}{\varepsilon}$; f.d. Brennpunkt $(f, 0)$.

17. Länge des Brennstrahls, bzw. der Brennstrahlen zu dem Punkt (x_1, y_1):

1. Parabel: $r = x_1 + \frac{p}{2}$;
2. Ellipse: $r = a - x_1\,\varepsilon$
   $r_1 = a + x_1\,\varepsilon$; $\quad r + r_1 = 2\,a$;
3. Hyperbel: $r = x_1\,\varepsilon - a$
   $r_1 = x_1\,\varepsilon + a$; $\quad r_1 - r = 2\,a$.

18. Krümmungsmittelpunkt (x_0, y_0) und Krümmungshalbmesser ϱ für den Punkt (x_1, y_1) der

1. Parabel:
$$\begin{cases} x_0 = 3\,x_1 + p = \dfrac{3\,y_1^2 + 2\,p^2}{2\,p}, \\ y_0 = -\dfrac{y_1^3}{p^2} = -\dfrac{2\,x_1\,y_1}{p}; \end{cases}$$

$$\varrho = \frac{(y_1^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{N_x^3}{p^2}; \quad \text{für den Scheitel } \varrho = p;$$

2. Ellipse: $$\begin{cases} x_0 = \dfrac{f^2 x_1^3}{a^4} = \dfrac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2}, \\ y_0 = -\dfrac{f^2 y_1^3}{b^4} = -\dfrac{\varepsilon^2 a^2 y_1^3}{b^4}; \end{cases}$$

$$\varrho = \frac{(b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} = \frac{(r\, r_1)^{\frac{3}{2}}}{a\, b} = \frac{N_x^3}{p^2}.$$

N_x Normale vom Punkt $(x_1\, y_1)$ bis zur X-Achse. Für den Scheitel der großen Achse ist

$$\varrho_2 = \frac{b^2}{a} = p\,, \quad \text{für den der kleinen}$$

$$\varrho_1 = \frac{a_2}{b}.$$

3. Hyperbel: $$\begin{cases} x_0 = \dfrac{f^2 x_1^3}{a^4} = \dfrac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2}, \\ y_0 = -\dfrac{f^2 y_1^3}{b^4} = -\dfrac{a^2 \varepsilon^2 y_1^3}{b^4}; \end{cases}$$

$$\varrho = \frac{(b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} = \frac{(r\, r_1)^{\frac{3}{2}}}{a\, b} = \frac{N_x^3}{p^2};$$

für den Scheitel ist $\varrho = \dfrac{b^2}{a} = p$.

19. Flächeninhalt:

1. Parabelsegment. S.

Sehne senkrecht zur Achse, (x_1, y_1) Koordinaten des einen Endpunktes:

$$S = \frac{4}{3} x_1 y_1.$$

Beliebiges Segment; (x_1, y_1), (x_2, y_2) Koordinaten der Endpunkte:

$$S = \frac{(y_1 - y_2)^3}{12\, p} = \frac{x_1 - x_2}{6} \cdot \frac{(y_1 - y_2)^2}{y_1 + y_2}.$$

2. Ellipsenzone zwischen der kleinen Achse und der im Abstand x_1 dazu parallelen Sehne:

$$\frac{b}{a}\left(x_1\sqrt{a^2-x_1^2}+a^2\arc\sin\frac{x_1}{a}\right).$$

Gesamte Ellipsenfläche: $a\,b\,\pi$.

3. Hyperbelsegment, Sehne senkrecht zur X-Achse:

$$S = x_1\,y_1 - a\,b\,l\left(\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}\right).$$

20. Konfokale Kegelschnitte. — Eine Ellipse und eine Hyperbel, welche dieselben Brennpunkte haben, konfokal sind, haben folgende Gleichungen:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2(1-\varepsilon^2)}=1\,, \\ \dfrac{x^2}{a_1^2}-\dfrac{y^2}{a_1^2(\varepsilon_1^2-1)}=1\,, \end{cases}$$

wobei $a\,\varepsilon = a_1\,\varepsilon_1 = f$, $\varepsilon < 1$, $\varepsilon_1 > 1$. Die Gleichungen können demnach in folgende Form gebracht werden:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-f^2}=1\,,$$

$$\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{f^2-a_1^2}=1\,.$$

Diese beiden konfokalen Kegelschnitte schneiden sich rechtwinklig (elliptische Koordinaten).

Die Gleichungen aller konfokalen Zentralkegelschnitte sind in der Gleichung enthalten:

$$\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}=1\,;$$

sie stellt eine Ellipse, Hyperbel oder imaginäre Kurve dar, je nachdem $k < b^2 < a^2$, oder $b^2 < k < a^2$, oder b^2 und $a^2 < k$.

§ 71. Sätze über Kegelschnitte.

A) Für jeden Kegelschnitt.

1. Ein Kegelschnitt im allgemeinen ist durch fünf Punkte oder 5—r Punkte und r Tangenten (r = 0 bis 5) bestimmt.

2. Eine Gerade trifft einen Kegelschnitt in zwei reellen und verschiedenen, oder zusammenfallenden, oder in zwei imaginären Punkten. Durch einen Punkt lassen sich an einen Kegelschnitt zwei reelle verschiedene, oder zusammenfallende, oder zwei imaginäre Tangenten ziehen.

3. Die Polaren (s. § $70,_{12}$) der sämtlichen Punkte einer Geraden gehen durch den Pol dieser Geraden, und die Pole sämtlicher Strahlen eines Büschels liegen auf der Polaren des Büschelmittelpunktes.

Die Berührungssehne zweier von einem Punkt ausgehender Tangenten ist die Polare dieses Punktes.

Die Halbierungspunkte paralleler Sehnen liegen auf einem Durchmesser.

4. Das Verhältnis der Entfernungen eines Punktes eines Kegelschnittes von einem Brennpunkt und von der zugehörigen Leitlinie ist konstant und gleich der numerischen Exzentrizität ε. (Für die Ellipse ist $\varepsilon < 1$, für die Parabel $\varepsilon = 1$, für die Hyperbel $\varepsilon > 1$.)

5. Die Sehne, welche durch einen Brennpunkt geht und senkrecht zur großen Achse ist, ist der Parameter.

6. Zieht man in den Endpunkten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne Tangenten, so schneiden sich diese auf der Leitlinie, und die Verbindungslinie des Schnittpunktes mit dem Brennpunkt steht senkrecht auf der Sehne.

7. Der Schnittpunkt zweier Tangenten liegt auf demjenigen Durchmesser, welcher der Sehne zwischen den Berührungspunkten konjugiert ist.

8. Sind in einer Ebene zwei Kurven zweiter Ordnung K und K_1 und bestimmt man zu jedem Punkt von K die Polare in Beziehung auf K_1, so umhüllen diese Polaren eine dritte Kurve zweiter Ordnung.

9. Satz des Pascal: Bei jedem einem Kegelschnitt einbeschriebenen einfachen Sechseck schneiden sich die drei Paare Gegenseiten in drei Punkten einer Geraden. (Konstruktion eines Kegelschnittes aus fünf Punkten.)

10. Satz des Brianchon: Bei jedem einem Kegelschnitt umbeschriebenen Sechseck schneiden sich die drei Verbindungslinien von je zwei Gegenecken in einem Punkte. (Konstruktion eines Kegelschnittes aus fünf Tangenten.)

11. Der Krümmungshalbmesser im Scheitel der großen Achse ist gleich dem halben Parameter.

B) Für die Parabel.

12. Die Durchmesser einer Parabel sind parallel zur Achse.

13. Der Fußpunkt des Lotes vom Brennpunkt auf eine Tangente liegt auf der Scheiteltangente. (Konstruktion der Parabel durch Umhüllung.)

14. Der Ort des Schnittpunktes zweier Parabeltangenten, die senkrecht aufeinander stehen, ist die Leitlinie.

15. Die Entfernung des Berührungspunktes einer Tangente vom Brennpunkt ist gleich der Entfernung des letzteren vom Schnittpunkt der Tangente mit der Achse. (Konstruktion der Tangente.)

16. Die Tangente halbiert den einen der Winkel zwischen dem Brennstrahl und dem durch den Berührungspunkt gehenden Durchmesser, die Normale den andern. (Konstruktion der Tangente und Normale.)

17. Die Subtangente einer Parabel wird durch den Scheitel halbiert; die Subnormale ist gleich dem halben Parameter (p).

18. Die Parabel kann als Ellipse betrachtet werden, deren zweiter Brennpunkt in unendlicher Entfernung liegt.

C) Für Ellipse und Hyperbel.

19. Hat man ein System von Ellipsen, bzw. Hyperbeln, welche eine Achse gemeinschaftlich haben, so schneiden sich alle Tangenten, welche auf dieser Achse die nämliche Koordinate für den Berührungspunkt haben, in einem und demselben Punkt der gemeinschaftlichen Achse. (Konstruktion der Tangente.)

20. Alle Sehnen, welche einem Durchmesser parallel gezogen sind, werden von seinem konjugierten halbiert. Die Tangente im Endpunkt eines Durchmessers ist parallel zum konjugierten Durchmesser.

21. In jedem einem Kegelschnitt umbeschriebenen Parallelogramm sind die Diagonalen konjugierte Durchmesser; in jedem einem Kegelschnitt einbeschriebenen Parallelogramm sind die Seiten zwei konjugierten Durchmessern parallel.

22. Das Produkt der Entfernungen der Brennpunkte von einer Tangente ist unveränderlich ($= b^2$) und die Fußpunkte der Lote liegen auf einem Kreis, der die große (bzw. reelle) Achse zum Durchmesser hat. (Konstruktion des Kegelschnittes durch Umhüllung.)

23. Die Tangente und die Normale in einem Punkt der Ellipse oder Hyperbel halbieren die Winkel, welche die Brennstrahlen nach diesem Punkt miteinander bilden. (Konstruktion der Tangente und der Normale.)

Hieraus folgt: Eine Ellipse und eine zu ihr konfokale Hyperbel schneiden sich unter rechten Winkeln.

24. Bei der Ellipse ist die Summe, bei der Hyperbel die Differenz der Brennstrahlen nach einem Punkt der Kurve unveränderlich und zwar gleich der großen (reellen) Achse. (Fadenkonstruktion der Kurven.)

25. Auf jeder Sekante einer Hyperbel sind die beiden Abschnitte, welche zwischen der Kurve und ihren beiden Asymptoten liegen, einander gleich; der Abschnitt einer Tangente zwischen den Asymptoten wird durch den Berührungspunkt halbiert.

(Konstruktion der Hyperbel, wenn ein Punkt und die Asymptoten derselben gegeben sind.)

26. Der Inhalt eines Dreiecks, das zwischen zwei konjugierten Halbmessern einer Ellipse und der Verbindungslinie ihrer Endpunkte liegt, ist unveränderlich.

27. Der Inhalt eines Dreiecks, das von den Asymptoten und einer zwischen denselben liegenden Tangente einer Hyperbel eingeschlossen wird, ist unveränderlich.

---

28. Alle Parabeln sind einander ähnlich.

29. Zwei Ellipsen mit den Halbachsen (a, b), (a_1, b_1) sind einander ähnlich, wenn $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$; ebenso sind zwei Hyperbeln einander ähnlich, wenn $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$, d. h., wenn sie gleiche Asymptotenwinkel haben.

Zwei Kegelschnitte (Bezeichnung s. § $73,_6$) sind einander ähnlich:

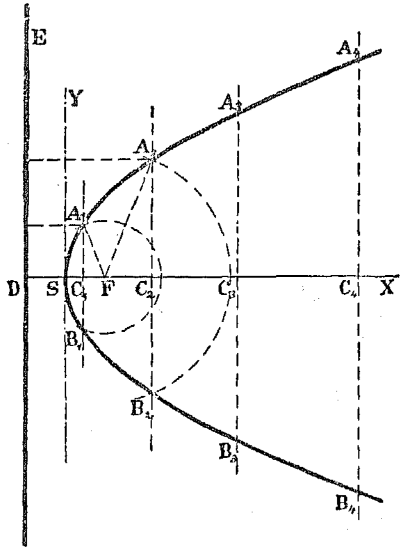
a) wenn $B^2 - 4\,A\,C = B_1^2 - 4\,A_1\,C_1 = 0$,

b) wenn $B^2 - 4\,A\,C$ und $B_1^2 - 4\,A_1\,C_1 \gtrless 0$ und $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$ ist.

§ 72. Konstruktion der Kegelschnitte.

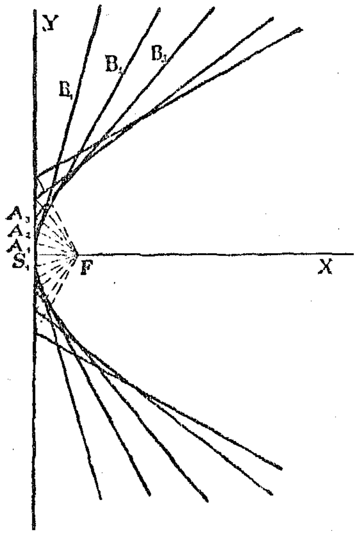
1. Parabel.

a) DX Achse, SY Scheiteltangente, DE Leitlinie, also $DS = SF = \frac{p}{2}$. — Ziehe in den beliebig, aber



zweckmäßig gewählten Punkten C_1, C_2, C_3 ... Lote zur Achse und beschreibe um F mit DC_1 einen Bogen, der das zu C_1 gehörige Lot in A_1 und B_1 schneidet; verfahre ebenso mit DC_2 usw. A_1, A_2, A_3 ..., B_1, B_2, B_3 ... sind Parabelpunkte. (Begründung: Jeder Punkt der Parabel hat vom Brennpunkt und der Leitlinie gleiche Abstände.)

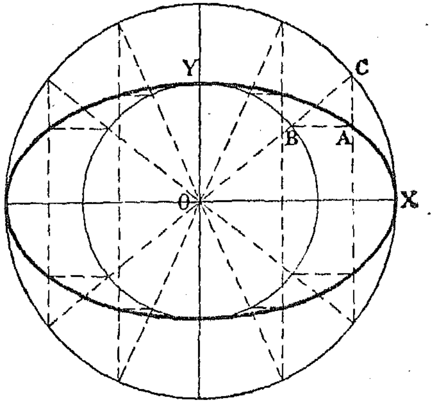
b) Durch Umhüllung. — S_1X Achse, S_1Y Scheiteltangente, F Brennpunkt. Ziehe von F nach S_1Y die Strahlen FA_1, FA_2, FA_3 ... und errichte auf denselben in A_1, A_2, A_3 ... die Lote A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 ..., so umhüllen diese die Parabel. (Begründung: § $71,_{13}$.)



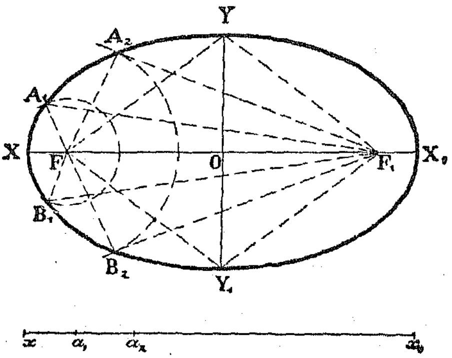
2. Ellipse.

a) $OX = a$, halbe große Achse; $OY = b$, halbe kleine Achse. Beschreibe um O mit a und b Kreise; ziehe durch O eine Gerade, welche die Kreise in B und C schneidet, ziehe $CA \perp OX$, $BA \parallel OX$, so ist A ein Punkt der Ellipse. Ähnlich weitere Punkte.

(Begründung: $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.)



b) $OX = OX_1 = a$, $OY = OY_1 = b$. Bestimme die Brennpunkte F und F_1 durch $FY = F_1 Y = a$. Ziehe $x x_1 = XX_1 = 2a$, nimm darauf Punkt a_1 beliebig an, beschreibe um F

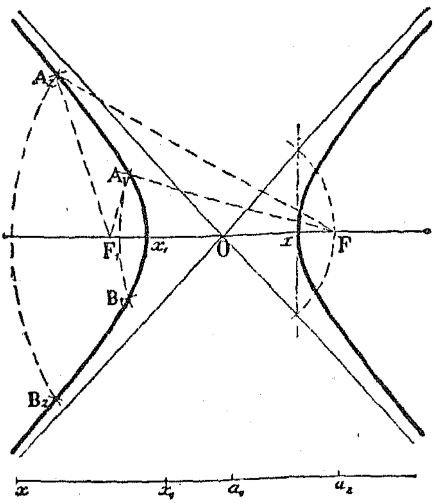


mit $x a_1$ und um F_1 mit $x_1 a_1$ Kreisbögen, die sich in A_1 und B_1 schneiden usf. A_1 und B_1 sind Punkte der Ellipse. (Begründung: $r + r_1 = 2a$, s. § 71,$_{24}$.)

3. Hyperbel.

$$0X = 0X_1 = a; \qquad 0F = 0F_1 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ziehe $x x_1 = 2a$; nimm auf der Verlängerung von $x x_1$ einen Punkt a_1 an und beschreibe um F mit $x a_1$



und um F_1 mit $x_1 a_1$ Bögen, die sich in A_1 und B_1 schneiden. A_1 und B_1 sind Punkte der Hyperbel. Verfahre ebenso mit a_2 usf.

(Begründung: $r - r_1 = 2a$, s. § 71,$_{24}$.)

§ 73. Allgemeine Gleichung zweiten Grades.

(1) $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$.

1. Nach Division der Gleichung (1) mit a_{33} zeigt sich, daß die Gleichung fünf unabhängige Konstanten

enthält; eine Kurve zweiten Grades ist daher durch fünf Punkte bestimmt.

2. Die Koordinaten des **Mittelpunktes** bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$\frac{1}{2} f'_x = a_{11} x + a_{12} y + a_{13} = 0 ,$$

$$\frac{1}{2} f'_y = a_{12} x + a_{22} y + a_{23} = 0 .$$

3. **Polare** des Punktes (x_1, y_1):

$$(x - x_1) f'_{x_1} + (y - y_1) f'_{y_1} + 2 f(x_1, y_1) = 0 ,$$

oder

$$a_{11} x_1 x + a_{12} (x y_1 + x y_1) + a_{22} y_1 y + a_{13} (x_1 + x)$$
$$+ a_{23} (y_1 + y) + a_{33} = 0 .$$

Regel: Die Gleichung der Polare von (x_1, y_1) wird erhalten, indem man in die Kurvengleichung für x^2, y^2, $2xy$, $2x$, $2y$ bzw. $x_1 x$, $y_1 y$, $x_1 y + x y_1$, $x_1 + x$, $y_1 + y$ setzt.

Die Gleichung der Polare ist Gleichung der **Tangente** im Punkt (x_1, y_1), wenn dieser auf der Kurve liegt.

4. **Durchmesser** konjugiert zu den Sehnen, welche mit der X-Achse den Winkel α machen:

$$\cos\alpha\, f'_x + \sin\alpha\, f'_y = 0 \quad \text{oder}$$

$$\cos\alpha (a_{11} x + a_{12} y + a_{13}) + \sin\alpha (a_{12} x + a_{22} y + a_{23}) = 0 .$$

5. Die Richtung der **Hauptachsen** (zwei zueinander senkrechte konjugierte Durchmesser), von welchen die eine mit der X-Achse den Winkel α bildet, ergibt sich aus:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 a_{12}}{a_{11} - a_{22}} .$$

6. Besprechung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades.

Es sei

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + a_{12}(a_{23}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{13}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 .$$

Die Gleichung zweiten Grades stellt nun dar:

I. Eigentlichen Kegelschnitt, wenn $\triangle \gtrless 0$ und zwar

1. Ellipse, wenn $A_{33} > 0$; dieselbe ist reell oder imaginär, je nachdem a_{11} und $\triangle$ verschiedene oder gleiche Vorzeichen haben; sie ist ein Kreis, wenn $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = 0$;

2. Parabel, wenn $A_{33} = 0$;

3. Hyperbel, wenn $A_{33} < 0$; —

II. Zerfallenden Kegelschnitt, wenn $\triangle = 0$ und zwar

1. reelles, sich schneidendes Geradenpaar, wenn $A_{33} < 0$;

2. paralleles Geradenpaar (reell und verschieden, zusammenfallend, oder imag.), wenn $A_{33} = 0$;

3. imaginäres, sich schneidendes Geradenpaar, wenn $A_{33} > 0$.

Anderes Verfahren: die Gleichung sei

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0;$$

sie stellt Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem bzw. $B^2 - AC \lesseqgtr 0$.

Um zu untersuchen, ob das Gebilde reell, imaginär oder zerfallend ist, löse man die gegebene Gleichung nach einer der Veränderlichen, z. B. nach y, auf. Wird der Radikand der auftretenden Quadratwurzel für einen gewissen Bereich der Werte von x positiv, so ist das Gebilde reell; ist er für alle Werte von x negativ, so ist es imaginär; ist er ein Quadrat, d. h. die Wurzel ausziehbar, so ist es zerfallend.

§ 74. Gleichungen weiterer Kurven.

A) Algebraische Kurven.

1. Neilsche Parabel $y = a x^{\frac{3}{2}}$.
2. Lemniskate $(x^2 + y^2)^2 - a^2 (x^2 - y^2) = 0$ oder $r^2 (r^2 - a^2 \cos 2\varphi) = 0$.
3. Konchoide $x^2 y^2 = (b + y)^2 (a^2 - y^2)$ oder $(x^2 + y^2)(y - b)^2 = a^2 y^2$ oder $r = a + \dfrac{b}{\cos\varphi}$.
4. Cissoide $y^2 (a - x) = x^3$.
5. Descartessches Blatt $x^3 + y^3 = 3 a x y$.
6. Cassinische Kurve $(x^2 + y^2)^2 - 2 a^2 (x^2 - y^2) = b^4 - a^4$.
7. Kardioide $(y^2 + x^2 - a x)^2 = a^2 (x^2 + y^2)$ oder $r = a (1 + \cos\varphi)$.

B) Transzendente Kurven.

1. Logarithmische Linie $y = m e^{\frac{x}{a}}$.
2. Kettenlinie $y = \dfrac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

3. Zykloide, beschrieben von einem bestimmten Punkt P auf dem Halbmesser eines Kreises, der auf einer Geraden rollt (a Halbmesser des rollenden Kreises, a_1 Mittelpunktsabstand von P, $\varphi = \text{arc} \sphericalangle POX$, X Berührungspunkt):

$$\begin{cases} x = a\varphi - a_1 \sin\varphi \\ y = a - a_1 \cos\varphi . \end{cases}$$

4. Epizykloide, beschrieben von dem Punkt P (s. Nr. 3), wenn der Kreis auf der Außenseite eines Kreises (Halbmesser b) rollt:

$$\begin{cases} x = (a+b)\sin\dfrac{a\varphi}{b} - a_1 \sin\dfrac{a+b}{b}\varphi, \\[2ex] y = (a+b)\cos\dfrac{a\varphi}{b} - a_1 \cos\dfrac{a+b}{b}\varphi. \end{cases}$$

5. Hypozykloide, beschrieben von dem Punkt P (s. Nr. 3), wenn der Kreis auf der Innenseite eines Kreises (Halbmesser b) rollt:

$$\begin{cases} x = (b-a)\sin\dfrac{a\varphi}{b} - a_1 \sin\dfrac{b-a}{b}\varphi, \\[2ex] y = (b-a)\cos\dfrac{a\varphi}{b} + a_1 \cos\dfrac{b-a}{b}\varphi. \end{cases}$$

Die Zykloide, ebenso die Epi- und Hypozykloide ist die gestreckte, gemeine oder verschlungene, je nachdem $a_1 \lesseqgtr a$.

6. Spirale des Archimedes (lineare Spirale) $r = a\varphi$.

7. Parabolische Spirale $r^2 = 2p\varphi$.

8. Hyperbolische Spirale $r = \dfrac{a}{\varphi}$.

9. Logarithmische Spirale $r = m e^{\frac{\varphi}{a}}$.

10. Kreisevolvente (Tangente = dem Bogen zwischen einem festen Punkt des Kreises und dem Berührungspunkt): $r = a\sqrt{1+\varphi^2}$, $\psi = \varphi - \operatorname{arc\,tg}\varphi$.

II. Geometrie des Raumes.

§ 75. Koordinaten-*) und Größenbeziehungen.

O Ursprung, P ein Punkt im Raum, $OP = r$; α, β, γ Winkel der OP mit den positiven Teilen der Koordinatenachsen; x, y, z die Koordinaten von P.

1. Ein Punkt. Die Koordinaten des Punktes P sind die Projektionen von OP auf die Achsen:

$$x = r\cos\alpha\,,\qquad y = r\cos\beta\,,\qquad z = r\cos\gamma\,,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,,\qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\,.$$

2. Zwei Punkte. (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2).

$$OP_1 = r_1\,,\qquad OP_2 = r_2\,;$$

$$\cos(r_1, r_2) = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1 r_2}\,.$$

Stehen r_1 und r_2 senkrecht aufeinander, so ist

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0\,.$$

Entfernung $e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Für Punkt $P(x, y, z)$, der P_1P_2 im Verhältnis $m : n = \lambda : 1$ teilt $(P_1P : PP_2 = m : n)$, ist

$$x = \frac{m x_2 + n x_1}{m + n}\,,\quad y = \frac{m y_2 + n y_1}{m + n}\,,\quad z = \frac{m z_2 + n z_1}{m + n}\,;$$

oder $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}\,,\quad y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\,,\quad z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}\,;$

sind m und n ungleichzeichig, bzw. ist λ negativ, so liegt P außerhalb P_1P_2.

3. Projektionen. Ist l eine Strecke, f eine Fläche, sind ferner l_1, l_2, l_3, bzw. f_1, f_2, f_3, ihre Projektionen auf die Koordinatenebenen, so ist

*) Es sind stets, wofern nichts anderes bemerkt ist, rechtwinklige Koordinaten vorausgesetzt.

1. $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 2\,l^2$,

2. $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = f^2$.

$f_1 = f\cos\alpha$, $f_2 = f\cos\beta$, $f_3 = f\cos\gamma$; α, β, γ Neigungswinkel der f gegen die Koordinatenebenen.

4. Inhalt V der dreiseitigen Pyramide.

1. Eine Ecke im Ursprung, die drei anderen Ecken sind (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3).

$$V = \frac{1}{6}[x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + x_2(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1)]$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

2. Liegt die erste Ecke nicht im Ursprung, sondern im Punkt (x, y, z), so ergibt sich V, indem man das Koordinatensystem parallel verschiebt, so daß der Ursprung mit (x, y, z) zusammenfällt; man hat alsdann im vorigen Ausdruck

statt x_1, y_1, z_1 zu setzen $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ usf.

Liegt (x, y, z) in derselben Ebene mit den drei übrigen Punkten, so ist $V = 0$; dies ist die Gleichung der Ebene durch jene drei Punkte.

§ 76. Änderung des Koordinatensystems.

1. Parallele Verschiebung der Achsen; **a, b, c** Koordinaten des neuen Ursprungs.

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'.$$

2. Drehung um den Ursprung.

OX'	bilde mit OX, OY, OZ die Winkel	$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$,
OY'	„ „ „ „ „ „ „	$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$,
OZ'	„ „ „ „ „ „ „	$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$.

Schreibt man der Kürze halber die Buchstaben der Winkel für ihre Kosinus, so ist:

$$\begin{array}{ll} x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' & x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' & y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' & z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z\,. \end{array}$$

Zwischen den Kosinus bestehen die Beziehungen

$$\begin{array}{ll} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 & \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1 & \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 & \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1 \\ \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = 0 & \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0 \\ \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 = 0 & \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2 \alpha_2 + \gamma_3 \alpha_3 = 0 & \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 = 0\,. \end{array}$$

3. Eulersche Formeln für den Übergang von einem rechtwinkligen System O, X Y Z zu einem anderen rechtwinkligen O, X′Y′Z′ mit demselben Ursprung. Es sei OA die Spur der OX′Y′-Ebene in der OXY-Ebene, $\sphericalangle AOX = \psi$, $\sphericalangle AOX' = \varphi$, $\sphericalangle ZOZ' = \Theta$, dann ist

$$\left\{\begin{array}{l} x = x'(\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\Theta) \\ \quad + y'(-\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \cos\Theta) + z' \sin\psi \sin\Theta \\ y = x'(\cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \cos\Theta) \\ \quad + y'(-\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \cos\Theta) + z'(-\cos\psi \sin\Theta) \\ z = x' \sin\varphi \sin\Theta + y' \cos\varphi \sin\Theta + z' \cos\Theta\,. \end{array}\right.$$

4. Polarkoordinaten. $OP = r$, φ Winkel zwischen OP und der XY-Ebene, gezählt von der letzteren gegen die +Z-Achse hin (von -90^0 bis $+90^0$); ψ ist der Winkel, den die Ebene ZOP mit der Ebene ZOX bildet, gezählt von der +X-Achse aus im positiven Drehungssinn von 0^0—360^0.

Übergang von rechtwinkligen Koordinaten zu Polarkoordinaten und umgekehrt:

1. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\sin\varphi = \frac{z}{r}$, $\cos\psi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

$$\sin\psi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,.$$

2. $$\begin{cases} x = r \cos\varphi \cos\psi \\ y = r \cos\varphi \sin\psi \\ z = r \sin\varphi\,. \end{cases}$$

§ 77. Allgemeine Sätze.

1. Eine Fläche ist durch eine Gleichung zwischen x, y und z bestimmt. Die Bedingung dafür, daß der Punkt (x_1, y_1, z_1) auf der Fläche liegt, deren Gleichung $F(x, y, z) = 0$ ist, ist $F(x_1, y_1, z_1) = 0$. Eine Fläche ist ferner darstellbar durch zwei Gleichungen in x, y und z, die einen veränderlichen Parameter, oder durch drei Gleichungen, die zwei veränderliche Parameter (s. § $96,_1$) enthalten, usf. (S. auch § 80.)

2. Eine Linie ist durch zwei Gleichungen in x, y und z bestimmt; die Linie ist die Schnittlinie der durch jene zwei Gleichungen dargestellten Flächen. Jeder Punkt, dessen Koordinaten die beiden Gleichungen $F(x, y, z) = 0$ und $f(x, y, z) = 0$ befriedigen, liegt auf der Schnittlinie der durch die beiden Gleichungen dargestellten Flächen. (S. auch § 95.)

3. Setzt man in der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ eine der Koordinaten, z. B. z, gleich Null, so erhält man die Gleichung der Schnittlinie der Fläche mit der Ebene der anderen Koordinaten, z. B. der XY-Ebene.

4. Eliminiert man aus den Gleichungen zweier Flächen eine Koordinate, so erhält man die Gleichung der Projektion der Schnittlinie beider Flächen auf die Ebene der beiden anderen Koordinaten. Bestimmt man aus den Gleichungen dreier Flächen die gemeinschaftlichen Werte von x, y, z, so stellen diese die Koordinaten der Schnittpunkte der drei Flächen dar.

5. $F(x, y, z) + \lambda f(x, y, z) = 0$ gibt die Gleichung einer Fläche an, welche durch die Schnittlinie oder

die gemeinschaftlichen Punkte der beiden Flächen $F(x, y, z) = 0$ und $f(x, y, z) = 0$ geht.

§ 78. Die Ebene.

a, b, c Abschnitte der Ebene auf den Koordinatenachsen; α, β, γ die Winkel, welche das Lot vom Ursprung auf die Ebene mit den Achsen bildet, p die Länge dieses Lotes.

1. Gleichungsformen für die Ebene:

1. allgemeine Form $Ax + By + Cz + D = 0$ (E),

2. „ $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} - 1 = 0$,

3. „ $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$.
(Normalform N.)

Spur in der XY-Ebene $Ax + By + D = 0$,
„ „ „ YZ- „ $By + Cz + D = 0$,
„ „ „ ZX- „ $Ax + Cz + D = 0$.

Achsenabschnitte:

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}.$$

Lot vom Ursprung:

$$p = a\cos\alpha = b\cos\beta = c\cos\gamma = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

(Das Vorzeichen der Wurzel wird so gewählt, daß p positiv wird.)

Winkel des Lotes p mit den Achsen aus:

$$\cos\alpha = \frac{p}{a} = -\frac{Ap}{D} = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \text{usf.}$$

2. Besondere Fälle:

$$1. \begin{cases} x = a & \text{Ebene parallel zur YZ-Ebene,} \\ y = b & \text{„ „ „ ZX- „} \\ z = c & \text{„ „ „ XY- „} \end{cases}$$

2. $\begin{cases} Ax+By+D=0 & \text{Ebene parallel zur Z-Achse} \\ Ax+Cz+D=0 & \text{„ „ „ Y- „} \\ By+Cz+D=0 & \text{„ „ „ X- „} \end{cases}$

3. $Ax+By+Cz=0$ „ durch den Ursprung.

4. $\begin{cases} Ax+By=0 & \text{„ „ die Z-Achse} \\ Ax+Cz=0 & \text{„ „ „ Y- „} \\ By+Cz=0 & \text{„ „ „ X- „} \end{cases}$

3. Ebene durch den Punkt (x_1, y_1, z_1):

$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$; sie geht auch durch die Punkte $x_2|y_2|z_2$ und $x_3|y_3|z_3$, wenn

$$A=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad C=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

(s. auch § $75,_{4,2}$).

4. Abstand e eines Punktes (x_1, y_1, z_1) von der Ebene E oder N (s. 1.):

$$e=\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p.$$

5. Zwei Ebenen

$Ax+By+Cz+D=0$ und $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$;

1. sie sind parallel, wenn $\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}$,

s. § $61,_5$) also Gleichungen zweier paralleler Ebenen

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ Ax+By+Cz+D_1=0 \end{cases} \text{ oder}$$

$$\begin{cases} x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \\ x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p_1=0. \end{cases}$$

2. Abstand zweier paralleler Ebenen:

$$\pm\frac{D_1-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=p_1-p.$$

3. Winkel φ zweier Ebenen aus:

$$\cos\varphi = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\pm\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)}} .$$

4. Sie sind **senkrecht**, wenn $\cos\varphi = 0$, d. i. wenn

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0 \quad (\text{s. § } 61,_7).$$

6. **Ebenenbüschel.** Sind $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ die Gleichungen zweier Ebenen (1) und (2) in Normalform, so ist die Gleichung einer dritten Ebene (3), die durch die Schnittlinie der beiden ersten geht,

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 .$$

Sind (3, 1), (3, 2) die Neigungswinkel zwischen (3) und den beiden gegebenen Ebenen, so ist

$$\lambda = \frac{\sin(3,\ 1)}{\sin(3,\ 2)} .$$

Die Halbierungsebenen der von den beiden Ebenen gebildeten Keile haben daher die Gleichung

$$A_1 \mp A_2 = 0 .$$

7. **Drei Ebenen durch eine Gerade.**

Damit drei Ebenen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ sich in derselben Geraden schneiden, ist notwendig und hinreichend, daß es drei von Null verschiedene Zahlfaktoren λ_1, λ_2, λ_3 gibt, für welche die Identität besteht:

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 \equiv 0 .$$

8. **Vier Ebenen durch einen Punkt.** Damit vier Ebenen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$, $E_4 = 0$ durch einen und denselben Punkt gehen, ist notwendig und hinreichend, daß die Identität besteht:

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 + \lambda_4 E_4 \equiv 0 .$$

§ 79. Gerade Linie; gerade Linie und Ebene.

1. Jede Gerade ist durch zwei unabhängige Gleichungen ersten Grades zwischen x, y und z bestimmt.

Allgemeine Gleichungsformen:

$$(1)\qquad \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} y = m x + b \\ z = n x + c \,. \end{cases}$$

Eine Gerade parallel zur YZ-Ebene ist durch (2) nicht darstellbar; ihre Gleichungen sind

$$x = a \,, \qquad y = p z + q \,.$$

Die Koordinaten der Spuren in der XY-, YZ-, XZ-Ebene ergeben sich aus bzw. $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

2. Besondere Fälle:

1. $\begin{cases} y = m x + b \\ z = c \end{cases}$ Gerade parallel zur XY-Ebene.

$\begin{cases} y = b \\ z = n x + c \end{cases}$ Gerade parallel zur XZ-Ebene.

$\begin{cases} z = p y + q \\ x = a \end{cases}$ Gerade parallel zur YZ-Ebene.

2. $\begin{cases} y = b \\ z = c \end{cases}$ Gerade parallel zur X-Achse; $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ X-Achse.

$\begin{cases} z = c \\ x = a \end{cases}$ Gerade parallel zur Y-Achse; $\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ Y-Achse.

$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ Gerade parallel zur Z-Achse; $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ Z-Achse.

3. $\begin{cases} y = m x \\ z = n x \end{cases}$ Gerade durch den Ursprung.

3. Winkel mit den Achsen α, β, γ:

$y = m x + b \,, \quad z = n x + c \,,$ so ist

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}} \,, \qquad \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}} \,,$$

$$\cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}} \,.$$

4. Gerade bestimmt durch einen Punkt (x_1, y_1, z_1) und Richtung (α, β, γ):

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}.$$

5. Gerade durch zwei Punkte (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Durch den Ursprung und den Punkt (x_1, y_1, z_1):

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}.$$

6. Zwei gerade Linien:

$$\begin{cases} y = m x + b \\ z = n x + c \end{cases} \qquad \begin{cases} y = m_1 x + b_1 \\ z = n_1 x + c_1 . \end{cases}$$

1. Die Geraden schneiden sich, wenn

$(m - m_1) : (n - n_1) = (b - b_1) : (c - c_1)$ (s. u. 5.).

2. Sie sind parallel, wenn $m_1 = m$, $n_1 = n$.

3. Der Winkel φ der Geraden ergibt sich aus

$$\cos\varphi = \frac{1 + m m_1 + n n_1}{\sqrt{(1 + m^2 + n^2)(1 + m_1^2 + n_1^2)}}.$$

4. Sie sind senkrecht, wenn $\cos\varphi = 0$, also wenn

$$1 + m m_1 + n n_1 = 0.$$

5. Kürzester Abstand zweier Geraden:

$$e = \frac{(b - b_1)(n - n_1) - (c - c_1)(m - m_1)}{\sqrt{(m n_1 - m_1 n)^2 + (m - m_1)^2 + (n - n_1)^2}} \quad \text{(s. o. 1.)}.$$

6. Abstand e zweier paralleler Geraden

$$\begin{cases} y = m x + b \\ z = n x + c \end{cases} \qquad \begin{matrix} y = m x + b_1 \\ z = n x + c_1 : \end{matrix}$$

$$e = \frac{\sqrt{F^2 + G^2 + H^2}}{1 + m^2 + n^2}, \quad \text{wobei}$$

$$F = (b - b_1)\,m + (c - c_1)\,n\,,$$
$$G = (c - c_1)\,m\,n - (b - b_1)(1 + n^2)\,,$$
$$H = (b - b_1)\,m\,n - (c - c_1)(1 + m^2)\,.$$

7. Gerade und Ebene:

$$\begin{cases} y = m\,x + b \\ z = n\,x + c \end{cases} \quad \text{und} \quad A\,x + B\,y + C\,z + D = 0\,.$$

1. Die Gerade liegt in der Ebene, wenn

$$A + B\,m + C\,n = 0 \quad \text{und} \quad B\,b + C\,c + D = 0\,.$$

2. Die Gerade ist parallel der Ebene, wenn

$$A + B\,m + C\,n = 0\,.$$

3. Winkel ω zwischen der Geraden und der Ebene aus

$$\sin\omega = \frac{A + B\,m + C\,n}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(1 + m^2 + n^2)}}$$

4. Die Gerade ist senkrecht zur Ebene, wenn

$$A : B : C = 1 : m : n\,, \text{ d. h. } \frac{B}{A} = m\,, \quad \frac{C}{A} = n\,.$$

5. Beliebige Ebene durch die Gerade

$$y = m\,x + b\,, \qquad z = n\,x + c:$$

$$\frac{y - m\,x - b}{z - n\,x - c} = \lambda\,.$$

8. Ebene durch Punkt (x_1, y_1, z_1) senkrecht zur Geraden

$$y = m\,x + b\,, \qquad z = n\,x + c:$$

$$(x - x_1) + m\,(y - y_1) + n\,(z - z_1) = 0\,.$$

9. Gerade durch Punkt (x_1, y_1, z_1) senkrecht zur Ebene $A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$:

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}\,, \text{ oder } \begin{cases} y - y_1 = \dfrac{B}{A}(x - x_1) \\ z - z_1 = \dfrac{C}{A}(x - x_1)\,. \end{cases}$$

10. Ebene durch zwei sich schneidende gerade Linien (s. Nr. 6_1):

$$\begin{cases} y = m x + b \\ z = n x + c \end{cases} \qquad \begin{cases} y = m_1 x + b_1 \\ z = n_1 x + c_1 \end{cases}$$

oder $\dfrac{y - m x - b}{z - n x - c} = \dfrac{b - b_1}{c - c_1}$ oder $= \dfrac{m - m_1}{n - n_1}$.

Ebene durch zwei parallele Gerade:

$$\frac{y - m x - b}{z - n x - c} = \frac{b - b_1}{c - c_1} .$$

11. Ebene durch eine Gerade $y = m x + b$, $z = n x + c$ parallel zu einer zweiten Geraden $y = m_1 x + b_1$ $z = n_1 x + c_1$:

$$(m n_1 - m_1 n) x + (n - n_1) y - (m - m_1) z = b_1 (n - n_1) - c_1 (m - m_1).$$

12. Ebene durch einen Punkt (x_1, y_1, z_1) parallel zu zwei Geraden:

$$(m n_1 - m_1 n)(x - x_1) + (n - n_1)(y - y_1) - (m - m_1)(z - z_1) = 0 .$$

§ 80. Erzeugung von Flächen.

Allgemeines: Enthalten die Gleichungen

1) $F(x, y, z, p) = 0$, 2) $f(x, y, z, p) = 0$

einer Linie einen veränderlichen Parameter p, so stellen sie eine bewegliche Linie dar. Die Gleichung der durch die bewegte Linie erzeugten Fläche wird erhalten, indem man aus den Gleichungen (1) und (2) p eliminiert.

Enthalten die Gleichungen $F(x, y, z, p, q, \ldots) = 0$, $f(x, y, z, p, q, \ldots) = 0$ der Beweglichen n veränderliche Parameter $p, q \ldots$, die durch $n - 1$ Gleichungen miteinander verbunden sind, so ist die Gleichung der erzeugten Fläche das Eliminationsresultat der n Parameter $p, q \ldots$ aus den $n + 1$ gegebenen Gleichungen. — Die $n - 1$ Bedingungsgleichungen sind in der Regel der analytische Ausdruck dafür, daß die bewegliche Linie auf $n-1$ festen gleitet. — Die Bedingung dafür, daß eine Linie eine andere schneidet, erhält man, indem man aus den vier Gleichungen beider Linien x, y, z entfernt.

Regelflächen werden erzeugt durch die Bewegung einer Geraden; da die Gleichungen einer Geraden im allgemeinen vier Konstanten (Parameter) enthalten, so sind drei Leitlinien nötig. Man unterscheidet abwickelbare und windschiefe Regelflächen. Bei den ersteren liegen zwei unendlich nahe Mantellinien in einer Ebene (z. B. Zylinder- und Kegelfläche), bei den letzteren nicht (einschaliges Hyperboloid, hyperbolisches Paraboloid).

A) Zylinderflächen.

I. Leitlinie: 1) $\varphi(x, y, z) = 0$,

2) $\psi(x, y, z) = 0$.

Erzeugende: 3) $y = mz + y_0$, 4) $x = pz + x_0$.

Eliminationsresultat von x, y, z aus 1) bis 4):

5) $F(x_0, y_0) = 0$.

Gleichung der Zylinderfläche:

6) $F(x - pz, y - mz) = 0$.

II. Allgemeine Gleichung der Zylinderflächen:

$$F[(ax + by + cz + d), \quad (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1)] = 0.$$

B) Kegelflächen.

Spitze: (x_1, y_1, z_1).

I. Leitlinie: 1) $\varphi(x, y, z) = 0$,

2) $\psi(x, y, z) = 0$.

Erzeug. Mantellinie: 3) $x - x_1 = p(z - z_1)$,

4) $y - y_1 = m(z - z_1)$.

Elim.-Resultat von x, y, z aus 1) bis 4):

5) $F(m, p) = 0$.

Gleichung der Kegelfläche (Elim.-Resultat von m und p aus 3) bis 5)):

$$6)\quad F\left(\frac{x-x_1}{z-z_1}, \frac{y-y_1}{z-z_1}\right)=0 .$$

Liegt die Spitze im Ursprung, so ist die Gleichung der Kegelfläche $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0$, d. h. sie ist homogen.

Die Gleichung $ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz=0$ stellt einen Kegel zweiten Grades dar mit der Spitze im Ursprung.

II. Allgemeine Gleichung der Kegelflächen:

$$F\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{ax+by+cz+d}, \frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{ax+by+cz+d}\right)=0 .$$

C) Drehflächen.

I. Z-Achse ist Drehachse.

Erzeugende: 1) $\varphi(x, y, z)=0$, 2) $\psi(x, y, z)=0$;

Parallelkreis: 3) $x^2+y^2=r^2$, 4) $z=d$;

Bedingungsgleichung (Elim.-Result. von x, y, z aus 1) bis 4)): 5) $F(r, d)=0$; Gleichung der Drehfläche (Elim.-Result. von r und d aus 3) bis 5)):

$$6)\quad F\left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0 .$$

II. Drehachse durch den Punkt (x_0, y_0, z_0), α, β, γ Richtungswinkel derselben:

Erzeugende: 1) und 2) wie bei I.

$$\text{Parallelkreis:}\begin{cases} 3)\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-r^2=0; \\ 4)\ x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-d=0 . \end{cases}$$

Bedingungsgleichung (Elim.-Resultat von x, y, z aus 1) bis 4)):

$$5)\quad F(r, d)=0 .$$

Gleichung der Drehfläche (Elim.-Resultat von r und d aus 3) bis 5)):

$$6)\quad \begin{cases} F\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\,,\right. \\ \qquad \left. x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma\right)=0\,. \end{cases}$$

Geht die Drehachse durch den Ursprung, so geht 6) über in

$$6^1)\quad F\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,,\quad x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma\right)=0\,.$$

D) Konoidische Flächen.

Eine Gerade bewegt sich so, daß sie die Z-Achse und eine Leitlinie beständig schneidet und dabei der XY-Ebene parallel bleibt.

Leitlinie: 1) $\varphi(x, y, z)=0$, 2) $\psi(x, y, z)=0$;

Erzeugende: 3) $\frac{y}{x}=m$, 4) $z=d$.

Elim.-Resultat von x, y, z aus 1) bis 4):

$$5)\quad F(m, d)=0\,.$$

Gleichung der Konoidfläche (Elim.-Resultat von m und d aus 3) bis 5)):

$$6)\quad F\left(\frac{y}{x}, z\right)=0\,.$$

Beispiel: Schraubenfläche. Die Leitlinie dieser Konoidfläche ist die Schraubenlinie:

$$x=r\cos t\,,\qquad y=r\sin t\,,\qquad z=\frac{h\,t}{2\pi}\,,$$

deren Achse die Z-Achse ist. Die Gleichung der Schraubenfläche ist: $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\frac{2\pi z}{h}$.

Flächen zweiter Ordnung.

§ 81. Allgemeines.

Die allgemeine Gleichung der Flächen zweiter Ordnung ist:

$$f(x, y, z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz$$
$$+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0\,.$$

1. Die Koordinaten des Mittelpunktes ergeben sich aus den Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \tfrac{1}{2} f'_x &= a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_{13}\, z + a_{14} = 0\,,\\ \tfrac{1}{2} f'_y &= a_{12}\, x + a_{22}\, y + a_{23}\, z + a_{24} = 0\,,\\ \tfrac{1}{2} f'_z &= a_{13}\, x + a_{23}\, y + a_{33}\, z + a_{34} = 0\,. \end{aligned}\right.$$

2. Durchmesser-(Diametral-)Ebene zugeordnet der Richtung $x = m z$, $y = n z$, bzw. $\sphericalangle\, \alpha, \beta, \gamma$:

$$m f'_x + n f'_y + f'_z = 0\,, \quad \text{bzw.}$$
$$\cos\alpha\, f'_x + \cos\beta\, f'_y + \cos\gamma\, f'_z = 0\,.$$

3. Durchmesser zugeordnet der Richtung der Ebene $A x + B y + C z + D = 0$, bzw.

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0:$$

$$\frac{f'_x}{A} = \frac{f'_y}{B} = \frac{f'_z}{C}\,, \quad \text{bzw.} \quad \frac{f'_x}{\cos\alpha} = \frac{f'_y}{\cos\beta} = \frac{f'_z}{\cos\gamma}\,.$$

4. Polarebene zum Punkt (x_1, y_1, z_1), d. h. Ort des Punktes auf einer durch (x_1, y_1, z_1) gehenden Sekante, welcher diesem Punkt in Beziehung auf die zwei Schnittpunkte der Sekante mit der Fläche harmonisch zugeordnet ist:

$$(x - x_1) f'_{x_1} + (y - y_1) f'_{y_1} + (z - z_1) f'_{z_1} + 2 f(x_1, y_1, z_1) = 0\,.$$

Liegt der Punkt (x_1, y_1, z_1) auf der Fläche, so ist seine Polarebene zugleich Berührungsebene an die Fläche.

5. Hauptdiametralebene oder Hauptebene heißt jede Ebene, welche senkrecht ist auf den von ihr halbierten Sehnen (Hauptsehnen). Die Richtungskosinus α, β, γ dieser Sehnen und die Zahl λ bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$(\mathrm{W}) \quad \left\{\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\,\alpha + a_{12}\,\beta + a_{13}\,\gamma &= 0\\ a_{12}\,\alpha + (a_{22} - \lambda)\,\beta + a_{23}\,\gamma &= 0\\ a_{13}\,\alpha + a_{23}\,\beta + (a_{33} - \lambda)\,\gamma &= 0\\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1\,. \end{aligned}\right.$$

λ ist bestimmt durch die kubische Gleichung

$$(\mathrm{R}) \quad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0\,, \quad \text{oder}$$

$$(\mathrm{R}) \quad \lambda^3 - (a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 + (a_{11}a_{22}+a_{22}a_{33}+a_{33}a_{11} - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2)\lambda - (a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2) = 0\,.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind reell; vermittels λ sind α, β, γ aus den Gleichungen (W) erhältlich.

6. Hauptachsen. Man verschiebe das ursprüngliche System parallel durch den Mittelpunkt (x_0, y_0, z_0), so geht die allgemeine Gleichung über in:

$$(\mathrm{T}) \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = M\,,$$

hierbei ist $M = -(a_{14}x_0 + a_{24}y_0 + a_{34}z_0 + a_{44})$; $M \gtrless 0$.

Man dividiere die Gleichung (T) mit M durch und bilde aus den Koeffizienten der neuen Gleichung die Gleichung (R), sie werde mit $F(\lambda) =$ bezeichnet. Die Wurzeln dieser neuen Gleichung seien λ_1, λ_2, λ_3, dann sind die halben Hauptachsen der Fläche gegeben durch

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}\,, \quad \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}\,, \quad \sqrt{\frac{1}{\lambda_3}}\,.$$

7. Allgemeine Sätze.

a) Eine Fläche zweiter Ordnung wird im allgemeinen durch neun Punkte oder neun Berührungsebenen bestimmt.

b) Eine Fläche zweiter Ordnung wird von einer Ebene in einer Linie zweiter Ordnung und von einer Geraden in zwei Punkten geschnitten.

c) Wenn ein Teil des Schnittes zweier Flächen zweiter Ordnung eine ebene Kurve ist, so ist auch der übrige Teil eine solche.

d) Wenn ein Punkt eine Ebene durchläuft, so dreht sich seine Polarebene um einen Punkt, den Pol dieser Ebene, und umgekehrt.

e) Wenn ein Punkt sich auf einer Geraden bewegt, so dreht sich seine Polarebene um eine in dieser liegenden geraden Linie und umgekehrt.

f) Durch den Pol und die Schnittlinie seiner Polarebene mit der Fläche zweiter Ordnung ist der zum Pol als Spitze gehörige Berührungskegel bestimmt.

g) Wenn der Pol einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung eine zweite Oberfläche derselben Ordnung beschreibt, so berührt seine Polarebene eine dritte Oberfläche zweiter Ordnung und umgekehrt, wenn die Polarebene einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung sich als Berührungsebene um eine zweite Oberfläche derselben Ordnung herumbewegt, so beschreibt der Pol eine dritte Oberfläche zweiter Ordnung.

§ 82. Einteilung der Flächen zweiter Ordnung.

Die Flächen zweiter Ordnung werden nach den Wurzeln der Gleichung (R), bzw. $F(\lambda) = 0$ (s. § 81,5 und 6) eingeteilt

I. Mittelpunktsflächen.

$F(\lambda) = 0$ (s. § $81,_6$) hat keine Wurzel gleich **0.**

A) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ haben gleiche Zeichen.

1. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ positiv: $\begin{cases} \text{a) } M > 0 \text{ (s. § 81), Ellipsoid,} \\ \text{b) } M = 0, \text{ Punkt.} \end{cases}$

2. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ negativ: Imaginäre Fläche.

B) Zwei Wurzeln λ mit gleichem, die dritte mit entgegengesetztem Zeichen.

1. Zwei Wurzeln positiv, eine negativ:
   a) $M > 0$, einmanteliges Hyperboloid,
   b) $M = 0$, Kegel und Punkt.

2. Zwei Wurzeln negativ:
$M > 0$, zweimanteliges Hyperboloid.

II. Nicht zentrale Flächen.

Die Gleichung (R) (s. § $81,_5$) hat eine oder zwei Wurzeln gleich Null, die Flächen haben 0 oder unendlich viele Mittelpunkte.

A) Eine Wurzel λ ist gleich 0, kein Mittelpunkt vorhanden. Die beiden andern Wurzeln haben:

1. gleiche Zeichen: Elliptisches Paraboloid;
2. ungleiche Zeichen: Hyperbolisches Paraboloid.

B) Eine Wurzel ist gleich Null, unendlich viele Mittelpunkte auf einer Geraden. Die beiden andern Wurzeln haben:

1. gleiche Zeichen: Elliptischer Zylinder oder eine Gerade;
2. entgegengesetzte Zeichen: Hyperbolischer Zylinder oder zwei sich schneidende Ebenen.

C) Zwei Wurzeln gleich Null:

1. kein Mittelpunkt vorhanden: Parabolischer Zylinder;
2. unendlich viele Mittelpunkte: zwei parallele Ebenen (Doppelebene; zwei imaginäre Ebenen).

§ 83. Die einzelnen Flächen zweiter Ordnung.

1. Ellipsoid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

Die Fläche liegt ganz im Endlichen, sie wird von jeder Ebene in einer reellen oder imaginären Ellipse geschnitten; die Hauptschnitte sind ebenfalls Ellipsen.

Durchmesserebene, welche die Sehnen, deren Richtungskosinus α, β, γ sind, halbiert:

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} = 0.$$

Polarebene des Punktes $x_1|y_1|z_1$:

$$\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{b^2}+\frac{z_1 z}{c^2}=1 .$$

Liegt (x_1, y_1, z_1) auf der Fläche selbst, so stellt die vorige Gleichung die Berührungsebene dar.

Konjugierte Durchmesser. Die Geraden

$$\begin{cases} x=mz \\ y=nz, \end{cases} \quad \begin{cases} x=m_1 z \\ y=n_1 z, \end{cases} \quad \begin{cases} x=m_2 z \\ y=n_2 z \end{cases}$$

stellen konjugierte Durchmesser dar, wenn folgende Bedingungen stattfinden:

$$\begin{cases} \dfrac{m m_1}{a^2}+\dfrac{n n_1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=0 , \\ \dfrac{m m_2}{a^2}+\dfrac{n n_2}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=0 , \\ \dfrac{m_1 m_2}{a^2}+\dfrac{n_1 n_2}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=0 . \end{cases}$$

Werden zwei, bzw. drei Achsen einander gleich, so geht die Fläche in ein Drehungsellipsoid, bzw. eine Kugel über.

Kugel, Mittelpunkt im Ursprung: $x^2+y^2+z^2=r^2$,
Mittelpunkt im Punkt (x_1, y_1, z_1):

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r^2 .$$

2. Einmanteliges Hyperboloid: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$.

Die Fläche besteht aus einem ins Unendliche sich erstreckenden Mantel; sie wird von der XY-Ebene in einer Ellipse, von der XZ- und der YZ-Ebene je in einer Hyperbel, von einer beliebigen Ebene in einer reellen Ellipse, einer Parabel oder Hyperbel geschnitten.

Asymptotenkegel: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$.

Zwei Scharen von Mantellinien:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1+\dfrac{y}{b}\right) \\ \lambda\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=1-\dfrac{y}{b} \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\mu\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\left(1+\dfrac{y}{b}\right). \end{cases}$$

Jede Schargerade schneidet alle Gerade der anderen und keine der eigenen Schar. Die Fläche ist der Ort einer Geraden, welche immer drei Gerade schneidet. Sie ist eine windschiefe Regelfläche.

3. Zweimanteliges Hyperboloid: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}+1=0$.

Die Fläche besteht aus zwei sich ins Unendliche erstreckenden Mänteln, sie enthält keine reellen Geraden, wird von der XY-Ebene in einer imaginären Ellipse, von der XZ- und der YZ-Ebene in Hyperbeln, von einer beliebigen Ebene in einer reellen oder imaginären Ellipse, einer Parabel oder Hyperbel geschnitten. — Wird $a=b$, so geht jedes der Hyperboloide in ein Drehungshyperboloid über.

4. Elliptisches Paraboloid: $\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c}=2x$ (b u. c gleichzeichig).

Die Fläche besteht aus einem einseitig sich ins Unendliche erstreckenden Mantel; sie wird von der YZ-Ebene berührt, von der XY- und der XZ-Ebene je in einer Parabel und von einer beliebigen Ebene in einer reellen oder imaginären Ellipse oder in einer Parabel geschnitten. — Die Fläche entsteht, wenn die Parabel, die in der XY-Ebene liegt, parallel so verschoben wird, daß ihr Scheitel auf der in der XZ-Ebene liegenden Parabel weiter rückt. Für $b=c$ Drehungsparaboloid.

5. Hyperbolisches Paraboloid: $\dfrac{y^2}{b}-\dfrac{z^2}{c}=2x$ (b u. c positiv).

Die Fläche ist sattelförmig, sie hat mit der unendlich fernen Ebene ein Geradenpaar gemein, sie wird von der

XY- und von der XZ-Ebene je in einer Parabel (diese beiden Parabeln haben den Ursprung gemeinschaftlich und ihre auf der X-Achse liegenden Achsen sind entgegengesetzt gerichtet), von der YZ-Ebene in einem Geradenpaar und von einer beliebigen Ebene in einer Parabel oder Hyperbel geschnitten. Sie ist der Ort einer Geraden, welche immer zwei gegebene Gerade schneidet und einer gegebenen Ebene parallel bleibt. — Sie wird ferner erzeugt, wenn die in der XY-Ebene liegende Parabel parallel weiter rückt und dabei mit ihrem Scheitel auf der in der XZ-Ebene liegenden Parabel bleibt.

Die Fläche enthält zwei Scharen von Geraden, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{\sqrt{b}}+\frac{z}{\sqrt{c}}&=\lambda \\ \frac{y}{\sqrt{b}}-\frac{z}{\sqrt{c}}&=\frac{2x}{\lambda} \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{aligned} \frac{y}{\sqrt{b}}-\frac{z}{\sqrt{c}}&=\mu \\ \frac{y}{\sqrt{b}}+\frac{z}{\sqrt{c}}&=\frac{2x}{\mu} \end{aligned}\right. .$$

Die Geraden der Schar λ sind parallel der Ebene $\frac{y}{\sqrt{b}}+\frac{z}{\sqrt{c}}=0$, die des Systems μ parallel der Ebene $\frac{y}{\sqrt{b}}-\frac{z}{\sqrt{c}}=0$.

6. **Kegelfläche,** Spitze im Ursprung:

imaginärer Kegel: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$,

reeller Kegel: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

Letztere Fläche, welche abwickelbar ist, wird von einer Ebene in einer reellen Ellipse, oder Parabel oder Hyperbel (oder deren Ausartungen) geschnitten; sie enthält eine Schar von Geraden, welche durch die Spitze gehen, nämlich

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{y}{b\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = -\frac{\lambda y}{b}.$$

7. **Elliptischer Zylinder** (schiefer):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(x - p z)^2}{a^2} + \dfrac{(y - m z)^2}{b^2} - 1 = 0\,, \\ \text{wenn die Erzeugende:} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = p z + c \\ y = m z + d \end{array} \right. \\ \qquad \text{und die Leitlinie:} \quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0\,. \end{array} \right.$$

Die sich ins Unendliche erstreckende Fläche wird von jeder Ebene in einer Ellipse (oder einem Parallelenpaar) geschnitten und enthält eine Schar von parallelen Geraden.

Ist die Erzeugende parallel der Z-Achse, so ist die Gleichung der Fläche: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

8. **Hyperbolischer Zylinder:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, die Leitlinie $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $z = 0$ und die Erzeugende parallel der Z-Achse; er wird von einer Ebene in einer Hyperbel oder einem Parallelenpaar geschnitten.

9. **Parabolischer Zylinder:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2y}{b} = 0$, Leitlinie $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2y}{b} = 0$, $z = 0$, Erzeugende parallel der Z-Achse; er wird von einer Ebene in einer Parabel oder einem Parallelenpaar geschnitten.

10. Jede Gleichung von der Form

1) $$x^2 + y^2 + z^2 + a x + b y + c z + d = 0,$$

2) $$a x^2 + b y^2 + c z^2 + d x y + e x z + f y z = 0,$$

3) $$(a x + b y + c z + d)(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) = 0$$

stellt bzw. eine Kugel, einen Kegel, ein Ebenenpaar dar.

Höhere Analysis.

A) Differentialrechnung.

§ 84. Funktion; unendlich kleine Größen; Differentialquotient.

Funktionen.

1. Eine Zahl von unveränderlichem Wert (3, 5, a, 3 a − b ...) heißt eine Konstante; eine Zahl, welche alle Werte der Zahlenreihe annehmen kann, heißt eine Veränderliche (in der Regel bezeichnet mit t, x, y, z).

2. Ist die Größe y mit der Größe x so verbunden, daß — einem bestimmten Gesetz zufolge — jeder Veränderung von x eine Veränderung von y und jedem Wert von x ein bestimmter Wert von y entspricht, so heißt y eine Funktion von x. Man nennt hierbei y die abhängige, x die unabhängige Veränderliche oder das Argument. Sind x, y und z so miteinander verbunden, daß zu einem willkürlich gewählten Wertepaar von x und y ein bestimmter Wert von z gehört, so ist z eine Funktion von x und y; x und y sind hierbei die unabhängigen Veränderlichen; usf. Der Inhalt eines Kreises, einer Kugel ist eine Funktion des Halbmessers; derjenige eines Rechtecks, eines Quaders ist eine Funktion von Länge und Breite, bzw. von Länge, Breite und Höhe.

Bezeichnung der Funktion: $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ und dergleichen.

$y = f(x)$ ist eine Funktion von einer unabhängigen Veränderlichen x.

$z = f(x, y)$ ist eine Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen, x und y.

$u = f(x, y, z)$ ist eine Funktion von drei unabhängigen Veränderlichen, x, y und z.

3. $y = f(x)$, $z = f(x, y)$ usf. heißen entwickelte (explizite) Funktionen.

Die Funktion $y = f(x)$ heißt für einen bestimmten Wert von x n-deutig, wenn die durch den Ausdruck von $f(x)$ gegebene Vorschrift zur Berechnung von y aus jenem Wert von x im allgemeinen n verschiedene Werte von y liefert.

$F(x, y) = 0$, $F(x, y, z) = 0$ usf. heißen unentwickelte (implizite) Funktionen.

4. Man unterscheidet algebraische und transzendente Funktionen und teilt die algebraischen ein in rationale und irrationale. Die allgemeine Form einer rationalen Funktion ist

$$y = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m},$$

wobei m und n ganz und positiv sind; eine ganze rationale Funktion n-ten Grades hat die Form

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \quad \text{wobei} \quad a_n \gtrless 0 .$$

y ist eine irrationale Funktion von x, wenn zur Berechnung des Wertes von y neben rationalen Zahlenverbindungen noch eine oder mehrere Wurzelausziehungen notwendig sind.

Eine Funktion heißt transzendent, wenn der Wert derselben nicht vermittels einer endlichen Anzahl von einfachen algebraischen Operationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzierung und Radizierung mit konstanten Exponenten) aus der unabhängigen Veränderlichen berechnet werden kann. $y = a^x$, $y = \log x$, $y = \sin x$ z. B. sind transzendente Funktionen.

5. Eine Funktion $f(x)$ heißt **stetig** für den Wert a des Argumentes, wenn nach Annahme einer beliebig kleinen Größe ε die Größe δ so bestimmt werden kann, daß für eine Änderung des Argumentes um eine Größe $h < \delta$ die Änderung der Funktion $f(a+h) - f(a) < \varepsilon$ bleibt, oder kurz, wenn

$$\lim f(a+h)\Big|_{h=0} = \lim f(a-h)\Big|_{h=0}$$

Unendlich kleine Größen und Grenzwerte.

6. Wenn eine veränderliche Größe sich der Null nähert und dabei einen Wert annimmt, der kleiner ist als jede angebbare Größe, so nennt man sie **unendlich klein.**

7. Zwei **unendlich kleine Größen** heißen **von derselben Ordnung**, wenn ihr Quotient gegen einen von Null verschiedenen, endlichen Grenzwert konvergiert. Ist a eine endliche, γ eine unendlich kleine Größe, so ist $a\gamma$ von derselben Ordnung wie γ.

8. Ist δ von der ersten Ordnung, so ist γ von der **n-ten Ordnung**, wenn der Quotient $\frac{\gamma}{\delta^n}$ gegen einen endlichen, von Null verschiedenen Wert konvergiert, also wenn

$$\lim \frac{\gamma}{\delta^n} = q\,.$$

Das n-te Differential $d^n y$ einer Funktion $y = f(x)$ ist im allgemeinen unendlich klein von der n-ten Ordnung, sofern dx von der ersten Ordnung ist.

9. Eine unendlich kleine Größe höherer Ordnung ist im Vergleich zu einer solchen niederer Ordnung selber unendlich klein; sie kann daher neben dieser vernachlässigt werden.

Ist eine endliche Größe Γ gleich der Summe von unendlich vielen unendlich kleinen Größen $\gamma_1, \gamma_2 \ldots,$ so bleibt Γ unverändert, wenn jede Größe γ um ein unendlich Kleines ε von höherer Ordnung vermehrt wird. Ist also

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots = \lim \Sigma \gamma , \quad \text{so ist auch}$$
$$\Gamma = (\gamma_1 + \varepsilon_1) + (\gamma_2 + \varepsilon_2) + \ldots = \lim \Sigma (\gamma + \varepsilon) .$$

10. Es ist

1) $\lim (1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}}_{\delta = 0} = e , \quad \lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m_{m = \infty} = e .$

2) $\lim \frac{a^\delta - 1}{\delta}\Big|_{\delta = 0} = \frac{\log a}{\log e} .$

3) $\lim \frac{\sin \delta}{\delta}\Big|_{\delta = 0} = 1 ; \quad \lim \frac{\operatorname{tg} \delta}{\delta}\Big|_{\delta = 0} = 1 .$

4) $\lim \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m\Big|_{m = \infty} = e^x .$

11. Differential und Differentialquotient.

$$\begin{array}{r}
y = f(x) \\
y + \Delta y = f(x + \Delta x) \\
\hline
\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)
\end{array}$$

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\Big|_{\lim \Delta x = 0} = \frac{dy}{dx} = y'$$
$$= \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = D f(x) .$$

dx heißt das Differential von x, dy dasjenige von y, $df(x) = f'(x)\,dx$ das von f(x); $\frac{dy}{dx}$ heißt Differentialquotient, die Funktion $f'(x)$ die (erste) Ableitung von $f(x)$.

Es gibt stetige Funktionen, die keinen Differentialquotienten haben.

Ist C eine von x unabhängige Konstante, so ist

$$\frac{dC}{dx} = 0 .$$

Die Ableitung des ersten Differentialquotienten gibt den zweiten usf.; es ist also

$$\frac{df'(x)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x) = D^2 f(x)$$

die zweite Ableitung von $f(x)$.

§ 85. Allgemeine Formeln über Differentiation.

Es seien u, v, w Funktionen von x, A, B, C Konstanten.

1. $$\frac{df(u)}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} .$$

2. $$\begin{cases} d(Au + Bv + Cw) = A\,du + B\,dv + C\,dw , \\ \dfrac{d(Au + Bv + Cw)}{dx} = A\dfrac{du}{dx} + B\dfrac{dv}{dx} + C\dfrac{dw}{dx} \\ \qquad = Au' + Bv' + Cw' . \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} d(uv) = v\,du + u\,dv , \\ d(uvw) = vw\,du + uw\,dv + uv\,dw , \\ \dfrac{d(uv)}{dx} = u'v + uv' = uv\left(\dfrac{u'}{u} + \dfrac{v'}{v}\right) , \\ \dfrac{d(uvw\ldots)}{dx} = uvw\ldots\left(\dfrac{u'}{u} + \dfrac{v'}{v} + \dfrac{w'}{w} + \ldots\right) . \end{cases}$$

4. $$\frac{d\left(\dfrac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{u'v - uv'}{v^2} .$$

5. Bezeichnet man die n-te Ableitung von u mit $u^{(n)}$, so ist:

$$\frac{d^n(A\,u + B\,v)}{d\,x^n} = A\,u^{(n)} + B\,v^{(n)}\,,$$

$$(u\,v)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v^{(1)} + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v^{(2)} + \ldots$$
$$+ \binom{n}{1}u^{(1)}v^{(n-1)} + u\,v^{(n)}\,.$$

6. Ist $u = f(z)$, $z = \varphi(y)$, $y = \psi(x)$, dann ist

$$\frac{du}{dx} = \frac{d\,f(z)}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\,.$$

7. Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen. Sind x und y Funktionen von t, so ist:

1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = y' : x'.$$

2) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^3}\,.$$

Ist x als Funktion von y gegeben, so hat man

3) $$\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}\,; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d^2x}{dy^2} : \left(\frac{dx}{dy}\right)^3.$$

8. Betrachtet man in der Funktion $z = f(x, y)$ die eine der Größen x und y, z. B. x, als veränderlich, die andere als konstant, so heißt die Ableitung der Funktion nach dieser Veränderlichen x die partielle Ableitung nach x; sie wird mit $\frac{\partial z}{\partial x}$ oder mit $f'_x(x, y)$ oder auch kurz mit f'_x bezeichnet. Es ist also

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}\Bigg|_{h=0}\,;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}\Bigg|_{k=0}\,.$$

Das partielle Differential nach x wird mit $\partial_x z$, das nach y mit $\partial_y z$ bezeichnet und es ist

$$\partial_x z \text{ od. } \partial_x f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx = f'_x(x, y)\, dx \text{ od. kurz} = f'_x\, dx.$$

Die Änderung dz, welche z erfährt, wenn die beiden Veränderlichen x und y zugleich sich um die voneinander unabhängigen Differentiale dx und dy ändern, heißt das totale Differential von f(x, y) und es ist

$$dz = f'_x dx + f'_y dy.$$

Für $u = f(x, y, z)$ ist

$$du = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz, \quad \text{d. h.:}$$

Das totale Differential einer Funktion ist gleich der Summe der partiellen Differentiale nach sämtlichen Veränderlichen.

9. Sind x, y, z Funktionen von t, dann ist

$$\frac{df(x, y, z)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

10. Für die höheren partiellen Ableitungen der Funktion $z = f(x, y)$ gelten folgende Bezeichnungen und Beziehungen:

$$\frac{\partial \frac{\partial z}{\partial x}}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{x\,x}; \qquad \frac{\partial \frac{\partial z}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f''_{x,\,y};$$

$$\frac{\partial \frac{\partial z}{\partial x}}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = f''_{y,\,x}; \qquad \frac{\partial \frac{\partial z}{\partial y}}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{y,\,y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} \quad \text{oder} \quad f''_{x,\,y} = f''_{y,\,x}.$$

11. $$d^2 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz\right)^{(2)},$$

wofern im Zähler jeden Gliedes ∂u^2 durch $\partial^2 u$ ersetzt wird. — Der Satz gilt ebenso auch für das Differential n-ter Ordnung.

12. Unentwickelte (implizite) Funktionen.

Ist $f(x, y) = 0$, so ist

$$df(x, y) = f'_x dx + f'_y dy = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = -f'_x : f'_y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{f''_{xx} f'^2_y - 2 f''_{xy} f'_x f'_y + f''_{yy} f'^2_x}{f'^3_y}$$

13. Ist $f(x, y, z) = 0$, so kann z als Funktion von x und y betrachtet werden, dann ist

$$1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \text{hieraus folgt} \quad \frac{\partial z}{\partial x};$$

$$2) \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \text{hieraus folgt} \quad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Differenziert man Gleichung 1) nach x, dann auch nach y; ferner Gleichung 2) nach y, so ergeben sich Gleichungen, aus welchen man $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ erhält.

14. Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h \cdot f'(x_0 + \Theta h),$$

wobei Θ ein positiver, echter Bruch.

§ 86. Spezielle Formeln.

1. Das Differential und der Differentialquotient einer Konstanten ist Null.

2. $\frac{dx^n}{dx} = n x^{n-1}$.

3. $\frac{d^r(x^n)}{dx^r} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)x^{n-r}$, $r \leqq n$.

4. $\frac{d a^x}{dx} = a^x \, l\, a\,; \quad \frac{d\, a^{m\,x}}{dx} = a^{m\,x} m \, l\, a\,; \quad \frac{d e^x}{dx} = e^x.$

5. $\frac{d^r (a^x)}{d x^r} = a^x (l\, a)^r\,.$

---

6. $\frac{d \overset{a}{\log} x}{dx} = \frac{1}{x} \overset{a}{\log} e = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{l\, a} = \frac{M}{x}$ (s. § $21,_7$),

$\frac{d\, l\, x}{dx} = \frac{1}{x}\,.$

7. $\frac{d^r (\log x)}{d x^r} = (-1)^{r-1} (r-1)! \frac{\log e}{x^r}\,.$

---

8. $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$

9. $\frac{d^r \sin x}{d x^r} = \sin\left(x + \frac{r\pi}{2}\right).$

10. $\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$

11. $\frac{d^r \cos x}{d x^r} = \cos\left(x + \frac{r\pi}{2}\right).$

12. $\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \; (= \sec^2 x)\,.$

(Für höhere Ableitungen kein einfaches Bildungsgesetz.)

13. $\frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} \; (= -\operatorname{cosec}^2 x)\,.$

---

14. $\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$

15. $\frac{d \arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

16. $\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$.

17. $\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}$.

18. $\frac{d \operatorname{arc} \sec x}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

19. $\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

§ 87. Die Taylorsche und die Mac Laurinsche Reihe.

1. Taylorsche Reihe:

$$f(x + h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x + \mu h),$$

wofern μ positiv und < 1, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x) \ldots$ endliche und bestimmte Werte haben und wofern $f^{(n+1)}(x)$ endlich und stetig für alle Werte zwischen x und $x + h$.

Für $x = a$ und $h = a - x$ ergibt sich:

2. $$f(x) = f(a) + (x - a) f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x - a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \mu(x - a)].$$

Hierbei muß $f^{(n+1)}(x')$ für alle Werte von x' zwischen a und x endlich und stetig bleiben.

Für $a = 0$ ergibt sich:

3. Mac Laurinsche Reihe:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\mu x),$$

wofern f(x) und seine Ableitungen im Intervall 0 bis x endlich und stetig bleiben.

Wird f(x) oder eine seiner Ableitungen für $x = 0$ unendlich oder unstetig, so kann f(x) nicht mehr vermittels der Mac Laurinschen Reihe entwickelt werden. In diesem Falle ist 2. anzuwenden.

4. **Taylors Reihe für zwei Veränderliche.**

$$f(x+h, y+k) = u + \frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(2)}$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(3)} + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(n)} + R$$

(s. § $85,_{11}$).

$$R = \frac{1}{n!}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial q}h + \frac{\partial U}{\partial q}k\right)^{(n)} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(n)}\right],$$

$$(p = x + \Theta h, \; q = y + \Theta k).$$

§ 88. Werte unbestimmter Ausdrücke.

$$\frac{0}{0}, \; \frac{\infty}{\infty}, \; 0 \cdot \infty, \; 0^0, \; \infty^0, \; 1^\infty, \; \infty - \infty.$$

1. Nimmt $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x = a$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ an, so ist

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}\bigg|_{x=a} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)};$$

wird auch $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = \frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$, so wird das Verfahren wiederholt und es ist, wenn $f^{(n)}(a)$ und $\varphi^{(n)}(a)$ diejenigen Ableitungen sind, welche zuerst nicht gleichzeitig zu 0 oder zu ∞ werden:

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}\bigg|_{x=a} = \frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(a)}.$$

2. Ist $f(x) \cdot \varphi(x) = 0 \cdot \infty$ für $x = a$, so ist:

$$f(x) \cdot \varphi(x) = f(x) : \frac{1}{\varphi(x)}.$$

Dieser letztere Ausdruck nimmt für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ an, sein Wert ergibt sich nach 1.

3. Nimmt der Ausdruck $[f(x)]^{\varphi(x)}$ für $x = a$ eine der Formen 0^0, ∞^0, 1^∞ an, so setzt man $[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x) l f(x)}$ und untersucht nach 1. oder 2. den Ausdruck $\varphi(x) l f(x)$.

4. Führen die angegebenen Mittel stets wieder zu demselben unbestimmten Ausdruck, so muß man zu besonderen Hilfsmitteln greifen. Man kann dann für x zunächst $a + h$ setzen, den Ausdruck umformen oder nach steigenden Potenzen von h entwickeln und wenn möglich vereinfachen, worauf sich für $h = 0$ der gesuchte Wert ergeben kann. Es ist jedoch auch möglich, daß ein Grenzwert der unbestimmten Form überhaupt nicht existiert.

5. Wenn $f(x) - \varphi(x)$ für $x = a$ die unbestimmte Form $\infty - \infty$ annimmt, so suche man den Ausdruck in ein Produkt oder in einen Bruch zu verwandeln, was z. B. folgendermaßen geschehen kann:

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{\varphi(x)}}.$$

Der Wert hierfür wird nach dem Vorausgegangenen ermittelt.

6. Die Bestimmung des wahren Wertes eines für $x = a$ unbestimmten Ausdruckes kann häufig dadurch vereinfacht werden, daß man denselben von solchen

Faktoren befreit, welche für $x = a$ weder zu Null noch unendlich groß werden. Das Produkt aus dem wahren Wert des übrig bleibenden Teiles und den bestimmten Werten der weggelassenen Faktoren gibt den wahren Wert des gegebenen Ausdruckes an.

§ 89. Größte und kleinste Werte von Funktionen.

1. Die Funktion $y = f(x)$ erreicht für $x = a$

ein Maximum, wenn $f(a \pm h) - f(a) < 0$,
ein Minimum, wenn $f(a \pm h) - f(a) > 0$,

wobei h sich der Null unbegrenzt nähert.

2. Bei zunehmendem x ist

$f(x)$ wachsend, wenn $f'(x) > 0$,
$f(x)$ abnehmend, wenn $f'(x) < 0$.

3. $y = f(x)$ erreicht für $x = a$

ein Maximum, wenn $f'(a) = 0$ und $f''(a) < 0$,
ein Minimum, wenn $f'(a) = 0$ und $f''(a) > 0$;

allgemein: Sind $f(x), \ldots f^{(n)}(x)$ in der Umgebung von $x = a$ stetig und verschwinden die $(n-1)$ ersten Ableitungen für $x = a$, während die n-te $\lessgtr 0$ ist, so ist $f(a)$ bzw. ein Maximum oder Minimum von $f(x)$, wenn n gerade ist.

Ist die niederste für $x = a$ nicht verschwindende Ableitung von ungerader Ordnung (z. B. von erster), so ist $f(a)$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

Um die Stelle und den Wert des Maximums oder Minimums zu finden, wird y' gebildet, gleich Null gesetzt und die erhaltene Gleichung nach x aufgelöst. Nun wird y'' gebildet, es werden die gefundenen Werte von x eingesetzt und aus dem negativen oder positiven Ergebnis bestimmt, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt. Durch Einsetzen der gefundenen Werte von x in $y = f(x)$ ergibt sich der Wert des Maximums oder Minimums selbst.

4. Funktion zweier unabhängiger Veränderlichen, $z = f(x, y)$.

Man bestimme x und y aus

$$1)\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0\,.$$

Die erhaltenen Werte müssen der Bedingung genügen:

$$2)\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0\,.$$

Es findet dann Maximum oder Minimum statt, je nachdem

$$3)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

für jene Werte von x und y beide gleichzeitig bzw. < 0 oder > 0 sind.

5. Relative Maxima und Minima. Die Werte von x, y, z, für welche die Funktion $v = f(x, y, z)$ unter gleichzeitigem Bestehen der Bedingungsgleichungen (Nebenbedingungen) $\varphi(x, y, z) = 0$ und $\psi(x, y, z) = 0$ ein Maximum oder Minimum erreicht, ergeben sich aus den Gleichungen:

$$1)\quad \frac{\partial u}{\partial x} = f'_x + \lambda\,\varphi'_x + \mu\,\psi'_x = 0\,,$$

$$2)\quad \frac{\partial u}{\partial y} = f'_y + \lambda\,\varphi'_y + \mu\,\psi'_y = 0\,,$$

$$3)\quad \frac{\partial u}{\partial z} = f'_z + \lambda\,\varphi'_z + \mu\,\psi'_z = 0\,,$$

$$4)\quad \varphi(x, y, z) = 0\,, \qquad 5)\quad \psi(x, y, z) = 0\,,$$

aus welchen man zunächst die willkürlichen Konstanten λ, μ entfernt und wobei

$$u = f(x, y, z) + \lambda\,\varphi(x, y, z) + \mu\,\psi(x, y, z)\,.$$

B) Integralrechnung.

§ 90. Bezeichnung und Erklärung.

$F(x)$ heißt das Integral von $f(x)\,dx$, geschrieben $\int f(x)\,dx$, wenn

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x);$$

es ist also dann $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, wobei C eine unbestimmte Konstante bedeutet; ferner ist

$$\frac{d\int f(x)\,dx}{dx} = f(x).$$

§ 91. Integration einfacher Funktionen; Grundformeln.

Bei sämtlichen nachstehenden Formeln ist rechts die unbestimmte Konstante zu ergänzen.

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ für $n \lessgtr -1$,

   $\int (a + bx)^n\,dx = \frac{(a + bx)^{n+1}}{(n+1)\cdot b}$.

2. $\int \frac{dx}{x} = l\,x$; $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = l\,f(x)$.

3. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{l\,a}$; $\int e^x\,dx = e^x$.

4. $\int \cos x\,dx = \sin x$.

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x$;

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$.

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$.

8. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{\cos x}\ (= \sec x)$.

9. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x} \; (= -\operatorname{cosec} x)$.

10. $\int \sin x \cos x \, dx = \frac{\sin^2 x}{2}$.

---

11. $\int \operatorname{tg} x \, dx = -l \cos x$.

12. $\int \operatorname{ctg} x \, dx = l \sin x$.

13. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = l \operatorname{tg} x$; $\quad \int \frac{dx}{\sin x} = l \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

14. $\int \frac{dx}{\cos x} = l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$.

---

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = -\arccos x + \frac{\pi}{2}$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \arcsin \frac{b x}{a}.$$

16. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x = -\operatorname{arc\,ctg} x + \frac{\pi}{2}$,

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{a b} \operatorname{arc\,tg} \frac{b x}{a}.$$

17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc\,sec} x$,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{b^2 x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,sec} \frac{b x}{a}.$$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = -\arcsin(1-x)$,

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = l\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = l\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

21. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\, l\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$.

22. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\frac{x}{a}$.

23 $\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, l\left(b+cx + \sqrt{c}\sqrt{a+2bx+cx^2}\right)$.

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin\frac{cx-b}{\sqrt{b^2+ac}}$.

25. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{a+2bx+cx^2} - \frac{b}{\sqrt{c^3}}\, l\left(b+cx+\sqrt{c}\sqrt{a+2bx+cx^2}\right)$.

26. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+2bx-cx^2}} = -\frac{1}{c}\sqrt{a+2bx-cx^2} + \frac{b}{\sqrt{c^3}} \arcsin\frac{cx-b}{\sqrt{b^2+ac}}$.

§ 92. Allgemeine Formeln; Integrationsweisen entwickelter Funktionen; Rekursionsformeln.

Es seien u, v, w ... Funktionen von x; A, B ... konstante Faktoren.

1. Integration einer Summe.

$$\int (Au + Bv + Cw + \ldots)\, dx = A\int u\, dx + B\int v\, dx + C\int w\, dx + \ldots$$

2. Teilweise Integration.

$$uv = \int u\, dv + \int v\, du \quad \text{und}$$
$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Beispiel:

$$\int x^2 \cos x\, dx = \int x^2 d \sin x = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\, dx\,,$$

$$\int x \sin x\, dx = -\int x\, d \cos x = -x \cos x + \int \cos x\, dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C\,, \quad \text{also}$$

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C\,.$$

3. Integration durch Substitution. Es sei $x = \varphi(z)$, dann ist $dx = \varphi'(z)\, dz$,

$$\int f(x)\, dx = \int f[\varphi(z)]\, \varphi'(z)\, dz\,.$$

Beispiel: $\int \frac{dx}{x^m (a + bx)^n}$. Man setzt $\frac{a}{x} + b = z$, dann ergibt sich

$$-\frac{1}{a^{m+n-1}} \int \frac{(z-b)^{m+n-2}}{z^n}\, dz\,;$$

nun entwickelt man nach dem binomischen Lehrsatz und integriert die einzelnen Summanden.

Die häufigsten Substitutionen sind:

$$z = a + bx\,; \qquad z = a + bx^2\,; \qquad z = \frac{a}{x} + b\,.$$

$$z = \frac{a+bx}{a-bx} \quad \text{oder} \quad x = \frac{a}{b} \cdot \frac{z-1}{z+1}\,;$$

$$\sqrt[m]{a+bx} = z\,, \quad \text{oder} \quad x = \frac{z^m - a}{b}\,, \quad dx = \frac{m}{b} \cdot z^{m-1}\, dz\,;$$

$$\sin x = z \quad \text{und} \quad dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\,;$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t\,, \ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,, \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}\,.$$

4. Integration durch Zerlegung in Teilbrüche.

Jede unecht gebrochene, rationale Funktion $\frac{\psi(x)}{F(x)}$ läßt sich in eine ganze Funktion $\varphi(x)$ und eine echt gebrochene, rationale Funktion $\frac{f(x)}{F(x)}$ umformen. Diese letztere läßt sich in eine Summe von Teilbrüchen zerlegen.

1) Die Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ seien sämtlich reell und untereinander verschieden, es sei

$$F(x) = (x - a)(x - b)(x - c) \ldots = 0 ,$$

dann ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{C}{x - c} + \ldots,$$

hierbei ist

$$A = \frac{f(a)}{F'(a)}, \quad B = \frac{f(b)}{F'(b)}, \quad \ldots$$

2) $F(x) = 0$ hat auch komplexe Wurzeln, z. B. $p + qi$ und $p - qi$, dann ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x - p - qi} + \frac{A_2}{x - p + qi} + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)},$$

hierbei ist

$$A_1 = \frac{f(p + qi)}{F'(p + qi)}, \quad A_2 = \frac{f(p - qi)}{F'(p - qi)}.$$

Faßt man nach der Bestimmung von A_1 und A_2 die beiden ersten Brüche zusammen, so geben sie einen reellen Bruch mit dem Nenner $(x - p)^2 + q^2$.

3) Mehrfache Wurzeln. Es sei

$$F(x) = 0 = (x - a)^\alpha (x - b)^\beta (x - c)^\gamma \ldots, \quad \text{dann ist}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} = & \frac{A}{(x - a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x - a)^{\alpha - 1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha - 1}}{x - a} \\ & + \frac{B}{(x - b)^\beta} + \frac{B_1}{(x - b)^{\beta - 1}} + \ldots + \frac{B_{\beta - 1}}{x - b} \\ & + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{aligned}$$

Setzt man $F(x) = (x - a)^\alpha \cdot \varphi(x)$, so hat man zur Bestimmung von A, A_1, A_2 ... folgende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
f(a) &= A \cdot \varphi(a)\,, \\
f'(a) &= A \cdot \varphi'(a) + A_1\,\varphi(a)\,, \\
f''(a) &= A\,\varphi''(a) + A_1 \cdot 2\,\varphi'(a) + A_2 \cdot 2\,\varphi(a)\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f^{(n)}(a) &= A\,\varphi^{(n)}(a) + A_1 \cdot n \cdot \varphi^{(n-1)}(a) \\
&\quad + A_2 \cdot n(n-1) \cdot \varphi^{(n-2)}(a) + \ldots + n!\,A_{n-1}\,\varphi(a)\,.
\end{aligned}
$$

Das Integral der ursprünglichen, gebrochenen Funktion ergibt sich nun durch die Integration der einzelnen Teile.

5. Es bedeute $R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+e}}\right)$ eine Funktion, welche aus x und der n-ten Wurzel durch rationale Verbindungen derselben aufgebaut ist, dann läßt sich

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right) dx$$

in das Integral einer rationalen Funktion überführen durch die Einsetzung $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+e}} = y$.

Um $\int R(x, \sqrt{a+bx\pm cx^2})\,dx$ $(c > 0)$ auszuführen, benutzt man die Einsetzung $y = \dfrac{cx+b}{\sqrt{ac \mp b^2}}$, man erhält dann

$$\int R(x, \sqrt{a+bx\pm cx^2})\,dx = \int R_1(y, \sqrt{1\pm y^2})\,dy\,.$$

Hierbei stellt R_1 wieder eine Funktion dar, die durch rationale Verbindungen von y und $\sqrt{1\pm y^2}$ gewonnen wird. Ist nun R_1 eine Summe mehrerer Glieder, so integriert man jedes Glied einzeln. Andernfalls läßt sich das Integral, abgesehen von Integralen rationaler Differentiale, zurückführen auf eine Summe von Integralen von der Gestalt $\int \dfrac{R_2(y)\,dy}{\sqrt{1\pm y_2}}$.

Wendet man auf R_2 Partialbruchzerlegung an, so erhält man eine Summe von Integralen von der Form $\int \frac{y^n\,dy}{\sqrt{1 \pm y^2}}$, wobei $n > 0$ und $\frac{dy}{(y-a)^n \sqrt{1 \pm y^2}}$.

Die letztere läßt sich durch die Einsetzung $y - a = \frac{1}{z}$ und durch Wiederholung des obigen Ganges ebenfalls auf die erste Form bringen, auf welche nunmehr auch das ursprüngliche Integral zurückgeführt ist.

Rekursionsformel:

$$\int \frac{y^n\,dy}{\sqrt{1 \pm y^2}} = \pm \frac{y^{n-1}\sqrt{1 \pm y^2}}{n} \pm \frac{n-1}{n} \int \frac{y^{n-2}\,dy}{\sqrt{1 \pm y^2}}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Rekursionsformel gelangt man auf das Integral 15. oder 19. von § 91 oder auf $\int \frac{y\,dy}{\sqrt{1 \pm y^2}}$.

Durch unmittelbare Integration vermittels der Grundformeln, durch Teilbruchzerlegung und durch die vorstehenden Verfahrungsweisen ist die Integration von $\varphi(x)\,dx$ durchführbar für folgende drei Fälle:

I. $\varphi(x) = R(x)$, II. $\varphi(x) = R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right)$,

III. $\varphi(x) = R\left(x, \sqrt{a + 2bx \pm cx^2}\right)$.

6. Weitere Rekursionsformeln.

$$1. \quad \int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x\,dx.$$

2. $$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx\,.$$

3. $$\int x^n e^x\, dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x\, dx\,.$$

4. $$\int \frac{e^x}{x^n}\, dx = -\frac{e^x}{(n-1)\,x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{e^x}{x^{n-1}}\, dx\,.$$

5. $$\int x^n \sin x\, dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1} \cos x\, dx\,.$$

6. $$\int x^n \cos x\, dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1} \sin x\, dx\,.$$

7. $$\int \frac{\sin x}{x^n}\, dx = -\frac{\sin x}{(n-1)\,x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{\cos x}{x^{n-1}}\, dx\,.$$

8. $$\int \frac{\cos x}{x^n}\, dx = -\frac{\cos x}{(n-1)\,x^{n-1}} - \frac{1}{n-1}\int \frac{\sin x}{x^{n-1}}\, dx\,.$$

7. Integration durch unendliche Reihen.

1. Wenn $f(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ eine Reihe ist, deren Glieder stetige Funktionen einer Veränderlichen x sind, wenn ferner diese Reihe für a und b und alle Werte zwischen a und b konvergent ist und wenn f(x) die Grenze ist, gegen die sie konvergiert, so ist (s. § $93,_1$)

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b u_1\, dx + \int_a^b u_2\, dx + \int_a^b u_3\, dx + \ldots$$

2. Liefert die Mac Laurinsche Reihe für f(x) eine konvergente Reihe

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots,$$

so ist

$$\int f(x)\, dx = C + \frac{x}{1!} f(0) + \frac{x^2}{2!} f'(0) + \frac{x^3}{3!} f''(0) + \ldots$$

Die Integration durch unendliche Reihen besteht also darin, daß man den betreffenden Ausdruck (z. B. durch den binomischen Lehrsatz, die logarithmische Reihe u. a.) in eine unendliche Reihe verwandelt und, nach Untersuchung der Konvergenzverhältnisse, die einzelnen Glieder derselben integriert.

§ 93. Bestimmte Integrale.

1. Ist $f(x)\,dx$ das Differential von $\varphi(x)$, so ist $\varphi(x)+C$ das unbestimmte Integral von $f(x)\,dx$; dagegen heißt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

das bestimmte Integral genommen zwischen den Grenzen a und b, d. h. für $x = a$ und $x = b$. Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ ist die Grenze der Summe der unendlich kleinen Werte des Differentials $f(x)\,dx$, wenn x durch unendlich kleine Änderungen h von a in b übergeht; daher auch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \{ f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots \} \cdot h .$$

2. $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx .$$

3. $$\int_a^b [f(x)\,dx \pm \varphi(x)\,dx] = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx .$$

4. $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx ,$$

c und d Werte zwischen a und b.

5. Mittelwertsätze. Wenn $f(x)$ in dem Intervall $x = a$ bis $x = b$ stetig bleibt, ist:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f[a + \varepsilon(b-a)] , \qquad 0 < \varepsilon < 1 ;$$

wenn ferner $f(x)$ in dem Intervall $a \leqq x \leqq b$ positiv und nicht überall gleich Null, so ist

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = \varphi(c) \int_a^b f(x)\, dx\,, \quad a \leqq c \leqq b\,.$$

6. Angenäherte Berechnung eines bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\, dx$. — Es sei für jeden Wert von x zwischen a und b für eine Funktion $\varphi(x)$

$\varphi(x) < f(x)$, desgleichen für eine zweite $\psi(x)$
$\psi(x) > f(x)$, dann ist

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx < \int_a^b f(x)\, dx < \int_a^b \psi(x)\, dx\,.$$

Simpsonsche Regel. Um einen Näherungswert von $\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)\, dx$ zu finden, teile man die Strecke zwischen x_0 und x_{2n} in $2n$ gleiche Teile von der Länge h, und bestimme die zu den Teilpunkten gehörigen Ordinaten $y_0, y_1, y_2 \dots y_{2n}$, dann ist annähernd

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)\, dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + y_{2n})$$

(s. auch § $94,_{11}$).

7. Summierung von Reihen durch bestimmte Integrale.

Wird $f(x, m)\, dx$ zwischen zwei Grenzen a und b, die von m unabhängig sind, integriert, so ist das Ergebnis im allgemeinen wieder eine Funktion von m, so daß also

$$\int_a^b f(x, m)\, dx = \varphi(m)\,, \quad \text{daher}$$

$$\int_a^b [f(x, 0) + f(x, 1) + f(x, 2) + \dots + f(x, n-1)]\, dx$$
$$= \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n-1)\,.$$

Läßt sich die unter dem Integralzeichen stehende Reihe leicht summieren, so erhält man die Summe der rechts stehenden Reihe in Form eines bestimmten Integrals*).

$$8. \quad \frac{\partial}{\partial\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx\,,$$

wenn die Grenzen a und b konstant sind in Beziehung auf α, dagegen

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx + f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}\,,$$

wenn a und b Funktionen von α sind.

$$\int_c^d\Big[\int_a^b f(x,y)\,dx\Big]\,dy = \int_a^b\Big[\int_c^d f(x,y)\,dy\Big]\,dx\,,$$

wenn $f(x, y)$ für $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$ eindeutig und stetig ist.

9. Besondere bestimmte Integrale.

$$1. \quad \int_0^\infty \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}\,.$$

$$2. \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi\,.$$

$$3. \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\,; \qquad \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1\,.$$

*) S. Schloemilch, Übgsbch. z. St. d. höh. An. 2. Teil, S. 168.

4. $$\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx; \qquad 2n > 0.$$

5. $$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}{1\cdot 3\ldots(2n+1)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx; \quad 2n+1 > 1.$$

6. $$\int_0^{\infty} \frac{\sin a x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}; \qquad a > 0;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos a x}{x}\,dx = \infty.$$

7. $$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 1; \qquad \int_0^{\infty} e^{-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

$$8. \quad \int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} (a > 0, \text{ n ganze Za}$$

C) Anwendung der Infinitesimalrechnung a Geometrie.

§ 94. Ebene Kurven.

1. Ist $y = f(x)$ die Gleichung einer Kurve, τ Winkel der Tangente mit der X-Achse, dann (ds s. § 94, 4):

$$\sin\tau = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\tau = \frac{dx}{ds}, \quad \operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = y'.$$

Wenn $y' = 0$, dann ist die Tangente parallel X-Achse, ist $y' = \infty$, so ist sie parallel der Y-Ac

2. Verlauf. Die Kurve steigt (d. h. y wächst) zunehmendem x, wenn $y' > 0$, sie fällt, wenn $y' <$

Die Kurve ist in irgend einem Punkt erhab (konvex) gegen die X-Achse, wenn y und y'' für die Punkt gleiche Zeichen haben; im andern Falle ist hohl (konkav) gegen die X-Achse (s. § 89, 8).

3. Besondere Punkte. Für einen Wendepu der Kurve $y = f(x)$ haben $f''(x - h)$ und $f''(x + h)$ gegengesetzte Vorzeichen (h unendl. kl.). Die Koo naten der Wendepunkte ergeben sich aus der Kurv gleichung und aus der Bedingung: $f''(x) = 0$, währ $f'''(x) \gtrless 0$; oder aus $f''(x) = \infty$.

Für die in Polarkoordinaten gegebene Kurve $r = f$ erhält man die Koordinaten der Wendepunkte aus die Gleichung und aus $r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0$.

Ein Punkt einer Kurve $f(x, y) = 0$ ist ein vi facher Punkt, wenn sich mehrere Kurvenzweige ihm schneiden, es müssen sich also für ihn mehr Werte von y' ergeben.

Dies ist möglich, wenn $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, wenn also $f'_x = 0$, $f'_y = 0$. Durch Ableitung des Zählers und des Nenners der rechten Seite nach x erhält man zur Bestimmung von y':

$$\alpha) \quad f''_{xx} + 2 f''_{xy} \frac{dy}{dx} + f''_{yy} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0\,;$$

hieraus ergeben $\left.\begin{matrix}2\\1\\0\end{matrix}\right\}$ Werte von y', d. h. der Punkt ist Doppelpunkt, bzw. Rückkehrpunkt oder Selbstberührungspunkt, bzw. isolierter Punkt, je nachdem

$$f''^2_{xy} \gtreqless f''_{xx} \cdot f''_{yy}\,.$$

Für einen Rückkehrpunkt (Abszisse x_0) erster Art (Zweige auf verschiedenen Seiten der Tangente) erhält man mit $x_0 \pm h$ zwei verschiedene Werte von $\frac{d^2y}{dx^2}$ mit entgegengesetzten Zeichen; für den Rückkehrpunkt zweiter Art erhält man in derselben Weise Werte mit gleichen Zeichen.

Besondere Punkte im Ursprung O. Es sei

$$A + (Bx + Cy) + (Dx^2 + Exy + Fy^2) + \dots$$
$$+ (Px^n + Qx^{n-1}y + \dots + Sy^n) = 0$$

die Gleichung einer Linie n-ten Grades. Ist nun

α) $A = 0$, so geht die Linie durch O und es ist $Bx + Cy = 0$ die Gleichung der Tangente in O;

β) $A = B = C = 0$, so ist O doppelter Punkt und es ist $Dx^2 + Exy + Fy^2 = 0$ die gemeinschaftliche Gleichung der Tangenten in O. Ist dabei $E^2 - 4DF \gtreqless 0$, so sind dieselben bzw. reell getrennt, reell zusammenfallend oder imaginär und O ist bzw. eigentlicher Doppelpunkt, Rückkehrpunkt oder Einsiedler.

Einen Doppelpunkt der Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ bestimmt man aus

$$x = \varphi(t_1) = \varphi(t_2)\,, \qquad y = \psi(t_1) = \psi(t_2)\,,$$

einen Rückkehrpunkt aus $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$.

In zweifelhaften Fällen ist eine Untersuchung der Kurve in der Nähe des Punktes nötig.

4. Größenbestimmungen.

Bogenelement

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2} = \pm\sqrt{1 + y'^2}\cdot dx = \pm\sqrt{(dr)^2 + (r\,d\varphi)^2}.$$

ds muß bei der Bestimmung von $\sin\tau$ und $\cos\tau$ (s. 1.) mit dem Zeichen genommen werden, das dem für $\operatorname{tg}\tau$ entspricht.

Die Tangente und Normale in Punkt P schneiden die X-Achse in T, bzw. in U, dann ist:

Tangente $PT = \frac{y}{y'}\cdot\sqrt{1 + y'^2} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$;

Subtangente $= \frac{y}{y'}$;

Normale $PU = y\sqrt{1 + y'^2}$;

Subnormale $= y\,y'$.

Polarkoordinaten: μ Winkel der Tangente PT mit dem Fahrstrahl OP zum Berührungspunkt P, im Sinne des wachsenden Winkels φ genommen; das Lot auf OP in O schneide die Tangente in T, die Normale in N, dann heißt PT die Tangente (T), PN die Normale (N), OT Polarsubtangente (S_t), ON Polarsubnormale (S_n) und es ist

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{r}{r'}\left(= r : \frac{dr}{d\varphi}\right), \quad T = r\sqrt{1+\left(\frac{r}{r'}\right)^2}; \quad N = \sqrt{r^2 + r'^2};$$

$$S_t = \frac{r^2}{r'}; \qquad S_n = r'.$$

5. Gleichung der

Tangente im Punkt (x, y), an die Kurve $y = f(x)$, bzw. $F(x, y) = 0$, bzw. $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, X und Y laufende Koordinaten:

1) $Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$;

2) $F'_x(X - x) + F'_y(Y - y) = 0$;

3) $(X - x)\frac{dy}{dt} - (Y - y)\frac{dx}{dt} = 0$.

6. Bestimmung der Asymptoten. Die Gleichung einer Asymptote kann in einer der Formen geschrieben werden:

$$y = mx + c, \quad x = \mu y + \gamma; \quad \text{hierbei ist}$$

$$m = \lim \frac{y}{x}\Big|_{x=\infty} = \lim \frac{dy}{dx}\Big|_{x=\infty}, \quad c = \lim (y - mx)\Big|_{x=\infty};$$

$$\mu = \lim \frac{x}{y}\Big|_{y=\infty} = \lim \frac{dx}{dy}\Big|_{y=\infty}, \quad \gamma = \lim (x - \mu y)\Big|_{y=\infty}.$$

Bei einer Kurve n-ten Grades kann man die n möglichen Asymptoten (Tangenten in den n Schnittpunkten mit der unendlich fernen Geraden) erhalten, indem man ausdrückt, daß die Richtungsgerade $y = mx$ die Kurve einmal und die Asymptote $y = mx + c$ die Kurve zweimal im Unendlichen trifft. Man setzt daher das Aggregat der Glieder n-ter Ordnung gleich Null dividiert mit x^n und löst nach $\frac{y}{x}$ auf. Die n Wurzelwerte (m) für $\frac{y}{x}$ sind die Richtungskoeffizienten. Man setzt nun $y = mx + c$ in die Kurvengleichung ein und ordnet nach Potenzen von x. Der Faktor von x^n wird von selbst zu Null. Aus dem gleich Null gesetzten Faktor von x^{n-1} ergibt sich c.

Für die Kurve $r = f(\varphi)$ (Polarkoord.) bestimmt sich die Richtung einer Asymptote aus dem Wert von φ, für welchen $r = \infty$ wird; die Lage der Asymptote ergibt sich aus der Polarsubtangente, für welche man hat

$$S_t = \lim \frac{r^2}{r'}\Bigg|_{r=\infty}.$$

Asymptoten parallel der Y-Achse. Man sucht die Werte von x, für welche $y = \infty$ wird. — Für die Kurve $y^p F(x) + y^{p-1} F_1(x) + \ldots + F_p(x) = 0$, $-F(x)$, $F_1(x) \ldots$ ganze rationale Ausdrücke — ergeben sich die zur Y-Achse parallelen Asymptoten aus $F(x) = 0$. Auf entsprechende Weise erhält man die zu der X-Achse parallelen Asymptoten.

7. Berührung von Kurven. Zwei Kurven $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ haben in einem bestimmten, gemeinschaftlichen Punkte (Abszisse x_0) eine Berührung n-ter Ordnung, wenn $f(x_0) = \varphi(x_0)$ und für denselben alle Ableitungen von $f(x)$ und $\varphi(x)$ bis zur n-ten einschließlich einander gleich sind. — Eine Berührung n-ter Ordnung kann aufgefaßt werden als eine Grenzlage, bei welcher $n+1$ Schnittpunkte der beiden Kurven in einen zusammenfallen. Eine Gerade $y = mx + b$ bildet mit einer Kurve $y = f(x)$ eine Berührung n-ter Ordnung, wenn für den gemeinschaftlichen Punkt alle Ableitungen von $f''(x)$ bis zur n-ten einschließlich verschwinden und $f'(x) = m$ (Wendepunkt, wenn n gerade, Flachpunkt, wenn n ungerade ist). Das Berühren ist mit Schneiden oder Nichtschneiden im Berührungspunkt verbunden, je nachdem die Berührung von gerader oder ungerader Ordnung ist.

8. **Krümmungskreis.** Er ist derjenige Kreis, der mit einer Kurve eine Berührung zweiter Ordnung im Punkt (x, y) hat; der Mittelpunkt desselben, der **Krümmungsmittelpunkt**, ist der Schnittpunkt zweier unendlich naher (zusammenfallender) Normalen. Der Krümmungshalbmesser ϱ und die Koordinaten (X, Y) des Krümmungsmittelpunktes sind bestimmt durch die drei Gleichungen:

1) $(x - X)^2 + (y - Y)^2 = \varrho^2$,

2) $(x - X) + (y - Y) \cdot y' = 0$,

3) $1 + y'^2 + (y - Y)\, y'' = 0$, hieraus ergibt sich

Krümmungshalbmesser $\varrho = \pm (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} : y''$

($\pm$ je nachdem $y'' \gtrless 0$)

$$\begin{cases} X = x - (1 + y'^2) \cdot y' : y'', \\ Y = y + (1 + y'^2) : y''. \end{cases}$$

Ist die Kurve gegeben durch die Gleichungen $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$, so ist

$$\begin{cases} \varrho = (x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}} : (x' y'' - x'' y'), \\ X = x - y'(x'^2 + y'^2) : (x' y'' - x'' y'), \\ Y = y + x'(x'^2 + y'^2) : (x' y'' - x'' y'). \end{cases}$$

Für **Polarkoordinaten** hat man

$$\varrho = \pm \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2 r'^2 - r r''}.$$

Der **Kontingenzwinkel** $d\tau$ ist der Winkel zweier unendlich naher Tangenten, er ist gleich dem Differential des Neigungswinkels der Tangente gegen die Polarachse; es ist

$$d\tau = \frac{dx\, d^2y - d^2x\, dy}{ds^2} = d\varphi + \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 d\frac{r\, d\varphi}{dr},$$

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{ds}{d\varphi + d\mu}.$$

Maß der Krümmung, kurz Krümmung: $\dfrac{1}{\varrho} = \dfrac{d\tau}{ds}$.

9. Die **Evolute** einer Kurve ist der geometrische Ort des Krümmungsmittelpunktes. Ihre Gleichung wird erhalten, indem man aus den Gleichungen für X und Y in Nr. 8 unter Benutzung der Kurvengleichung x und y eliminiert. Die gegebene Kurve heißt **Evolvente**. Jeder Krümmungshalbmesser ist Normale zur Evolvente, Tangente an die Evolute. Differenz zweier Krümmungshalbmesser gleich dem dazwischen liegenden Bogen der Evolute. Wird ein um die Evolute gelegter, biegsamer und unausdehnbarer Faden in straffer Spannung abgelöst, so beschreibt der Anfangspunkt des Fadens die Evolvente.

10. **Hüllkurven.** Die Gleichung $F(x, y, p) = 0$, worin p ein veränderlicher Parameter ist, stellt eine Kurvenschar dar, welche eine Kurve umhüllt; die Gleichung der umhüllten Kurve ergibt sich durch Elimination von p aus den Gleichungen

1. $F(x, y, p) = 0$ und

2. $$\frac{\partial F}{\partial p} = 0 .$$

Enthält die Gleichung der beweglichen Kurve zwei veränderliche Parameter p und q, zwischen welchen die Beziehung $\varphi(p, q)$ besteht, so ergibt sich die Gleichung der Hüllkurve durch Elimination von p und q aus den drei Gleichungen:

$$\frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0, \quad F(x, y, p, q) = 0, \quad \varphi(p, q) = 0 .$$

11. **Flächeninhalt** (Quadratur). Der Inhalt J der Fläche, welche zwischen der Kurve, der X-Achse und den zu den Abszissen x_0 und x_1 gehörigen Ordinaten eingeschlossen ist, ergibt sich aus

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx ,$$

oder bei schiefwinkligen Koordinaten

$$J = \sin\gamma \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx\,.$$

Soll die Fläche begrenzt sein durch die Kurven $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ und die zu x_0 und x_1 gehörigen Ordinaten, so ist

$$J = \int_{x_0}^{x_1} [f(x) - \varphi(x)]\,dx\,.$$

Simpsonsche Regel. Ist $f(x)$ höchstens vom dritten Grade, y_m die Ordinate in der Mitte zwischen x_0 und x_1, dann ist

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \tfrac{1}{6}(x_1 - x_0)(y_0 + 4\,y_m + y_1)$$

(s. auch § 93, $_6$).

12. Kurvenlänge (Rektifikation). Die Länge s eines Kurventeiles, welcher zwischen den Abszissen x_0 und x_1 liegt, ist

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\,dx\,.$$

13. Polarkoordinaten: Fläche zwischen der Kurve und den zu φ_0 und φ_1 gehörigen Strahlen

$$J = \tfrac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2\,d\varphi\,.$$

Kurvenlänge:

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r'^2 + r^2}\cdot d\varphi = \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}\cdot dr\,.$$

§ 95. Raumkurven (doppelt gekrümmte Kurven).

1. Eine Raumkurve ist gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{cases} x = \varphi(t)\,, \\ y = \psi(t)\,, \\ z = \chi(t) \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} f(x, y, z) = 0\,, \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \text{(Schnittlinie der Flächen)}$$

$$\text{oder} \quad \begin{cases} y = \varphi_1(x) \\ z = \varphi_2(x) \end{cases} \quad \text{(Projektionen der Kurve).}$$

2. Bogenelement

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \cdot dx\,.$$

3. Gleichungen der Tangente im Punkt (x, y, z)

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}\,, \quad \text{oder}$$

$$\frac{X - \varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{Y - \psi(t)}{\psi'(t)} = \frac{Z - \chi(t)}{\chi'(t)}\,, \quad \text{oder}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(Z - z) = 0\,, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \dfrac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0\,. \end{cases}$$

Winkel α, β, γ der positiven Tangentenrichtung mit den Achsen bestimmt durch

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}\,, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}\,, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}\,.$$

4. Gleichung der Normalebene im Punkt (x, y, z)

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy + (Z - z)\,dz = 0\,, \quad \text{oder}$$

$$[X - \varphi(t)]\,\varphi'(t) + [Y - \psi(t)]\,\psi'(t) + [Z - \chi(t)]\,\chi'(t) = 0$$

$$\text{oder} \quad (X - x)\cos\alpha + (Y - y)\cos\beta + (Z - z)\cos\gamma = 0\,.$$

5. Gleichung der Schmiegungsebene (= Krümmungsebene = Oskulationsebene = Ebene durch Punkt [x, y, z] und zwei unendlich nahe Punkte)

$$(X - x)\cos\lambda + (Y - y)\cos\mu + (Z - z)\cos\nu = 0 \quad \text{oder}$$

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0\,,$$

wobei $A = dy\, d^2z - d^2y\, dz$, $B = dz\, d^2x - d^2z\, dx$,
$C = dx\, d^2y - d^2x\, dy$:

Normale zur Schmiegungsebene (Binormale)

$$\frac{X-x}{A} = \frac{Y-y}{B} = \frac{Z-z}{C}.$$

Die Winkel λ, μ, ν dieser Normalen mit den Achsen sind bestimmt durch

$$\cos\lambda = \frac{A}{D}, \quad \cos\mu = \frac{B}{D}, \quad \cos\nu = \frac{C}{D}, \quad \text{wobei}$$

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Die Hauptnormale ist die Schnittlinie der Normalebene mit der Schmiegungsebene; die Gleichungen der Hauptnormalen sind:

$$\frac{X-x}{d\frac{dx}{ds}} = \frac{Y-y}{d\frac{dy}{ds}} = \frac{Z-z}{d\frac{dz}{ds}}.$$

Für die Richtungswinkel ξ, η, ζ der positiven Hauptnormalen hat man:

$$\frac{\cos\xi}{\varrho_1} = \frac{d\cos\alpha}{ds}, \quad \frac{\cos\eta}{\varrho_1} = \frac{d\cos\beta}{ds}, \quad \frac{\cos\zeta}{\varrho_1} = \frac{d\cos\gamma}{ds}.$$

6. Kontingenzwinkel $d\tau$, d. h. Winkel zwischen zwei unendlich nahen Tangenten:

$$d\tau = \frac{D}{ds^2} = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}.$$

Erster Krümmungshalbmesser

$$\varrho_1 = \frac{ds}{d\tau} = \frac{ds^3}{D}.$$

Der Krümmungsmittelpunkt liegt in der Schmiegungsebene, auf der Hauptnormalen und kann als Schnitt der Hauptnormalen mit einer unendlich nahen Normalebene betrachtet werden.

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$X = x + \varrho_1^2 \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}, \quad Y = y + \varrho_1^2 \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}, \quad Z = z + \varrho_1^2 \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Unter der (ersten) Krümmung oder Flexion versteht man

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\varrho_1}.$$

Kurven mit der Flexion Null $\left(\frac{1}{\varrho_1} = 0\right)$ sind gerade Linien.

7. Torsionswinkel $d\vartheta$, d. h. Winkel zweier unendlich naher Schmiegungsebenen

$$d\vartheta = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}.$$

Zweite Krümmung oder Drehung (Torsion) der Kurve

$$\pm \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{\varrho_2}.$$

Kurven mit der Torsion Null $\left(\frac{1}{\varrho_2} = 0\right)$ sind ebene Kurven.

Zweiter Krümmungshalbmesser (Halbmesser der Drehung)

$$\varrho_2 = \pm \frac{ds}{d\vartheta} \quad \text{(links oder rechts gewundene Kurven).}$$

8. Frenets Formeln:

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{d\cos\alpha}{ds} = \dfrac{\cos\xi}{\varrho_1}, \quad \dfrac{d\cos\beta}{ds} = \dfrac{\cos\eta}{\varrho_1}, \quad \dfrac{d\cos\gamma}{ds} = \dfrac{\cos\zeta}{\varrho_1}; \\[2ex]
\dfrac{d\cos\lambda}{ds} = \dfrac{\cos\xi}{\varrho_2}, \quad \dfrac{d\cos\mu}{ds} = \dfrac{\cos\eta}{\varrho_2}, \quad \dfrac{d\cos\nu}{ds} = \dfrac{\cos\zeta}{\varrho_2}; \\[2ex]
\dfrac{d\cos\xi}{ds} = -\dfrac{\cos\alpha}{\varrho_1} - \dfrac{\cos\lambda}{\varrho_2}, \quad \dfrac{d\cos\eta}{ds} = -\dfrac{\cos\beta}{\varrho_1} - \dfrac{\cos\mu}{\varrho_2}, \\[2ex]
\qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{d\cos\zeta}{ds} = -\dfrac{\cos\gamma}{\varrho_1} - \dfrac{\cos\gamma}{\varrho_2}.
\end{array}\right.$$

9. Schmiegungskugel, Grenzlage einer durch vier unendlich benachbarte Punkte einer Raumkurve gehenden Kugel; ihr Mittelpunkt (x_0, y_0, z_0), der Schnittpunkt dreier unendlich naher Normalebenen, bestimmt sich aus

$$x_0 = x + \varrho_1 \cos\xi - \varrho_2 \frac{d\varrho_1}{ds} \cos\lambda,$$

$$y_0 = y + \varrho_1 \cos\eta - \varrho_2 \frac{d\varrho_1}{ds} \cos\mu,$$

$$z_0 = z + \varrho_1 \cos\zeta - \varrho_2 \frac{d\varrho_1}{ds} \cos\nu.$$

Der Schnitt der Schmiegungskugel mit der Schmiegungsebene heißt Schmiegungskreis.

10. Rektifikation, die Länge s eines Bogens der Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ zwischen den Punkten x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 ist

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

§ 96. Krumme Flächen.

1. Eine Fläche ist gegeben durch die Gleichung $F(x, y, z) = 0$, oder entwickelt $z = f(x, y)$, oder durch $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$.

Bezeichnungen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = s; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

2. Gleichung der Berührungsebene im Punkt (x, y, z)

$$(X - x)F'_x + (Y - y)F'_y + (Z - z)F'_z = 0, \quad \text{oder}$$

$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0.$$

3. Gleichungen der Normalen im Punkt (x, y, z)

$$\frac{X - x}{F'_x} = \frac{Y - y}{F'_y} = \frac{Z - z}{F'_z}$$

oder $$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=-(Z-z)\,.$$

Winkel λ, μ, ν der Normalen mit den Achsen bestimmt durch

$$\cos\lambda=\frac{F'_x}{N}\,,\qquad \cos\mu=\frac{F'_y}{N}\,,\qquad \cos\nu=\frac{F'_z}{N}\,,\qquad \text{bzw.}$$

$$\cos\lambda=\frac{p}{n}\,,\qquad \cos\mu=\frac{q}{n}\,,\qquad \cos\nu=-\frac{1}{n}\,,\qquad \text{wobei}$$

$$N^2=(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2 \qquad \text{und}$$

$$n^2=p^2+q^2+1\,.$$

4. Die Schnittlinie irgend einer durch die Normale gehenden Ebene mit der Fläche heißt **Normalschnitt.** Es sei ϱ der Krümmungshalbmesser eines Normalschnittes im Punkt P, α, β, γ die Winkel, welche die Tangente des Normalschnittes in P mit den Achsen bildet, dann ist

$$\varrho=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha+2\,s\cos\alpha\cos\beta+t\cos^2\beta}$$

Satz von Meunier. Geht eine Ebene durch die Tangente eines Normalschnittes (im Fußpunkt P der Normalen), so ist der Krümmungshalbmesser ϱ' dieses schiefen Schnittes im Punkt P

$$\varrho'=\varrho\cos(\varrho\,\varrho') \qquad \text{oder}$$

der Krümmungshalbmesser des schiefen Schnittes wird erhalten, indem man den Krümmungshalbmesser des Normalschnittes auf die Ebene des ersteren projiziert.

5. Die beiden (aufeinander senkrechten) Ebenen, für welche ϱ einen größten (ϱ_1) und einen kleinsten Wert (ϱ_2) erreicht, heißen **Hauptnormalschnitte**, die Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 derselben bestimmen sich aus den Gleichungen

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{rt - s^2} \cdot n\,,$$

$$\varrho_1 \varrho_2 = \frac{n^4}{rt - s^2}$$ oder als Wurzeln der Gleichung

$$t - s^2)\varrho^2 - [(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]n\varrho + n^4 = 0\,.$$

6. Satz von Euler. Für irgend einen Normalhnitt, dessen Ebene mit der Ebene des zu ϱ_1 ge-
irigen Hauptnormalschnittes den Winkel φ bildet, ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\varphi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho_2}\,.$$

Der Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$$

ißt das (Gaußsche) Maß der Krümmung für den
treffenden Punkt.

Satz von Gauß: Das Krümmungsmaß bleibt bei
ıer beliebigen Verbiegung der Fläche ungeändert; oder:
ıd zwei Flächen aufeinander abwickelbar, so haben sie in
zwei entsprechenden Punkten gleiches Krümmungsmaß.

7. Sind ϱ' und ϱ'' die Krümmungshalbmesser zweier
feinander senkrechten Normalschnitte, so ist

$$\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\,,$$

h. für denselben Punkt einer Fläche ist die Summe
r Krümmungen konstant.

8. Krümmungslinie heißt der Ort des Punktes
ıer Fläche, für welchen die unendlich nahen Normalen
r Fläche sich schneiden; die Normalen gehören daher
ıer abwickelbaren Fläche an. Durch jeden Punkt einer
ıerfläche gehen zwei Krümmungslinien, die aufeinander
ıkrecht sind und die Tangenten der Hauptnormalschnitte
rühren. Sie sind dargestellt durch die Gleichung

$$[(1+q^2)s - pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [(1+q^2)r - (1+p^2)t]\left(\frac{dy}{dx}\right) + [pqr - (1+p^2)s] = 0$$

und durch die Gleichung der Fläche.

9. Eine auf einer Fläche liegende Linie heißt **geodätische Linie**, wenn ihre Schmiegungsebenen zugleich Normalebenen zur Fläche sind. Ihre Gleichungen sind

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{d\cos\alpha} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{d\cos\beta} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{d\cos\gamma}.$$

Die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf einer Fläche gehört einer geodätischen Linie an.

10. **Hüllfläche.** Die Gleichung

$$F(x, y, z, p) = 0,$$

worin p ein veränderlicher Parameter ist, stellt eine Flächenschar dar, welche eine Fläche umhüllt. Die Gleichung der Hüllfläche ergibt sich durch Elimination von p aus

$$\begin{cases} F(x, y, z, p) = 0 \quad \text{und} \\ \dfrac{\partial F(x, y, z, p)}{\partial p} = 0. \end{cases}$$

Enthält die Flächengleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ zwei veränderliche Parameter p und q, die durch die Gleichung $\varphi(p, q) = 0$ miteinander verbunden sind, so wird die Gleichung der Umhüllungsfläche erhalten durch Entfernung von p und q und $\frac{dq}{dp}$ aus

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad \varphi(p, q) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{dq}{dp} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial q}\cdot\frac{dq}{dp} = 0.$$

Enthält die Gleichung der bewegten Fläche zwei, voneinander unabhängige Parameter p und q, so wird die Gleichung der Hüllfläche erhalten als Eliminationsresultat von p und q aus

$$F(x, y, z, p, q) = 0\,, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = 0\,, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 0\,.$$

11. Quadratur (Komplanation) der Flächen.
Das Differential der Fläche ist

$$dF = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot dx\,dy\,, \quad \text{daher}$$

$$F = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dy\,,$$

y_0 und y_1 sind die der Abszisse x entsprechenden Ordinaten der Projektion des Umrisses der Fläche auf die XY-Ebene, x_0 und x_1 sind die Abszissen zu den Ordinaten, welche jene Projektion begrenzen.

Bei Drehflächen ergibt sich (— X-Achse ist Drehachse —):

$$F = 2\pi \int y \sqrt{1 + y'^2}\,dx = 2\pi \int y\,ds\,.$$

Bei Polarkoordinaten hat man:

$$F = \iint \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2\right] \cos^2\varphi + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2} \cdot r\,d\varphi\,d\psi\,.$$

(s. § 76, 4).

12. Kubatur.

1. Bei Drehflächen (— 0X Drehachse —); die gedrehte Fläche ist begrenzt vom gedrehten Kurvenbogen, den zu den Endpunkten desselben gehörigen Ordinaten und der X-Achse.

$$V = \pi \int y^2\,dx\,.$$

2. Die gedrehte Fläche ist begrenzt von zwei Ordinaten und zwei Kurven $y = f(x)$ und $y_1 = f_1(x)$,

$$V = \pi \int (y^2 - y_1^2)\,dx\,.$$

3. Es sei u der Inhalt eines parallel zur Ebene YOZ geführten Schnittes, dann ist der Inhalt des Körpers, der zwischen zwei parallel zu YOZ geführten Schnitten mit den Abszissen x_0 und x_1 liegt,

$$V = \int_{x_0}^{x_1} u\,dx \text{ (u abhängig von x).}$$

4. Allgemeine Formel:

$$V = \iiint dx\,dy\,dz$$

5. Für Polarkoordinaten (Bezeichn. s. § $76,_4$) ergibt sich

$$V = \tfrac{1}{3}\iint r^3 \cos\varphi\, d\varphi\, d\psi$$

§ 97. Viel gebrauchte Zahlenwerte.

Zahlenwert	Logarithmus	Zahlenwert	Logarithmus
$\sqrt{2} = 1{,}4142$	0,15052	$\sqrt[3]{2} = 1{,}2599$	0,10034
$\sqrt{3} = 1{,}73205$	0,23856	$\sqrt[3]{3} = 1{,}4422$	0,15904
$\sqrt{5} = 2{,}2361$	0,34949	$\sqrt[3]{5} = 1{,}7100$	0,23299
$\sqrt{6} = 2{,}4495$	0,38908	$\sqrt[3]{6} = 1{,}8171$	0,25938
$\sqrt{10} = 3{,}16228$	0,50000	$\sqrt[3]{10} = 2{,}1544$	0,33333
$\pi = 3{,}1416$	0,49715	$\pi^2 = 9{,}8696$	0,99430
$2\pi = 6{,}2832$	0,79818	$\sqrt{\pi} = 1{,}7725$	0,24857
$4\pi = 12{,}5664$	1,09921	$\sqrt[3]{\pi} = 1{,}4646$	0,16572
$\frac{\pi}{2} = 1{,}5708$	0,19612	$\frac{1}{\pi} = 0{,}31831$	0,50285 − 1
$\frac{\pi}{3} = 1{,}0472$	0,02003	$\frac{1}{\pi^2} = 0{,}10132$	0,00570 − 1

Zahlenwert	Logarithmus	Zahlenwert	Logarithmus
$\frac{\pi}{4}=0{,}7854$	0,89509−1	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}=0{,}56419$	0,75143−1
$\frac{\pi}{6}=0{,}5236$	0,71900−1	$\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}=0{,}68278$	0,83428−1
$\frac{4}{3}\pi=4{,}1888$	0,62209	$\frac{180}{\pi}=57{,}29578$	1,75812
$g=9{,}81$	0,99167	$e=2{,}7183$	0,43429
$\frac{g}{2}=4{,}905$	0,69064	$e^2=7{,}3891$	0,86859
$\frac{1}{g}=0{,}1019$	0,00833−1	$e^3=20{,}086$	1,30288
$\sqrt{g}=3{,}1321$	0,49583	$\sqrt{e}=1{,}6487$	0,21715
$\frac{\pi}{\sqrt{g}}=1{,}0030$	0,00132	$\sqrt[3]{e}=1{,}3956$	0,14476

VWV