



ВОЕННАЯ ИНЖЕНЕРНАЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКАЯ
ОРДЕНА ОТЕЧЕСТВЕННОЙ ВОЙНЫ
АКАДЕМИЯ ПРОТИВОВОЗДУШНОЙ ОБОРОНЫ
имени Маршала Советского Союза ГОВОРОВА Л. А.

Ф. Б. ЧЕРНЫЙ

«КОНТРОЛЬНЫЙ ЭКЗЕМПЛЯР»

||| РАСПРОСТРАНЕНИЕ
||| ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ
||| ВОЛН

ИЗДАНИЕ АКАДЕМИИ
1973

ВОЕННАЯ ИНЖЕНЕРНАЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКАЯ
ОРДЕНА ОТЕЧЕСТВЕННОЙ ВОЙНЫ
АКАДЕМИЯ ПРОТИВОВОЗДУШНОЙ ОБОРОНЫ
имени Маршала Советского Союза ГОВОРОВА Л. А.

Ф. Б. ЧЕРНЫЙ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ
ВОЛН

КУРС ЛЕКЦИЙ

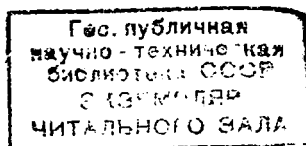
ИЗДАНИЕ АКАДЕМИИ
1 9 7 3

Ф. Б. Черный. Распространение электромагнитных волн.

Настоящее учебное пособие представляет собой курс лекций по распространению электромагнитных волн, занимающих спектр от диапазона ультракоротких радиоволн до оптических волн включительно.

В отличие от курса распространения радиоволн в данном курсе значительно большее внимание уделено методам, адекватным достаточно коротким электромагнитным волнам, и с большей полнотой рассмотрены существенные для указанного спектра явления рефракции и рассеяния электромагнитных волн.

ДН
14977



73x-9009

ЛЕКЦИЯ I

ВВЕДЕНИЕ

В данных лекциях рассматривается так называемое свободное распространение электромагнитных волн, не связанное с какими-либо искусственными устройствами, канализирующими электромагнитную энергию (фидеры, волноводы и т. д.). Свободное распространение электромагнитных волн происходит в атмосфере, космосе. Условия распространения в каждой из этих сред различны, причем они в сильной степени зависят от длины волн.

При изучении свободного распространения электромагнитных волн в атмосфере ее принято делить на три слоя: тропосферу, стратосферу (эти два слоя называют еще нейтросферой) и ионосферу.

Тропосфера — самый нижний слой атмосферы, простирающийся в среднем до высот 10—12 км. Условия распространения в тропосфере наиболее сильно сказываются в диапазонах коротких волн.

Стратосфера простирается в пределах высот от 10—12 км до 60 км (примерно).

Ионосфера — самый верхний ионизированный слой атмосферы, расположенный над стратосферой. Верхняя граница ионосферы, где атмосфера плавно переходит в межпланетный газ, по новейшим спутниковым и ракетным измерениям проходит на высотах 15 000—20 000 км.

Условия распространения в ионосфере существенно сказываются в диапазонах радиоволн и почти не сказываются в диапазонах оптических и более коротких электромагнитных волн.

Процесс свободного распространения электромагнитных волн можно идеализировать. При этом аппаратом для его изучения является система уравнений Максвелла, в которых источники поля — плотности токов и зарядов \mathbf{J} и ρ — всегда считаются заданными, а искомыми величинами являются векторы электромагнитного поля — напряженности поля \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Зависимость \mathbf{J} и ρ и соответственно \mathbf{E} , \mathbf{H} от времени считается гармонической, т. е. эта зависимость описывается множителем $e^{i\omega t}$.

РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЕКТОРА ГЕРЦА

1. Сведение уравнений электромагнитного поля к волновому уравнению.

2. Общее решение волнового уравнения.

1. Сведение системы уравнений электромагнитного поля к волновому уравнению

Существует определенная область пространства, которая является существенной для распространения электромагнитных волн. Эта область находится вблизи линии визирования излучатель—приемник; в оптике и часто в радиотехнике ее называют лучом.

Наша цель — установить наличие этой области и определить ее форму и размеры. Для этого рассмотрим процесс распространения электромагнитных волн в свободном пространстве.

Свободным пространством (вакуумом) называют идеализированную однородную безграничную среду с электрическими параметрами

$$\epsilon_a = \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \frac{\Phi}{\text{м}};$$

$$\mu_a = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma}{\text{м}};$$

$$\sigma = 0.$$

Для этой среды уравнения Максвелла записываются следующим образом:

$$\text{I. } \operatorname{rot} \mathbf{E} = -j\omega\mu_a \mathbf{H};$$

$$\text{II. } \operatorname{rot} \mathbf{H} = j\omega\epsilon_a \mathbf{E} + \mathbf{J};$$

$$\text{III. } \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_a};$$

$$\text{IV. } \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Задача состоит в том, чтобы по заданному распределению плотности тока \mathbf{J} найти векторы напряженностей электромагнитного поля \mathbf{E} и \mathbf{H} в произвольной точке пространства.

Задав распределение \mathbf{J} , мы тем самым принимаем в качестве исходного уравнение непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + j\omega\rho = 0.$$

В этом случае уравнение III оказывается следствием уравнения II и уравнения непрерывности и решение поставленной задачи сводится непосредственно к решению системы уравнений Максвелла I, II, IV. Для решения этой системы вводят векторный и скалярный потенциалы \mathbf{A} и φ , связанные с векторами \mathbf{H} и \mathbf{E} соотношениями

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \mathbf{A};$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi,$$

которыми сразу удовлетворяются уравнения IV и I.

Однако имеется возможность функции \mathbf{A} и φ выразить через одну векторную функцию — вектор Герца $\mathbf{\Pi}$:

$$\mathbf{A} = \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} = j \omega \mu_a \varepsilon_a \mathbf{\Pi};$$

$$\varphi = -\operatorname{div} \mathbf{\Pi}.$$

Тогда получим

$$\mathbf{H} = j \omega \varepsilon_a \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}; \quad (1.1)$$

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi} + k^2 \mathbf{\Pi}, \quad (1.2)$$

где

$$k = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a}$$

постоянная распространения или волновое число.

Подставив выражения (1.1) и (1.2) в уравнение II, получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{\Pi} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi} + k^2 \mathbf{\Pi} + \frac{\mathbf{J}}{j \omega \varepsilon_a}. \quad (1.3)$$

Воспользуемся известным из векторного анализа тождеством

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{\Pi} = x^0 \nabla^2 \Pi_x + y^0 \nabla^2 \Pi_y + z^0 \nabla^2 \Pi_z = \nabla^2 \mathbf{\Pi},$$

где x^0 , y^0 , z^0 — единичные координатные векторы прямоугольной системы координат;

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ — оператор Лапласа,}$$

и вместо (1.3) найдем

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi} + k^2 \mathbf{\Pi} = -\frac{\mathbf{J}}{j \omega \varepsilon_a} \quad (1.4)$$

или

$$\nabla^2 \Pi_x + k^2 \Pi_x = -\frac{J_x}{j \omega \varepsilon_a}; \quad (1.4a)$$

$$\nabla^2 \Pi_y + k^2 \Pi_y = -\frac{J_y}{j\omega\epsilon_a}; \quad (1.4б)$$

$$\nabla^2 \Pi_z + k^2 \Pi_z = -\frac{J_z}{j\omega\epsilon_a}. \quad (1.4в)$$

Следовательно, задачу об определении поля векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} мы свели к задаче о решении волнового уравнения (1.4) для вектора Герца Π .

2. Общее решение волнового уравнения для вектора Герца

Воспользуемся вторым тождеством Грина.

Это тождество формулируется следующим образом. Пусть в некоторой области V , ограниченной замкнутой поверхностью S (рис. 1.1), заданы две непрерывные функции координат $\psi(x, y, z)$ и $\varphi(x, y, z)$, которые внутри области, включая границу, имеют непрерывные частные производные 1 и 2-го порядков. Тогда имеет место тождество

$$\int_V (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) dV = \int_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS,$$

где \mathbf{n} — внешняя к области нормаль к поверхности S .

Заметим, что если функции ψ и φ удовлетворяют волновому уравнению

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0, \quad \nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0, \quad (1.5)$$

то согласно тождеству Грина имеет место равенство

$$\int_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS = 0. \quad (1.6)$$

Формулируя задачу о нахождении решения волнового уравнения для вектора Герца, мы должны различать два случая.

1. Плотность тока $J \neq 0$ в области V и вектор Герца Π требуется определить внутри этой же области (точка наблюдения M_1 (рис. 1.2)).

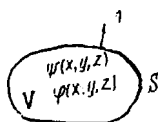


Рис. 1.1

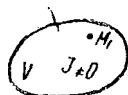


Рис. 1.2

2. Плотность тока $J \neq 0$ в области V и вектор Герца Π требуется определить вне этой области (точка наблюдения M_2 (рис. 1.2)).

Первый случай — более общий, второй — частный случай первого. Поэтому начнем с первого случая.

Применим к какой-либо составляющей вектора Π , например Π_x , тождество Грина, положив $\varphi = \Pi_x$. В качестве функции φ , которая является вспомогательной, возьмем функцию

$$\varphi = \frac{e^{-ikr}}{r},$$

где

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

расстояние от текущей точки внутри объема V и на ее границе (координаты ξ, η, ζ (рис. 1.3)) до фиксированной точки наблюдения M (координаты x, y, z на рис. 1.3)). Однако здесь следует учесть, что при $\xi = x, \eta = y, \zeta = z$, т. е. при $r = 0$, функция φ обращается в бесконечность и, следовательно, не удовлетворяет условию применимости тождества Грина. Поэтому необходимо точку наблюдения M_1 исключить из области V , проведя небольшую сферу радиуса a с центром в этой точке (рис. 1.4).



Рис. 1.3

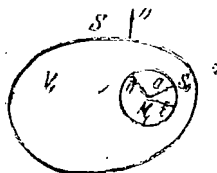


Рис. 1.4

В результате тождество Грина будет применено к области V_1 , ограниченной двумя поверхностями S и S_0 (рис. 1.4). При этом следует учесть, что функция φ удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0.$$

Смысл функции φ : выражение

$$\varphi e^{j\omega t} = \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{r}$$

описывает расходящуюся сферическую волну с амплитудой, изменяющейся обратно пропорционально расстоянию r от источника, находящегося в точке с координатами ξ, η, ζ . Так как согласно (1.4, a)

$$\Pi_x \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \Pi_x = \Pi_x (-k^2 \varphi) - \varphi \left(-k^2 \Pi_x - \frac{J_x}{j\omega \epsilon_a} \right) = \varphi \frac{J_x}{j\omega \epsilon_a},$$

то в результате тождество Грина примет вид

$$\frac{1}{j\omega \epsilon_a} \int_{V_1} J_x \varphi dV = \int_S \left(\Pi_x \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Pi_x}{\partial n} \right) dS + \int_{S_0} \left(\Pi_x \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Pi_x}{\partial n} \right) dS.$$

Вычислим интеграл по поверхности сферы S_0 , устремляя радиус сферы к нулю.

Поскольку

$$\varphi|_{r=a} = \frac{e^{-jka}}{a}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} = jk \frac{e^{-jka}}{a} + \frac{e^{-jka}}{a^2},$$

то, применяя теорему о среднем, получаем

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{S_0} \left(\Pi_x \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Pi_x}{\partial n} \right) dS = \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \left[\Pi_{xcp} \left(\frac{e^{-jka}}{a} jk + \frac{e^{-jka}}{a^2} \right) - \frac{e^{-jka}}{a} \left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial n} \right)_{cp} \right] 4\pi a^2 \right\} = 4\pi \Pi_x(M_1).$$

Таким образом, находим

$$\Pi_x(M_1) = \frac{1}{j4\pi\omega\varepsilon_a} \int_V J_x \varphi dV - \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\Pi_x \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Pi_x}{\partial n} \right) dS.$$

Аналогичные равенства можно получить и для составляющих Π_y и Π_z . Умножая правые и левые части этих равенств на соответствующие единичные координатные векторы и складывая левые и правые части равенства, находим

$$\Pi(M_1) = \frac{1}{j4\pi\omega\varepsilon_a} \int_V \mathbf{J} \frac{e^{-jkr}}{r} dV - \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\Pi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Pi}{\partial n} \right) dS. \quad (1.7)$$

Это и есть искомое общее решение волнового уравнения, уравнения (1.4). Аналогично решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка оно содержит заданные на границе области значения самой искомой функции и ее первых частных производных.

Найдем теперь решение волнового уравнения для второго случая (точка наблюдения M_2 (рис. 1.2)). Этот случай нетрудно свести к рассмотренному. Для этого проведем воображаемую замкнутую

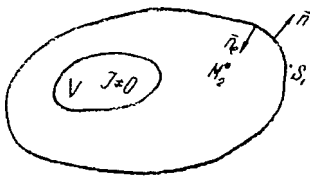


Рис. 1.5

поверхность S_1 , охватывающую точку наблюдения M_2 (рис. 1.5). Тогда согласно (1.7) можем написать

$$\Pi(M_2) = \frac{1}{j4\pi\omega\varepsilon_a} \int_V \mathbf{J} \frac{e^{-jkr}}{r} dV - \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left(\Pi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Pi}{\partial n} \right) dS.$$

Однако здесь интеграл по поверхности S_1 равен нулю. Действительно, применяя тождество Грина ко всему пространству вне поверхности S_1 в силу (1.5) и (1.6), получаем

$$\int_{S_1} \left(\Pi \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} - \varphi \frac{\partial \Pi}{\partial n_1} \right) dS = 0,$$

где \mathbf{n}_1 — внутренняя нормаль к поверхности S_1 (рис. 1.5). А так как

$$\int_{S_1} \left(\Pi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Pi}{\partial n} \right) dS = - \int_{S_1} \left(\Pi \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} - \varphi \frac{\partial \Pi}{\partial n_1} \right) dS,$$

то, таким образом, во втором случае имеем

$$\Pi(M_2) = \frac{1}{j4\pi\omega\epsilon_a} \int_V \mathbf{J} \frac{e^{-lkr}}{r} dV. \quad (1.8)$$

Физический смысл данного решения наиболее удобно установить из анализа вектора $\Pi(M_2)$ для простейшего излучателя радиоволн — элементарного вибратора.

Поскольку ток I в любом сечении s элементарного вибратора одинаков и объем его $\Delta V = sl$, то согласно (1.8) вектор Герца для элементарного вибратора равен

$$\Pi(M) = \frac{Il}{j4\pi\omega\epsilon_a} \frac{e^{l(\omega t - kr)}}{r}. \quad (1.9)$$

Отсюда видно, что решение волнового уравнения в данном случае представляет собой расходящуюся от элементарного вибратора сферическую волну.

Соответственно решение волнового уравнения в случае общего вида излучателя электромагнитных волн в силу применимости принципа суперпозиции представляет собой, по крайней мере, на больших расстояниях от излучателя тоже расходящуюся сферическую волну.

ЛЕКЦИЯ 2

ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА—ФРЕНЕЛЯ

1. Математическая формулировка принципа Гюйгенса—Френеля; формула Кирхгофа.
2. Гюйгенсовские вторичные источники электромагнитных волн.

1. Математическая формулировка принципа Гюйгенса—Френеля. Формула Кирхгофа

В данной лекции проведем обоснование весьма важного физического принципа, используемого в теории волновых процессов вообще и в теории распространения электромагнитных волн в частности. В дальнейшем мы рассмотрим те явления распространения, которые наиболее просто истолковываются с помощью этого принципа. Рассмотрим область V , ограниченную замкнутыми поверхностями S и S_1 , внутри которой находится точка наблюдения M (рис. 2.1).

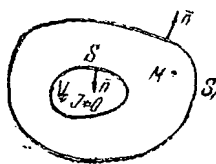


Рис. 2.1

Предположим, что токи распределены только внутри области V_0 , ограниченной поверхностью S . Применяя к этому случаю общую формулу

$$\Pi(M) = \frac{1}{j4\pi\omega\epsilon_a} \int_V \mathbf{J} \frac{e^{-jkr}}{r} dV - \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\Pi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Pi}{\partial n} \right) dS,$$

можем написать

$$\Pi(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left(\Pi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Pi}{\partial n} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left(\Pi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Pi}{\partial n} \right) dS.$$

Пусть также и вне поверхности S_1 всюду $J=0$, т. е. токов во всем пространстве вне области V_0 нет. Мы, таким образом, возвращаемся к случаю, рассмотренному в конце предыдущей лекции и одновременно получаем, что поверхностный интеграл по S_1 равен нулю:

Отсюда следует, что в данном случае вектор Герца можно представить двумя выражениями

$$\mathbf{П}(M) = \begin{cases} \frac{1}{j4\pi\omega\epsilon_0} \int_{V_0} \mathbf{J} \frac{e^{-jkr}}{r} dV; & (2.1a) \\ -\frac{1}{4\pi} \int_S \left(\mathbf{П} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\mathbf{П}}{\partial n} \right) dS, & (2.1б) \end{cases}$$

где S — произвольная замкнутая поверхность, охватывающая область V_0 , занимаемую токами (рис. 2.2).

Из формул (2.1) следует, что поле в точке наблюдения может рассчитываться двумя способами: во-первых, оно может вычисляться по заданным первичным источникам непосредственно (формула 2.1a); во-вторых, оно может вычисляться по вторичным источникам, непрерывно распределенным по замкнутой поверхности, охватывающей первичные источники, но не охватывающей (одновременно) точку наблюдения (формула (2.1б)).

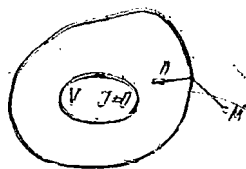


Рис. 2.2

Равенство (2.1б), т. е.

$$\mathbf{П}(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left(\mathbf{П} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\mathbf{П}}{\partial n} \right) dS, \quad (2.2)$$

совместно с рис. 2.2 составляет математическую формулировку принципа Гюйгенса—Френеля.

Мы видим, что в принципе Гюйгенса—Френеля вводится новое понятие — вторичный источник, или иначе гюйгенсовский источник. Это понятие впервые было введено Гюйгенсом во второй половине XVII века. Гюйгенс ставил перед собою задачу объяснить прямолинейное распространение света, исходя из волновой теории. Для этой цели он сформулировал принцип, названный впоследствии его именем.

Сущность принципа Гюйгенса составляет допущение возможности замены волновой поверхности множеством вторичных источников сферических волн.

Согласно принципу Гюйгенса каждая точка волновой поверхности может рассматриваться как источник вторичных сферических волн. Огибающая вторичных сферических волн и является волновым фронтом.

Френель обобщил принцип Гюйгенса. Он предположил, что вторичные источники существуют на любой замкнутой поверхности, охватывающей первичный источник, и сформулировал выражение для амплитуд вторичных волн.

Математическая формулировка принципа Гюйгенса—Френеля (формула (2.22)) дана Кирхгофом. Поэтому соотношение (2.2) называется формулой Кирхгофа.

2. Гюйгенсовские вторичные источники электромагнитных волн

Гюйгенсовские источники — понятие общее для любых волновых процессов.

Однако здесь представляет интерес выяснить, что собой представляет гюйгенсовский источник в случае электромагнитных волн. Исходим из уравнений Максвелла

$$I. \operatorname{rot} \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H};$$

$$II. \operatorname{rot} \mathbf{H} = j\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}.$$

Из этих двух уравнений, учитывая, что $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, нетрудно получить уравнения

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0;$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0.$$

Решая эти уравнения с помощью тождества Грина, аналогично тому, как это было выполнено в случае волнового уравнения для вектора Герца \mathbf{P} , нетрудно найти

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(M) &= -\frac{1}{4\pi} \int_S \left(\mathbf{E} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n} \right) dS; \\ \mathbf{H}(M) &= -\frac{1}{4\pi} \int_S \left(\mathbf{H} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial n} \right) dS. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Пусть точка наблюдения находится вне замкнутой поверхности S , охватывающей первичные источники (рис. 2.3).

Предположим, что точка наблюдения M перемещается и, перейдя поверхность S , оказывается внутри этой поверхности (точка M' на рис. 2.3). Тогда поверхностные интегралы в (2.3) оказываются равными нулю, т. е. $\mathbf{E}(M')$ и $\mathbf{H}(M')$, определяемые формулами (2.3), равна нулю. Следовательно, при переходе через поверхность S векторы поля скачком принимают нулевое значение. Соответственно скачком меняются и касательные к поверхности S , составляющие векторов \mathbf{H} и \mathbf{E} , т. е. величины

$$[\mathbf{nE}] \text{ и } [\mathbf{nH}].$$

Из курса ТЭМП известно, что на границе диэлектрик—проводник скачком меняется тангенциальная составляющая магнитного поля $[\mathbf{n}, \mathbf{H}]$ и нормальная составляющая электрического поля $\mathbf{n}_t \mathbf{E}$

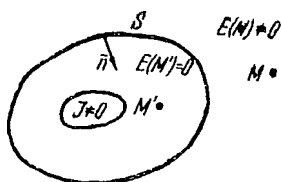


Рис. 2.3

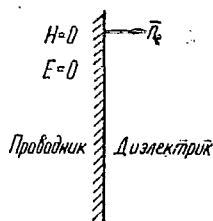


Рис. 2.4

(рис. 2.4) и эти скачки обуславливают появление поверхностного тока

$$\mathbf{J}_S = [\mathbf{n}_t \mathbf{H}]$$

и поверхностного заряда

$$\rho_S = \varepsilon_a (\mathbf{n}_t \mathbf{E}).$$

Отсюда следует, что скачки тангенциальной составляющей магнитного поля и нормальной составляющей электрического поля на поверхности S эквивалентны появлению поверхностных электрических плотностей тока и заряда

$$\left. \begin{aligned} J_{Se} &= -[\mathbf{nH}]; \\ \rho_{Se} &= -\varepsilon_a (\mathbf{nE}). \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Аналогично скачки на поверхности S тангенциальной составляющей вектора электрического поля и нормальной составляющей вектора магнитного поля эквивалентны появлению поверхностных «магнитных» плотностей тока и заряда:

$$\left. \begin{aligned} J_{Sm} &= [\mathbf{nE}]; \\ \rho_{Sm} &= -\mu_a (\mathbf{nH}); \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Если считать эти распределения плотностей токов и зарядов по поверхности S заданными и прямо вычислить электромагнитное поле, создаваемое этими распределениями вне поверхности S в точке наблюдения M , то получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(M) &= -\frac{1}{4\pi} \int_S \{ (\mathbf{nE}) \text{grad } \varphi - j\omega\mu_a [\mathbf{nH}] \varphi + [(\mathbf{nE}) \text{grad } \varphi] \} dS; \\ \mathbf{H}(M) &= -\frac{1}{4\pi} \int_S \{ (\mathbf{nH}) \text{grad } \varphi + j\omega\varepsilon_a [\mathbf{nE}] \varphi + [(\mathbf{nH}) \text{grad } \varphi] \} dS. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Можно показать, однако на этом останавливаться не будем, что интегралы справа в последних равенствах в точности преобразуются в поверхностные интегралы формул Кирхгофа (2.3).

Таким образом, гюйгенсовскими вторичными источниками электромагнитных волн являются выражения (2.4) и (2.5).

ЛЕКЦИЯ 3

ОБЛАСТЬ ПРОСТРАНСТВА, СУЩЕСТВЕННАЯ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

1. Упрощение формулы Кирхгофа.
2. Зоны Френеля.
3. Эллипсоид, существенный для распространения электромагнитных волн.

1. Упрощение формулы Кирхгофа

Согласно принципу Гюйгенса—Френеля замкнутую поверхность S можно провести так, чтобы она охватывала первичный источник, но не охватывала точку наблюдения. Ее можно провести также таким образом, чтобы она, наоборот, охватывала точку наблюдения, но не охватывала источник.

Полагая, что замкнутая поверхность S охватывает источник и что последний представляет собой элементарный вибратор, для которого вектор Герца равен

$$\mathbf{P} = \mathbf{C} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho},$$

где

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{I}}{j4\pi\omega\epsilon_a},$$

произведем упрощение формулы Кирхгофа. Это упрощение проведем в два этапа.

В результате первого этапа упрощения замкнутая поверхность преобразуется в безграничную плоскость, а в результате второго этапа — подынтегральное выражение будет содержать только одно слагаемое.

Переходим к первому этапу. Проводим замкнутую поверхность, состоящую из плоскости S_0 и полусферы S_∞ с большим радиусом r_∞ (рис. 3.1). Согласно формуле (2.2) можем записать

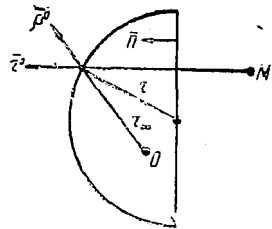


Рис. 3.1

$$\Pi(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left(\Pi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Pi}{\partial n} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty} \left(\Pi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Pi}{\partial n} \right) dS.$$

Покажем, что интеграл по поверхности S_∞ стремится к нулю при $r_\infty \rightarrow \infty$. Получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}^0) = -jk \frac{e^{-jkr}}{r} \left(1 + \frac{1}{jkr} \right) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}^0);$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial n} = -Cjk \frac{e^{-jk\rho}}{\rho} \left(1 + \frac{1}{jk\rho} \right) \cos(\mathbf{n}, \rho^0).$$

Предположим, что $kr \gg 1$ и $k\rho \gg 1$. Тогда можно считать, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \approx -jk \frac{e^{-jkr}}{r} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}^0);$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial n} \approx -jkC \frac{e^{-jk\rho}}{\rho} \cos(\mathbf{n}, \rho^0).$$

Подынтегральное выражение во втором интеграле примет вид

$$\Pi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Pi}{\partial n} = -jkC \frac{e^{-jk(\rho+r)}}{\rho r} [\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}^0) - \cos(\mathbf{n}, \rho^0)].$$

При устремлении радиуса полусферы r_∞ к бесконечности

$$\lim_{r_\infty \rightarrow \infty} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}^0) = -1,$$

$$\lim_{r_\infty \rightarrow \infty} \cos(\mathbf{n}, \rho^0) = -1$$

и, следовательно, подынтегральное выражение будет равно нулю и мы получим

$$\Pi(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left(\Pi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Pi}{\partial n} \right) dS. \quad (3.1)$$

На втором этапе упрощения мы избавимся от второго слагаемого в подынтегральном выражении (3.1). При этом воспользуемся имеющейся некоторой свободой выбора вспомогательной функции φ . До сих пор от функции φ требовалось лишь, чтобы она удовлетворяла волновому уравнению $\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0$ и представляла собой решение этого уравнения, соответствующее расходящимся волнам.

Можно, однако, подобрать такую функцию φ , которая удовлетворяла бы этим требованиям и вместе с тем на плоскости S_0 удовлетворяла условию

$$\varphi = 0$$

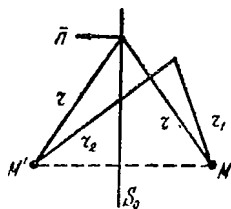
либо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

Примем первое условие, т. е. $\varphi|_{S_0} = 0$. Этому условию удовлетворяет функция

$$\varphi = \frac{e^{-jkr_1}}{r_1} - \frac{e^{-jkr_2}}{r_2}, \quad (3.2)$$

где r_1 — расстояние от точки наблюдения M до произвольной точки области, где расположена точка наблюдения, r_2 — расстояние от зеркального изображения точки наблюдения, т. е. точки M' до той же произвольной точки (рис. 3.2).



Легко видеть, что на плоскости S_0

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 2 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right),$$

так как на этой плоскости

$$r_1 = r_2 = r.$$

Таким образом, получаем

Рис. 3.2

$$\Pi(M) = -\frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \Pi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) dS. \quad (3.3)$$

Здесь подставим

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}^0),$$

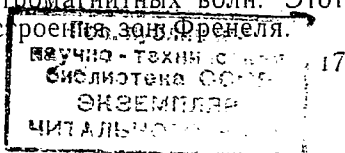
причем будем считать, что $kr \gg 1$, и окончательно найдем

$$\Pi(M) = \frac{j}{\lambda} C \int_{S_0} \frac{e^{-jk(\rho+r)}}{\rho r} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}^0) dS, \quad (3.4)$$

где учтено, что $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Эта формула является исходной для дальнейших выкладок.

2. Зоны Френеля

Анализ формулы (3.4) позволяет установить наличие области, существенной для распространения электромагнитных волн. Этот анализ удобно выполнить с помощью построения зон Френеля.



Как следует из (3.4), каждый элемент плоскости, которую помещаем перпендикулярно линии наблюдения OM (рис. 3.3), создает в точке наблюдения колебание

$$dS \frac{1}{\lambda} |C| \frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}^0)}{\rho r} e^{-ik(\rho+r)} \cdot e^{j\omega t},$$

амплитуда которого

$$dS \frac{1}{\lambda} |C| \frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}^0)}{\rho r}, \quad (3.5)$$

а фаза

$$\psi = k(\rho + r).$$

Произведем геометрическое суммирование колебаний, создаваемых различными элементами dS плоскости S_0 . Для этой цели раз-

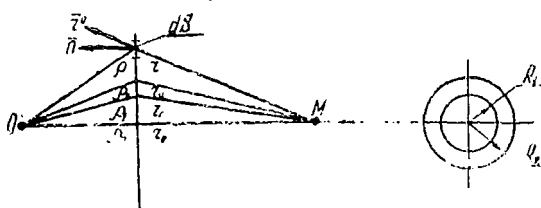


Рис. 3.3

делим плоскость S_0 на зоны Френеля (рис. 3.3), определяемые следующими равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 + r_1 - (\rho_0 + r_0) &= \frac{\lambda}{2}; \\ \rho_2 + r_2 - (\rho_0 + r_0) &= 2 \frac{\lambda}{2}; \\ \dots &\dots \dots \\ \rho_n + r_n - (\rho_0 + r_0) &= n \frac{\lambda}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Согласно этим равенствам, вторичные источники, расположенные на границах двух соседних зон, излучают волны, приходящие в точку наблюдения M в противофазе.

Производя сложение колебаний вторичных источников, расположенных в пределах первой зоны, получим результирующее колебание, которое можно представить вектором \mathbf{B}_1 . Аналогично для результирующего колебания вторичных источников второй зоны Френеля получим вектор \mathbf{B}_2 , который в силу (3.6) параллелен вектору \mathbf{B}_1 , но противоположно направлен, и, как следует из (3.5), несколько меньше его по длине. Складывая таким образом колебания

вторичных источников всех зон Френеля, геометрическое суммирование сводим к алгебраическому и получаем ряд

$$B = B_1 - B_2 + B_3 - B_4 + B_5. \quad (3.7)$$

Это — знакопеременный сходящийся ряд. Если, кроме неравенства $kr_0 \gg 1$, также положить, что и $k\rho_0 \gg 1$, то, как видно из представления ряда

$$B = \frac{B_1}{2} + \left(\frac{B_1}{2} - B_2 + \frac{B_3}{2} \right) + \left(\frac{B_3}{2} - B_4 + \frac{B_5}{2} \right) + \dots,$$

сумма этого ряда будет равна

$$B = \frac{B_1}{2}.$$

Существенно, что ряд (3.7) сходящийся. А раз это так, то основной вклад в его сумму вносят только первые несколько членов. Отсюда следует, что наиболее существенную роль играют только первые несколько зон Френеля.

Найдем размеры этих зон.

Из рис. 3.3 видно, что

$$\rho_1 = \sqrt{\rho_0^2 + R_1^2} = \rho_0 \sqrt{1 + \frac{R_1^2}{\rho_0^2}} \approx \rho_0 + \frac{R_1^2}{2\rho_0};$$

$$r_1 = \sqrt{r_0^2 + R_1^2} = r_0 \sqrt{1 + \frac{R_1^2}{r_0^2}} \approx r_0 + \frac{R_1^2}{2r_0},$$

где R_1 — радиус первой зоны Френеля.

Из первого же равенства (3.6)

$$\frac{R_1^2}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} \right) = \frac{\lambda}{2};$$

т. е.

$$R_1 = \sqrt{\frac{\lambda \rho_0 r_0}{\rho_0 + r_0}}.$$

Аналогичным образом для R_n — радиуса внешней окружности n -й зоны Френеля можем найти

$$R_n = \sqrt{\frac{n \lambda \rho_0 r_0}{\rho_0 + r_0}}. \quad (3.8)$$

Площади зон Френеля, как видно из последних двух формул, одинаковы и равны

$$a_0 = \pi R_1^2 = \pi (R_n^2 - R_{n-1}^2) = \frac{\pi \lambda \rho_0 r_0}{\rho_0 + r_0}.$$

3. Эллипсоид, существенный для распространения электромагнитных волн

Положение плоскости S_0 при определении зон Френеля было взято произвольным. Важно лишь, чтобы она была расположена между корреспондирующими пунктами OM перпендикулярно линии наблюдения и расстояния ρ_0 и r_0 удовлетворяли условию

$$k\rho_0 \gg 1, \quad kr_0 \gg 1.$$

Поэтому при фиксированных положениях O и M можно представить себе две плоскости S'_0 и S''_0 с зонами Френеля (рис. 3.4), для которых будем иметь равенство

$$\rho'_1 + r'_1 = \rho''_1 + r''_1 = D + \frac{\lambda}{2} = \text{const},$$

где D — расстояние между пунктами O и M . Отсюда можно сделать вывод, что геометрическое место точек окружностей первой зоны Френеля на всевозможных плоскостях образует часть поверхности эллипсоида вращения с фокусами в корреспондирующих пунктах OM .

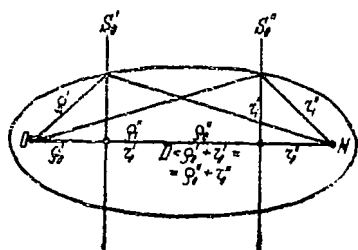


Рис. 3.4

Этот эллипсоид является первой пространственной зоной Френеля. Аналогичным образом вводятся понятия второй, третьей и т. п. пространственных зон Френеля. Очевидно, что область пространства, существенная для электромагнитных волн, представляет собой эллипсоид вращения с фокусами в корреспондирующих пунктах O и M .

Размер сечения этого эллипсоида пропорционален $\sqrt{\lambda}$. При $\lambda \rightarrow 0$ все эллипсоиды вырождаются в линию, соединяющую источник и точку наблюдения. Отсюда появляется понятие луча и прямолинейное распространение света.

ЛЕКЦИЯ 4

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПОЛУБЕЗГРАНИЧНОМ ЭКРАНЕ

1. Постановка задачи и ее решение на основе построения зон Френеля.
2. Расчет дифракционного поля вблизи линии наблюдения.

1. Постановка задачи и ее решение на основе построения зон Френеля

Дифракция есть возмущение волны краем экрана. Полученные в предыдущей лекции результаты можно, в частности, применить к рассмотрению вопроса о дифракции радиоволн от края экрана.

Сделаем два предположения (предположения Кирхгофа):

— поле в части плоскости, дополняющей плоскость экрана, совпадает с невозмущенным полем, которое имело бы место при отсутствии экрана;

— поле на теневой стороне экрана равно нулю.

Изучим дифракцию электромагнитных волн на полубезграничном экране. Этот экран можно представить себе в виде полубезграничного, очень тонкого металлического листа, расположенного на пути распространения электромагнитных волн.

Введем прямоугольную систему координат с координатной плоскостью yz , совпадающей с плоскостью экрана и осью x , совпадающей с линией наблюдения OM .

Рассмотрим две ситуации.

а) Край экрана расположен ниже оси y (рис. 4.1).

Сначала пусть край экрана совпадает с осью y , а затем пусть он перемещается вниз. Задача — выяснить, как при этом изменяется поле в точке наблюдения. Построим зоны Френеля в плоскости экрана (рис. 4.1). Если $z_0=0$, то половина площади всех зон перекрыта и поле в точке наблюдения создается вторичными

источниками, расположенными на неперекрытой половине зон Френеля. Когда открыты все зоны, то $B = \frac{B_1}{2}$. Следовательно, в данном случае при $z_0 = 0$ будем иметь $B = \frac{B_1}{4}$.

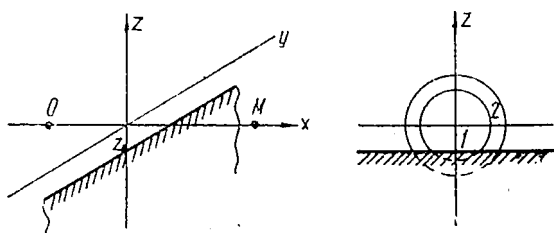


Рис. 4.1

При перемещении экрана вниз сначала открывается полностью первая зона, остальные зоны открыты не полностью. Следовательно, при этом перемещении поле будет расти. При дальнейшем перемещении края экрана вниз открывается полностью также и вторая зона, которая компенсирует действие первой зоны. Однако эта компенсация не полная, поскольку открыта также и третья зона, но открыта не полностью. Следовательно, при этом перемещении поле будет убывать. Итак, при перемещении экрана вниз поле будет осциллировать (левая часть рис. 4.2). Когда открыто достаточно большое число зон, суммарное поле будет равно $\frac{B_1}{2}$.

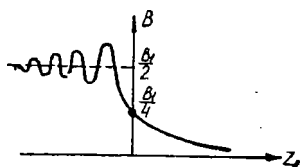


Рис. 4.2

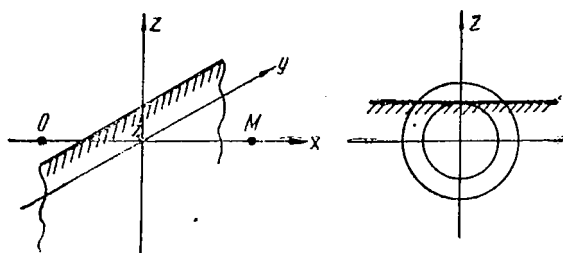


Рис. 4.3

б) Край экрана расположен выше оси y (рис. 4.3).

В этой ситуации поле по мере перемещения экрана вверх будет монотонно убывать. Докажем это утверждение.

Как видно из рис. 4.4, *a*, все зоны Френеля либо перекрыты полностью, либо перекрыты частично. Пусть n_0 — число полностью перекрытых зон. Ясно, что это число определяется величиной z_0 удаления края экрана от линии наблюдения. Эти n_0 зон (n_0 — обязательно целое число) не вносят никакого вклада в поле в точке наблюдения *M*.

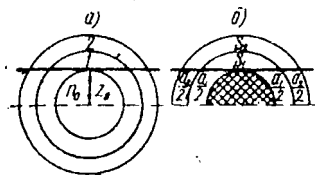


Рис. 4.4

Поэтому имеет смысл нумерацию зон начинать со следующей после n_0 частично открытой зоны. Открытая часть этой зоны имеет форму сегмента, открытые части других зон Френеля образуют части колец, ограниченных краем экрана (рис. 4.4, *a*). Согласно формуле (3.4) вклад вторичных источников, расположенных в пределах каждой зоны, будет пропорционален площади S_i открытой части и величине $\frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_i^0)}{\rho_i r_i}$, где i — номер зоны (при новой нумерации).

Что касается величины S_i , то, как видно из (4.4, *б*), она будет равна площади $\frac{a_0}{2}$ ползоны Френеля (эта площадь одинакова для всех зон) минус площадь a_i той ее части, которая перекрыта экраном. Таким образом, суммарный вклад в поле в точке *M* всех зон Френеля должен представляться знакопеременным рядом

$$B = \frac{|C|}{\lambda} \left[\left(\frac{a_0}{2} - a_1 \right) \frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1^0)}{\rho_1 r_1} - \left(\frac{a_0}{2} - a_2 \right) \frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_2^0)}{\rho_2 r_2} + \dots \right].$$

Это знакопеременный ряд аналогичный ряду (3.7) и поэтому сходится. Его сумма равна

$$B = \frac{|C|}{2\lambda} \left(\frac{a_0}{2} - a_1 \right) \frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1^0)}{\rho_1 r_1}. \quad (4.1)$$

Величина B по мере поднятия экрана вверх, поскольку a_1 , ρ_1 , r_1 растут, убывает. В результате в ситуации б) поле за экраном убывает монотонно.

Таким образом, искомое решение представляется кривой, изображенной на рис. 4.2.

2. Расчет дифракционного поля вблизи линий наблюдения

Когда линия наблюдения *OM* проходит вблизи края экрана, существенная область частично или полностью пересекается плоскостью экрана (рис. 4.1 и 4.3) и интеграл в формуле

$$\Pi(M) = j \frac{C}{\lambda} \int_S \frac{e^{-ik(\rho+r)}}{\rho r} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}^0) dS$$

поддается более точному количественному анализу.

Очевидно, что в пределах существенной области интегрирования, т. е. в пределах первых нескольких зон Френеля можно положить

$$\frac{1}{\rho r} \approx \frac{1}{\rho_0 r_0}; \quad \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}^0) \approx 1.$$

Что касается фазы $\psi = k(\rho + r)$, то здесь нельзя считать $\rho = \rho_0$ и $r = r_0$, поскольку при $kr_0 \gg 1$ и $k\rho_0 \gg 1$ эта фаза меняется значительно при малых изменениях ρ и r . Однако здесь можно принять

$$\begin{aligned} \rho + r &= \sqrt{\rho_0^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{r_0^2 + y^2 + z^2} = \\ &= \rho_0 \sqrt{1 + \frac{y^2 + z^2}{\rho_0^2}} + r_0 \sqrt{1 + \frac{y^2 + z^2}{r_0^2}} \approx \rho_0 + \frac{y^2 + z^2}{2\rho_0} + \\ &\quad + r_0 + \frac{y^2 + z^2}{2r_0}. \end{aligned}$$

Тогда

$$k(\rho + r) = k(\rho_0 + r_0) + \frac{\pi}{2} \frac{2y^2}{\lambda} \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} \right) + \frac{\pi}{2} \frac{2z^2}{\lambda} \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} \right).$$

Вводим новые переменные интегрирования

$$u = z \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} \right)}; \quad v = y \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} \right)};$$

$$dy = \frac{dv}{\sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} \right)}}; \quad dz = \frac{du}{\sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} \right)}};$$

$$dS = dydz = \frac{r_0 \rho_0 \lambda}{2(\rho_0 + r_0)} du dv.$$

Пределы интегрирования

$$-\infty \leq y \leq \infty;$$

$$z_0 \leq z \leq \infty.$$

Соответственно

$$-\infty \leq v \leq \infty;$$

$$u_0 \leq u \leq \infty.$$

В результате всех преобразований получаем

$$\Pi(M) = \frac{jC}{\lambda} \frac{e^{-ik(\rho_0 + r_0)}}{\rho_0 r_0} \int_{u_0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\pi}{2}v^2} e^{-i\frac{\pi}{2}u^2} \frac{\rho_0 r_0 \lambda}{2(\rho_0 + r_0)} dv du.$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\pi}{2}v^2} dv = \sqrt{\frac{2}{j}}$$

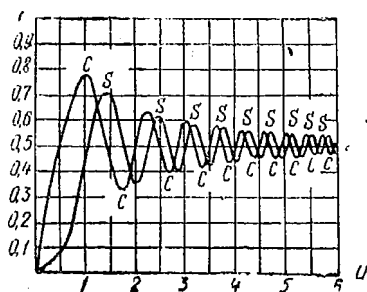


Рис. 4.5

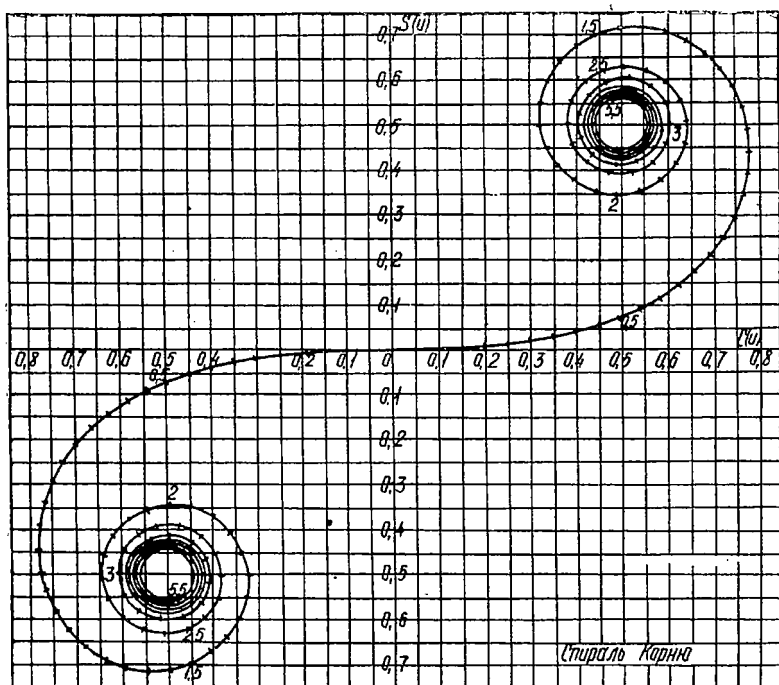


Рис. 4.6

то получаем

$$П(M) = C \sqrt{\frac{j}{2} \frac{e^{-jk(\rho_0+r_0)}}{\rho_0+r_0}} \int_{u_0}^{\infty} e^{-i\frac{\pi}{2}u^2} du.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \int_{u_0}^{\infty} e^{-i\frac{\pi}{2}u^2} du &= \int_{u_0}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2} u^2 du - j \int_{u_0}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2} u^2 du; \\ \int_{u_n}^{\infty} \dots du &= \int_0^{\infty} \dots du - \int_0^{u_0} \dots du. \\ \int_0^{\infty} \cos \frac{\pi}{2} u^2 du &= \int_0^{\infty} \sin \frac{\pi}{2} u^2 du = \frac{1}{2}, \\ \left. \begin{aligned} \int_0^{u_0} \cos \frac{\pi}{2} u^2 du &= C(u_0), \\ \int_0^{u_0} \sin \frac{\pi}{2} u^2 du &= S(u_0). \end{aligned} \right\} \text{интегралы Френеля (рис. 4.5)} \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение множитель экрана по формуле

$$\begin{aligned} F(u_0) &= \sqrt{\frac{j}{2}} \int_{u_0}^{\infty} e^{-i\frac{\pi}{2}u^2} du = |F(u_0)| e^{-j(\psi - \frac{\pi}{4})} = \\ &= \sqrt{\frac{j}{2}} [0,5 - C(u_0) - j(0,5 - S(u_0))]; \\ |F(u_0)| &= \sqrt{\frac{(0,5 - C(u_0))^2 + (0,5 - S(u_0))^2}{2}}; \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{0,5 - S(u_0)}{0,5 - C(u_0)}.$$

Смысл $F(u_0)$:

$$П(M) = П_0(M) F(u_0),$$

где $П_0(M)$ — величина вектора Герца, когда экрана нет. Множитель $F(u_0)$ можно найти по так называемой спирали Корню, изображенной на рис. 4.6, где по осям координат отложены $C(u_0)$ и $S(u_0)$. По самой

спирали откладывается координата u_0 . Длина отрезка, проведенного от фокуса спирали $u_0 = \infty$ до точки u_0 на спирали, деленная на $\sqrt{2}$, и есть модуль $|F(u_0)|$; график функции $|F(u_0)|$ показан на рис. 4.7. С помощью рис. 4.6 нетрудно найти и угол ψ .

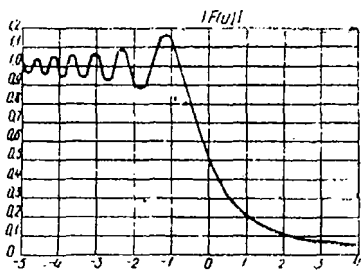


Рис. 4.7

ЛЕКЦИЯ 5

ДИФРАКЦИЯ НА ЭКРАНАХ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

1. Принцип Бабинне.
2. Дифракция Френеля и дифракция Фраунгофера.
3. Формулы для расчета фраунгоферовой дифракции.

1. Принцип Бабинне

При решении задач о дифракции на экранах конечных размеров очень часто используется принцип Бабинне, позволяющий получить сравнительно просто их приближенное решение.

Рассмотрим одновременно две задачи о дифракции электромагнитных волн. Принцип Бабинне позволяет по решению одной задачи почти без дополнительных выкладок сформулировать решение другой задачи.

В этих двух задачах рассматривается:

- 1) дифракция волн на экране с отверстием;
- 2) дифракция на экране, являющемся дополнительным к экрану с отверстием.

Дополнительными называются экраны, которые, будучи наложенными друг на друга, образуют сплошной неограниченный экран. Обе задачи иллюстрируются рис. 5.1, где в качестве первичного излучателя взят, как и прежде, элементарный вибратор.

В отношении задачи 1 можно высказать следующие соображения. Если бы экран был сплошным, то поля в точке M не было бы. Наличие отверстия вносит возмущение, в результате чего в точке M появляется поле.

Это поле возмущения называется полем, рассеянным отверстием. Поскольку при сплошном экране поле отсутствует, это поле рассеяния совпадает с полем дифракции.



Рис. 5.1

Пользуясь формулой (3.4), можем написать

$$P_{\text{диф}} = P_{\text{расс}} = P_1(M) = \frac{jC}{\lambda} \int_{S_1} \frac{e^{-jk(\rho+r)}}{\rho r} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}^0) dS, \quad (5.1)$$

где S_1 — плоскость в пределах отверстия.

Обратимся к задаче 2. Если бы не было экрана, поле в точке M_1 было бы таким же, как в свободном пространстве. Экран вносит возмущение, в результате чего появляется добавочное поле. Это поле возмущения есть поле, рассеянное экраном. Полное же поле, то есть поле дифракции, равно сумме полей первичного поля и поля рассеяния. Пользуясь той же формулой (3.4), можем написать

$$P_{\text{э диф}} = \frac{I}{j4\pi\omega\epsilon_a} \frac{e^{-jkr_1}}{r_1} + P_{\text{э расс}} = P_2(M) = \\ = \frac{jC}{\lambda} \int_{S_2} \frac{e^{-jk(\rho+r)}}{\rho r} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}^0) dS,$$

где

S_2 — плоскость, дополняющая экран (рис. 5.1);

r_1 — расстояние между точками O и M .

С другой стороны, согласно принципу Гюйгенса—Френеля

$$P_1(M) + P_2(M) = \frac{I}{j4\pi\omega\epsilon_a} \frac{e^{-jkr_1}}{r_1}$$

и, следовательно,

$$P_2(M) = \frac{I}{j4\pi\omega\epsilon_a} \frac{e^{-jkr_1}}{r_1} - P_1(M).$$

Сравнивая записанные выражения, находим

$$P_{\text{э расс}} = -P_{\text{о расс}}.$$

Последнее равенство и является принципом Бабиня, физический смысл которого следующий.

Поле, рассеянное экраном, одинаково по величине и противоположно по знаку с полем, рассеянным отверстием, в дополнительном экране. Следовательно, если известно дифракционное поле на отверстии, то можно найти дифракционное поле позади экрана.

2. Дифракция Френеля и дифракция Фраунгофера

Выясним смысл дифракции Френеля и дифракции Фраунгофера применительно к рассмотренным выше случаям дифракции на отверстии и экране (рис. 5.2).

Для упрощения предположим, что отверстие и экран круглые и что линия наблюдения проходит через центр отверстия (экрана) перпендикулярно плоскости экрана (рис. 5.2). Нам необходимо выяснить, как изменяется поле в точке наблюдения с изменением расстояния между пунктами O и M .

В случае дифракции на отверстии с увеличением расстояния число зон Френеля, укладывающихся в отверстие, изменяется, а именно уменьшается.

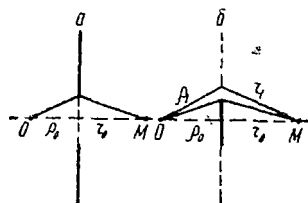


Рис. 5.2

Действительно радиус n -й зоны, определяемый равенством

$$R_n = \sqrt{\frac{n\lambda\rho_0 r_0}{\rho_0 + r_0}},$$

с увеличением ρ_0 и r_0 (рис. 5.2,а) увеличивается. Соответственно этому изменению поле в точке наблюдения будет осциллировать.

В случае дифракции на дополнительном экране зоны Френеля определяются соотношением

$$\rho_n^2 + r_n^2 - (\rho_0 + r_0)^2 = (n_0 + n) \frac{\lambda}{2}, \quad (5.2)$$

где n_0 — число перекрытых зон Френеля (не обязательно целое). Очевидно, что здесь нумерацию зон целесообразно вести с первой открытой зоны, т. е.

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

В этом случае амплитуда колебаний в точке наблюдения будет равна половине амплитуды суммы колебаний, создаваемых вторичными источниками, расположенными в первой зоне Френеля (рис. 5.2,б), определяемой равенством (5.1), т. е. эта амплитуда равна

$$B = \frac{B_1}{2} = \frac{|C|a_0 \cos(n, \mathbf{r}_1^0)}{2\lambda \rho_1 r_1}.$$

Таким образом получаем, что позади экрана поле всегда отлично от нуля и оно монотонно убывает с увеличением расстояния OM .

Следует отметить, что эффект появления света позади экрана впервые был предсказан Пуассоном и поэтому он называется эффектом Пуассона.

Рассмотренные здесь явления дифракции, при которых разности фаз вторичных источников зависят не только от их взаимного расположения, но и от расстояния точек O и M до плоскости экрана, относятся к дифракции Френеля. Перейдем к дифракции Фраунгофера.

Опираясь на принцип Бабине, мы можем здесь ограничиться лишь рассмотрением дифракции на отверстии. Сначала предположим, что линия наблюдения проходит через центр отверстия перпендикулярно плоскости экрана (рис. 5.3). Пусть расстояние OM настолько велико, что в отверстии укладывается лишь небольшая часть первой зоны Френеля. В этом случае вторичные источники, расположенные в отверстии, создадут в точке наблюдения почти синфазные колебания и лучи, соединяющие точки OM , можно считать параллельными (рис. 5.4).

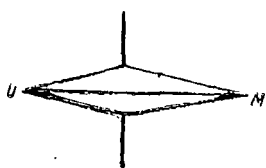


Рис. 5.3

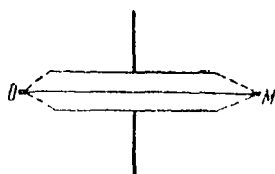


Рис. 5.4

В более общем случае, когда линия наблюдения не перпендикулярна плоскости экрана при достаточно больших расстояниях от точек O и M до плоскости экрана, в отверстии уложится только небольшая часть первой зоны Френеля, имеющей теперь форму эллипса, и соответствующие лучи тоже будут параллельными (рис. 5.5). Отсюда следует, что при достаточно больших расстояниях точек O и M до плоскости экрана, когда лучи можно считать параллельными, разности фаз вторичных

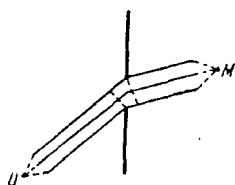


Рис. 5.5

источников в отличие от дифракции Френеля не зависят от их расстояния до излучателя и точки наблюдения, а определяются только взаимным расположением вторичных источников. В этом случае мы имеем дифракцию Фраунгофера.

Таким образом из изложенного можно вывести следующие приближенные критерии. Если радиус отверстия a больше или равен первой зоне Френеля, т. е.

$$a \geq R_1, \quad (5.3)$$

то будем иметь дифракцию Френеля. Если же радиус отверстия значительно меньше первой зоны Френеля, т. е.

$$a \ll R_1, \quad (5.4)$$

то это дифракция Фраунгофера.

Та область расстояний, где выполняется соотношение (5.3), называется ближней зоной, а та область расстояний, где выполняется соотношение (5.4), называется дальней зоной или зоной Фраунгофера.

3. Формула для расчета Фраунгоферовой дифракции

Рассмотрим дифракцию на отверстии. Введем прямоугольную систему координат с координатной плоскостью YZ , совпадающей с плоскостью экрана и началом в середине отверстия (рис. 5.6). Координату точки в плоскости S_0 обозначим вектором \mathbf{R} . Введем векторы, определяющие расстояния и направления распространения волны ρ_0 и ρ , r_0 и r от излучателя O до точек плоскости S_0 и от последних до точки наблюдения M (рис. 5.6). Как видно из рис. 5.6.

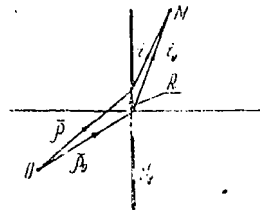


Рис. 5.6

$$\rho = |\rho_0 + \mathbf{R}| = \sqrt{\rho_0^2 + R^2 + 2\rho_0 \mathbf{R}}$$

$$r = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{R}| = \sqrt{r_0^2 + R^2 - 2r_0 \mathbf{R}}$$

Считая ρ_0 и r_0 значительно большими размеров отверстия, можем применить приближенное вычисление и получить

$$\begin{aligned} \rho + r &= \rho_0 \left[1 + \frac{R^2}{2\rho_0^2} + \frac{\rho_0 \mathbf{R}}{\rho_0^2} - \frac{(R^2 + 2\rho_0 \mathbf{R})^2}{8\rho_0^4} + \dots \right] + \\ &+ r_0 \left[1 + \frac{R^2}{2r_0^2} - \frac{r_0 \mathbf{R}}{r_0^2} - \frac{(R^2 - 2r_0 \mathbf{R})^2}{8r_0^4} + \dots \right] = \\ &= \rho_0 + r_0 + \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} \right) + \frac{\rho_0 \mathbf{R}}{\rho_0} - \frac{r_0 \mathbf{R}}{r_0} - \\ &- \frac{(\rho_0 \mathbf{R})^2}{2\rho_0^3} - \frac{(r_0 \mathbf{R})^2}{2r_0^3} + \dots \end{aligned}$$

Переход к дифракции Фраунгофера осуществляется при

$$\rho_0 \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad r_0 \rightarrow \infty.$$

Тогда, пренебрегая величинами более высокого порядка малости, получаем

$$\rho + r = \rho_0 + r_0 - \frac{r_0 \mathbf{R}}{r_0} + \frac{\rho_0 \mathbf{R}}{\rho_0} = \rho_0 + r_0 - \mathbf{R}(r_0 - \rho_0), \quad (5.5)$$

где

$$r_0 = \frac{r_0}{r_0}, \quad \rho_0 = \frac{\rho_0}{\rho_0}.$$

Очевидно, что эти пренебрежения можно делать, если имеет место неравенство

$$a^2 \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} \right) \ll \lambda,$$

или

$$a \ll \sqrt{\frac{\lambda \rho_0 r_0}{\rho_0 + r_0}}, \quad (5.6)$$

где a — наибольший размер отверстия (экрана). Если отверстие круглое радиуса a , то последнее неравенство в точности совпадает с критерием зоны Фраунгофера, выведенным качественным путем.

Очевидно, что при дифракции Фраунгофера ρ^0 определяет собой направление распространения первичной волны до отверстия, а вектор \mathbf{r}^0 — направление распространения дифрагированной волны. Следовательно, вектор $\mathbf{q} = \mathbf{r}^0 - \rho^0$ есть изменение направления распространения волны в результате дифракции.

Подставляя выражения (5.5) для $\rho + r$ в (5.1) в фазовый множитель и вынося из-под интеграла медленно меняющиеся множители, считая их равными тем значениям, которые они принимают в центре отверстия, получаем

$$\Pi_1 = \frac{jC}{\lambda} \frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}^0)}{\rho_0 r_0} e^{-jk(\rho_0 + r_0)} \int_{S_1} \exp\{jk\mathbf{q}^0 \mathbf{R}\} dS. \quad (5.7)$$

Это выражение определяет собой дифрагированное поле в случае дифракции на отверстии. Согласно принципу Бабинне дифрагированное поле на дополнительном экране определяется разностью значений вектора Герца в свободном пространстве и вектора Герца (5.7), т. е.

$$\Pi_{\text{э.диф}} = \frac{\Pi}{j4\pi\omega\epsilon_a} \frac{e^{-jkr_1}}{r_1} - \frac{jC}{\lambda} \frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}^0)}{\rho_0 r_0} e^{-jk(\rho_0 + r_0)} \int_{S_1} \exp\{jk\mathbf{q}^0 \mathbf{R}\} dS. \quad (5.8)$$

Напомним, что эта формула справедлива лишь при выполнении критерия, из которого следует, что радиус экрана нельзя устремлять к бесконечности.

ЛЕКЦИЯ 6

РАСЧЕТ РАССЕЯННОГО ПОЛЯ ЭКРАНАМИ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ ПО ПОВЕРХНОСТНЫМ ТОКАМ

1. Основная формула для расчета поля рассеяния по поверхностному току.
2. Рассеяние электромагнитных волн круглым экраном.
3. Метод расчета рассеянного поля идеально проводящими телами.
4. Рассеяние электромагнитных волн идеально проводящим шаром.

1. Основная формула для расчета поля рассеяния по поверхностному току

До сих пор мы определяли рассеянное поле позади экрана с помощью принципа Бабине по невозмущенному распределению вторичных источников на плоскости $S_0(S_1, S_2)$. Однако очевидно, что можно рассчитать поле рассеяния также и по возмущению, вызванному экраном на части плоскости S_0 , т. е. на S_1 (рис. 5.1).

Действительно, так как на теневой стороне экрана электромагнитное поле отсутствует, а на облученной первичной волной стороне поле отлично от нуля, то согласно граничным условиям для уравнений Максвелла на освещенной стороне экрана должен появиться поверхностный ток плотностью

$$\mathbf{J}_s = -[\mathbf{n}\mathbf{H}],$$

где

\mathbf{H} — магнитное поле на экране;

\mathbf{n} — нормаль к экрану, направленная в сторону распространения дифрагированной волны.

Поскольку экраном служит идеальный проводник, на котором $E_\tau = 0$, то можем написать

$$J_s = -2[\mathbf{n}\mathbf{H}_0],$$

где \mathbf{H}_0 — вектор напряженности поля первичной волны. Вектор \mathbf{J}_s , определяемый последней формулой, и есть источник поля рассеянных экраном волн как в теневой, так и в освещенной областях. Следовательно, расчет рассеянного экраном электромагнитного поля может проводиться по формулам (2.6). Поскольку «магнитных» поверхностных токов и зарядов нет, мы можем написать для вектора \mathbf{H} выражение

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2\pi} \int_S [[\mathbf{n}, \mathbf{H}_0], \text{grad } \varphi] dS,$$

где

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{0m} e^{i(\omega t - k\rho)} = \mathbf{H}_{0n} e^{-jk\rho}.$$

Так как речь идет о зоне Фраунгофера, мы из последней формулы получаем

$$\mathbf{H} = \frac{jk}{2\pi} [[\mathbf{nH}_{0n}], \mathbf{r}^0] \frac{e^{-jk(\rho_0 + r_0)}}{r_0} \int_{S_1} \exp\{jk\mathbf{q}^0 \mathbf{R}\} dS. \quad (6.1)$$

В заключение этого пункта сделаем некоторые замечания о пределах применимости выведенных выше формул для расчета дифракции.

Во всех рассмотренных выше задачах фигурирует разрыв поля на краях отверстий и экранов. Однако, как следует из уравнений Максвелла, такой разрыв эквивалентен появлению линейных токов и зарядов, то есть появлению вторичных источников поля. Но очевидно, что если размеры отверстий в экранах велики по сравнению с длиной волны, а именно об этом случае здесь идет речь, краевыми эффектами можно пренебречь.

2. Рассеяние электромагнитных волн круглым экраном

Пусть нормально к плоскости экрана радиуса a падает плоская волна с магнитным полем \mathbf{H}_0 и требуется определить поле рассеяния в дальней зоне. В этом случае можем написать

$$\mathbf{H} = \frac{jk}{2\pi} [[\mathbf{nH}_{0n}], \mathbf{r}^0] \frac{e^{-jk(\rho_0 + r_0)}}{r_0} \int_S \exp\{jk\mathbf{q}^0 \mathbf{R}\} dS,$$

где теперь $\mathbf{r}^0 = \mathbf{q}^0$ — вектор направления рассеяния. Принимая сферическую систему координат r, ϑ, φ с полярной осью, перпендикулярной плоскости экрана и центром координат, совпадающим с центром экрана, имеем

$$\mathbf{q}^0 \mathbf{R} = R \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi_0),$$

$$\int_S \exp\{jk\mathbf{q}^0 \mathbf{R}\} dS = \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{ikR \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi_0)} d\varphi R dR.$$

Но

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{jPR \cos(\varphi - \varphi_0)} d\varphi = J_0(PR) -$$

функция Бесселя нулевого порядка. Поэтому

$$\int_S \exp\{jk\mathbf{q}^0 \mathbf{R}\} dS = 2\pi \int_0^a J_0(PR) R dR = \frac{2\pi a}{P} J_1(aP),$$

где $J_1(aP)$ — функция Бесселя первого порядка; $P = k \sin \vartheta$.
В результате получаем

$$\mathbf{H} = \frac{jk}{r_0} e^{-jk(\rho_0 + r_0)} \frac{a^2}{k \sin \vartheta} J_1(k \sin \vartheta [|\mathbf{nH}_{0n}|, r^0]). \quad (6.2)$$

Напряженность электрического поля равна $E = 120 \pi H$.

Из формулы (6.2) видно, что характеристика направленности $F(\vartheta)$ рассеянного экраном поля по обе его стороны определяется формулой



Рис. 6.1

$$F(\vartheta) = \frac{2|J_1(k \sin \vartheta)|}{k \sin \vartheta}.$$

Диаграмма направленности имеет лепестковый характер. Нулевые значения напряженности поля получаются для тех направлений ϑ , при которых функция Бесселя обращается в нуль. Диаграмма направленности имеет вид, изображенный на рис. 6.1.

3. Метод расчета рассеянного поля идеально проводящими телами

Изложенное в предыдущей и настоящей лекциях наводит на мысль о возможности применения принципа Гюйгенса—Френеля к расчету рассеянного поля также и объемными телами, если только их линейные размеры значительно больше длины волны.

Действительно, пусть тело облучается плоской волной. Можно себе представить плоскость S_0 , перпендикулярную направлению распространения первичной волны и проходящую через наибольшее сечение тела (рис. 6.2). Эта плоскость делит поверхность тела на две части — освещенную и неосвещенную (теневую). Одновременно эта плоскость делит все пространство на два полупространства или лучше две полусферы. Полусфера, в которой находится освещенная часть тела, называется полупространством освещенности, а полусфера, в которой находится теневая часть — полупространством тени.

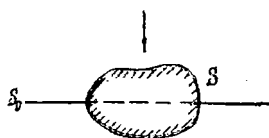


Рис. 6.2

шенная часть поверхности тела, назовем верхней полусферой. Другую — нижней полусферой.

Пренебрегая вкладом в поле поверхностных токов на теневой части тела, рассеянное поле в нижней полусфере можем рассчитать приближенно по вторичным источникам, распределенным по плоскости S_0 (исключая часть ее, совпадающую с сечением тела). А поле, создаваемое этими источниками согласно формуле (6.1), можно рассчитать по полю источников, распределенных по идеально проводящему экрану, имеющему форму сечения тела в плоскости S_0 .

Следовательно, напряженность магнитного поля рассеянной волны в нижней полусфере может в дальней зоне рассчитываться по формуле

$$\mathbf{H} = \frac{jk}{2\pi} \{ [\mathbf{nH}_{0n}], \mathbf{r}^0 \} \frac{e^{-jk(\rho_0+r_0)}}{r_0} \int_S \exp\{jk\mathbf{q}^0\mathbf{R}\} dS.$$

Поле же рассеяния в верхней полусфере может рассчитываться по вторичным источникам, распределенным по освещенной части поверхности тела, которые определяются поверхностной плотностью тока

$$J_s = 2[\mathbf{nH}_0],$$

где \mathbf{n} — нормаль к поверхности тела. Следовательно, вектор напряженности магнитного поля может рассчитываться по формуле

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2\pi} \int_S \{ [\mathbf{nH}_0] \text{grad } \varphi \} dS.$$

Так как имеется в виду поле в дальней зоне, мы можем записать

$$\mathbf{H} = -\frac{jk}{2\pi} \int_S \{ \mathbf{r}^0 [\mathbf{nH}_0] \} \frac{e^{-jkr}}{r} dS. \quad (6.3)$$

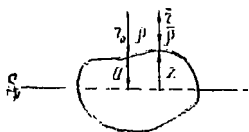


Рис. 6.3

Очень часто на практике, например в радиолокации, интересуются рассеянием в направлении, прямопротивоположном направлению распространения первичной волны. В этом случае

$$[\mathbf{r}^0 [\mathbf{nH}_0]] = \mathbf{n}(\mathbf{r}^0 \mathbf{H}_0) - \mathbf{H}_0(\mathbf{r}^0 \mathbf{n}) = -\mathbf{H}_0(\mathbf{r}^0 \mathbf{n}).$$

Здесь

$$\mathbf{H}_0 = H_{0m} e^{j(\omega t - k\rho)}$$

и, как видно из рис. 6.3,

$$r = r_0 + (a - z);$$

$$\rho = \rho_0 + (a - z);$$

$$(\mathbf{r}^0 \mathbf{n}) dS = dS_0$$

и интегрирование по поверхности S сводится к интегрированию по плоскости S_0 , причем если ξ, η — координаты точки в плоскости S_0 , то координата z на поверхности тела должна считаться функцией этих координат, т. е. $z = z(\xi, \eta)$.

Таким образом, для рассматриваемого случая из (6.3) получаем

$$H = \frac{jkH_{0n}}{2\pi r_0} e^{-jk(\rho_0 + r_0 + 2a)} \iint e^{j2kz(\xi, \eta)} d\xi d\eta. \quad (6.4)$$

4. Рассеяние электромагнитных волн идеально проводящим шаром

В качестве примера рассмотрим рассеяние электромагнитных волн идеально проводящим шаром радиуса a .

Из изложенного в предыдущем пункте следует, что поле рассеяния в нижней полусфере в точности совпадает с рассеянным полем круглым экраном того же радиуса, определенным выше. Оно, следовательно, определяется формулой (6.2). Поле же рассеяния в верхнюю полусферу должно рассчитываться по формуле (6.4).

Применяя сферическую систему координат (рис. 6.4), можем вместо элемента площади $dS_0 = d\xi d\eta$ записать

$$dS_0 = a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

а вместо z

$$z = a \cos \vartheta,$$

и тогда получим

$$H = \frac{jkH_{0n}}{2\pi r_0} e^{-jk(\rho_0 + r_0 + 2a)} a^2 \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2\pi} e^{j2ka \cos \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta d\varphi.$$

Произведя интегрирование по координате ϑ по частям, получим

$$\int_0^{\pi/2} e^{j2ka \cos \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = \frac{1}{j2ka} e^{j2ka} + \left(\frac{1}{j2ka} \right)^2 (1 - e^{j2ka}).$$

Учитывая, что радиус шара значительно больше длины волны, вторым слагаемым можем пренебречь по сравнению с первым и получить

$$H = \frac{H_{0n}}{2r_0} a e^{-jk(\rho_0 + r_0)}. \quad (6.5)$$

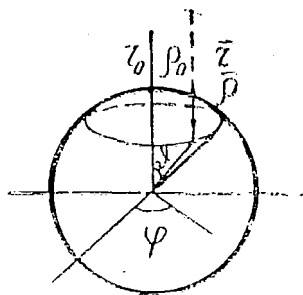


Рис. 6.4

ЛЕКЦИЯ 7

МАКСИМАЛЬНАЯ ДАЛЬНОСТЬ ДЕЙСТВИЯ РАДИОЛОКАЦИИ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Краткие сведения о реальных излучателях радиоволн — антеннах.
2. Максимальная дальность действия связной линии.
3. Максимальная дальность действия радиолокации.

1. Краткие сведения о реальных излучателях радиоволн — антеннах

Одним из главных практических приложений теории свободного распространения электромагнитных волн является ее применение для расчета максимальной дальности действия связной или локационной линии.

Основополагающие и при том простейшие соотношения получаются в результате расчета максимальной дальности действия радиолинии в свободном пространстве.

Прежде чем приступить к расчету максимальной дальности действия радиолинии, необходимо сначала ознакомиться с основными характеристиками излучателей радиоволн — антенн в свободном пространстве.

Простейшей антенной является элементарный диполь. Как известно из курса ТЭМП, напряженности поля диполя в дальней зоне равны

$$E \approx E_{\gamma} = j \frac{k^2 I_m l}{4\pi\omega\epsilon_0} \sin \gamma \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{r} = j \frac{60\pi I_m l}{\lambda r} \sin \gamma e^{j(\omega t - kr)}; \quad (7.1)$$

$$H = H_{\varphi} = j \frac{k I_m l}{4\pi} \sin \gamma \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{r} = j \frac{I_m l}{2\lambda} \sin \gamma \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{r}. \quad (7.2)$$

Как уже было отмечено ранее, векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} в дальней зоне взаимно перпендикулярны и перпендикулярны направлению рас-

пространения волны, т. е. поле имеет поперечный характер, причем отношение напряженностей поля \mathbf{E} к \mathbf{H} равно волновому сопротивлению свободного пространства

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi.$$

Усредненный за период вектор плотности потока энергии излучения направлен радиально и равен

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{E}\mathbf{H}^*] = 15\pi r^0 \left(\frac{I_m l}{\lambda r}\right)^2 \sin^2 \gamma, \quad (7.3)$$

где r^0 — единичный вектор.

Из этой формулы видно, что электромагнитная энергия излучается направленно. Поперечный характер поля в дальней зоне и направленность излучения — свойства, присущие полям излучения любых антенн.

Антенн, излучающих равномерно во все стороны, не существует. Однако для характеристики направленности антенн в качестве эталона берут гипотетический ненаправленный, или, как его еще называют, изотропный излучатель. При этом параметром, характеризующим направленные свойства антенны, служит так называемый коэффициент направленного действия — сокращенно КНД — обозначаемый буквой D .

Пусть S_n — плотность потока энергии, или, иначе, плотность мощности и E_n — амплитуда напряженности поля, создаваемые направленной антенной в некотором направлении на фиксированном расстоянии r , а S_0 — плотность мощности и E_0 — амплитуда напряженности поля гипотетического изотропного излучателя на том же расстоянии, с той же мощностью излучения P_Σ , что и у направленной антенны. Тогда, по определению,

$$D = \frac{S_n}{S_0} = \frac{E_n^2}{E_0^2}. \quad (7.4)$$

Для изотропного излучателя плотность мощности будет

$$S_0 = \frac{P_\Sigma}{4\pi r^2} = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{E_0^2}{240\pi},$$

где H_0 — амплитуда напряженности магнитного поля, откуда

$$E_0 = \frac{\sqrt{60P_\Sigma}}{r}.$$

Учитывая (7.4), получаем, следовательно, что амплитуда напряженности поля направленной антенны равна

$$E_n = \frac{\sqrt{60P_\Sigma D}}{r}. \quad (7.5)$$

Выражение (7.4) можно представить также в виде

$$D = \frac{E_n^2}{E_0^2} = \frac{E_{nm}^2}{E_0^2} \cdot \frac{E_n^2}{E_{nm}^2} = D_m F^2(\vartheta, \varphi), \quad (7.6)$$

где

E_{nm} — амплитуда напряженности поля направленной антенны на расстоянии r в направлении максимального излучения;

$D_m = \frac{E_{nm}^2}{E_0^2}$ — КДН в направлении максимального излучения;

$F(\vartheta, \varphi) = \frac{E_n}{E_{nm}}$ — так называемая нормированная характеристика направленности антенны;

ϑ, φ — координатные углы в сферической системе координат, полярная ось которой совпадает с направлением максимума излучения, так что

$$F(0, \varphi) = 1.$$

График функции $F(\vartheta, \varphi)$ для какого-либо фиксированного значения φ , например $\varphi = 0$, называется диаграммой направленности антенны. Пример диаграммы направленности антенны дан на рис. 7.1.



Рис. 7.1

Наряду с коэффициентом направленного действия антенны применяется также и другой параметр, который одновременно характеризует направленные свойства антенны и ее коэффициент полезного действия. Это так называемый коэффициент усиления G . Поскольку P_{Σ} вследствие потерь в антенне меньше, чем мощность P , которая подводится ко входу антенны, то коэффициент полезного действия антенны будет

$$\eta = \frac{P_{\Sigma}}{P}.$$

Отсюда, подставляя в формулу (7.5) вместо P_{Σ} произведение ηP , получаем

$$E_n = \frac{\sqrt{60 P \eta D}}{r}.$$

Величина

$$G = \eta D = G_m F^2(\vartheta, \varphi) \quad (7.7)$$

и называется коэффициентом усиления антенны. Следовательно, вместо (7.5) можно написать

$$E_n = \frac{\sqrt{60 P G_m}}{r} F(\vartheta, \varphi). \quad (7.8)$$

2. Максимальная дальность радиосвязи

Пусть P — излучаемая мощность (полагаем КПД антенны $\eta \approx 1$), $G = G_m F^2(\vartheta, \varphi)$ — коэффициент усиления антенны, тогда плотность потока энергии или плотность мощности в точке наблюдения M на расстоянии r от передающей антенны равна

$$S = \frac{PG}{4\pi r^2} = \frac{PG_m F^2(\vartheta, \varphi)}{4\pi r^2}. \quad (7.9)$$

Пусть в точке M расположен приемник (рис. 7.2). Тогда мощность P_n , попадающая в приемник, пропорциональна плотности мощности в точке M . Коэффициент пропорциональности здесь определяется свойствами приемной антенны и, поскольку он имеет размерность площади, то носит название эффективной или действующей площади антенны и обычно обозначается $A_{\text{эфф}}$. Поэтому:

$$P_n = A_{\text{эфф}} S. \quad (7.10)$$

Между эффективной площадью антенны $A_{\text{эфф}}$ и ее коэффициентом усиления $G' = G'_m F'^2(\vartheta', \varphi')$ в режиме передачи существует связь

$$A_{\text{эфф}} = \frac{\lambda^2 G'}{4\pi}. \quad (7.11)$$

Поэтому

$$A_{\text{эфф}} = A_{\text{эфф}m} F'^2(\vartheta', \varphi'), \quad (7.12)$$

где

$$A_{\text{эфф}m} = \frac{\lambda^2 G'_m}{4\pi}.$$

Таким образом, из формул (7.9) и (7.12) следует, что равенство (7.10) можно представить в виде

$$P_n = \frac{PG_m A_{\text{эфф}m} F^2(\vartheta, \varphi) F'^2(\vartheta', \varphi')}{4\pi r^2}. \quad (7.13)$$

Это соотношение называется уравнением *радиопередачи* или уравнением радиосвязи в свободном пространстве.

Для того чтобы определить максимальную дальность действия радиосвязи в некотором направлении, следует в этой формуле положить

$$P_n = P_{n\text{мин}},$$

где $P_{n\text{мин}}$ — минимальная мощность на входе приемника, необходимая для обнаружения излучаемого сигнала, и получаем

$$P_{n\text{мин}} = \frac{PG_m A_{\text{эфф}m} F^2(\vartheta, \varphi) F'^2(\vartheta', \varphi')}{4\pi r_m^2} \quad (7.14)$$

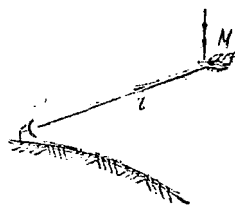


Рис. 7.2

Из этого равенства и находим искомую максимальную дальность

$$r_m = r_m(\vartheta, \varphi, \vartheta', \varphi') = \sqrt{\frac{PG_m A_{\text{эфф}m}}{P_{\text{нмш}} 4\pi}} F(\vartheta, \varphi) F'(\vartheta', \varphi'). \quad (7.15)$$

Очевидно, что максимально возможную дальность действия получим в том случае, если обе антенны направлены друг на друга, т. е. если в формуле (7.15) заменить

$$F(\vartheta, \varphi) \rightarrow F(0, \varphi) = 1, \quad F'(\vartheta', \varphi') \rightarrow F'(0, \varphi') = 1.$$

Отсюда находим

$$r_{m0} = \sqrt{\frac{PG_m A_{\text{эфф}m}}{P_{\text{нмш}} 4\pi}}. \quad (7.16)$$

Согласно этой формуле максимально возможная дальность действия радиосвязи пропорциональна корню квадратному из произведения мощности передатчика P коэффициента усиления передающей антенны G , эффективной площади приемной антенны $A_{\text{эфф}m}$ и чувствительности приемника $\frac{1}{P_{\text{нмш}}}$. Максимальная дальность при произвольной ориентации антенн, таким образом, равна

$$r_m = r_m(\vartheta, \varphi, \vartheta', \varphi') = r_{m0} F(\vartheta, \varphi) F'(\vartheta', \varphi'). \quad (7.17)$$

3. Максимальная дальность радиолокации

Пусть в точке O расположена радиолокационная станция, а в точке M — цель (рис. 7.3) и пусть P — мощность передатчика, $G = G_m F^2(\vartheta, \varphi)$ — коэффициент усиления передающей антенны, тогда плотность мощности в месте расположения цели равна

$$S_{\text{ц}} = \frac{PG}{4\pi r^2} = \frac{PG_m F^2(\vartheta, \varphi)}{4\pi r^2}. \quad (7.18)$$

Облучаемая радиолокатором цель становится вторичным излучателем. Часть энергии, рассеянной целью, попадает в приемник радиолокатора, благодаря чему цель и обнаруживается. Для характеристики цели как вторичного излучения вводят в рассмотрение так называемую эффективную площадь рассеяния цели (ЭПР) σ . Этот параметр вводится следующим образом. Поле рассеяния цели уподобляют полю воображаемого ненаправленного излучателя, мощность которого равна $\sigma S_{\text{ц}}$, и создающего в месте расположения приемника радиолокатора такую же плотность мощности, как и цель, т. е.

$$S_{\text{п}} = \frac{\sigma S_{\text{ц}}}{4\pi r^2}. \quad (7.19)$$

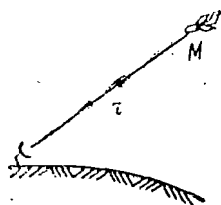


Рис. 7.3

Следовательно, ЭПР цели по определению есть величина

$$\sigma = 4\pi r^2 \frac{S_{\Pi}}{S_{\Pi}}. \quad (7.20)$$

Эта величина в предположении, что размеры цели значительно меньше расстояния r , зависит только от направления, т. е. ракурса цели, и не зависит от r и может резко изменяться с изменением направления облучения цели. ЭПР цели большей частью определяется экспериментально по измеренным величинам, фигурирующим в правой части в формуле (7.20), так как ее вычисление весьма трудоемко. Только для простейших геометрических тел σ легко вычислить. Так, для шара, как следует из формулы (6.5),

$$\sigma = 4\pi r^2 \frac{H_{0m}^2 a^2}{4r^2 H_{0m}^2} = \pi a^2, \quad (7.21)$$

т. е. равно сечению шара.

Для диска, как следует из формулы (6.2),

$$\sigma = 4\pi a^2 \frac{J_1^2(ka \sin \vartheta)}{\sin^2 \vartheta}. \quad (7.22)$$

Мощность обратного рассеяния цели, попадающая на вход приемника радиолокатора, равна

$$P_n = A_{\text{эфф}} S_{\Pi} = \frac{\sigma P G A_{\text{эфф}}}{(4\pi r^2)^2}.$$

Обычно передача и прием осуществляется одной и той же антенной. Поэтому

$$A_{\text{эфф}} = \frac{\lambda^2 G}{4\pi} = A_{\text{эфф}m} F^2(\vartheta, \varphi) \quad (7.23)$$

и, следовательно,

$$P_n = \frac{\sigma P G_m A_{\text{эфф}m} F^4(\vartheta, \varphi)}{(4\pi r^2)^2}.$$

Это соотношение называется уравнением *радиолокации*. Для получения максимальной дальности действия в некотором направлении следует в этом уравнении положить

$$P_n = P_{\text{нмин}}$$

и тогда

$$P_{\text{нмин}} = \frac{\sigma P G_m A_{\text{эфф}m} F^4(\vartheta, \varphi)}{(4\pi r_m^2)^2}.$$

Отсюда

$$r_m = r_m(\vartheta, \varphi) = \sqrt[4]{\frac{P G_m A_{\text{эфф}m} \sigma}{P_{\text{нмин}} (4\pi)^2} F(\vartheta, \varphi)}.$$

Максимально возможную дальность действия получим, если совместим направление максимума излучения антенны с направлением на цель:

$$r_m = r_{m0} = \sqrt[4]{\frac{PG_m A_{эфф\sigma}}{P_{н\text{мин}}(4\pi)^2}}. \quad (7.24)$$

Из этой формулы, в частности, следует, что максимальная дальность действия радиолокатора пропорциональна корню четвертой степени из мощности передатчика. Следовательно, изменение мощности передатчика радиолокатора приводит к меньшему изменению дальности действия, чем изменение мощности связного передатчика, у которого дальность действия пропорциональна корню квадратному из мощности.

О влиянии изменения $P_{н\text{мин}}$ можно сделать подобный же вывод, т. е. изменение чувствительности не приводит к сильному изменению дальности.

Дальность действия радиолокатора также сравнительно мало чувствительна к изменениям величины ЭПР цели σ .

Более эффективно влияет на дальность действия радиолокатора изменение параметров антенны. Действительно, учитывая (7.23), формулу дальности (7.24) можно представить в виде

$$r_{m0} = \sqrt[4]{\frac{PA^2}{P_{н\text{мин}} \lambda^2 4\pi}}. \quad (7.25)$$

Из этого выражения видно, что

$$r_{m0} \sim \sqrt{\frac{A_{эфф\sigma}}{\lambda}},$$

то есть максимальная дальность действия радиолокатора прямо пропорциональна *корню квадратному* из отношения эффективной площади антенны к длине волны.

Так как $A_{эфф\sigma}$ имеет порядок величины геометрической площади раскрыва антенны, то отсюда видно, что чем короче волна, тем технически более просто получить большие дальности радиолокации.

Так как более распространенным параметром антенны является коэффициент усиления антенны, то при расчетах r_{m0} вместо формул (7.24) и (7.25) чаще пользуются формулой

$$r_{m0} = \sqrt[4]{\frac{PG_m^2 \lambda^2 \sigma}{P_{н\text{мин}} 64\pi^3}}.$$

Пример. При $P=1 \text{ МВт}$, $G_m=10^4$, $\lambda=0,1 \text{ м}$, $\sigma=1 \text{ м}^2$,

$$P_{н\text{мин}}=10^{-13} \text{ Вт}, \quad r_{m0}=270 \text{ км}.$$

Ясно, что по формуле (7.24) может рассчитываться максимальная дальность действия и локационной линии, работающей в оптическом диапазоне волн.

ЛЕКЦИЯ 8

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ШАРОМ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

1. Постановка задачи.
2. Формула Релея.
3. Абсолютно отражающая частица.
4. Резонанс.

1. Постановка задачи

Реальные среды, в которых происходит распространение электромагнитных волн, например атмосфера, космос, являются мутными, то есть в них вкраплены частицы с другими электрическими параметрами. Например, в атмосфере имеются целые образования из таких частиц — капель воды — облака, туманы, дожди, снега, пыль (аэрозоли). Эти частицы рассеивают и поглощают падающие на них электромагнитные волны, а следовательно, влияют на распространение электромагнитных волн. При этом зачастую, как, например, в оптическом диапазоне волны расстояние между частицами значительно больше длины волны. В этом случае частицы электрически не взаимодействуют, т. е. рассеяние и поглощение одной частицы не связаны с рассеянием и поглощением соседней частицы. Поэтому в проблеме распространения электромагнитных волн в мутной среде задача о рассеянии и поглощении электромагнитной волны изолированной частицей, имеющей форму шара, является центральной.

Задача о дифракции плоской электромагнитной волны на шаре в общем виде была решена Ми еще в 1908 г.

В дальнейшем эта задача в частности рассматривалась рядом исследователей. Наиболее полное и глубокое исследование вопроса было выполнено К. С. Шифриным в его книге «Рассеяние света в мутной среде», опубликованной в 1951 году.

Формулировка общего решения задачи представляется следующим образом.

Задано поле первичной волны. Под воздействием этого поля возникает добавочное поле вне частицы — поле рассеяния и поле внутри частицы. Последние два поля ищутся как решения уравнений Максвелла, которые совместно с полем первичной волны должны удовлетворять граничным условиям на поверхности шара.

В результате решение получается в виде бесконечной суммы парциальных волн двух типов — электрического и магнитного.

В общем случае ряд сходится не быстро. Он сходится быстро лишь в одном частном случае, когда радиус шара a значительно меньше длины волны в воздухе, т. е. когда имеет место неравенство

$$\rho = \frac{2\pi a}{\lambda} \ll 1. \quad (8.1)$$

Тогда наиболее существенными оказываются только первая пара парциальных волн. Если же имеет место неравенство

$$\rho \gg 1, \quad (8.2)$$

то одинаковый порядок величины имеют первые l пар парциальных волн, где

$$l \sim \rho,$$

т. е. все эти волны оказываются существенными и вычисление поля оказывается громоздким.

Если

$$\rho \sim 1,$$

то решение в общем случае тоже оказывается громоздким.

В связи с этим мы рассмотрим первый и не менее важный второй случаи. Однако решение задачи в последнем случае мы рассмотрим не на основе метода парциальных волн, а применяя метод геометрической оптики.

В данной лекции мы изучим лишь дифракцию на малых частицах, т. е. случай (8.1). Однако и в этом случае в зависимости от электрических параметров частицы возможны три ситуации:

1) комплексный показатель преломления частицы $n - j\chi = \sqrt{\epsilon'}$ не очень большой, так что выполняется более жесткое, чем (8.1), условие

$$|\sqrt{\epsilon'}| \rho \ll 1;$$

2) частица из идеального проводника;

3) комплексный показатель преломления частицы произволен.

2. Формула Релея

Физический смысл условия первой ситуации — радиус частицы должен быть значительно меньше длины волны в среде частицы. В этом случае можем не прибегать к формулам Ми, так как мы

можем считать, что частица находится в однородном электрическом поле, которое меняется во времени.

В курсе ТЭМП мы рассматривали задачу о диэлектрическом шаре в однородном электростатическом поле (рис. 8.1).

Очевидно, что конфигурация векторных линий электрических полей в обоих случаях будет одинакова.

Отличие будет состоять лишь в том, что в интересующем нас случае поле меняется во времени.

Согласно решению задачи электростатики шар с диэлектрической проницаемостью в вакууме приобретает дипольный момент

$$\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \mathbf{E}_0.$$

При этом внутри шара поле однородно и равно

$$\mathbf{E}_1 = \frac{3}{2 + \epsilon} \mathbf{E}_0.$$

Перейдя к искомому решению, мы, очевидно, в этих формулах должны произвести замену

$$\epsilon \rightarrow \epsilon' = \epsilon - j\alpha'' = \epsilon - j60\lambda\sigma.$$

Итак, мы получаем

$$\mathbf{p} = \frac{\epsilon' - 1}{\epsilon' + 2} \epsilon_0 4\pi a^3 \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{E}_1 = \frac{3}{\epsilon' + 2} \mathbf{E}_0.$$

Поле рассеяния мы можем, таким образом, рассчитать, как поле элементарного вибратора с указанным дипольным моментом. Учитывая, что

$$j\omega \mathbf{p} = \mathbf{I}l,$$

где I ток вибратора, для вектора Герца согласно (1.9) получим

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\mathbf{p} e^{-jkr}}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\epsilon' - 1}{\epsilon' + 2} \frac{a^3}{r} \mathbf{E}_0 e^{-jkr}.$$

Поле рассеяния в дальней зоне рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned} E_p &\approx E_\gamma = -k^2 \mathbf{\Pi} \sin \gamma = \\ &= -k^2 \sin \gamma \frac{\epsilon' - 1}{\epsilon' + 2} \frac{a^3}{r} \mathbf{E}_0 e^{-jkr}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что характеристика направленности, или, иначе, индикатриса рассеяния в плоскости сечения шара, в которой расположены вектор и направление распространения первичной вол-

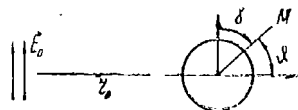


Рис. 8.1

ны, характеризуется множителем $\sin^2\gamma$ и имеет вид, изображенный на рис. 8.2.

Векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} ориентированы друг по отношению к другу так, как в электромагнитном поле элементарного вибратора.

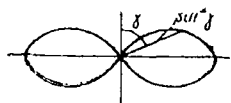


Рис. 8.2

Поле магнитной парциальной волны пренебрежимо мало.

Найдем полную мощность рассеяния. Эта величина легко рассчитывается методом вектора Пойнтинга.

Учитывая, что вектор Пойнтинга равен

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] = \frac{1}{2} \frac{k^4 \sin^2\gamma}{120\pi} \left| \frac{\varepsilon' - 1}{\varepsilon' + 2} \right|^2 \frac{a^6}{r^2} E_{0m}^2 \mathbf{r}^0,$$

где \mathbf{r}^0 — единичный вектор направления рассеяния, надо это выражение проинтегрировать по сфере радиуса r . Так как

$$\int_0^\pi d\gamma \int_0^{2\pi} \sin^2\gamma \sin \gamma d\varphi = 2\pi \int_0^\pi (1 - \cos^2\gamma) \sin \gamma d\gamma = 2\pi \frac{4}{3},$$

то для мощности рассеяния получаем

$$P_{\text{расс}} = 2\pi \frac{4}{3} \left| \frac{\varepsilon' - 1}{\varepsilon' + 2} \right|^2 \frac{a^6 k^4}{240\pi} E_{0m}^2.$$

Мощность, которую поглощает шар в силу однородности поля внутри шара, равна

$$\begin{aligned} P_{\text{пог}} &= \frac{|\mathbf{J}\mathbf{E}|}{2} V = \frac{\sigma |E_1|^2}{2} \frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{\sigma 9}{2|\varepsilon' + 2|^2} E_{0m}^2 \frac{4}{3} \pi a^3 = \\ &= \frac{9\varepsilon''}{|\varepsilon' + 2|^2 60\lambda\sigma} \frac{2\pi}{3} a^3 E_{0m}^2. \end{aligned}$$

Уменьшение энергии первичной волны вследствие рассеяния частицы характеризуется ее полным поперечником рассеяния, определяемым формулой

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \frac{P_{\text{расс}}}{S_{\text{перп}}} = \frac{P_{\text{расс}}}{E_{0m}^2/240\pi} = \frac{\lambda^2}{\pi} \frac{4}{3} \left| \frac{\varepsilon' - 1}{\varepsilon' + 2} \right|^2 = \\ &= \frac{24\pi^3}{\lambda^4} V^2 \left| \frac{\varepsilon' - 1}{\varepsilon' + 2} \right|^2. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Это так называемый коэффициент рассеяния Рэля; рассеяние обратно пропорционально четвертой степени длины волны. Интересно отметить, что закон рассеяния Рэля объясняет, почему цвет неба голубой. В самом деле, в атмосфере всегда существуют малые флуктуации плотности воздуха, которые действуют как рассеивающие частицы, причем размеры этих частиц значительно

меньше световой волны. Такие частицы согласно последней формуле должны наиболее эффективно рассеивать наиболее короткие волны видимого света, соответствующие голубому и фиолетовому цветам; законом Рэлея объясняются и различные оттенки туманов и дымов.

Уменьшение энергии первичной волны вследствие поглощения характеризуется ее полным поперечником поглощения, определяемым формулой

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{пог}} &= \frac{P_{\text{пог}}}{S_{\text{перв}}} = \frac{P_{\text{пог}}}{E_{0m}^2/240\pi} = \frac{6\pi^2 a^3 \epsilon''}{|\epsilon' + 2|^2 \lambda} \\ &= \frac{\lambda^2}{2\pi} \rho^3 6\epsilon'' \frac{1}{|\epsilon' + 2|^2}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Сравнивая формулы (8.3) и (8.4), видим, что в рассматриваемом случае поперечник поглощения значительно больше поперечника рассеяния, и, следовательно, потерей энергии на рассеяние можно пренебречь по сравнению с поглощенной энергией. При этом поглощение при прохождении света через слой будет просто пропорционально количеству вещества на пути луча.

3. Абсолютно отражающая частица

Если комплексный показатель преломления вещества $|\sqrt{\epsilon'}| = |n - j\chi|$ велик по сравнению с единицей ($|\sqrt{\epsilon'}| \rightarrow \infty$), электромагнитное поле не будет проникать в вещество. В этом случае условие малости радиуса частицы по сравнению с длиной волны в веществе не выполняется, так как $\lambda_{\text{ср}} \rightarrow 0$. Происходит только рассеяние, причем поле магнитной парциальной волны имеет такой же порядок величины, как и поле электрической парциальной волны. Полный поперечник рассеяния тоже обратно пропорционален четвертой степени длины, как и при рэлеевском рассеянии. Однако индикатриса рассеяния существенно отлична — в основном происходит рассеяние назад. Индикатриса рассеяния имеет вид, показанный на рис. 8.3.



Рис. 8.3

Максимум рассеяния назад примерно в 9 раз больше максимума рассеяния вперед. Этот случай рассеяния называется томсоновским (он рассмотрен Томсоном в 1893 г.).

4. Резонанс

Предыдущий случай, как уже было указано, имеет место при $|n - j\chi| \rightarrow \infty$. Он является предельным и, следовательно, далеко идущей математической идеализацией.

В действительности же мы имеем дело с большим, но не бесконечным значением $(n - j\chi)$. Приведем результаты для этого случая. Проследим, как меняется характер рассеяния при изменении параметра $q = |\sqrt{\epsilon'}|\rho$ от 0 до ∞ .

При любом значении q поле парциальной волны, электрического типа такое же, как и в случае идеально отражающей частицы. Амплитуда же поля парциальной волны магнитного типа согласно [2] пропорциональна функции

$$\gamma(q) = 1 + \frac{3}{q} \operatorname{ctg} q - \frac{3}{q^2}.$$

Эта функция имеет вид, показанный на рис. 8.4.

Видно, что при $q = l\pi$ ($l = 1, 2, 3 \dots$), т. е. при $\lambda_{\text{ср}} = \frac{2a}{l}$, амплитуда поля рассеяния принимает очень большую величину — имеет место резонанс.

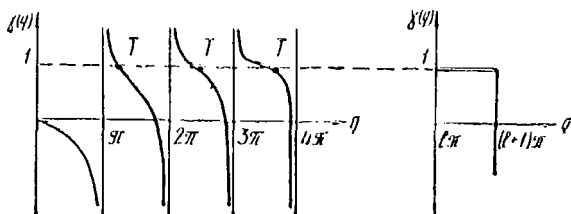


Рис. 8.4

Полный поперечник рассеяния принимает большую величину $\sigma_p = 6\pi a^2$. Что касается индикатрисы рассеяния, то она при $\gamma = 1$ такова же, как при томсоновском рассеянии (на рис. 8.4 этот случай отмечен буквой *T*), а при $\gamma \rightarrow \infty$ такова же, как при релеевском рассеянии.

ЛЕКЦИЯ 9

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ШАРОМ БОЛЬШОГО РАДИУСА

1. Производные лучи.
2. Отраженные и преломленные лучи.
3. Лучи, испытавшие несколько внутренних отражений. Радуги.

1. Производные лучи

Рассмотрим предельный случай

$$\frac{2\pi a}{\lambda} = \rho \gg 1.$$

Напомним, что в лекции 6 мы уже рассматривали рассеяние шаром с радиусом, значительно большим длины волны. Однако шар предполагался из идеального проводника. Здесь же мы будем считать, что шар диэлектрический. Такой шар, очевидно, может имитировать каплю воды. Как уже было указано, применение общего решения Ми в этом случае приводит к громоздким выкладкам. Поэтому здесь будем производить вычисление так, как это делается в геометрической оптике, т. е. используя коэффициенты отражения и преломления Френеля. При этом мы будем полностью следовать [2].

В курсе ТЭМП были получены выражения для этих коэффициентов. Когда вектор \mathbf{E} лежит в плоскости падения (вертикальная поляризация) коэффициент отражения

$$q_{\text{в}} = R_{\text{в}}^2 = \frac{\text{tg}^2(\varphi - \psi)}{\text{tg}^2(\varphi + \psi)};$$

коэффициент преломления

$$d_b = r_b^2 = \frac{\sin 2\varphi \sin 2\psi}{\sin^2(\varphi + \psi) \cos^2(\varphi - \psi)}.$$

Когда вектор \mathbf{H} лежит в плоскости падения (горизонтальная поляризация), коэффициент отражения

$$q_r = R_r^2 = \frac{\sin^2(\varphi - \psi)}{\sin^2(\varphi + \psi)},$$

коэффициент прохождения

$$d_r = r_r^2 = \frac{\sin 2\varphi \sin 2\psi}{\sin^2(\varphi + \psi)},$$

где φ — угол падения, ψ — угол преломления. Для дальнейшего целесообразно исключить угол ψ из выражения для q_b и q_r и пользоваться формулами

$$\left. \begin{aligned} q_b &= \left(\frac{n^2 \cos \varphi - \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}{n^2 \cos \varphi + \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} \right)^2, \\ q_r &= \left(\frac{\cos \varphi - \sqrt{n^2 - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{n^2 - \cos^2 \varphi}} \right)^2, \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

где n — показатель преломления, причем для воздуха принимаем $n=1$.

Итак, предположим, что на шар падает пучок лучей, параллельный оси x (рис. 9.1). Для упрощения все геометрические построения и вычисления будем проводить применительно к большому кругу.

Падающие на шар лучи будем называть первичными. Все же лучи, вышедшие из шара, будем называть производными. Отраженный от поверхности шара луч будет, таким образом, первым производным лучом. Луч, дважды преломленный, — вторичным производным лучом и т. д.

Перечислим очевидные свойства производных лучей.

1. Все производные лучи лежат в той же плоскости, что и первичный луч.

2. Все производные лучи имеют ту же поляризацию, что и первичный луч.

3. Все производные лучи выходят из шара под одним и тем же углом — углом падения первичного луча φ .

Некоторые относящиеся сюда геометрические соотношения не столь очевидны и мы их сейчас выведем.

Пусть первичный луч встречает поверхность шара под углом θ , отсчитываемого от направления оси x против часовой стрелки

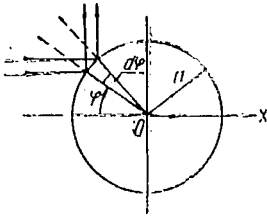


Рис. 9.1

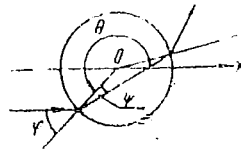


Рис. 9.2

в его нижней части, т. е. $\theta > \pi$ (рис. 9.2). Тогда последовательные производные лучи начинаются из точек

$$0, 0 + \mu, 0 + 2\mu, 0 + 3\mu,$$

где $\mu = \pi - 2\psi$.

Если первичный луч встречает поверхность шара в его верхней части, т. е. $\theta < \pi$ (рис. 9.3), то его последовательные производные лучи начинаются из точек

$$0, 0 - \mu, 0 - 2\mu, 0 - 3\mu, \dots,$$

где μ имеет прежний смысл.

Таким образом, точка, откуда начинаются производные нижнего первичного луча, перемещается по окружности против часовой стрелки, а точка, откуда начинаются производные верхнего первичного луча, перемещаются по часовой стрелке.

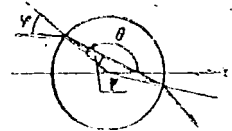


Рис. 9.3

Найдем теперь угол β_k поворота k -го производного луча относительно направления первичного луча. В случае нижнего первичного луча, как видно из рис. 9.2,

$$0 - \varphi = \pi$$

и искомые углы поворота равны

$$\beta_1 = \pi - 2\varphi; \tag{9.2}$$

$$\beta_2 = \varphi - [2\pi - (\theta + \mu)] = 2(\varphi - \psi); \tag{9.3}$$

$$\beta_3 = \varphi - [2\pi - (\theta + 2\mu)] = 2\varphi - \pi - 4\psi;$$

.....

$$\beta_k = \varphi - [2\pi - (\theta + (k-1)\mu)] = (k-2)\pi + 2[\varphi - (k-1)\psi].$$

В случае верхнего первичного луча, учитывая, что

$$\theta + \varphi = \pi,$$

аналогично получаем

$$\beta_k = (k-2)\pi + 2[\varphi - (k-1)\psi], \quad (9.4)$$

т. е. соотношения получаются одинаковыми для верхнего и нижнего лучей.

2. Отраженные и преломленные лучи

Найдем интенсивности (здесь — плотности потока энергии) первых двух прозвобдных лучей S_1 и S_2 . Для этого рассмотрим круговую полосу на поверхности шара с угловой шириной $d\varphi$ (рис. 9.1). Площадь этой полосы равна

$$dF_0 = 2\pi a^2 \sin \varphi d\varphi.$$

Поток энергии, падающей на эту полосу, равен

$$dP = S_{\text{перв}} \cos \varphi dF_0.$$

Поток энергии, отраженный этой полоской, равен

$$\begin{aligned} dP_{\text{расс1}} &= q_{\text{в,г}} dP = q_{\text{в,г}} S_{\text{перв}} 2\pi a^2 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \\ &= q_{\text{в,г}} S_{\text{перв}} \pi a^2 |\sin 2\varphi| d\varphi. \end{aligned}$$

Этот поток энергии рассеивается в телесном угле

$$d\Omega = 2\pi \sin \beta_1 d\beta_1$$

и, поскольку

$$\beta_1 = \pi - 2\varphi,$$

$$|d\Omega| = 4\pi |\sin 2\varphi| d\varphi.$$

Этот телесный угол вырезает на сфере точки наблюдения радиуса r полосу

$$dF_1 = r^2 |d\Omega|,$$

в пределах которой распределяется $dP_{\text{расс1}}$.

Следовательно, интенсивность энергии рассеянной волны первого прозводного луча равна

$$S_1 = \frac{dP_{\text{расс1}}}{dF_1} = \frac{a^2}{4r^2} S_{\text{перв}} q_{\text{в,г}}$$

и соответственно индикатриса рассеяния (характеристика направленности) равна

$$f_{\text{в,г}}(\beta_1) = S_1 r^2 = \frac{a^2}{4} S_{\text{перв}} q_{\text{в,г}}.$$

В этом выражении в формулах $q_{в,г}$ нужно, пользуясь (9.2), подставить угол β_1 вместо φ . Видно, что индикатриса рассеяния определяется коэффициентами отражения $q_{в,г}$:

$$q_{в} = \left(\frac{n^2 \sin \frac{\beta_1}{2} - \sqrt{n^2 - \cos^2 \frac{\beta_1}{2}}}{n^2 \sin \frac{\beta_1}{2} + \sqrt{n^2 - \cos^2 \frac{\beta_1}{2}}} \right)^2;$$

$$q_{г} = \left(\frac{\sin \frac{\beta_1}{2} - \sqrt{n^2 - \cos^2 \frac{\beta_1}{2}}}{\sin \frac{\beta_1}{2} + \sqrt{n^2 - \cos^2 \frac{\beta_1}{2}}} \right)^2.$$

Из этих формул видно, что индикатриса рассеяния при $\beta_1 = 0$, поскольку $q_{в,г} = 1$, равна в обоих случаях поляризации:

$$f_{в,г} = \frac{a^2}{4} S_{перв},$$

а при $\beta_1 = \pi$

$$f_{в,г} = \frac{a^2}{4} S_{перв} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2.$$

т. е. имеет место рассеяние вперед и назад.

Найдем индикатрису рассеяния второго производного луча. Имеем

$$dP_{расс2} = d_{в,г}^2 dP.$$

Этот поток энергии рассеивается на сфере точки наблюдения в пределах полоски площадью

$$dF_2 = r^2 2\pi |\sin \beta_2| d\beta_2,$$

причем здесь согласно (9.3) и закону преломления

$$\sin \varphi = n \sin \psi;$$

$$\beta_2 = 2(\varphi - \psi);$$

$$d\beta_2 = 2 \left(1 - \frac{\cos \varphi}{n \cos \psi} \right) d\varphi.$$

Интенсивность рассеяния второго произвольного луча равна

$$S_2 = \frac{dP_{расс2}}{dF_2} = d_{в,г}^2 S_{перв} \frac{a^2}{4r^2} \frac{\sin 2\varphi}{|\sin \beta_2| \left(1 - \frac{\cos \varphi}{n \cos \psi} \right)},$$

а индикатриса рассеяния

$$f_{n,r2}(\beta_2) = S_2 r^2 = d_{n,r}^2 \frac{\sin 2\varphi}{\sin \beta_2 \left(1 - \frac{\cos \varphi}{n \cos \psi}\right)} \frac{a_2}{4} S_{\text{перв.}}$$

3. Лучи, испытавшие несколько внутренних отражений. Радуги

Рассмотрим распределение плотности потока энергии третьих, четвертых и более высоких порядков производных лучей. Это лучи, испытавшие одно, два и более внутренних отражений. Угол рассеяния k -го производного луча определяется формулой (9.4). Заметим, что углы рассеяния β_k , вычисленные по этой формуле, оказываются очень большими. Это означает, что луч, прежде чем выйти наружу из шара, несколько раз поворачивается внутри капли. В действительности же углы рассеяния β_k должны лежать в пределах $0-\pi$. Поэтому из угла β_k следует вычесть полное число оборотов.

Вернемся к расчету интенсивности. Очевидно, что интенсивность рассеяния k -го производного луча должна вычисляться по формуле

$$S_k = \frac{dP_{\text{расс } k}}{dF_k} = \frac{dP}{dF_k} q_{n,r}^{k-2} d_{n,r}^2.$$

Так как

$$dF_k = 2\pi r^2 |\sin \beta_k| d\beta_k,$$

причем

$$d\beta_k = \frac{d\beta_k}{d\varphi} d\varphi = 2 \left(1 - \frac{k-1}{n} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi}\right) d\varphi,$$

то получаем

$$S_k = S_{\text{перв}} \frac{a^2}{4r^2} q_{n,r}^{k-2} d_{n,r}^2 \frac{\sin 2\varphi}{|\sin \beta_k| \left(1 - \frac{k-1}{n} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi}\right)}. \quad (9.5)$$

Из этого выражения видно, во-первых, что интенсивность убывает с увеличением номера производного луча k и, во-вторых, в некоторых направлениях рассеяния интенсивность S_k принимает бесконечное значение.

Это те направления, при которых знаменатель обращается в нуль, т. е.

$$1 - \frac{k-1}{n} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} = 0.$$

Исключив отсюда с помощью закона преломления угол ψ , находим

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{k^2 - 2k}}. \quad (9.6)$$

Это условие определяет положение радуг.

Видим, что в геометрической оптике интенсивность рассеяния в радугах становится бесконечно большой. В действительности же это не так. Для того чтобы получить точные значения S_k , нужно применить более строгую теорию — теорию дифракции электромагнитных волн на шаре.

Однако положение радуг определено правильно. Если чуть отойти от этих углов, геометрическая оптика даст для значений интенсивностей правильный результат.

Поскольку в формулу (9.5) входит показатель преломления n , который зависит от длины волны, то эта формула даст также объяснение спектру цветов радуги.

Далее, так как входящие в формулу (9.6) коэффициенты $q_{в,г}$ и $d_{в,г}$ имеют различные значения для одного и того же угла падения φ , то эта формула также объясняет, почему рассеянный каплей свет частично поляризован.

Индикатриса рассеяния k -го производного луча равна

$$f_{в,г}(\beta_k) = S_k r^2 = S_{перв} \frac{a^2}{4} q_{в,г}^{k-2} d_{в,г}^2 \frac{\sin 2\varphi}{|\sin \beta_k| \left(1 - \frac{k-1}{n} \cos \psi \right)}.$$

Полная интенсивность рассеянной электромагнитной энергии равна

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} S_k.$$

ЛЕКЦИЯ 10

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ АТМОСФЕРЫ

1. Введение.
2. Электрические параметры тропосферы.
3. Электрические параметры ионосферы.

1. Введение

Как уже было указано при изучении распространения электромагнитных волн в атмосфере, ее принято делить на три слоя — тропосферу, стратосферу и ионосферу.

Тропосфера и стратосфера в отличие от ионосферы образуют неионизированный слой атмосферы — нейтросферу.

Тропосферой называется нижний слой атмосферы, простирающийся над умеренными широтами до высот 10—12 км.

Над полюсами граница тропосферы проходит на несколько километров ниже, а над экватором — на несколько километров выше.

Тропосфера в отличие от других слоев атмосферы — стратосферы и ионосферы содержит большее количество паров воды. Тропосфера нагревается главным образом от поверхности земли и поэтому температура воздуха в ее пределах уменьшается с высотой. Выше 10—12 км после тонкого переходного слоя, называемого тропопаузой, в стратосфере температура с высотой возрастает, достигая максимума примерно на высоте 50 км, а затем до высот 70—80 км снова падает. Нагрев стратосферы происходит за счет сильного поглощения ультрафиолетового излучения солнца, содержащегося в этом слое небольшого количества газа озона (O_3). В стратосфере почти нет водяного пара. Тропосфера и стратосфера, как уже было сказано, образуют неионизированный слой атмосферы. Благодаря этому обстоятельству закономерности распространения электромагнитных волн в обоих слоях в ряде случаев

одинаковы. Однако в тропосфере благодаря значительно большей плотности воздуха и близости слоя к поверхности земли аэрологические и метеорологические процессы проходят намного интенсивнее, чем в стратосфере. Это обстоятельство делает процесс распространения электромагнитных волн в тропосфере значительно более сложным, чем в стратосфере. Ввиду этого изучение процесса распространения электромагнитных волн в ненонизированной части атмосферы можно ограничить рассмотрением распространения электромагнитных волн в тропосфере.

2. Электрические параметры тропосферы

Характер распространения электромагнитных волн в тропосфере определяется состоянием атмосферы и процессами, которые в ней происходят. Состояние атмосферы определяется такими физическими характеристиками, как температура, влажность и давление. Последние являются и метеорологическими параметрами тропосферы, сокращенно называемыми метеоэлементами.

Атмосферные процессы, с одной стороны, обусловлены меняющимся режимом нагревания тропосферы землей, в результате чего в атмосфере имеют место перемещения воздуха в вертикальном направлении. С другой стороны, в силу различия температур в различных областях земного шара имеют также место циркуляции воздушных масс и в горизонтальных направлениях. Все эти процессы сопровождаются конденсацией паров воды, появлением облаков, выпадением осадков и т. д.

При этом наряду с упорядоченным слоистым движением воздуха имеет место и беспорядочное турбулентное движение воздуха большей или меньшей интенсивности.

Совокупное влияние на распространение электромагнитных волн состояния атмосферы и атмосферных процессов или, короче говоря, влияние на распространение электромагнитных волн условий погоды является весьма сложным. Это влияние сказывается в одновременном проявлении эффектов, действие каждого из которых зависит от длины волны.

К этим эффектам относятся следующие:

- 1) искривление направления распространения электромагнитных волн;
- 2) рассеяние электромагнитных волн неоднородностями тропосферы;
- 3) рассеяние электромагнитных волн аэрозолями;
- 4) поглощение электромагнитных волн.

Исследование совместного действия этих эффектов и причин, их обуславливающих, весьма затруднительно.

Поэтому при изучении явлений распространения электромагнитных волн в тропосфере приходится каждый эффект рассматривать в отдельности и устанавливать главную причину, его вызывающую.

Для определения влияния метеорологических условий на характер распространения электромагнитных волн прежде всего необходимо установить связь между электрическими и метеорологическими параметрами тропосферы, каковыми, как уже было сказано, являются температура, влажность и давление.

Как уже было отмечено, тропосфера состоит из смеси газов. Каждый из составляющих атмосферу газов обладает своими электрическими параметрами — диэлектрической проницаемостью и проводимостью. Во всех диапазонах радиоволн, за исключением коротковолновой части УКВ и более коротких волн, проводимость газов тропосферы практически равна нулю. В диапазоне сантиметровых волн и короче начинает сказываться дисперсия вещества — зависимость электрических параметров от частоты, и в связи с этим проводимость газов атмосферы оказывается отличной от нуля.

При прохождении электромагнитной волны через газ последний под воздействием электрического поля E волны поляризуется. Вектор поляризации P , определяемый как дипольный момент единицы объема, пропорционален напряженности поля E , т. е.

$$P = \epsilon_0 \chi E, \quad (10.1)$$

где χ — электрическая восприимчивость вещества. Она связана с диэлектрической проницаемостью ϵ формулой

$$\chi = \epsilon - 1. \quad (10.2)$$

Согласно молекулярной теории вещества восприимчивость газа зависит от абсолютной температуры T , давления p и равна

$$\chi = \frac{Ap}{T}, \quad (10.3)$$

если молекулы не обладают постоянным дипольным моментом и

$$\chi = \frac{Bp}{T^2}, \quad (10.4)$$

если каждая молекула обладает постоянным дипольным моментом.

Постоянные A и B определяются из опыта.

Восприимчивость смеси газов подчиняется закону аддитивности, т. е. восприимчивость смеси газов равна сумме восприимчивостей отдельных газов, пропорциональных их парциальным давлениям.

Молекулы всех газов тропосферы, за исключением молекул водяного пара, не обладают постоянным электрическим дипольным моментом.

Молекула же водяного пара обладает также наряду с переменной составляющей дипольного момента, появляющейся под влия-

нием поля волны, и постоянной составляющей, существующей и при отсутствии поля. Поэтому восприимчивость тропосферы должна выражаться формулой

$$\chi = \epsilon - 1 = \frac{Ap}{T} + \frac{Be}{T^2}, \quad (10.5)$$

где

p — суммарное давление всех газов воздуха (в миллибарах), мб;

e — давление водяного пара, мб (1 мб = 0,001 физической атмосферы).

Постоянные A и B , определенные в результате многочисленных измерений, оказались равными

$$\begin{aligned} A &= 155,2 \cdot 10^{-6}; \\ B &= 7,46 \cdot 10^{-4}. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Поскольку диэлектрическая проницаемость воздуха зависит от метеорологических параметров T , p , e , а последние меняются от точки к точке, то отсюда следует, что тропосфера является неоднородной средой.

При этом, однако, как показывают измерения, диэлектрическая проницаемость ϵ в любой точке тропосферы во всех диапазонах радио и оптических волн, за исключением коротковолновой части сантиметрового диапазона миллиметровых и дециметровых волн, незначительно превышает единицу. Поскольку восприимчивость χ связана согласно формуле (10.2) с показателем преломления n соотношением

$$\chi = n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1) \approx 2(n - 1),$$

получаем

$$(n - 1)10^6 = \frac{77,6}{T} \left(p + \frac{4810e}{T} \right). \quad (10.7)$$

В результате метеорологических измерений получают относительную влажность s , которая равна отношению давления пара e к давлению насыщенного пара e_s при той же температуре T . По значению s и e_s , определяемому по справочнику, находят значение

$$e = se_s(T), \quad (10.8)$$

которое и подставляют в формулу (10.7). Если же известна удельная влажность воздуха q , определяемая как отношение плотности водяного пара к плотности воздуха или как число граммов водяного пара, приходящееся на 1 кг воздуха, то, учитывая, что

$$q = \frac{m_{\text{п}}}{m_{\text{в}}} \frac{e}{p} = 0,621 \frac{e}{p}$$

($m_n = 18$ — молекулярный вес водяного пара, $m_v = 29$ — средний молекулярный вес влажного воздуха), находим требуемое для формулы (10.7) значение e , равное

$$e = 1.61 pq. \quad (10.9)$$

Отметим, что удельная влажность воздуха представляет собой величину порядка 10^{-2} .

3. Электрические параметры ионосферы

Ионосфера, нижняя граница которой расположена на высоте 60 км, существенно влияет на распространение радиоволн. Благодаря ионосфере радиоволны распространяются вокруг поверхности земли на весьма большие расстояния, даже при очень малых мощностях передатчиков. Предположение о влиянии верхней части атмосферы на распространение радиоволн впервые было высказано в 1902 году после осуществления трансатлантической радиосвязи. Почти одновременно Кеннелл (Америка) и Хевисайд (Англия) предположили, что в верхних областях атмосферы имеется большое количество положительных и отрицательных ионов. Эти ионы образуют проводящий слой атмосферы, так называемую ионосферу, от которой и происходит отражение радиоволн.

Сведения об ионосфере получают различными методами. Эти методы можно разделить на три группы: методы, связанные с наблюдением различных естественных явлений, экспериментальные методы, осуществляемые при помощи радиозондирования, и методы прямых измерений физических характеристик.

Существует ряд явлений, наблюдение которых может дать сведения об ионосфере. К ним в первую очередь относится свечение ночного неба и полярные сияния. Изучение спектров полярных сияний и свечения ночного неба позволяют установить состав и температуру газов ионосферы.

Косвенные сведения об ионосфере можно также получить из астрономических наблюдений, например из наблюдений радиоизлучения Солнца, возникающего в полностью ионизированной атмосфере Солнца.

Радиозондирование, т. е. экспериментальные исследования ионосферы по тому влиянию, которое она оказывает на распространение радиоволн, производится с поверхности Земли, искусственных спутников Земли и ракет.

С запуском искусственных спутников Земли и ракет приобретают большое значение и прямые измерения физических характеристик ионосферы. Однако наиболее информативными для изучения влияния ионосферы на процесс распространения радиоволн являются методы радиозондирования ионосферы. Последние позволяют выявить непосредственно интегральные параметры ионосферы, определяющие процесс распространения радиоволн.

Существенно, и в этом мы убедимся далее, что влияние ионосферы на распространение электромагнитных волн зависит от частоты и оно тем меньше, чем короче волна.

Впервые теория распространения радиоволн в ионосфере была разработана в 1923 году в СССР М. В. Шулейкиным.

Итак, ионосфера представляет собой газ, который наряду с нейтральными молекулами и атомами содержит положительные и отрицательные ионы. При прохождении электромагнитной волны через ионосферу положительные и отрицательные ионы начинают двигаться в такт с изменением поля волны, образуя таким образом некоторый конвекционный ток. Можно считать, что ионосфера представляет собой квазинейтральный ионизированный газ, т. е. газ, в котором суммарный заряд всех положительных и отрицательных ионов равен нулю.

Отрицательные ионы — это электроны, положительные ионы — это атомы или молекулы газов без одного или нескольких электронов. Масса положительного иона водорода в 1840 раз больше массы электрона, а массы положительных ионов других газов в десятки тысяч раз больше массы электрона. Поэтому токаны, образованные положительными ионами, можно пренебречь по сравнению с токами, образованными электронами. Наряду с конвекционным током под влиянием поля волны возникает и ток смещения в вакууме. Следовательно, полная плотность тока в ионосфере \mathbf{J} равна сумме плотностей тока смещения $\mathbf{J}_{\text{см}}$ и конвекционного тока $\mathbf{J}_{\text{эл}}$:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{см}} + \mathbf{J}_{\text{эл}}. \quad (10.10)$$

Поле волны в фиксированной точке ионосферы можно представить в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (10.11)$$

Соответственно этому, плотность тока смещения равна

$$\mathbf{J}_{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = j\omega \epsilon_0 \mathbf{E}.$$

Электроны при отсутствии поля участвуют в тепловом движении; при наличии же поля волны на хаотическое, тепловое движение накладывается упорядоченное движение электронов, вызванное полем волны. Отличный от нуля ток в каком-либо направлении образуется упорядоченным движением электронов. Обозначив скорость этого движения электронов через \mathbf{v} , а их концентрацию, т. е. число электронов в единице объема, через N , для плотности конвекционного тока будем иметь выражение

$$\mathbf{J}_{\text{эл}} = e\mathbf{v}N,$$

где заряд электрона

$$e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}.$$

Полная плотность тока в ионосфере в заданной точке будет равна

$$\mathbf{J} = j\omega\epsilon_0\mathbf{E} + e\nu\mathbf{N}$$

и соответственно второе уравнение Максвелла представится в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = j\omega\epsilon_0\mathbf{E} + e\nu\mathbf{N}. \quad (10.12)$$

В этом уравнении неизвестна скорость движения \mathbf{v} электрона. Для ее определения воспользуемся уравнением движения электрона в поле \mathbf{E}

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\nu\mathbf{v} = e\mathbf{E}. \quad (10.13)$$

Здесь

m — масса электрона, причем

$$m = 9,106 \cdot 10^{-31} \text{ кг.}$$

ν — число соударений электрона с ионами, атомами и молекулами газа в единицу времени;

$m\nu\mathbf{v}$ — изменение количества движения электрона за единицу времени, так как при каждом соударении электрон теряет количество движения $m\nu$.

Далее делается существенное предположение, что длина волны значительно больше среднего расстояния между электронами, т. е.

$$\lambda \gg N^{-\frac{1}{3}}. \quad (10.14)$$

При этом ионосферу можно рассматривать как сплошную среду с определенными электрическими параметрами ϵ_a и σ .

Записывая уравнение (10.12) в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = j\omega\epsilon_a\mathbf{E}, \quad (10.15)$$

его решают совместно с уравнением движения (10.13) и получают

$$\sqrt{\epsilon} = n = \sqrt{1 - \frac{80,8N}{f^2}}; \quad \sigma = 7 \cdot 10^{-10} \frac{\nu}{f^2} N. \quad (10.16)$$

Параметры (10.16) определяют основные особенности распространения радиоволн в ионосфере; главным из которых является отражение радиоволн от ионосферного слоя.

В первом приближении концентрация электронов N зависит только от высоты. Примерный ход $N(z)$ показан на рис. 10.1. Отражение происходит на такой высоте z , где показатель преломления обращается в нуль. Из условия $n=0$ видно, что при этом

$$f = \sqrt{80,8N(z)},$$

и, поскольку $N(z)$ сначала растет с высотой, то, следовательно, чем больше частота

волны, тем выше происходит отражение.

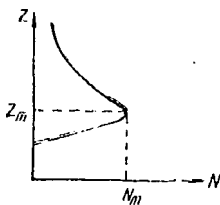


Рис. 10.1

Наибольшая частота, при которой происходит отражение от ионосферы, равна

$$f = \sqrt{80,8N_m}$$

Эта частота называется критической. Критическая частота в зависимости от состояния ионосферы лежит в пределах

$$4 \leq f_{кр} \leq 20 \text{ МГц.}$$

Хотя в оптическом диапазоне волн условие (10.14) не выполняется, из приведенных здесь выкладок можно сделать вывод о том, что ионосфера не должна влиять на распространение электромагнитных волн этого диапазона. Действительно, так как частота здесь очень высока, ионосфера для оптических волн прозрачна $n \approx 1$ и проходят они через нее без всякого ослабления $\sigma \approx 0$.

ЛЕКЦИЯ 11

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

1. Исходные положения о распространении электромагнитных волн в неоднородных средах.
2. Геометрооптическое приближение. Основные соотношения.
3. Уравнения эйконала и лучей.
4. Интегральный инвариант Лагранжа. Принцип Ферма.
5. Конгруэенция лучей и фокальные свойства.
6. Теорема Малюса и Дюпинна.

1. Исходные положения о распространении электромагнитных волн в неоднородных средах

В последующих лекциях будем изучать распространение электромагнитных волн в атмосфере.

Атмосфера — весьма сложная по своим электрическим свойствам среда. В первую очередь, это неоднородная среда. Факторы, обуславливающие неоднородность, различны в пределах атмосферы. Однако в большинстве случаев неоднородности таковы, что характер их влияния на распространение одинаков, независимо от того, в какой части атмосферы эти неоднородности имеют место. Ввиду этого в настоящей главе рассматриваются наиболее фундаментальные общие методы изучения распространения электромагнитных волн в неоднородной среде. При этом считается, как это в действительности и имеет место в подавляющем случае, что неоднородность среды обусловлена непрерывно меняющейся в пространстве комплексной диэлектрической проницаемостью. Тогда уравнения Максвелла принимают вид

$$\text{I. } \operatorname{rot} \mathbf{E} = -j\omega\mu_a \mathbf{H};$$

$$\text{II. } \operatorname{rot} \mathbf{H} = j\omega\epsilon'_a \mathbf{E};$$

$$\text{III. } \operatorname{div}(\epsilon'_a \mathbf{E}) = 0;$$

$$\text{IV. } \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Определим два наиболее важных случая, к которым в основном сводится изучение распространения электромагнитных волн в неоднородных средах:

- 1) распространение в плавно неоднородной среде;
- 2) распространение в неоднородной среде, где величина изменения $|\epsilon'_a|$, т. е. $|\Delta\epsilon'_a|$ мала по сравнению со средним значением $|\epsilon'_a|$.

В первом случае влияние неоднородности среды главным образом сказывается в том, что оно приводит к рефракции электромагнитных волн, т. е. к изменению направления их распространения. Наиболее адекватным методом изучения здесь является метод, близкий к применяемому в геометрической оптике.

Получающееся при этом решение уравнений Максвелла называется геометрикооптическим приближением.

Во втором случае влияние неоднородности среды сказывается в том, что оно приводит к рассеянию электромагнитных волн, к флуктуациям параметров волны — фазы, угла прихода и амплитуды. Адекватными методами изучения здесь являются методы теории возмущений и другие частные методы, которые в дальнейшем последовательно вкратце будут рассмотрены.

2. Геометрооптическое приближение. Основные соотношения

Итак, рассмотрим систему уравнений Максвелла (1) — (IV) в предположении, что комплексная диэлектрическая проницаемость, плавно, медленно меняется в пространстве. Произведем адекватное этому предположению преобразование этой системы. Из первых двух уравнений исключаем вектор \mathbf{H} и находим

$$(\text{grad div} - \text{rot rot})\mathbf{E} + k^2\epsilon'\mathbf{E} = \text{grad div}\mathbf{E}. \quad (11.1)$$

Учитывая вытекающее из уравнения (III) равенство

$$\text{div}\mathbf{E} = -\frac{\text{Egrad}\epsilon'_a}{\epsilon'_a} = -\frac{\text{Egrad}\epsilon'}{\epsilon'}$$

и векторное соотношение

$$(\text{grad div} - \text{rot rot})\mathbf{E} = \nabla^2\mathbf{E}$$

вместо (11.1) получаем

$$\nabla^2\mathbf{E} + k^2\epsilon'\mathbf{E} = -\text{grad}\left(\frac{\text{Egrad}\epsilon'}{\epsilon'}\right). \quad (11.2)$$

Это векторное уравнение обычно является исходным при решении задач о распространении электромагнитных волн в неоднородных средах с плавно изменяющейся в пространстве диэлектрической проницаемостью $\epsilon'_a = \epsilon'\epsilon_0$. Точный критерий медленности («критерий М») будет установлен в процессе решения задачи. Мы

убедимся, что при выполнении определяемого этим критерием условия медленности, правой частью уравнения (11.2) можно пренебречь. Воспользовавшись этим обстоятельством мы сразу, вместо уравнения (11.2) можем исходить из уравнения

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \epsilon' \mathbf{E} = 0. \quad (11.3)$$

Так как наличие проводимости σ среды приводит к априори хорошо известному эффекту поглощения электромагнитных волн, то для того, чтобы излишне не усложнять выкладки, сразу положим $\sigma = 0$ и будем считать, что $\epsilon' = \epsilon = n^2$, где n — зависящий от координат показатель преломления.

Векторное уравнение (11.3) можно представить в виде трех одинаковых скалярных уравнений для составляющих векторов напряженности поля E_x, E_y, E_z . Поэтому в дальнейшем вместо (11.3) будем оперировать одним скалярным уравнением

$$\nabla^2 U + k^2 n^2 U = 0. \quad (11.4)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$U(x, y, z) = A(x, y, z) e^{-ik\psi(x, y, z)} \quad (11.5)$$

и, следовательно, задача будет состоять в том, чтобы найти две скалярные функции $A(x, y, z)$ и $\psi(x, y, z)$, $A(x, y, z)$ — амплитуда волны; функция $\psi(x, y, z)$ $k = \varphi$ — фаза волны; функция $\psi(x, y, z)$ — называется эйконалом (эйконал — греческое слово εἰκων, означает «изображение»).

Для того чтобы найти эти функции, будем руководствоваться хорошо нами изученным принципом Гюйгенса—Френеля, точнее — вытекающим из него следствием о наличии области, существенной для распространения электромагнитных волн. Как известно, область, существенная для распространения электромагнитных волн в однородном пространстве, представляет собой вытянутый эллипсоид вращения, в фокусах которого расположены корреспондирующие пункты, причем этот эллипсоид тем более вытянут, чем сильнее выполняется неравенство

$$kr \gg 1, \quad (11.6)$$

где r — расстояние между пунктами.

Смысл произведения $kr = \varphi$ — фаза волны, поэтому неравенство (11.6) означает, что область, существенная для распространения, тем более вытянута, чем больше фаза волны.

Выполнение условия (11.6) влечет за собой два существенных следствия:

1. В пределах эллипсоида, существенного для распространения электромагнитных волн, поверхности равных фаз почти плоские, и, следовательно, большая ось эллипсоида перпендикулярна этим поверхностям.

2. В пределах указанного эллипсоида амплитуда по плоскости равной фазы почти не меняется и ее можно считать постоянной. Очевидно, что когда длина волны $\lambda = \frac{2\pi}{k} \rightarrow 0$, эти два следствия, поскольку эллипсоид, как следует из формулы (3.8) для размера сечения эллипсоида, превращается в линию, и приводят к геометрической оптике.

Учитывая эти соображения, мы сразу можем сделать следующие важные выводы о характере решения (11.5).

Выполнение условия

$$\varphi = k\psi \gg 1, \quad (11.7)$$

имеющего смысл требования, чтобы фаза волны была большой, должно повлечь за собой два следствия:

а) нормали к фронту волны, т. е. линии $\text{grad } \psi$ приобретают свойства лучей геометрической оптики;

б) поперечный по отношению к траекториям лучей лапласиан $\nabla_{\perp}^2 A$ должен равняться нулю:

$$\nabla_{\perp}^2 A = 0. \quad (11.8)$$

Ниже мы рассмотрим, к каким важным соотношениям приводят эти следствия.

3. Уравнения эйконала и лучей

В силу следствия «а», учитывая медленность изменения показателя преломления в пространстве, для небольшого отрезка Δl вдоль луча, в пределах которого n можно считать постоянным, должно иметь место равенство

$$kn\Delta l = k\Delta\psi,$$

или

$$n\Delta l = \Delta\psi.$$

Из этого равенства следует соотношение

$$\frac{\partial\psi}{\partial l} = |\text{grad } \psi| = n, \quad (11.9)$$

или

$$(\nabla\psi)^2 - n^2 = 0, \quad (11.10)$$

где

$$(\nabla\psi)^2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2.$$

Соотношение (11.10) называется уравнением эйконала.

Уравнение эйконала (11.10) — уравнение в частных производных, из которого непосредственно определяются поверхности равных фаз $k\psi(x, y, z) = \text{const}$. Однако чаще более удобно непосред-

ственно определять нормали к этим поверхностям, т. е. траектории лучей по так называемому уравнению луча. Уравнение луча можно весьма просто получить из уравнения эйконала.

Согласно (11.9) можем написать

$$\text{grad } \psi = l^0 n,$$

где l^0 — единичный вектор по касательной к лучу. Возьмем производную по длине l луча от обеих частей этого равенства:

$$\frac{\partial}{\partial l} \text{grad } \psi = \frac{\partial}{\partial l} (l^0 n).$$

Переставив в левой части этого равенства порядок дифференцирования, получаем

$$\text{grad } \frac{\partial \psi}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l} (l^0 n).$$

Снова воспользовавшись уравнением эйконала, получаем иско-
мое уравнение луча

$$\frac{\partial}{\partial l} (l^0 n) = \nabla n. \quad (11.11)$$

Если траектория луча найдена, эйконал по лучу находится по формуле

$$\psi = \int n(l) dl. \quad (11.12)$$

4. Интегральный инвариант Лагранжа. Принцип Ферма

Так как

$$\text{grad } \psi = n l^0,$$

то

$$\text{rot}(n l^0) = 0. \quad (11.13)$$

Применяя к (11.12) теорему Стокса

$$\oint_{l'} \text{rot}(n l^0) ds = \oint_{l'} n l^0 dl',$$

где l' — замкнутый контур, охватывающий поверхность S , получаем

$$\oint_{l'} n l^0 dl' = 0. \quad (11.14)$$

Это соотношение называется интегральным инвариантом Лагранжа. Оно означает, что интеграл

$$\int_{M_1}^{M_2} n l^0 dl',$$

взятый между двумя любыми точками M_1 и M_2 , не зависит от пути интегрирования.

Из интегрального инварианта Лагранжа нетрудно вывести принцип Ферма или иначе принцип кратчайшего оптического пути или еще принцип наименьшего времени.

Рассмотрим две близко расположенные поверхности равных фаз (рис. 11.1) и траекторию луча l .

Построим треугольник M_1M_2C и возьмем его в качестве замкнутого контура в интегральном инварианте Лагранжа. Получим

$$n\Delta l - n' \Gamma^0 \Delta l' = 0.$$

Поскольку $n' \Delta l' \geq n' \Gamma^0 \Delta l'$, то

$$n\Delta l - n' \Delta l' \leq 0$$

и

$$n\Delta l \leq n' \Delta l'.$$

Обобщая это соотношение на случай, когда M_1 и M_2 расположены на луче на каком угодно расстоянии, и рассматривая произ-

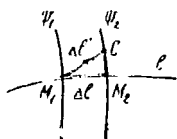


Рис. 11.1

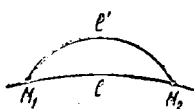


Рис. 11.2

вольную кривую l' с начальными точками M_1 и M_2 (рис. 11.2), можем написать

$$\int_{M_1}^{M_2} n dl \leq \int_{M_1}^{M_2} n dl', \quad (11.15)$$

т. е. интеграл имеет минимальное значение лишь тогда, когда кривая l' совпадает с траекторией луча. Это и есть принцип кратчайшего оптического пути.

Так как фазовая скорость равна

$$v = \frac{c}{n},$$

то можно записать

$$\int_{M_1}^{M_2} n dl' = c \int_{M_1}^{M_2} \frac{dl'}{v} = c \int_{M_1}^{M_2} dt$$

и, следовательно, получить принцип Ферма в том виде, как он был сформулирован самим Ферма — из всевозможных траекторий между точками M_1 , M_2 свет проходит по той траектории, при которой затрачиваемое время на ее прохождение минимально.

Заметим, что принцип Ферма иногда используется для вывода уравнения луча. При этом приходится применять вариационное исчисление.

Однако примененный в данной лекции вывод уравнения луча из уравнения эйконала более простой, и поэтому предпочтительней.

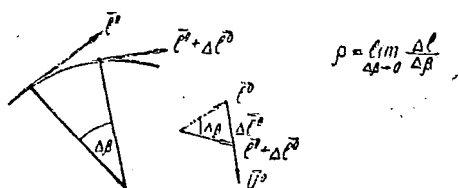


Рис. 11.3

Выведем еще выражение для радиуса кривизны луча, который, как и для всякой кривой, определяется соотношением (рис. 11.3).

$$\rho = \lim_{\Delta \beta \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta \beta}.$$

Учитывая, что

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta l^0}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \beta}{\Delta l} \mathbf{u}^0 = \frac{\mathbf{u}^0}{\rho}, \quad (11.16)$$

где \mathbf{u}^0 — предельный единичный вектор векторного приращения Δl^0 (рис. 11.3), уравнение луча (11.11) можем представить в виде

$$\frac{\partial l^0}{\partial l} n + l^0 \frac{\partial n}{\partial l} = \frac{\mathbf{u}^0}{\rho} n + l^0 \frac{\partial n}{\partial l} = \nabla n. \quad (11.17)$$

Умножая обе части этого уравнения векторно на l^0 , получим

$$\frac{[l^0, \mathbf{u}^0] n}{\rho} = [l^0, \nabla n]. \quad (11.18)$$

Так как l^0 и \mathbf{u}^0 — единичные векторы, слева имеем вектор, величина которого равна $\frac{n}{\rho}$, а справа вектор, величина которого равна $|\nabla n| \sin \varphi$, где φ — угол между векторами l^0 и ∇n .

Отсюда приходим к равенству

$$\frac{n}{\rho} = |\nabla n| \sin \varphi. \quad (11.19)$$

5. Конгруэнция лучей и фокальные свойства

Уравнение (11.13) при $n = \text{const}$ принимает вид

$$\text{rot } l^0 = 0. \quad (11.20)$$

Можно уравнение (11.13) и при переменном n преобразовать к такому виду, при котором эта переменная исключена.

В самом деле умножим скалярно обе части уравнения

$$\text{rot}(nl^0) = n \text{rot } l^0 + [\text{grad } n, l^0] = 0$$

на l^0 и затем произведем циклическую перестановку в смешанном произведении и получим

$$l^0 \text{rot } l^0 = 0, \quad (11.21)$$

т. е. векторы l^0 и $\text{rot } l^0$ взаимно перпендикулярны.

В геометрической оптике применяется понятие *конгруэнция*.

Система кривых, заполняющих некоторую часть пространства так, что через каждую точку данной области в общем случае проходит одна кривая, называется конгруэнцией. Говорят, что конгруэнция *нормальна*, если существует семейство поверхностей, пересекающих каждую кривую под прямым углом, если такого семейства нет, то говорят о *косой* конгруэнции. Мы же всегда имеем дело с нормальной конгруэнцией, поскольку исходим именно из наличия фронта волны, нормалью к которой в каждой точке является луч.

Если все линии, составляющие конгруэнцию, имеют вид прямых, то такая конгруэнция называется *прямолинейной*.

Соотношения (11.21) и (11.20) являются необходимыми и достаточными условиями, чтобы конгруэнция являлась соответственно *нормальной и нормальной прямолинейной*.

Рассмотрим две соседние кривые конгруэнции, пересекающие поверхность $\psi(x, y, z) = \text{const}$ в точках на поверхности с координатами u, v и $u+du$ и $v+dv$ и выясним, имеются ли на этих кривых такие точки, расстояние между которыми второго или более высокого порядка малости. Точки подобного типа называются *фокусами* и удовлетворяют уравнению

$$r(u, v, l) = r(u+du, v+dv, l+dl),$$

где u, v, l — лучевые координаты (рис. 11.4), откуда, разлагая в ряд, получим

$$r_u du + r_v dv + r_l dl = 0. \quad (11.22)$$

Из этого условия следует, что векторы r_u, r_v и l^0 компланарны, т. е. смешанное произведение этих векторов

$$[r_u, r_v, l^0] = 0. \quad (11.23)$$

Следовательно, если g есть полином степени m , а поскольку $l^0 = \frac{dr}{dl}$, то (11.23) представляет собой уравнение относительно l степени $3m-1$. В частности, если конгруэнция прямолинейна, то g

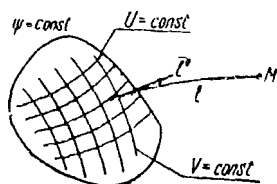


Рис. 11.4

каждом своем фокусе. Плоскость, касающаяся фокальной поверхностью в какой-либо точке ее, называется *фокальной плоскостью*.

линейная функция l и, следовательно, на каждом луче прямолинейной конгруэнции имеются два фокуса.

Если u и v принимают всевозможные значения, то геометрическое место фокусов образует поверхность, описываемую уравнением (11.23) и называемую *фокальной* или *каустической* поверхностью. Любая кривая данной конгруэнции касается фокальной поверхности в

6. Теорема Малюса и Дюпина

Рассмотрим лучи в однородной среде: если все они имеют общую точку, например исходят из точечного источника, то говорят, что лучи образуют *гомоцентрический пучок*. Такой пучок образует нормальную конгруэнцию, поскольку каждый луч пучка пересекает под прямым углом сферическую поверхность, центр которых расположен в точке пересечения лучей.

Теорема Малюса и Дюпина формулируется следующим образом. *Нормальная прямолинейная конгруэнция остается нормальной после любого числа преломлений и отражений*. Эту теорему достаточно доказать для одного акта преломления.

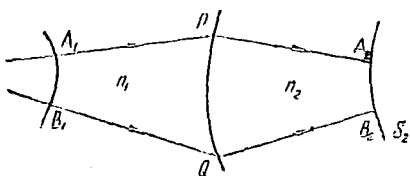


Рис. 11.5

Выбираем точку B_2 (рис. 11.5), такую, чтобы имело место равенство длин оптических путей

$$[A_1PA_2] = [B_1QB_2]. \quad (11.24)$$

Покажем, что переломленный луч QB_2 перпендикулярен поверхности S_2 . Вычисляем интегральный инвариант Лагранжа

$$\int_{A_1PA_2} n dl + \int_{A_2B_2} n l^0 dV + \int_{B_2QB_1} n dl + \int_{B_1A_1} n l^0 dV = 0.$$

На основании (11.24) можно написать

$$\int_{A_1 P A_2} n dl + \int_{B_2 Q B_1} n dl = 0.$$

Кроме того, поскольку $\int_{B_1 A_1} n l^0 dl' = 0$, то отсюда следует, что

$$\int_{A_2 B_2} n l^0 dl' = 0.$$

Полученное соотношение должно выполняться для любого отрезка кривой. А это может быть только в том случае, если

$$l^0 dl' = 0,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕКЦИЯ 12

АМПЛИТУДА ВОЛНЫ И ЗАКОН ИНТЕНСИВНОСТЕЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

1. Уравнение для амплитуды и его решение.
2. Замечание о ВКБ-приближении.
3. Закон интенсивностей в приближении геометрической оптики.

1. Уравнение для амплитуды и его решение

Подставляя выражение (11.5) в уравнение (11.4), получаем

$$\nabla^2 A - 2jk \nabla A \nabla \psi - jk A \nabla^2 \psi + k^2 A [n^2 - (\nabla \psi)^2] = 0. \quad (12.1)$$

Учитывая уравнение эйконала вместо (12.1), находим

$$\nabla^2 A - 2jkn \frac{\partial A}{\partial l} - jk A \operatorname{div}(\mathbf{l}^0 n) = 0. \quad (12.2)$$

Очевидно, что это уравнение можно представить в ортогональных криволинейных лучевых координатах, в которых поверхности равных фаз образуют одно из семейств координатных поверхностей, а лучи являются координатными линиями l , ортогональными к этим поверхностям. Коэффициент Ламэ этих координатных линий, как следует из равенства

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l} = \mathbf{l}^0,$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки на луче относительно неподвижной начальной точки, равен единице. Поэтому можно написать

$$\nabla^2 A = \nabla_{\perp}^2 A + \frac{\partial^2 A}{\partial l^2},$$

откуда в силу равенства (11.8)

$$\nabla^2 A \approx \frac{\partial^2 A}{\partial l^2}$$

и вместо уравнения (12.2) получаем

$$\frac{\partial^2 A}{\partial l^2} - 2jkn \frac{\partial A}{\partial l} - jkA \operatorname{div}(l^0 n) = 0. \quad (12.3)$$

Это уравнение для удобства сравнения порядка величин слагаемых представим в виде

$$\frac{1}{knA} \frac{\partial^2 A}{\partial l^2} - 2j \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial l} - j \frac{1}{n} \operatorname{div}(l^0 n) = 0. \quad (12.4)$$

Слагаемое $\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial l}$ имеет размерность, обратную длине и определяет масштаб L изменения амплитуды A вдоль луча, т. е.

$$\left| \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial l} \right| \sim \frac{1}{L}, \quad (12.5)$$

откуда следует, что

$$\left| \frac{\partial A}{\partial l} \right| \sim \frac{A}{L},$$

$$\left| \frac{\partial^2 A}{\partial l^2} \right| \sim \frac{1}{L} \frac{\partial A}{\partial l} \sim \frac{A}{L^2}.$$

Следовательно, первое слагаемое в уравнении (12.4) имеет порядок величины

$$\left| \frac{1}{knA} \frac{\partial^2 A}{\partial l^2} \right| \sim \frac{1}{knL^2}. \quad (12.6)$$

Сравнивая порядки величин первого и второго слагаемых (12.4), учитывая (12.5) и (12.6), заключаем, что если выполняется условие

$$\frac{1}{knL} \ll 1, \quad (12.7)$$

то первым слагаемым можно пренебречь.

Но при этом условии, как видно из уравнения (12.4), порядок величины $\frac{1}{L}$ полностью определяется третьим слагаемым, т. е.

$$\frac{1}{L} \sim \left| \frac{1}{n} \operatorname{div}(l^0 n) \right|. \quad (12.8)$$

Учитывая это соотношение, вместо (12.7) можем записать

$$\delta = \left| \frac{1}{kn^2} \operatorname{div}(\mathbf{l}^0 n) \right| \ll 1. \quad (12.9)$$

Смысл этого критерия — требование достаточно медленного изменения показателя преломления n в пространстве («критерий М»).

Если условие (12.9) выполнено, то вместо уравнения (12.3) получаем

$$2 \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial l} + \frac{1}{n} \operatorname{div}(\mathbf{l}^0 n) = 0. \quad (12.10)$$

Прежде чем перейти к решению этого уравнения, возвратимся к исходному уравнению (11.2) и убедимся, что если имеет место неравенство (12.9), правой частью этого уравнения действительно можно пренебречь. Для этого установим порядок величин, учитывая, что

$$\operatorname{grad} \left(\frac{\mathbf{E} \operatorname{grad} \epsilon'}{\epsilon'} \right) = 2 \operatorname{grad} \left(\frac{\mathbf{E} \operatorname{grad} n}{n} \right).$$

Аналогично тому, как это было сделано выше, получаем

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{grad} \left(\frac{\mathbf{E} \operatorname{grad} n}{n} \right) \right| &\approx \left| \operatorname{grad} \left(A e^{-jk\psi} \frac{\operatorname{grad} n}{n} \right) \right| \sim \\ &\sim \frac{1}{L} |\operatorname{grad}(A e^{-jk\psi})| \sim \frac{1}{L} \left| \frac{\partial A}{\partial l} + kA \frac{\partial \psi}{\partial l} \right| \sim \\ &\sim \frac{A}{L} \left(\frac{1}{L} + kn \right) = A n^2 k^2 \left(\frac{1}{k^2 n^2 L^2} + \frac{1}{knL} \right) = A n^2 k^2 (\delta + \delta^2). \end{aligned}$$

Сравнивая величину $n^2(\delta + \delta^2)$ со слагаемыми уравнения эйконала, видим, что при выполнении критерия (12.9) правой частью уравнения (11.2) действительно можно пренебречь.

Решение уравнения (12.10), как легко видеть, таково:

$$A = A_0 \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{div}(\mathbf{l}^0 n)}{n} dl \right\}. \quad (12.11)$$

Это выражение для амплитуды совместно с решением уравнения эйконала или решением уравнения луча и определяет приближение геометрической оптики. Это приближение, таким образом, справедливо при выполнении условий (11.7) и (12.9) («критерия М»).

Рассмотрим частные случаи.

Пусть среда однородная, т. е. $n = n_0 = \text{const}$ и излучатель точечный. Тогда в силу сферической симметрии эйконал равен

$$\psi = n_0 r$$

и

$$\operatorname{div}(\mathbf{l}^0 n) = \operatorname{div}(r^0 n_0) = n_0 \operatorname{div} r^0 = \frac{2n_0}{r};$$

$$\int \frac{1}{n} \operatorname{div}(\mathbf{l}^0 n) dl = 2 \int \frac{dr}{r} = 2 \ln r,$$

т. е.

$$A = \frac{A_0}{r}; \quad u = A e^{-ik\psi} = \frac{A_0}{r} e^{-ikr},$$

как и следовало ожидать.

Рассмотрим теперь волновой процесс в ограниченной области неоднородной среды, удаленной от источника, причем размеры этой области значительно меньше ее расстояния до источника. Тогда изменение амплитуды A , обусловленное расходимостью, т. е. фактором $\frac{1}{r}$, будет ничтожно малым и все ее изменение будет происходить только за счет неоднородности среды. Пусть при этом показатель преломления зависит только от одной прямоугольной координаты, например вдоль оси z , направление которой совпадает с направлением распространения волны. Тогда

$$\frac{1}{n} \operatorname{div}(\mathbf{l}^0 n) = \frac{1}{n} \frac{dn}{dz}$$

и амплитуда согласно формуле (12.11) будет равна

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{n}}. \quad (12.12)$$

Следовательно, решение уравнения (11.4), которое в этом случае превращается в уравнение

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + k^2 n^2(z) U = 0, \quad (12.13)$$

будет

$$U(z) = A(z) e^{-ik\psi(z)} = \frac{A_0}{\sqrt{n(z)}} e^{-ik \int n dz}. \quad (12.14)$$

2. Замечание о ВКБ-приближении

Решение (12.14) одномерного волнового уравнения (12.13) называется ВКБ (более точно ДВКБ), — приближением, по начальным буквам фамилий авторов, впервые его получивших (Джефрис — 1923 г., Венцель, Крамерс, Бриллюэн, 1926 г.).

Метод получения решения (12.14) непосредственно из одномерного уравнения (12.13) формально сводится к следующему. Искомое решение представляется выражением

$$u = A e^{-ik\psi(z)} \quad (12.15)$$

и функция $\psi(z)$ ищется в виде асимптотического ряда, разложенного по параметру $\frac{1}{jk}$, т. е.

$$\psi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{jk}\right)^m \psi_m(z). \quad (12.16)$$

Далее выражения (12.15) и (12.16) подставляются в уравнение (12.13) и путем приравнивания нулю коэффициентов при одинаковых степенях $\frac{1}{k}$ последовательно определяются искомые функции $\psi_m(z)$. Устанавливается критерий медленности («критерий М») изменения показателя преломления, аналогичный критерию (12.9). Этот критерий имеет смысл требования, чтобы $n(z)$ почти не менялось на протяжении нескольких длин волн в среде. Выполнение этого критерия позволяет ограничиться первыми двумя членами ряда (12.16) и получить формулу (12.14). При этом возможно и второе решение уравнения (12.13), имеющее смысл обратной волны.

В заключение этого пункта отметим существенное отличие физического смысла геометрического приближения решения уравнения (12.14), полученного на основе принципа Гюйгенса-Френеля от ВКБ-приближения. Геометрическое приближение решения уравнения (12.14) определяет собой плоскую волну только в пределах области, существенной для распространения, превращающейся в луч при $\lambda \rightarrow 0$. Это плоская волна только вдоль траектории луча.

В ВКБ-приближении же как в предельном случае при $\lambda \rightarrow 0$, так и при любом λ речь идет о плоской волне во всем неограниченном пространстве. Это отличие обусловлено тем, что в описанном выше геометрическом приближении учитывается источник. В методе же ВКБ источник игнорируется с самого начала и в связи с этим здесь луч — это направление распространения волны.

3. Закон интенсивностей в геометрической оптике

В свое время в курсе ТЭМП для плоской волны в однородной изотропной среде было выведено соотношение

$$S = \omega v z^0,$$

где

z^0 — направление распространённой волны;

ω — плотность электромагнитной энергии;

v — фазовая скорость распространения волны.

В геометрическом приближении для неоднородной изотропной среды имеет место аналогичное соотношение

$$\mathbf{S} = \omega v \mathbf{l}^0,$$

где \mathbf{l}^0 — направление по лучу.

Докажем это:

$$E = \frac{A_0}{\sqrt{n}} e^{i(\omega t - k j n d t)},$$

$$\omega = \frac{\epsilon_a |E|^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{A_0^2}{n} \epsilon_a;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}} \frac{A_0^2}{n} \mathbf{l}^0 = \frac{1}{2} \frac{A_0^2}{n} \frac{V_{\epsilon_a} V_{\epsilon_a}}{V_{\mu_a \epsilon_a}} \mathbf{l}^0 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\epsilon_a A_0^2}{n} \frac{c}{n} \mathbf{l}^0 = \omega v \mathbf{l}^0, \end{aligned}$$

поскольку

$$v = \frac{c}{n}.$$

Назовем

$$S = I$$

интенсивностью света (волны) и запишем

$$S = I^0.$$

Закон сохранения энергии согласно теореме Пойнтинга в дифференциальной форме запишется так:

$$\operatorname{div}(I^0) = 0.$$

Рассмотрим лучевую трубку, ограниченную площадками dS_1 и dS_2 (рис. 12.1).

Применим теорему Остроградского—Гаусса к полученному соотношению и получим

$$\oint_S (I^0) dS = 0.$$

Поскольку векторные линии I^0 параллельны боковой поверхности трубки и перпендикулярны торцевым поверхностям, то находим

$$I_1 dS_1 = I_2 dS_2,$$

то есть величина $I dS$ вдоль лучевой трубки остается постоянной. Это соотношение выражает закон интенсивностей в приближении геометрической оптики.

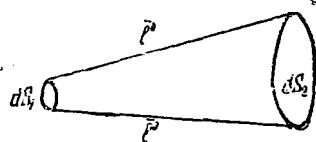


Рис. 12.1

ЛЕКЦИЯ 13

РЕФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АТМОСФЕРЕ

1. Уравнение луча в сферически слоистой атмосфере.
2. Эйконал для плоско слоистой атмосферы.
3. Радиус кривизны луча в сферически слоистой атмосфере.
4. Эквивалентный радиус Земли.

1. Уравнение луча в сферически слоистой атмосфере

Атмосферу в первом приближении можно считать сферически слоистой и полагать, что ее показатель преломления зависит только от высоты

$$n = n(z) \text{ или } n = n(r),$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из центра Земли (рис. 13.1).

Умножим векторно обе части уравнения луча (11.11) на \mathbf{r} , получим

$$\left[\mathbf{r}, \frac{\partial}{\partial l} (l^0 n) \right] = 0.$$

Но так как

$$\frac{\partial}{\partial l} [\mathbf{r}, n l^0] = \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l}, n l^0 \right] + \left[\mathbf{r}, \frac{\partial}{\partial l} (l^0 n) \right]$$

и поскольку вектор $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l}$ имеет направление, касательное к лучу, т. е. коллинеарен вектору l^0 (рис. 13.1), то

$$\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l}, n l^0 \right] = 0$$

и

$$\left[r, \frac{\partial}{\partial l}(nI^0) \right] = \frac{\partial}{\partial l}[r, nI^0] = 0. \quad (13.1)$$

Из этого уравнения следует, что траектория луча есть плоская кривая и, кроме того,

$$nr \sin \varphi = \text{const}, \quad (13.2)$$

где φ — угол падения луча на слой (рис. 13.2) или, введя угол скольжения $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, имеем

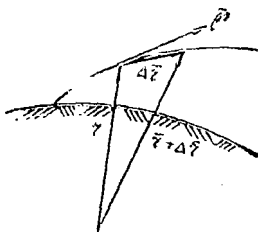


Рис. 13.1

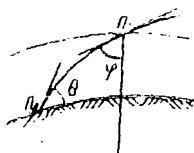


Рис. 13.2

$$nr \cos \theta = \text{const}.$$

Учитывая, что на поверхности Земли (рис. 13.2) $n = n_0$, $\theta = \theta_0$ и $r = a$, получаем

$$nr \cos \theta = n_0 a \cos \theta_0. \quad (13.3)$$

Это есть проинтегрированное уравнение луча (11.11) для сферически слоистой атмосферы.

Для плоскослойной атмосферы $a = \infty$ и уравнение (13.3) принимает вид

$$n \cos \theta = n_0 \cos \theta_0. \quad (13.4)$$

2. Эйконал для плоскослойной атмосферы

Найдем выражение для эйконала ψ и амплитуды волны, считая для упрощения выкладок атмосферу плоскослойной.

Из (13.4)

$$\cos \theta = \frac{q}{n}; \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{q}{n}\right)^2},$$

где $q = n_0 \cos \theta_0 = \text{const}$.

Как видно из рис. 13.3,

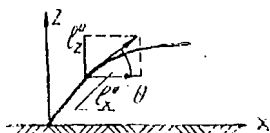


Рис. 13.3

$$l_x^0 = \cos \theta = \frac{1}{|\nabla\psi|} \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{n} \frac{\partial\psi}{\partial x};$$

$$l_z^0 = \cos \varphi = \frac{1}{|\nabla\psi|} \frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{1}{n} \frac{\partial\psi}{\partial z},$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = n \cos \theta = q;$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = n \cos \varphi = \sqrt{n^2 - q^2}.$$

Поскольку $d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial z} dz = q dx + \sqrt{n^2 - q^2} dz$, получаем

$$\psi = qx + \int \sqrt{n^2 - q^2} dz. \quad (13.5)$$

Определяем амплитуду A :

$$\operatorname{div}(l^0 n) = \frac{\partial}{\partial x}(n \cos \theta) + \frac{\partial}{\partial z}(n \cos \varphi) = \frac{\partial}{\partial z}(n \cos \varphi);$$

$$\int \frac{1}{n} \operatorname{div}(l^0 n) dl = \int \frac{1}{n \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial z}(n \cos \varphi) dz = \\ = \ln(n \cos \varphi) - \ln \sqrt{n^2 - q^2}.$$

Таким образом, согласно (12.11)

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{n^2 - q^2}} \quad (13.6)$$

и соответственно

$$U(x, z) = \frac{A_0}{\sqrt{n^2 - q^2}} e^{-jk(qx + \int \sqrt{n^2 - q^2} dz)} \quad (13.7)$$

Выпишем в явном виде критерий (12.9) применительно к решению (13.7)

$$\delta = \left| \frac{1}{kn^2} \operatorname{div}(l^0 n) \right| = \left| \frac{1}{kn^2} \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{n^2 - q^2} \right| \ll 1. \quad (13.8)$$

3. Радиус кривизны луча в сферически слоистой атмосфере

Считая радиус кривизны луча положительным, если он направлен вниз, учитывая, что ось z направлена вверх, согласно (11.19) можем написать

$$\rho = \frac{n}{\cos \theta \frac{dn}{dz}} = \frac{n^2 r}{n r \cos \theta \frac{dn}{dz}} = \frac{n^2 r}{n_0 a \cos \theta_0 \frac{dn}{dz}}$$

Так как в пределах тропосферы

$$\frac{r}{a} = \frac{a+z}{a} \approx 1, \quad \frac{n^2}{n_0} \approx 1,$$

то

$$\rho = - \frac{1}{\frac{dn}{dz} \cos \theta_0} \quad (13.9)$$

Если $\theta_0 = 0$, то

$$\rho = - \frac{1}{\frac{dn}{dz}}, \quad (13.10)$$

т. е. чем больше градиент показателя преломления по высоте, тем меньше радиус кривизны луча, тем больше искривление последнего. Луч, направленный под углом $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, т. е. вертикально вверх, как следует из выражения (13.9), вовсе не искривляется, его радиус кривизны равен бесконечности.

Представляет интерес вычислить радиус кривизны луча в нормальной тропосфере.

Нормальной называют тропосферу при таком ее состоянии, когда температура и давление водяного пара с высотой убывает по линейному закону соответственно выражениям

$$T = 288 - 0,0065 z;$$

$$e = 10 - 0,0035 z,$$

т. е. на каждый километр температура убывает на 6,5°C, а давление водяного пара — на 3,5 мб, при этом относительная влажность не меняется по высоте и равна 60%.

Что же касается давления p , то оно с высотой всегда изменяется в соответствии с барометрической формулой, которая для изотермической атмосферы имеет следующий вид:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right),$$

где

$M = 29$ — средний молекулярный вес газов, входящих в состав атмосферы;

$g = 981$ — ускорение силы тяжести, см/с²;

$R = 8,31 \cdot 10^7$ эрг/град моль — универсальная газовая постоянная;

T — абсолютная температура воздуха.

Для неизотермической атмосферы, т. е. когда температура в ней зависит от высоты, давление меняется с высотой согласно следующей формуле:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{Mg}{R} \int_0^z \frac{dz}{T(z)}\right).$$

В нормальной тропосфере $p_0 = 1023,2$ мб (суммарное давление сухого воздуха при $t^0 = 15^\circ\text{C}$ и давление водяного пара $e = 10$ мб).

Поскольку при этих данных, т. е. в нормальной тропосфере,

$$\frac{dn}{dz} = -4 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\text{м}},$$

то радиус кривизны луча

$$\rho = 25000 \text{ км} \approx 4a.$$

Искривление луча в нормальной тропосфере называют нормальной рефракцией. Такое искривление луча, при котором $\rho \ll a$, называют сверхрефракцией.

Очевидно, что искривленный луч попадает на землю, если $\rho < a$. Если луч направлен горизонтально ($\theta_0 = 0$), то это неравенство примет вид

$$\frac{dn}{dz} < -\frac{1}{a} = -1,57 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{м}}.$$

Величину $\frac{dn}{dz} = -1,57 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{м}}$ называют критическим вертикальным градиентом показателя преломления воздуха.

4. Эквивалентный радиус Земли

Учет рефракции электромагнитных волн, распространяющихся над сферической землей, можно произвести, введя в соответствующие формулы вместо истинного так называемый эквивалентный радиус Земли.

Эквивалентный радиус Земли вводится в том случае, если градиент показателя преломления по высоте является величиной постоянной, т. е.

$$\frac{dn}{dz} = \text{const} \quad (13.11)$$

и, следовательно,

$$n = n_0 + \frac{dn}{dz} z.$$

Тогда уравнение луча принимает вид

$$\left(n_0 + \frac{dn}{dz} z \right) (a + z) \cos \theta = n_0 a \cos \theta_0,$$

или

$$\left(1 + \frac{1}{n_0} \frac{dn}{dz} z \right) \left(1 + \frac{z}{a} \right) \cos \theta = \cos \theta_0.$$

Учитывая, что

$$\frac{z}{a} \ll 1, \quad (13.12)$$

получаем

$$\left[1 + \left(\frac{1}{n_0} \frac{dn}{dz} + \frac{1}{a} \right) z \right] \cos \theta = \cos \theta_0. \quad (13.13)$$

Сравнивая это выражение с уравнением луча в предположении, что тропосфера однородна, т. е. с уравнением

$$\left(1 + \frac{z}{a} \right) \cos \theta = \cos \theta_0, \quad (13.14)$$

можно сделать вывод, что в случае $\frac{dn}{dz} = \text{const}$ тропосферу можно рассматривать как однородную среду с постоянным значением показателя преломления, если вместо истинного радиуса ввести эквивалентный радиус Земли a_3 , определяемый соотношением

$$\frac{1}{a_3} = \frac{1}{n_0} \frac{dn}{dz} + \frac{1}{a} \approx \frac{1}{a} + \frac{dn}{dz}. \quad (13.15)$$

Учитывая, что при $\theta_0 = 0$

$$\frac{dn}{dz} = -\frac{1}{\rho},$$

получаем

$$\frac{1}{a_3} = \frac{1}{a} - \frac{1}{\rho}. \quad (13.16)$$

Например, при нормальной рефракции

$$\frac{1}{a_3} = \frac{1}{a} - \frac{1}{4a} = \frac{3}{4a}, \quad a_3 = \frac{4}{3} a = 8470 \text{ км}. \quad (13.17)$$

Таким образом, при выполнении условия (13.11) рефракцию можно учесть и при этом луч считать прямой линией, если в формулах по распространению электромагнитных волн истинный радиус Земли a заменить эквивалентным $a_э$. Так, например, предельная дальность прямой видимости R_0 при заданных высотах соответствующих пунктов h и z определяется формулой

$$R_0 = \sqrt{2a} (\sqrt{h} + \sqrt{z})$$

или, если выразить R_0 в км; а высоты h и z в метрах — $R_{0км} = 3,57(\sqrt{h_{м}} + \sqrt{z_{м}})$. При учете же рефракции

$$R_0 = \sqrt{2a_э} (\sqrt{h} + \sqrt{z}), \quad (3.18)$$

причем при $a=8470$ км

$$R_{0км} = 4,1(\sqrt{h_{м}} + \sqrt{z_{м}}), \quad (13.19)$$

ЛЕКЦИЯ 14

РЕФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АТМОСФЕРЕ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

1. Приведенный показатель преломления и модуль приведенного показателя преломления (индекс рефракции).
2. Виды рефракции.

1. Приведенный показатель преломления и модуль приведенного показателя преломления (индекс рефракции)

Во многих случаях удобно изучать рефракцию радиоволн, рассматривая поверхность сферической земли как плоскость. Для этой цели вводят понятие приведенного показателя преломления, которое появляется в результате следующих соображений. Если бы поверхность Земли была плоской, т. е. $a = \infty$, то уравнение луча приняло бы вид

$$n \cos \theta = n_0 \cos \theta_0.$$

Отсюда следует, что положив в уравнении луча

$$n \left(1 + \frac{z}{a} \right) = N \approx n + \frac{z}{a}, \quad (14.1)$$

получим

$$N \cos \theta = n_0 \cos \theta_0, \quad (14.2)$$

и, следовательно, уравнение луча над сферической землей превращается в уравнение луча над плоской землей с приведенным показателем преломления N . Иногда в литературе N называют модифицированным показателем преломления. Так как величина N мало отличается от единицы и с ней неудобно оперировать, то вво-

дят величину, ее заменяющую, — модуль приведенного показателя преломления или иначе индекс рефракции M по формуле

$$M = (N-1)10^6 = \left(n - 1 + \frac{z}{a} \right) 10^6. \quad (14.3)$$

Удобство введения модуля приведенного показателя преломления состоит в том, что по виду кривой $M(z)$ можно сразу установить характер рефракции.

Численные значения M называют « N -единицами».

Отметим, что на поверхности земли M меняется примерно в пределах от 260 до 460 N -единиц.

2. Виды рефракции

Как было показано ранее, радиус кривизны луча, а следовательно, и степень искривления луча, рефракция, определяются градиентом показателя преломления по высоте. Для наглядности целесообразно радиус кривизны луча сравнить с радиусом Земли.

Исследуем, как изменяется отношение $\frac{\rho}{a}$ с изменением градиента показателя преломления или величины M . Согласно (14.3)

$$\frac{dM}{dz} = \left(\frac{dn}{dz} + \frac{1}{a} \right) 10^6. \quad (14.4)$$

Предположим, что луч направляется по линии горизонта, т. е. $\theta_3 = 0$; приняв во внимание (13.10), вместо (14.4) можем написать

$$\frac{dM}{dz} = - \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{a} \right) 10^6 = \frac{10^6}{a}, \quad (14.5)$$

откуда находим

$$\frac{\rho}{a} = \frac{1}{1 - \frac{a}{10^6} \frac{dM}{dz}}. \quad (14.6)$$

Обозначая

$$\frac{a}{10^6} \frac{dM}{dz} = x,$$

(14.6) перепишем в виде

$$\frac{\rho}{a} = \frac{1}{1-x}. \quad (14.7)$$

Эта функция изображена на рис. 14.1.

Значения $\frac{\rho}{a} > 0$ соответствуют положительной рефракции;

значения $\frac{\rho}{a} < 0$ соответствуют отрицательной рефракции.

Более подробная классификация видов рефракции приведена в табл. 14.1, а соответствующие искривления лучей приведены на рис. 14.2.

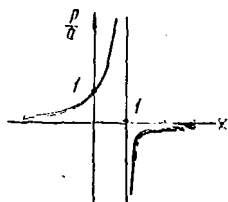


Рис. 14.1

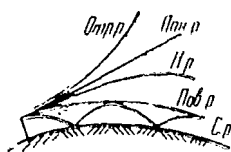


Рис. 14.2

Для того чтобы судить о характере рефракции по метеоэлементам $T(z)$, $p(z)$ и $e(z)$, которые получают на метеорологических станциях путем аэрологических измерений, строят так называемые M -кривые, т. е. функции $M(z)$. Согласно (10.7) и (14.3)



$$M = \frac{77,6 p}{T} + \frac{3,73 \cdot 10^5 e}{T^2} + \frac{z}{a} 10^6. \quad (14.8)$$

M -кривые, соответствующие приведенным выше видам рефракции, изображены на рис. 14.3—14.5. Наклон M -кривой может быть обусловлен изменением либо температуры, либо влажности, либо того и другого одновременно.

Рис. 14.3

Таблица 14.1

Классификация видов рефракции

Виды рефракции	x	$\frac{p}{a}$	$\frac{dn}{dz}, \frac{1}{m}$	$\frac{dM}{dz}, \frac{1}{m}$	$\frac{dz}{dM}, m$	$a_3, км$
Нормальная	$\frac{3}{4}$	4	$-4 \cdot 10^{-8}$	0,118	8,47	8470
Пониженная	$\frac{3}{4} \div 1$	$4 \div \infty$	$-4 \cdot 10^{-8} \div 0$	$0,118 \div 0,157$	$8,47 \div 6,37$	$8470 \div 6370$
Отрицательная	$1 \div 0$	$-\infty \div 0$	$0 \div \infty$	$0,157 \div \infty$	$6,37 \div 0$	$6370 \div 0$
Повышенная	$\frac{3}{4} \div 0$	$4 \div 1$	$-4 \cdot 10^{-8} \div -1,57 \cdot 10^{-7}$	$0,118 \div 0$	$8,47 \div \infty$	$8470 \div \infty$
Сверхрефракция	$0 \div \infty$	$0 \div 1$	$-1,57 \cdot 10^{-7} \div -\infty$	$0 \div \infty$	$-\infty \div 0$	$-\infty \div 0$

Наклон M -кривой определяется выражением

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dz} = & 0,157 + \frac{77,6}{T} \frac{dp}{dz} - \frac{77,6p}{T^2} \frac{dT}{dz} + \\ & + \frac{3,73 \cdot 10^5}{T^2} \frac{de}{dz} - \frac{7,46 \cdot 10^5}{T^3} \frac{dT}{dz} e. \end{aligned} \quad (14.9)$$

Из этой формулы следует, что одинаковые по знаку изменения влажности e и температуры T с высотой приводят к противоположным эффектам рефракции.

На рис. 14.3 кривая 1 соответствует нормальной рефракции. Такой ход кривой имеет место, когда на каждый километр температура убывает на $6,5^\circ\text{C}$, а давление водяного пара — на $3,5 \text{ мб}$, т. е.

$$\frac{dT}{dz} = -6,5^\circ\text{C} \frac{1}{\text{км}};$$

$$\frac{de}{dz} = -3,5 \frac{\text{мб}}{\text{км}}.$$

Нормальная рефракция наблюдается в пасмурную погоду, когда слои воздуха хорошо перемешаны.

Обычно максимальную дальность действия радиолинии для заданных высот поднятия корреспондирующих пунктов при нормальной рефракции принимают за стандарт.

Отметим, что при всех видах рефракции, за исключением сверхрефракции, о величине максимальной дальности удобно судить по значению эквивалентного радиуса Земли. Чем больше это значение, тем больше максимальная дальность радиолинии при заданных высотах поднятия корреспондирующих пунктов. Как известно, эквивалентный радиус Земли при нормальной рефракции равен $a_s = 8740 \text{ км}$.

В изотермической атмосфере, т. е. при $T = \text{const} = 288^\circ$ и

$$\frac{de}{dz} = -4,15 \frac{\text{мб}}{\text{км}}$$

эквивалентный радиус Земли равен $a_s = 10\,000 \text{ км}$ и соответственно дальность действия радиолинии больше, чем при нормальной рефракции.

Кривая 2 соответствует пониженной рефракции. Такой ход кривой имеет место, когда

$$\frac{dT}{dz} < -6,5^\circ\text{C} \frac{1}{\text{км}};$$

$$\frac{de}{dz} > -3,5 \frac{\text{мб}}{\text{км}},$$

т. е. когда с высотой температура убывает быстрее, а влажность убывает медленнее, чем при нормальной рефракции, что обычно наблюдается в пасмурную дождливую погоду.

Дальность действия радиолинии при этом виде рефракции меньше, чем при нормальной рефракции.

Кривая 3 соответствует отрицательной рефракции. Такой ход кривой возможен при

$$\frac{dT}{dz} \ll -6,5^{\circ} \text{C} \frac{1}{\text{км}};$$

$$\frac{de}{dz} \gg -3,5 \frac{\text{мб}}{\text{км}},$$

т. е. когда с высотой температура убывает значительно быстрее, а влажность — значительно медленнее, чем при нормальной рефракции. Влажность может даже возрастать.

В сухой атмосфере отрицательная рефракция имеет место при

$$\frac{dT}{dz} < -34,4^{\circ} \text{C} \frac{1}{\text{км}},$$

а в изотропной атмосфере ($T=288^{\circ}$) при

$$\frac{de}{dz} > -7,1 \frac{\text{мб}}{\text{км}}.$$

Погода с такими метеорологическими данными бывает редко, например во время снегопада. Дальность действия радиолинии в этом случае значительно меньше, чем при нормальной рефракции.

Кривая 4 соответствует повышенной рефракции. Такой ход кривой возможен при

$$\frac{dT}{dz} > -6,5^{\circ} \text{C} \frac{1}{\text{км}};$$

$$\frac{de}{dz} < -3,5 \frac{\text{мб}}{\text{км}},$$

т. е. когда с высотой температура убывает медленнее, а влажность — быстрее, чем при нормальной рефракции.

Повышенная рефракция при обычных градиентах влажности бывает, когда температура атмосферы возрастает с высотой, т. е. при наличии инверсии температуры. Инверсия температуры бывает в хорошую ясную погоду, после захода Солнца, когда нижний слой воздуха, примыкающий к поверхности земли, вследствие радиации тепла поверхностью земли, успевает охладиться, в то

время как более высокие слои остаются еще теплыми. Дальность радиолинии при повышенной рефракции больше, чем при нормальной.

Сверхрефракции соответствует изображенная на рис. 14.3 кривая *б* с отрицательным тангенсом угла наклона. Сверхрефракция наблюдается в тех случаях, когда с высотой температура убывает значительно медленнее, а влажность — значительно быстрее, чем при нормальной рефракции, т. е.

$$\frac{dT}{dz} \gg -6,5^{\circ} \text{C} \frac{1}{\text{км}};$$

$$\frac{de}{dz} \ll -3,5 \frac{\text{мб}}{\text{км}}.$$

Сверхрефракция обычно бывает при наличии инверсии температуры при пониженной влажности атмосферы.

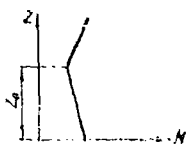


Рис. 14.4

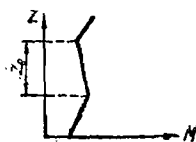


Рис. 14.5

Для сухой атмосферы изображенный на рис. 14.4 или 14.5 ход *M*-кривой имеет место при резко выраженной инверсии температуры, когда

$$\frac{dT}{dz} > 133^{\circ} \text{C} \frac{1}{\text{км}},$$

а для изотермической атмосферы ($T=288^{\circ}$) при

$$\frac{de}{dz} < -28 \frac{\text{мб}}{\text{км}}.$$

Дальность действия радиотехнических устройств при сверхрефракции может значительно возрасти благодаря тому, что распространение здесь происходит вдоль земли, как по волноводу, атмосферному волноводу, или, иначе, как между двумя проводящими параллельными безграничными плоскостями.

Высота атмосферного волновода определяется высотой участка, в пределах которого $\frac{dM}{dz} < 0$ (рис. 14.4 и 14.5).

Однако между атмосферным и металлическим волноводами имеется существенное различие. В то время как для металлического волновода линейные его размеры соизмеримы с длиной пропускае-

мой волны (например, для волны H_{10} прямоугольного волновода $\lambda < 2a$, где a — ширина волновода), размер z_0 — атмосферного волновода, как можно показать, значительно превышает длину волны, которая может быть захвачена этим волноводом.

Для иллюстрации в табл. 14.2 приведены соотношения между высотой z_0 и длиной волны, которая может быть захвачена атмосферным волноводом.

Таблица 14.2

λ , см	1	3	10	100	10 м
z_0 , м	6	12	25	120	600

Из этих данных видно, что чем больше длина волны, тем больше должна быть высота атмосферного волновода для захвата этой волны. Однако инверсия температуры, при которой возникает атмосферный волновод, на протяжении больших участков высот менее вероятна, чем на малых. Поэтому более вероятно появление атмосферных волноводов, захватывающих более короткие волны. Сравнительно часто возникают атмосферные волноводы на сантиметровых волнах и реже на дециметровых, совсем редко возникают атмосферные волноводы на метровых волнах. Явление оптического миража есть не что иное, как сверхрефракция на оптических волнах.

Явление сверхрефракции наблюдается в тех случаях, когда у поверхности земли воздух значительно более холодный и более влажный по сравнению с воздухом на больших высотах. Очевидно, что над сушей такие условия будут иметь место в хорошую ясную погоду в ночные и утренние часы. Действительно, ночью при ясном небе земля быстро остывает в результате излучения и температура воздуха у поверхности земли быстро падает. В то же время температура более высоких слоев воздуха остается почти без изменений, так как остывание воздуха за счет теплопроводности происходит медленно. Таким образом, создается необходимая инверсия температуры для сверхрефракции.

В дневные и вечерние часы необходимая инверсия температуры отсутствует, так как с утра с восходом Солнца начинается нагрев суши и посредством конвекции происходит перемешивание воздуха, разрушающее инверсию. В результате в дневные и вечерние часы сверхрефракция даже в ясную погоду маловероятна.

Над морем в ясную погоду в течение целых суток воздух у поверхности моря оказывается более холодным по сравнению с воздухом высоко расположенных слоев. Таким образом, над морем сверхрефракция представляет собой более частое явление, чем над сушей.

Над морем сверхрефракция наблюдается также тогда, когда с суши после полудня в направлении моря дуют теплые ветры.

Тогда нижние слои воздуха к вечеру оказываются более увлажненными и охлажденными по сравнению с верхними слоями.

Вообще же сверхрефракция наблюдается в антициклональную погоду*. Тесная связь явления сверхрефракции с синоптической обстановкой позволяет по метеорологическим данным прогнозировать появление атмосферного волновода. При этом, разумеется, прогнозы, оправдываются с точностью не большей, чем прогнозы погоды.

Перечисленные условия появления сверхрефракции чаще наблюдаются в субтропиках, в пустынях.

* Антициклон — область в атмосфере с повышенным давлением воздуха. Давление в антициклоне растет от периферии к центру. Ветры в антициклоне в северном полушарии дуют, огибая его центр по часовой стрелке, а в южном — против часовой стрелки. Антициклон характеризуется ясной и сухой погодой.

ЛЕКЦИЯ 15

ОШИБКИ В ИЗМЕРЕНИИ УГЛОВЫХ КООРДИНАТ ОБЪЕКТА, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ РЕФРАКЦИЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АТМОСФЕРЕ

1. Введение.
2. Объект находится на конечном расстоянии в пределах тропосферы или стратосферы при $\frac{dn}{dz} = \text{const.}$
3. Астрономическая рефракция.

1. Введение

Основные эффекты в диапазоне УКВ, которые возникают, необходимость учитывать при прохождении радиотрасс через ионосферу — это рефракция и дисперсия радиоволн. Эти эффекты вызывают появление ошибок в измерении координат объектов радиотехническими методами.

Рефракция имеет место как в ионизированной, так и в неионизированной частях атмосферы. Дисперсия же практически имеет место только в ионосфере. Поэтому ошибки в измерении дальности в неионизированной части атмосферы пренебрежимо малы. С другой стороны, в ионосфере рефракция обратно пропорциональна квадрату частоты. В то же время в неионизированной части атмосферы рефракция от частоты не зависит. Следовательно, в длинноволновой части диапазона УКВ будет преобладать эффект рефракции, вызванный ионосферой, а в коротковолновой части — эффект рефракции, вызванный неионизированной частью атмосферы, а главным образом — тропосферой.

Эти выводы можно, очевидно, экстраполировать на более короткие волны, в частности на волны оптического диапазона.

В результате приходим к заключению, что в оптическом диапазоне волн можно пренебречь ошибками в измерении дальности.

Существенными могут оказаться лишь ошибки в измерении угловых координат, обусловленные рефракцией в тропосфере. Эти ошибки мы и рассмотрим, причем будем считать атмосферу сферически слоистой средой. Ввиду этого ошибки будут обусловлены рефракцией электромагнитных волн лишь в вертикальной плоскости, точнее это будет ошибка в измерении угла возвышения, которая, по определению, равна

$$\Delta\theta = \theta_0 - \theta_m,$$

где

θ_0 — угол возвышения луча в месте приема;

θ_m — истинный угол места.

При этом будем рассматривать два случая: а) объект находится в пределах преломляющей атмосферы; б) объект находится вне тропосферы на большом расстоянии по сравнению с высотой ее границы.

2. Объект находится на конечном расстоянии в пределах тропосферы или стратосферы при

$$\frac{dn}{dz} = \text{const.}$$

Так как здесь рефракция вызвана неоднородностью тропосферы, то можем ее характеризовать тропосферными параметрами рефракции — эквивалентным радиусом Земли a , и индексом рефракции M . Из рис. 15.1 видно, что по аналогии с формулой $\Delta z = \frac{R^2}{2a}$, где a — радиус Земли, можем написать

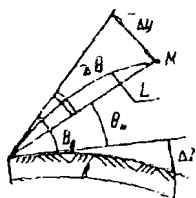


Рис. 15.1

$$\Delta y = \frac{L^2}{2\rho},$$

где

$$\rho = - \frac{1}{\frac{dn}{dz} \cos \theta_0} = \frac{\rho_0}{\cos \theta_0} \text{ — радиус кривизны луча;}$$

ρ_0 — его значение при $\theta_0 = 0$. И соответственно

$$\Delta\theta = \frac{\Delta y}{L} = \frac{L}{2\rho} = \frac{L \cos \theta_0}{2\rho_0}.$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a_s} \quad \text{и} \quad a_s = 10^6 \frac{dz}{dM},$$

получаем

$$\Delta\theta = \frac{L \cos \theta_0}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{10^6} \frac{dM}{dz} \right).$$

3. Астрономическая рефракция

Рассмотрим случай, когда объект находится вне преломляющей части атмосферы, за которую мы можем принять тропосферу, на большом по сравнению с толщиной последней расстоянии от излучателя (рис. 15.2). В этом случае луч искривляется только в пределах тропосферы и ошибка в измерении угла места, как видно из рис. 15.2, будет равна

$$\Delta\theta = \theta_0 - \theta_\infty = \beta_\infty,$$

где β_∞ — угол поворота касательной к лучу.

Найдем этот угол. Согласно определению, угол поворота касательной к лучу на элементе траектории Δl равен

$$\Delta\beta = \frac{\Delta l}{\rho} = - \frac{dn}{dz} \frac{\cos \theta}{n} \Delta l = - \frac{dn}{dz} \frac{\Delta z}{n \operatorname{tg} \theta}.$$

Из уравнения луча $n r \cos \theta = n_0 a \cos \theta_0$ имеем:

$$\cos \theta = \frac{q}{nr}; \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{q}{nr}\right)^2}; \quad \operatorname{tg} \theta = \sqrt{\left(\frac{nr}{q}\right)^2 - 1};$$

$$q = n_0 a \cos \theta_0,$$

откуда получаем

$$\beta_\infty = - \int_0^{z_r} \frac{1}{n} \frac{dn}{dz} \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{nr}{q}\right)^2 - 1}}, \quad (15.1)$$

где z_r — высота границы преломляющей атмосферы. Это и есть формула для расчета астрономической рефракции. Для достаточно коротких волн, а именно коротковолновой части УКВ и тем более оптических волн, выражение (15.1) может быть значительно упрощено, если угол возвышения θ_0 не слишком мал или, иначе, если зенитный угол

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$$

не слишком близок к 90° .

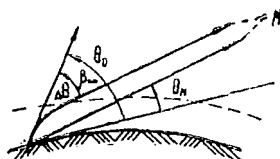


Рис. 15.2

В самом деле, показатель преломления для таких волн в пределах всей преломляющей атмосферы незначительно отличается от единицы и можно положить

$$\left(\frac{n}{n_0}\right)^2 \approx 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \beta_\infty &\approx - \int_0^{z_r} \frac{dn}{dz} \frac{dz}{n} \frac{\sin \varphi_0}{\sqrt{\cos^2 \varphi_0 + \frac{2z}{a} + \frac{z^2}{a^2}}} = \\ &= - \int_0^{z_r} \frac{dn}{dz} \frac{dz}{n} \frac{1}{1 + \frac{z}{a}} \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\sqrt{1 + A^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0}}, \end{aligned}$$

где

$$A^2 = \frac{\frac{2z}{a} + \frac{z^2}{a^2}}{\left(1 + \frac{z}{a}\right)^2}.$$

Если зенитный угол φ_0 таков, что выполняется неравенство

$$A^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 < 1,$$

то корень можно разложить в ряд, и тогда получим

$$\begin{aligned} \beta_\infty &= - \int_0^{z_r} \frac{dn}{dz} \frac{dz}{n} \left(\operatorname{tg} \varphi_0 - \frac{1}{2} A^2 \operatorname{tg}^3 \varphi_0 + \right. \\ &\left. + \frac{3}{8} A^4 \operatorname{tg}^5 \varphi_0 - \frac{5}{16} A^6 \operatorname{tg}^7 \varphi_0 + \dots \right) \left(1 + \frac{z}{a}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что выражение для угла астрономической рефракции можно представить в виде, полученном А. Н. Крыловым:

$$\beta_\infty = K \operatorname{tg} \varphi_0 - M \operatorname{tg}^3 \varphi_0 + L \operatorname{tg}^5 \varphi_0 - N \operatorname{tg}^7 \varphi_0 + \dots \quad (15.2)$$

Очевидно, что для зенитных углов, удовлетворяющих неравенству

$$A^2 \operatorname{tg}^3 \varphi_0 \ll 1, \quad (15.3)$$

можно ограничиться первым членом ряда и считать

$$\beta_\infty \approx K \operatorname{tg} \varphi_0.$$

Можно также считать $z \ll a$. Тогда, как видно из (15.2), при достаточно высоких частотах

$$K = - \int_{n_0}^1 \frac{dn}{n} = \ln n_0 \approx n_0 - 1$$

и, следовательно,

$$\beta_{\infty} \approx (n_0 - 1) \operatorname{tg} \varphi_0. \quad (15.4)$$

Из (15.4) следует, что при выполнении условия (15.3) угол астрономической рефракции не зависит от закона изменения показателя преломления с высотой, а зависит лишь от значения показателя преломления у поверхности Земли. Это обстоятельство было впервые отмечено Лапласом в отношении астрономической рефракции оптических волн и было им сформулировано в виде теоремы, названной впоследствии теоремой Лапласа.

Заметим, что при вычислении угла астрономической рефракции с точностью до $1''$ формула (15.4) оказывается справедливой вплоть до угла $\varphi_0 = 70^\circ$. При меньшей точности формула (15.4) будет применима и для больших зенитных углов.

ЛЕКЦИЯ 16

ОСЛАБЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АТМОСФЕРЕ

1. Связь дисперсии с поглощением.
2. Поглощение в газах атмосферы.
3. Молекулярное рассеяние.
4. Аэрозольное ослабление.

1. Связь дисперсии с поглощением

В данной лекции рассмотрим ослабление волн оптического и инфракрасного диапазонов. Однако сначала сформулируем общие положения о дисперсии и поглощении электромагнитных волн.

Дисперсия и поглощение электромагнитных волн взаимосвязанные явления.

При быстропеременных полях поляризация вещества «не успевает» следовать за изменениями электромагнитного поля. Значение вектора электрического смещения \mathbf{D} в некоторый момент времени не определяется значением вектора напряженности поля \mathbf{E} в тот же момент времени, а зависит от значений $\mathbf{E}(t)$ в предыдущие моменты времени. Это означает, что при гармоническом изменении поля во времени между векторами \mathbf{D} и \mathbf{E} появляется сдвиг по фазе. Это приводит к тому, что в быстропеременных полях при частотах, сравнимых с собственными частотами молекулярных колебаний, с которыми связано возникновение электрической поляризации вещества, диэлектрическая проницаемость становится комплексной величиной, зависящей от частоты

$$\epsilon'(\omega) = \epsilon(\omega) - j\epsilon''(\omega).$$

Покажем, что едва заметная дисперсия, т. е. едва заметная зависимость показателя преломления от частоты, сопровождается значительным поглощением электромагнитной волны. В самом деле, пусть при $\omega=0$ $\epsilon'(0) = \epsilon(0)$, $\epsilon''(0) = 0$. Тогда при

$$\Delta\epsilon'' \ll \epsilon(0)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon'(\omega)} &= \sqrt{\varepsilon(\omega) - j\varepsilon''(\omega)} = n - j\chi = \\ &= \sqrt{\varepsilon(0)} \left(1 + \frac{\Delta\varepsilon}{2\varepsilon(0)} - j \frac{\Delta\varepsilon''}{2\varepsilon(0)} \right) = \sqrt{\varepsilon(0)} + \Delta n - j\chi, \end{aligned}$$

т. е.

$$\Delta n = \frac{\Delta\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon(0)}}, \quad \chi = \frac{\Delta\varepsilon''}{2\sqrt{\varepsilon(0)}}.$$

В тропосфере $\varepsilon(0) = 1$, так что здесь

$$\Delta n = \frac{1}{2} \Delta\varepsilon, \quad \chi = \frac{1}{2} \Delta\varepsilon''.$$

Коэффициент ослабления, выраженный в децибелах на километр, равен

$$\gamma = \frac{2\pi}{\lambda} \chi \cdot 20 \cdot 10^3 \lg e = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta\varepsilon'' 4340.$$

Предположим, что $\Delta\varepsilon''$ имеет такой же порядок величины, что и Δn или $\Delta\varepsilon$, т. е.

$$\Delta\varepsilon \approx 10^{-6}.$$

Тогда при $\lambda = 1$ см получаем

$$\gamma = 6,28 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3 4340 = 2,7 \frac{\text{дб}}{\text{км}},$$

то есть при незначительном, связанном с дисперсией изменении показателя преломления наблюдалось бы очень большое ослабление электромагнитных волн.

Таким образом, если нет заметного поглощения электромагнитных волн в газах атмосферы, то дисперсией можно пренебречь.

Электромагнитные волны оптического и инфракрасного диапазонов при распространении в атмосфере ослабляются за счет поглощения в газах воздуха и за счет рассеяния на флуктуациях плотности молекул (молекулярное рассеяние), на частицах аэрозоля (аэрозольное рассеяние) и на неоднородностях, возникающих в результате турбулентного движения.

Ниже мы приводим конкретные данные по ослаблению электромагнитных волн указанных диапазонов. При этом будем опираться на [4, 6]. Графический материал взят из [6].

2. Поглощение в газах

Поглощение имеет место во всех газах, входящих в состав атмосферы, но в наибольшей степени в рассматриваемых диапазонах волн сказывается поглощение в парах воды. Механизм поглощения обусловлен квантово-механической структурой молекул вещества.

Энергия изолированной молекулы может быть представлена суммой энергий ее поступательного движения электронных колебательных и вращательных уровней, т. е.

$$W = W_{\text{поступ}} + W_{\text{эл}} + W_{\text{кол}} + W_{\text{вр.}}$$

Изменение энергии может происходить скачками за счет поглощения квантов энергии электромагнитных волн. Ввиду этого спектр поглощения не сплошной, а дискретный, линейчатый.

Однако вследствие наличия теплового движения линии не резкие, а имеют определенную ширину. Электронные спектры молекул занимают ультрафиолетовую и видимую часть спектра, колебательные — близкую инфракрасную, вращательные — далекую инфракрасную области и коротковолновую часть УКВ.

Линия поглощения имеет вид резонансной кривой и представляется функцией

$$K_{\text{п}}(f) \sim \frac{\xi}{(f - f_0)^2 + \xi^2},$$

где

ξ — зависит от давления и температуры газа;

f_0 — резонансная частота — центральная линия спектра поглощения.

Существенно, что полуширина линии поглощения значительно больше полуширины линии излучения оптического квантового генератора (ОКГ).

Ввиду того, что линии поглощения расположены достаточно густо, частота ОКГ находится очень часто в какой-либо полосе поглощения. В связи с этим поглощение может резко увеличиться при незначительном изменении длины волны. Так, в окрестности длин волн, излучаемых ОКГ, 0,84 и 1,06 мкм величина поглощения меняется на несколько порядков при изменении длины волны всего на несколько гигагерц.

Но несомненным является факт, что в оптическом диапазоне волн промежутки между центральными линиями поглощения газов атмосферы занимают достаточную часть этого диапазона. В противном случае оптические волны претерпели значительно больше поглощения, чем это имеет место в действительности.

Здесь уместно для справки привести следующие таблицы.

Ультрафиолетовые лучи	Видимый спектр	Инфракрасные лучи		
750—50000 ТГц	0,4—0,8 мкм 750—375 ТГц	375—20 ТГц		
		ближняя ИК обл.	средняя ИК обл.	дальняя ИК обл.
		0,8—3 мкм	3—6 мкм	6—15 мкм

Длины волн ОКГ

На рубине	$\lambda = 0,375 \text{ мкм}$	Первая гармоника
Газового на аргоне	$\lambda = 0,5 \text{ мкм}$	То же
На стекле с неодимом	$\lambda = 0,53 \text{ мкм}$	
Газового на смеси гелия с неонам	$\lambda = 0,63 \text{ мкм}$	
Рубинового	$\lambda = 0,69 \text{ мкм}$	
Полупроводникового на арсениде галлия	$\lambda = 0,84 \text{ мкм}$	
На стекле с неодимом	$\lambda = 1,06 \text{ мкм}$	
Газового на смеси гелия с неонам	$\lambda = 1,15 \text{ мкм}$	
Газового на смеси гелия с неонам	$\lambda = 3,39 \text{ мкм}$	
Газового на смеси ксенона с гелием	$\lambda = 3,51 \text{ мкм}$	
Газового на смеси углекислого газа с азотом	$\lambda = 10,6 \text{ мкм}$	

Поглощение при прохождении луча в однородной атмосфере пути L происходит по закону Бугера—Ламберта, т. е. интенсивности I_0 и I в начале и конце пути связаны формулой

$$I = I_0 e^{-KL}$$

Если ослабление выразить в дБ/км , то отсюда получим

$$I = I_0 10^{-\frac{\gamma L}{10}}$$

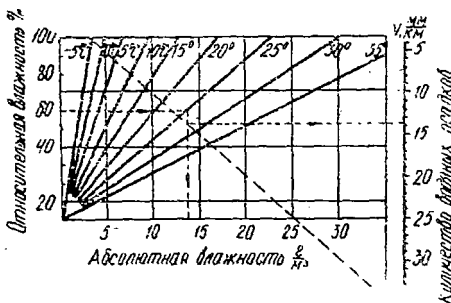


Рис. 16.1

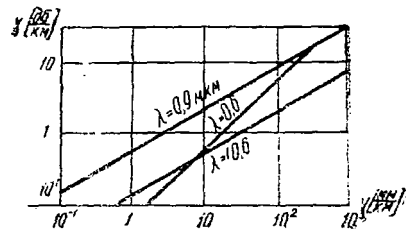


Рис. 16.2

Коэффициент ослабления (в дБ/км) зависит от параметра ν — величины, характеризующей количество паров воды по трассе, пересчитанное в конденсированную фазу. Номограмма пересчета приведена на рис. 16.1.

На рис. 16.2 приведен график γ в зависимости от ν для различных длин волн.

3. Молекулярное рассеяние

Этот вид рассеяния имеет место в оптически чистой атмосфере, т. е. не содержащей каких-либо инородных частиц. Оно обусловлено флуктуациями плотности воздуха и происходит по закону Релея, т. е. пропорционально $\frac{1}{\lambda^4}$. Для идеального газа

$$I(\vartheta) = \frac{2\pi^2(n^2-1)^2}{r^2 N \lambda^4} (1 + \cos^2\vartheta) I_0;$$

ϑ — угол рассеяния;

N — число молекул в единице объема;

r — расстояние до рассеивающего объема;

n — показатель преломления.

4. Аэрозольное ослабление

Аэрозоли — капли воды, частицы льда, пылинки. Ослабление в аэрозолях обусловлено рассеянием и поглощением первичной электромагнитной волны.

Зная полный поперечник рассеяния и поглощения одной частицы и концентрацию частиц N , можно вычислить ослабление интенсивности излучения по трассе.

При этом полагаем, что ослабление по трассе происходит по закону Бугера—Ламберта, т. е.

$$I = I_0 e^{-K_p L};$$

$$I = I_0 e^{-K_n L},$$

где

K_p — коэффициент экстинкции;

K_n — коэффициент поглощения;

$K_p = N\sigma_p$, σ_p — полный поперечник рассеяния;

$K_n = N\sigma_n$, σ_n — полный поперечник поглощения.

Измеряя ослабление в децибелах на километр, можем написать

$$I = I_0 10^{-\frac{\gamma L}{10}},$$

где

$$\gamma = (K_p + K_n) 4343 \frac{\text{дБ}}{\text{км}}.$$

а) Туман, облака

Как мы уже знаем из изложенного в лекции 8, имеют место разные функциональные зависимости σ_p при $\frac{a}{\lambda} < 1$ и $\frac{a}{\lambda} > 1$, где

a — размер частицы.

При $\frac{a}{\lambda} < 1$ действует релейский закон рассеяния

$$\gamma_{pR} = 4343 \frac{24\pi^3}{\lambda^4} V^2 N,$$

где V — объем частицы.

При $\frac{a}{\lambda} > 1$ расчет σ_p производится по формулам Ми. На рис. 16.3 приведены зависимости γ_{pR} и γ_{pM} от длины волны.

В атмосфере рассеяние Ми начинает преобладать над релейским уже при $\lambda = 0,5$ мкм. Так, коэффициент ослабления γ_{pM} в тумане рассчитывается по формуле

$$\gamma_{pM} = \frac{1,95}{B} \left(\frac{\lambda}{0,55} \right)^{-0,508} \sqrt[3]{B},$$

где

λ — длина волны, в мкм;

B — дальность видности, в км.

Зависимость γ_{pM} от B приведена на рис. 16.4.

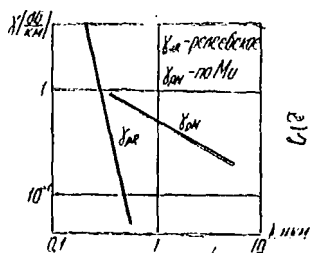


Рис. 16.3

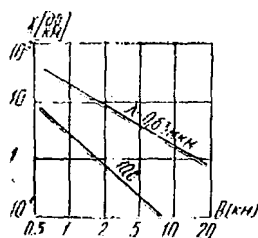


Рис. 16.4

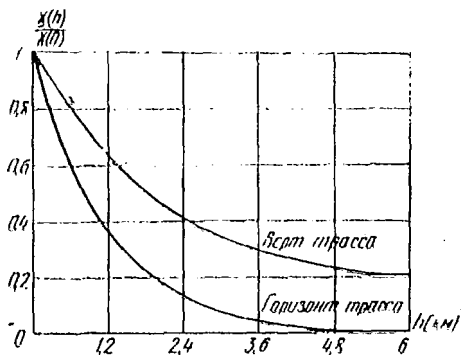


Рис. 16.5

Как уже было указано, ослабление обусловлено двумя эффектами — рассеянием и поглощением. Экспериментальная проверка показывает, что при $\lambda < 1$ мкм основное влияние на ослабление оказывает эффект рассеяния, а при $\lambda = 10$ мкм оба эффекта действуют одинаково.

Коэффициент ослабления меняется с высотой; для учета этих изменений можно пользоваться кривыми, приведенными на рис. 16.5.

б) Дождь

Когда волна распространяется в атмосфере в момент выпадения осадков, то из-за сильной изменчивости параметров дождя γ тоже меняется значительно.

Это иллюстрируется рис. 16.6.

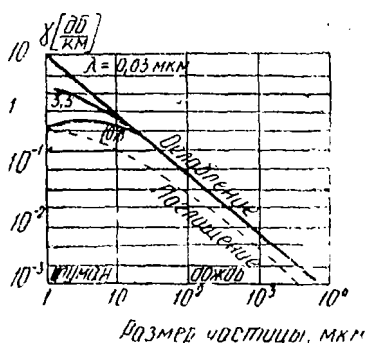


Рис. 16.6

Зависимость коэффициента ослабления от интенсивности дождя приведена на рис. 16.7.

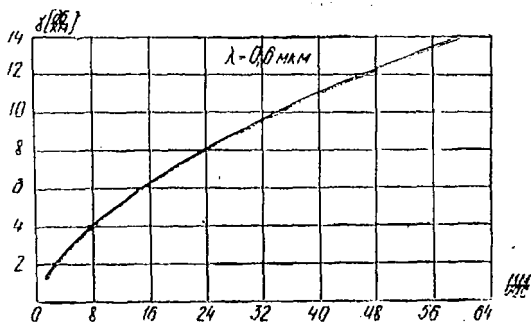


Рис. 16.7

Рассеяние энергии лазерного луча на частицах приводит к увеличению сечения луча; в дожде возможно увеличение даже в два раза.

ЛЕКЦИЯ 17

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ. ТУРБУЛЕНТНАЯ АТМОСФЕРА И ЕЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

1. Понятие о турбулентном движении воздуха.
2. Закон «двух третей» Колмогорова—Обухова.
3. Характеристики случайного поля.
4. Структурная функция.
5. Спектральная плотность корреляционной функции.

1. Понятие о турбулентном движении воздуха

При распространении электромагнитной волны в атмосфере ее параметры флуктуируют. В частности, в оптическом диапазоне волн значительные флуктуации испытывают амплитуда, фаза и угол прихода волны. Эти флуктуации вызываются турбулентным движением воздуха.

Как следует из теории дифракции радиоволн, вокруг земной поверхности поле в диапазоне УКВ за пределами области прямой видимости должно быть очень малым.

В действительности же поле далеко за пределами этой области в указанном диапазоне волн значительно превосходит дифракционное поле.

Этот эффект также объясняется действием турбулентного движения воздуха.

Как известно, движения в жидкости (или газе) могут быть ламинарными или турбулентными. Ламинарное движение характеризуется своей упорядоченностью. Один слой жидкости движется относительно другого с определенной скоростью. Турбулентное движение характеризуется наличием чрезвычайно нерегулярного изменения скорости. Скорость в каждой точке пространства все

время пульсирует около некоторого среднего значения, причем размах этих пульсаций не является малым по сравнению с величиной самой средней скорости.

О характере движения жидкости (или газа) можно судить по значению числа Рейнольдса. Числом Рейнольдса Re называют безразмерную величину, определяемую выражением

$$Re = \frac{\rho v_L L}{\eta}.$$

В этом выражении все величины относятся к некоторому достаточно большому объему движущейся жидкости с характерным размером L , называемым масштабом:

v_L — скорость движения этого объема, $м/сек$;

ρ — плотность, $кг/м^3$;

η — вязкость, $кг/сек. м$.

Если число Re меньше некоторого его критического значения $Re_{кр}$, определяемого экспериментально, то движение объема ламинарно; если же это число больше $Re_{кр}$, движение турбулентно.

В силу малой вязкости движение в газах преимущественно турбулентно.

2. Закон «двух третей» Колмогорова—Обухова

Основные закономерности турбулентного движения стали известны благодаря работам А. Н. Колмогорова и А. М. Обухова.

На основании этих работ картину возникновения и развития турбулентного движения представляют себе следующим образом.

При увеличении скорости движения объема масштабом L увеличивается число Рейнольдса Re . Пока это число меньше $Re_{кр}$, возникающие в отдельных частях этого объема вследствие флуктуации касательных сил трения вихревые движения быстро затухают.

Но если Re значительно больше $Re_{кр}$, то возникающее случайным образом вихревое движение в какой-либо части объема масштаба $l < L$ в дальнейшем происходит почти только под воздействием сил инерции и уже не затухает, а растет за счет энергии движения всего объема масштаба L . Поскольку число Рейнольдса, соответствующее этому вихревому движению,

$$Re = \frac{\rho v_l l}{\eta}$$

(где v_l — скорость вихря) остается большим $Re_{кр}$, движение вихря тоже неустойчиво и возникает вихрь второго порядка масштаба $l' < l$. Энергия движения этого вихря растет за счет движения вихря первого порядка.

Таким образом, по мере развития турбулентности последовательно возникают вихри все более мелкого масштаба. Дробление

движения прекращается на том масштабе l_0 и скорости v_0 , при которых движение оказывается устойчивым, т. е. когда число Рейнольдса становится меньше его критического значения

$$\text{Re} = \frac{\rho v_0 l_0}{\eta} < \text{Re}_{\text{кр.}}$$

Следовательно, при наличии развитого турбулентного движения в объеме масштаба L имеется очень большое число вихревых движений, масштабы которых лежат в пределах

$$l_0 \ll l \ll L_0. \quad (17.1)$$

Спектр масштабов, определяемый (17.1), называется инерционным интервалом. Величина L_0 называется внешним, а l_0 — внутренним масштабом турбулентного движения. Согласно экспериментальным данным в тропосфере L_0 имеет порядок величины нескольких десятков метров, а l_0 — нескольких миллиметров. Связь между масштабом l из инерционного интервала и скоростью v_l турбулентного движения можно установить на основании энергетических соображений.

По мере развития турбулентного движения энергия движения вихря более крупного масштаба почти полностью без потерь передается вихревому движению меньшего масштаба. Эта передача происходит вплоть до вихревого движения наименьшего масштаба l_0 , где эта энергия переходит в тепло.

Энергия вихревого движения масштаба l пропорциональна v_l^2 . Время, в течение которого происходит рождение этого вихревого движения, имеет порядок величины l/v_l . Следовательно, энергия вихревого движения, которая передается единице массы в единицу времени при рождении вихря скорости v_l и масштаба l , пропорциональна величине

$$\frac{v_l^2}{l} = \frac{v_l^3}{l}.$$

Обозначая эту энергию через K , получаем

$$K \sim \frac{v_l^3}{l},$$

откуда $v_l \sim (Kl)^{1/3}$, или

$$v_l^2 \sim (Kl)^{2/3},$$

где $K = \text{const.}$

Таким образом, квадрат скорости турбулентного движения масштаба l из инерционного интервала пропорционален масштабу l в степени $2/3$. Этот закон «двух третей» был установлен Колмогоровым А. Н. и Обуховым А. М. в 1941 г.

Благодаря турбулентному движению различные элементы объема воздуха различного масштаба l переносятся из одной области пространства в другую почти без изменения температуры этих элементов и содержащегося в них количества водяного пара. В результате в каждой фиксированной точке пространства происходят флуктуации не только давления, но также температуры и влажности. А это соответственно приводит к пульсации диэлектрической проницаемости n , следовательно, показателя преломления. Порядок флуктуаций n вследствие турбулентного движения воздуха

$$\Delta n \sim \Delta \epsilon \sim 10^{-6}.$$

Наличие таких флуктуаций означает, что в заданный фиксированный момент времени существуют области тропосферы, показатель преломления которых отличается от показателя преломления окружающих областей на величину $\Delta n \sim 10^{-6}$. Эти области суть неоднородности. Размеры неоднородностей определяются масштабами вихрей турбулентного движения.

3. Характеристики случайного поля

Наиболее просто изучить влияние пульсаций диэлектрической проницаемости (показателя преломления) на распространение электромагнитных волн, если ϵ рассматривать как случайную функцию трех пространственных координат x, y, z или функцию вектора $\mathbf{r} = x^0x + y^0y + z^0z$, т. е. рассматривать ϵ как случайное поле.

Понятие случайного поля вполне аналогично понятию случайного процесса.

Статистическими характеристиками случайного поля является среднее значение $\overline{f(\mathbf{r})}$ и корреляционная функция

$$\overline{(f(\mathbf{r}_1) - \overline{f(\mathbf{r}_1)})(f(\mathbf{r}_2) - \overline{f(\mathbf{r}_2)})} = B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2).$$

Обобщением понятия стационарности здесь является понятие *однородности* случайного поля.

Случайное поле называется однородным, если его среднее значение постоянно, а корреляционная функция не меняется при одновременном смещении коррелирующих точек в одном и том же направлении, на одно и то же расстояние, т. е.

$$\overline{f(\mathbf{r})} = \text{const};$$

$$B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = B(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Новым является понятие *изотропности* однородного случайного поля. Однородное поле называется изотропным, если корреляци-

онная функция зависит только от расстояния между коррелирующими точками, т. е.

$$B(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = B(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = B(r);$$

$$r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|.$$

4. Структурная функция

Реальные случайные поля можно рассматривать как однородные и изотропные лишь в грубом приближении. В действительности среднее значение случайного поля, а также корреляционная функция зависят от положения той области пространства, в пределах которого выполнено усреднение, т. е. зависят от координат.

А. Н. Колмогоров ввел статистическую характеристику случайного поля, в которой среднее исключается.

Это так называемая структурная функция. Она определяется следующим образом:

$$\overline{\{[f(\mathbf{r}_1) - \overline{f(\mathbf{r}_1)}] - [f(\mathbf{r}_2) - \overline{f(\mathbf{r}_2)}]\}^2} = D(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Для однородного изотропного случайного поля структурная функция зависит только от расстояния между точками, т. е.

$$D(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = D(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = D(r).$$

Между структурной и корреляционной функциями однородного изотропного случайного поля имеется следующая связь:

$$\begin{aligned} D(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) &= \overline{[f(\mathbf{r}_1) - \overline{f(\mathbf{r}_1)}]^2} + \overline{[f(\mathbf{r}_2) - \overline{f(\mathbf{r}_2)}]^2} - \\ &- 2\overline{[f(\mathbf{r}_1) - \overline{f(\mathbf{r}_1)}][f(\mathbf{r}_2) - \overline{f(\mathbf{r}_2)}]} = 2[B(0) - B(r)], \end{aligned} \quad (17.2)$$

где

$$r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|.$$

Структурная функция по сравнению с корреляционной функцией обладает той особенностью, что ее формулировка для турбулентного движения проще. Так, структурная функция флуктуаций температуры диэлектрической проницаемости и показателя преломления для расстояний r , находящихся в пределах интерционного интервала, т. е.

$$l_0 \ll r \ll L_0,$$

подчиняется закону двух третей и равна

$$D(r) = C^2 r^{\frac{2}{3}}.$$

Постоянная C^2 , имеющая смысл интенсивности флуктуаций, определяется из экспериментальных данных.

5. Спектральная плотность корреляционной функции

Применим преобразование Фурье к корреляционной функции, рассматриваемой как функции трех координат x, y, z :

$$\Phi(m_x, m_y, m_z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} B(x, y, z) e^{-i(m_x x + m_y y + m_z z)} dx dy dz. \quad (17.3)$$

Функция $\Phi(m_x, m_y, m_z)$ — спектральная плотность корреляционной функции $B(x, y, z)$.

Последняя представляется через спектральную плотность формулой

$$B(x, y, z) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi(m_x, m_y, m_z) e^{i(m_x x + m_y y + m_z z)} dm_x dm_y dm_z. \quad (17.4)$$

Согласно (17.2) можем также написать

$$D(x, y, z) = 2 \iiint_{-\infty}^{\infty} \left[1 - e^{i(m_x x + m_y y + m_z z)} \right] \Phi(m_x, m_y, m_z) dm_x dm_y dm_z. \quad (17.5)$$

Учитывая однородность и изотропность случайного поля, можем интегрирование выполнить в сферической системе координат r, ϑ, φ , и формула преобразования Фурье примет вид

$$\begin{aligned} \Phi(m) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{r=0}^{\infty} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} B(r) e^{-imr \cos \vartheta} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dr \int_0^{\pi} B(r) e^{-imr \cos \vartheta} r^2 \sin \vartheta d\vartheta dr = \\ &= \frac{1}{2\pi^2 m} \int_0^{\infty} B(r) r \sin mr dr. \end{aligned}$$

Представив корреляционную функцию через спектральную плотность $\Phi(m)$, можем написать

$$\begin{aligned} B(r) &= \int_{m=0}^{\infty} \int_{\vartheta'=0}^{\pi} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \Phi(m) e^{imr \cos \vartheta'} m^2 \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi' dm = \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \Phi(m) e^{imr \cos \vartheta'} m^2 \sin \vartheta' d\vartheta' dm = \\ &= \frac{4\pi}{r} \int_0^{\infty} \Phi(m) m \sin mr dm. \end{aligned}$$

Структурная функция согласно (17.5) представляется через спектральную плотность $\Phi(m)$ формулой

$$D(r) = 8\pi \int_0^{\infty} \Phi(m) \left(1 - \frac{\sin mr}{mr}\right) m^2 dm.$$

Найдем спектральную плотность $\Phi(m)$ по структурной функции. Получаем

$$C^2 r^{\frac{2}{3}} = 8\pi \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\sin mr}{mr}\right) m^2 \Phi(m) dm.$$

Будем находить $\Phi(m)$ путем подбора. Умножим обе части последнего равенства на r и продифференцируем их трижды по r ; тогда получим

$$C^2 \frac{5}{3} \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3}\right) r^{-\frac{4}{3}} = 8\pi \int_0^{\infty} \cos mr \cdot m^4 \Phi(m) dm.$$

Сравнивая этот интеграл с табличным

$$\frac{\Gamma(p)}{r^p} \cos \frac{p\pi}{2} = \int_0^{\infty} m^{p-1} \cos mrdm,$$

где $\Gamma(p)$ — гамма-функция, видим, что

$$\Phi(m) = C^2 \frac{5}{3} \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3}\right) \frac{m^{-\frac{11}{3}}}{8\pi \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \cos \frac{2}{3}\pi}$$

или

$$\Phi(m) = 0,033C^2 m^{-\frac{11}{3}}. \quad (17.6)$$

Эта функция широко используется при расчетах статистических характеристик распространения электромагнитных волн в турбулентной атмосфере.

ЛЕКЦИЯ 18

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПО РАССЕЯНИЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

1. Решение уравнений Максвелла для среды со случайными неоднородностями.

2. Приближение Борна.

3. Амплитуда поля рассеяния.

1. Решение уравнений Максвелла для среды со случайными неоднородностями

Турбулентная атмосфера в диапазонах УКВ и более коротких электромагнитных волн — это среда, у которой флуктуации диэлектрической проницаемости $\Delta\epsilon$ малы по сравнению со средним значением ϵ , принимаемым равным единице, т. е.

$$|\Delta\epsilon| \ll 1.$$

Положим

$$\Delta\epsilon = \alpha q(x, y, z),$$

где

$q(x, y, z)$ — случайная функция координат $|q(x, y, z)| \leq 1$;

α — максимальные значения флуктуаций $\Delta\epsilon$, причем

$$\alpha \ll 1.$$

Принимая для упрощения $\sigma=0$ и $\mu=1$, уравнения Максвелла представим в виде

$$\text{I. } \operatorname{rot} \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H};$$

$$\text{II. } \operatorname{rot} \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0(1 + \alpha q)\mathbf{E};$$

$$\text{III. } \operatorname{div}[\epsilon_0(1 + \alpha q)\mathbf{E}] = 0;$$

$$\text{IV. } \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Адекватным методом решения этой системы уравнений является метод теории возмущений.

Метод теории возмущений состоит в том, что используется некоторый малый параметр задачи — в данном случае α и решение ищется в виде ряда, который представляет собой разложение искомой функции по малому параметру, т. е. по α . Соответственно в рассматриваемом случае векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} ищутся в виде суммы бесконечных рядов

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i \mathbf{E}_i,$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i \mathbf{H}_i.$$

Эти ряды представляют в исходные уравнения (I—IV) и затем приравнивают величины одного и того же порядка малости по α и получают рекуррентную систему уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \text{I. } \operatorname{rot} \mathbf{E}_i &= -j\omega\mu_0 \mathbf{H}_i; \\ \text{II. } \operatorname{rot} \mathbf{H}_i &= j\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}_i + j\omega\varepsilon_0 q \mathbf{E}_{i-1}; \\ \text{III. } \operatorname{div}(\varepsilon_0 \mathbf{E}_i) &= -\operatorname{div}(\varepsilon_0 q \mathbf{E}_{i-1}); \\ \text{IV. } \operatorname{div} \mathbf{H}_i &= 0, \\ & i=0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Вспомним закон сохранения заряда, который для случая гармонической зависимости величин от времени представляется в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + j\omega\rho = 0.$$

Допустим, что поле \mathbf{E}_{i-1} известно. Тогда второе слагаемое правой части уравнения II можно трактовать как известную плотность тока \mathbf{J}_i , а правую часть уравнения III как плотность зарядов ρ_i , то есть

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_i &= j\omega\varepsilon_0 q \mathbf{E}_{i-1}; \\ \rho_i &= -\operatorname{div}(\varepsilon_0 q \mathbf{E}_{i-1}). \end{aligned}$$

Сразу видно, что закон сохранения зарядов выполняется, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_i + j\omega\rho_i = 0,$$

и, следовательно, принятая трактовка правильна.

Таким образом, источники полей \mathbf{E}_i , \mathbf{H}_i могут быть найдены последовательно.

Для нахождения самих полей можно использовать вектор Герца, который определяется формулой

$$\Pi_i = \frac{1}{j4\pi\omega\epsilon_0} \int_V \mathbf{J}_i \frac{e^{-ikr}}{r} dV,$$

а затем поле \mathbf{E}_i рассчитать по формуле

$$\mathbf{E}_i = \text{grad div } \Pi_i + k^2 \Pi_i.$$

2. Приближение Борна

Для нахождения поля \mathbf{E}_i с произвольным индексом надо знать решение для поля с индексом ноль. Последнее поле — это невозмущенное поле. Очень часто достаточно ограничиться первым приближением

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \alpha \mathbf{E}_1.$$

Поле

$$\mathbf{E}_p = \alpha \mathbf{E}_1$$

есть поле рассеяния в первом приближении, называемом приближением Борна. Найдем это приближение применительно к рассеянию электромагнитных волн в турбулентной атмосфере.

Пусть на элемент объема ΔV , в котором флуктуация диэлектрической проницаемости $\Delta\epsilon$, падает первичная волна, поле которой $\mathbf{E}_0 =$

$$= \frac{Ae^{-jkr_0 + j\omega t}}{r_0} \quad (\text{рис. 18.1}).$$

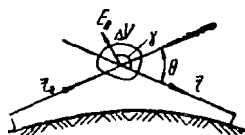


Рис. 18.1

Поле, рассеянное этим элементом объема, равно

$$\Delta E_p = \alpha \Delta E_1 \approx \Delta E_p.$$

Можно полагать, что когда размеры объема малы по сравнению с расстояниями r_0 и r , ΔE_1 может быть рассчитано как поле элементарного вибратора в дальней зоне, т. е.

$$\Delta E_p = \alpha \Delta E_1 = -k^2 \alpha \Delta \Pi_1 \sin \gamma,$$

где

$$\Delta \Pi_1 = \frac{J_1 e^{-ikr}}{j4\pi\omega\epsilon_0 r} \Delta V = \frac{qE_0}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \Delta V,$$

откуда находим

$$\Delta E_p = -\frac{k^2}{4\pi} \frac{\Delta\epsilon E_0}{r} e^{-jkr} \sin \gamma \Delta V.$$

Поле рассеяния, создаваемое всеми элементами рассеивающего объема V , в пределах которого первичное поле E_0 отлично от нуля, равно

$$E_p = -\frac{k^2}{4\pi} \int_V \Delta \varepsilon E_0 \sin \gamma \frac{e^{-ikr}}{r} dV.$$

Это и есть искомое приближение Борна.

3. Амплитуда поля рассеяния

Так как $\Delta \varepsilon$ — случайная функция координат, то и амплитуда поля $|E_p|$ — тоже случайная функция.

Представим

$$E_p = |E_p| e^{i\varphi},$$

тогда

$$E_p^* = |E_p| e^{-i\varphi},$$

и следовательно

$$|E_p|^2 = E_p E_p^*.$$

Отсюда следует, что

$$|E_p|^2 = \left(\frac{k^2}{4\pi}\right)^2 \int_V \Delta \varepsilon A \sin \gamma \frac{e^{-ik(r+r_0)}}{r_0 r} dV \int_V \Delta \varepsilon A^* \sin \gamma \frac{e^{ik(r+r_0)}}{r_0 r} dV.$$

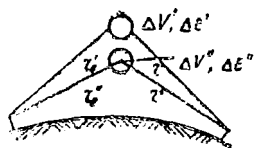
Преобразуем произведение интегралов, исходя из представления интеграла как предела суммы и поступая аналогично следующей процедуре. Если

$$I = \sum_{i=1}^n I_i e^{i\varphi_i}, \quad I^* = \sum_{i=1}^n I_i e^{-i\varphi_i},$$

то

$$|I|^2 = II^* = \sum_{i=1}^n I_i e^{i\varphi_i} \sum_{i=1}^n I_i e^{-i\varphi_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n I_i I_k e^{i(\varphi_i - \varphi_k)}.$$

Пусть $\Delta V'$ и $\Delta V''$ — элементы рассеивающего объема (рис. 18.2). Последние соответствуют i -му и k -му номеру двойной суммы. Тогда можем написать



$$|E_p|^2 = \left(\frac{k^2}{4\pi}\right)^2 \int_V dV' \int_V \Delta \varepsilon' \Delta \varepsilon'' A^2 \sin \gamma' \sin \gamma'' \times \\ \times \frac{e^{-ik(r'-r''+r'_0-r''_0)}}{r'_0 r''_0 r' r''} dV''.$$

Рис. 18.2

Найдем среднее значение квадрата амплитуды

$$|\overline{E_p^2}| = \left(\frac{k^2}{4\pi}\right)^2 \int_V dV' \int_V \overline{\Delta \varepsilon' \Delta \varepsilon''} A^2 \sin \gamma' \sin \gamma'' \frac{e^{-ik(r'-r''+r'_0-r''_0)}}{r'_0 r''_0 r' r''} dV''.$$

В последнем выражении должно подразумеваться усреднение по ансамблю случайных функций координат $\Delta \epsilon(x, y, z)$. Однако на основании эргодической гипотезы усреднение по ансамблю можно заменить усреднением по времени.

Корреляционная функция

$$\overline{\Delta \epsilon' \Delta \epsilon''} = B_\epsilon(R)$$

в предположении однородности и изотропности случайного поля является функцией только расстояния R между коррелирующими точками. Индексом ϵ отмечено, что корреляционная функция относится к флуктуации диэлектрической проницаемости ϵ .

Сначала возьмем объемный интеграл по V , считая расстояния r''_0 и r'' фиксированными и равными r'_0 и r' .

На основании метода стационарной фазы заключаем, что существует наиболее важная область интегрирования, занимающая близлежащую окрестность точки, в которой

$$r_0 - r'_0 + r - r' = 0$$

и соответственно все медленно меняющиеся множители выносим за знак интеграла.

Таким образом, полагая

$$\frac{1}{r'_0} = \frac{1}{r''_0} = \frac{1}{r_0}, \quad \frac{1}{r'} = \frac{1}{r''} = \frac{1}{r}, \quad \sin \gamma' = \sin \gamma'' = \sin \gamma,$$

получаем

$$|E_p|^2 = A^2 \left(\frac{k^2}{4\pi} \right)^2 \int_V \frac{\sin^2 \gamma}{r_0^2 r^2} dV \int_V B_\epsilon e^{-ik(r-r'_0+r-r')} dV'.$$

Для вычисления внутреннего объемного интеграла вводим прямоугольную систему координат с началом в центре элементарного объема dV и осью x , перпендикулярной вертикальной плоскости. Тогда, если считать, что передающая и приемная антенны находятся в дальней зоне рассеивающего объема, можно получить

$$r_0 - r'_0 + r - r' = y \sin \theta - z(1 - \cos \theta),$$

где θ — так называемый угол рассеяния — угол между направлениями первичной и рассеянной волн.

В соответствии с методом стационарной фазы пределы интегрирования в трехкратном интеграле можно растянуть до бесконечности и в результате получить

$$\begin{aligned} & \int_V B_\epsilon e^{-ik(r-r'_0+r-r')} dV' = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_\epsilon(x, y, z) e^{-ik[y \sin \theta - z(1 - \cos \theta)]} dx dy dz. \end{aligned}$$

Сравнивая этот тройной интеграл с преобразованием Фурье, видим, что он представляет собой умноженную на $(2\pi)^3$ спектральную плотность со значениями составляющих вектора m :

$$m_x = 0, \quad m_y = k \sin \theta, \quad m_z = -k(1 - \cos \theta).$$

Таким образом, получаем

$$|E_{\text{пл}}|^2 = A^2 \left(\frac{k^2}{4\pi} \right)^3 (2\pi)^3 \int_V \frac{\sin^2 \gamma}{r_0^2 r^2} \Phi_\varepsilon [0, k \sin \theta, k(\cos \theta - 1)] dV. \quad (18.1)$$

Однако из предыдущей лекции нам известно, что для однородного и изотропного случайного поля

$$B_\varepsilon = B_\varepsilon(R) \quad (R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

$$\Phi_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(m),$$

где

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} \\ &= \sqrt{k^2 \sin^2 \theta + k^2 \cos^2 \theta - 2k^2 \cos \theta + k^2} = \\ &= k \sqrt{2(1 - \cos \theta)} = 2k \sin \frac{\theta}{2}, \end{aligned}$$

т. е. согласно (17.6)

$$\Phi_\varepsilon(m) = \Phi_\varepsilon \left(2k \sin \frac{\theta}{2} \right) = 0,033 C_\varepsilon^2 \left(2k \sin \frac{\theta}{2} \right)^{-\frac{11}{3}}.$$

Выясним смысл переменной m . Эта переменная в преобразовании Фурье функции, зависящей от пространственной координаты, играет такую же роль, как частота ω в преобразовании Фурье функции, зависящей от времени. Поэтому аналогично равенству

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

где T — период времени, можем написать:

$$m = \frac{2\pi}{l},$$

где l — пространственный период. Отсюда получаем

$$\frac{2\pi}{l} = 2k \sin \frac{\theta}{2}$$

или

$$l = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\theta}{2}}.$$

Важный физический вывод, содержащийся в последнем равенстве, можно сформулировать следующим образом: каждому углу рассеяния θ соответствует свой масштаб l неоднородностей, обуславливающий рассеяние в направлении этого угла.

Часто формулу (18.1) представляют в виде

$$|E_p|^2 = \int_V \alpha_p \frac{|E_0|^2}{r^2} dV,$$

где α_p — так называемый коэффициент рассеяния, $\frac{1}{M}$, причем

$$\alpha_p = \left(\frac{k^2}{4\pi} \right)^2 (2\pi)^3 \sin^2 \gamma \Phi_\varepsilon \left(2k \sin \frac{\theta}{2} \right).$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} |E_0|^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{A^2}{r_0^2} = S_{\text{пер}},$$

видим, что по определению

$$\alpha_p = \frac{\Delta S_p r^2}{S_{\text{пер}} \Delta V}.$$

ЛЕКЦИЯ 19

ОЦЕНКА ХАРАКТЕРИСТИК ФЛУКТУАЦИЙ ПАРАМЕТРОВ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В ГЕОМЕТРООПТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ, ФЛУКТУАЦИИ ФАЗЫ

1. О методах расчета характеристик флуктуаций параметров волны.
2. Характеристика флуктуаций фазы.

1. О методах расчета характеристик флуктуаций параметров волны

Методы расчета статистических характеристик параметров волны, распространяющейся в случайно неоднородной среде, определяются отношением масштаба неоднородностей к размеру существенной области для распространения электромагнитных волн.

Мы знаем, что при распространении электромагнитных волн от первичного источника к точке наблюдения, удаленной от последнего на расстояние L , областью существенной для распространения, является эллипсоид вращения с фокусами в корреспондирующих пунктах. Сечение этого эллипсоида имеет величину порядка

$$\sqrt{\lambda L}.$$

Если масштаб неоднородностей значительно больше этого сечения, то, поскольку фронт волны в пределах эллипсоида плоский, можно применить геометрическое приближение.

Полагая, что основной вклад в флуктуации параметров волны в атмосфере вносят неоднородности с масштабами, расположенными в инерционном интервале, указанное условие применимости геометрического приближения можно сформулировать в виде

$$l_0 \gg \sqrt{\lambda L}, \quad (19.1)$$

где l_0 — внутренний масштаб турбулентности.

Условие (19.1) можно представить и в виде

$$L \ll \frac{l_0^2}{\lambda}.$$

Из этого неравенства видно, что приближение геометрической оптики применимо на таких расстояниях L от источника, которые соответствуют зоне Френеля или ближней зоне неоднородности масштаба l_0 . Если это условие не выполняется, т. е. имеет место неравенство

$$L > \frac{l_0^2}{\lambda},$$

то приближение геометрической оптики неприменимо. Следовательно, приближение геометрической оптики непригодно при таких расстояниях L от источника, которые соответствуют зоне Фраунгофера или дальней зоне неоднородности масштаба l_0 . Для оценки флуктуаций параметров волны в этой зоне применяется метод плавных возмущений, разработанный С. М. Рытовым и А. М. Обуховым и метод некогерентных рассеивающих неоднородностей.

Во всех перечисленных методах принимается, что флуктуации α показателя преломления, т. е.

$$\alpha = n - 1,$$

малы по сравнению с единицей n , следовательно, $\alpha \approx \frac{\Delta \epsilon}{2}$.

В данной и последующей лекциях мы рассмотрим флуктуации лишь в ближней зоне и спектральную плотность корреляционной функции показателя преломления будем считать равной

$$\Phi_n(m) = 0,033 C_n^2 m^{-\frac{11}{3}}.$$

При этом мы в основном будем следовать [3], а также [7].

2. Характеристика флуктуаций фазы

В приближении геометрической оптики фаза волны

$$\varphi = k\psi = k \int_l n dl$$

и соответственно флуктуация фазы равна

$$\Delta \varphi = \varphi - \varphi_0 = k \int_0^L \alpha dl,$$

где L — длина трассы.

Средний квадрат флуктуации фазы определяется формулой

$$\overline{\Delta\varphi^2} = k^2 \int_0^L \overline{a dl} \int_0^L a dl = k^2 \int_0^L \int_0^L \overline{a_1 a_2} dl_2 dl_1.$$

В силу однородности и изотропности случайного поля флуктуаций корреляционная функция

$$B_n = \overline{a_1 a_2}$$

зависит только от расстояния между коррелирующими точками, т. е.

$$B_n = B_n(|r_2 - r_1|).$$

Далее мы можем пренебречь искривлением луча и, положив

$$\xi = r_2 - r_1,$$

получить

$$\overline{\Delta\varphi^2} = k^2 \int_0^L dr_1 \int_{-r_1}^{L-r_1} B_n(\xi) d\xi,$$

причем мы можем считать, что луч совпадает с осью x .

Поскольку корреляционная функция достаточно быстро убывает с увеличением расстояния между коррелирующими точками, мы можем пределы интегрирования по переменной ξ растянуть в пределах от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\overline{\Delta\varphi^2} = k^2 L \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\xi) d\xi. \quad (19.2)$$

Для того чтобы вычислить интеграл, воспользуемся представлением $B_n(\xi, y, z)$ тройным интегралом Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_n(\xi, y, z) d\xi = \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(\mathbf{m}) e^{i(m_y y + m_z z)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{im_\xi \xi} d\xi dm_\xi dm_y dm_z$$

и найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_n(\xi) d\xi = \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(\mathbf{m}) dm_y dm_z \int_{-\infty}^{\infty} e^{im_\xi \xi} d\xi dm_\xi. \quad (19.3)$$

Но

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{im_\xi \xi} d\xi = \delta(m_\xi - 0) \text{ — дельта-функция.} \quad (19.4)$$

Смысл δ -функции нетрудно уяснить из представления какой-либо функции $f(x)$ интегралом Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{i\alpha(x-x')} d\alpha dx', \quad (19.5)$$

который можно записать в виде

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x' - x) dx', \quad (19.6)$$

где

$$\delta(x' - x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha(x-x')} d\alpha. \quad (19.7)$$

Дельта-функция как бы из всевозможных значений рассматриваемой функции $f(x)$ выхватывает какое-то одно значение. Сопоставляя (19.5) — (19.7) с (19.3) — (19.4), можем написать

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\xi) d\xi &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(\sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}) \delta(m_x - 0) dm_x dm_y dm_z = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(\sqrt{m_y^2 + m_z^2}) dm_y dm_z. \end{aligned}$$

Применяя полярную систему координат m, φ и учитывая, что

$$dm_y dm_z = m d\varphi dm, \quad m = \sqrt{m_y^2 + m_z^2},$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\xi) d\xi &= 2\pi \int_0^{\infty} dm \int_0^{2\pi} m \Phi_n(m) d\varphi = \\ &= (2\pi)^2 \int_0^{\infty} m \Phi_n(m) dm. \end{aligned}$$

Подставив под интегралом

$$\Phi_n(m) = 0,033 C_n^2 m^{-\frac{11}{3}}$$

и заменив нижний предел интегрирования величиной

$$m_0 = \frac{2\pi}{L_0},$$

где L_0 — внешний масштаб турбулентности, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\xi) d\xi &= 4\pi^2 C_n^2 \cdot 0,033 \int_{m_0}^{\infty} m^{-\frac{8}{3}} dm = \\ &= 4\pi^2 \cdot 0,033 \frac{3}{5} C_n^2 m_0^{-\frac{5}{3}}. \end{aligned}$$

Таким образом, средний квадрат флуктуации фазы равен

$$\overline{\Delta\varphi^2} = k^2 L_0 4\pi^2 \cdot 0,033 \frac{3}{5} \cdot L_0^{\frac{5}{3}} (2\pi)^{-\frac{5}{3}}$$

или

$$\overline{\Delta\varphi^2} = 0,037 C_n^2 k^2 L L_0^{\frac{5}{3}}.$$

ЛЕКЦИЯ 20

ХАРАКТЕРИСТИКИ ФЛУКТУАЦИИ УГЛА ПРИХОДА И АМПЛИТУДЫ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

1. Характеристика флуктуаций угла прихода.
2. Характеристика флуктуаций амплитуды.

1. Характеристика флуктуаций угла прихода

Интегрируя уравнение луча

$$\frac{\partial(l^0 n)}{\partial l} = \nabla n,$$

находим

$$n l^0 - n_0 l_0^0 = \int_0^L \nabla n dl.$$

Учитывая, что $n \approx 1$, получаем

$$l^0 - l_0^0 \approx \int_0^L \nabla n dl.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат, для левой части находим

$$(l^0 - l_0^0)^2 = 2(1 - l^0 l_0^0) = 2(1 - \cos \theta) \approx \Delta \theta^2, \quad (20.1)$$

где $\Delta \theta$ — угол между направлениями касательных к лучу в точках выхода и прихода или, короче, флуктуация угла прихода. Последнее соотношение означает, что флуктуация угла прихода предполагается малой. Таким образом,

$$\Delta \theta^2 = \int_0^L \int_0^L (\nabla n)_1 (\nabla n)_2 dl_1 dl_2.$$

Индексы у скобок означают значения градиента функции $\alpha(x, y, z)$ в точках, в которых происходят флуктуации, так что

$$(\nabla\alpha)_1(\nabla\alpha)_2 = \frac{\partial\alpha}{\partial x}\Big|_{x=x_1} \cdot \frac{\partial\alpha}{\partial x}\Big|_{x=x_2} + \\ + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\Big|_{y=y_1} \cdot \frac{\partial\alpha}{\partial y}\Big|_{y=y_2} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\Big|_{z=z_1} \cdot \frac{\partial\alpha}{\partial z}\Big|_{z=z_2}.$$

Полагая

$$\alpha(x_1, y_1, z_1) \cdot \alpha(x_2, y_2, z_2) = f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2),$$

т. е. рассматривая произведение слева как функцию шести переменных $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, можем написать

$$(\nabla\alpha)_1(\nabla\alpha)_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_1}.$$

Усредняя обе части последнего равенства по промежутку времени T , получаем

$$\overline{(\nabla\alpha)_1(\nabla\alpha)_2} = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_1} \right) dt = \\ = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_1} + \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial z_1} \right) \frac{1}{T} \int_0^T f dt.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{(\nabla\alpha)_1(\nabla\alpha)_2} = \nabla_2 \nabla_1 \overline{f} = \nabla_2 \nabla_1 \overline{\alpha_1 \alpha_2},$$

где оператор $\nabla_2 \nabla_1$ равен

$$\nabla_2 \nabla_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_1} + \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial z_1}$$

и, следовательно,

$$\overline{\Delta\theta^2} = \int_0^L \int_0^L \overline{(\nabla\alpha)_1(\nabla\alpha)_2} dl_2 dl_1 = \int_0^L \int_0^L \nabla_1 \nabla_2 \overline{\alpha_1 \alpha_2} dl_2 dl_1.$$

Учитывая, что корреляционная функция $B_n = \overline{\alpha_1 \alpha_2}$ зависит только от расстояния между коррелирующими точками, вследствие чего

$$\nabla_2 = -\nabla_1 = \nabla, \quad \nabla_2 \nabla_1 = -\nabla^2$$

и пренебрегая искривлением луча, получаем

$$\overline{\Delta\theta^2} = - \int_0^L \int_0^L \nabla^2 B_n(x_2 - x_1) dx_2 dx_1.$$

Вводим новую переменную

$$\xi = x_2 - x_1$$

и находим

$$\overline{\Delta\theta^2} = - \int_0^L dx_1 \int_{-x_1}^{L-x_1} \nabla^2 B_n(\xi) d\xi.$$

Растягивая во внутреннем интеграле пределы интегрирования до $\pm \infty$, получаем

$$\overline{\Delta\theta^2} = -L \int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 B_n(\xi) d\xi.$$

Воспользовавшись представлением корреляционной функции интегралом Фурье, можем написать

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 B_n(\xi, y, z) d\xi &= - \iiint_{-\infty}^{\infty} m^2 \Phi_n(\mathbf{m}) e^{i(m_y y + m_z z)} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{jm_x \xi} dm_x dm_y dm_z, \end{aligned}$$

откуда, учитывая свойства δ -функции, рассмотренные в предыдущей лекции, находим соотношение

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 B_n(\xi) d\xi &= -2\pi \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(m) m^2 dm_y dm_z \cdot \\ &(m^2 = m_y^2 + m_z^2). \end{aligned}$$

Применяя полярную систему координат m, φ , получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 B_n(\xi) d\xi = -(2\pi)^2 \int_0^{\infty} m^3 \Phi_n(m) dm.$$

Подставив под интегралом

$$\Phi_n(m) = 0,033 C_n^2 m^{-\frac{11}{3}}$$

и заменив верхний предел интегрирования величиной

$$M_0 = \frac{2\pi}{l_0},$$

где l_0 — внутренний масштаб турбулентности, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 B_n(\xi) d\xi &= -(2\pi)^2 0,033 C_n^2 \int_0^{M_0} m^{-\frac{2}{3}} dm = \\ &= -4\pi^2 \cdot 0,033 C_n^2 \cdot 3M_0^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Таким образом, средний квадрат флуктуаций угла прихода равен

$$\overline{\Delta\theta^2} = 4\pi^2 L \cdot 0,033 C_n^2 \lambda \left(\frac{2\pi}{l_0} \right)^{\frac{1}{3}}$$

или

$$\overline{\Delta\theta^2} = 7 C_n^2 L l_0^{-\frac{1}{3}}.$$

2. Характеристика флуктуаций амплитуды

В приближении геометрической оптики, как было показано в одной из предыдущих лекций, амплитуда волны рассчитывается по формуле

$$A = A_0 \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int_l \frac{\operatorname{div}(l^0 n)}{n} dl \right\};$$

$$\ln \frac{A}{A_0} = - \frac{1}{2} \int_l \frac{\operatorname{div}(l^0 n)}{n} dl \approx - \frac{1}{2} \int \operatorname{div}(l^0 n) dl.$$

Поскольку

$$l^0 n = \operatorname{grad} \psi = \operatorname{grad} \int n dl,$$

то

$$\operatorname{div}(l^0 n) = \nabla^2 \psi = \nabla^2 \int n dl = \int \nabla^2 n dl$$

и, следовательно,

$$\ln \frac{A}{A_0} = \chi = - \frac{1}{2} \int_0^L \int_l \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} \right) dl_2 dl_1.$$

Пренебрегая искривлением луча и полагая его направленным по оси x -ов, после выполнения интегрирования по x находим

$$\chi = - \frac{1}{2} \left(\alpha + \int_0^L dx \int_0^x dx' \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} \right) \right).$$

Воспользуемся возможностью упрощения этого выражения. Подынтегральная функция равна величине, порядок которой

$$\frac{\alpha}{l_0^2},$$

и поэтому двойной интеграл имеет порядок величины

$$\alpha \frac{L^2}{l_0^2} \gg \alpha.$$

Вследствие этого слагаемым α можно пренебречь, и мы получаем

$$\chi = -\frac{1}{2} \int_0^L dx \int_0^x dx' \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} \right),$$

где область интегрирования имеет вид, показанный на рис. 20.1 (штрихованный треугольник). Выполнив интегрирование по x' , получаем

$$\chi = -\frac{1}{2} \int_0^L (L-x) \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} \right) dx,$$

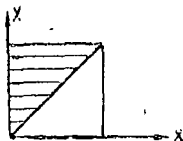


Рис. 20.1

откуда средний квадрат логарифма отношения логарифма амплитуды к ее начальному значению равен

$$\overline{\chi^2} = \frac{1}{4} \int_0^L \int_0^L (L-x_1)(L-x_2) \overline{(\nabla_{\perp}^2 \alpha)_1 (\nabla_{\perp}^2 \alpha)_2} dx_1 dx_2.$$

Вычислим

$$\overline{(\nabla_{\perp}^2 \alpha)_1 (\nabla_{\perp}^2 \alpha)_2}.$$

Обозначив, как и прежде, $\alpha(y_1, z_1) \alpha(y_2, z_2) = f(\hat{y}_1, z_1, y_2, z_2)$, можем написать

$$(\nabla_{\perp}^2 \alpha)_1 (\nabla_{\perp}^2 \alpha)_2 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{y_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \Big|_{z_1} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{y_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \Big|_{z_2} \right),$$

$$\overline{(\nabla_{\perp}^2 \alpha)_1 (\nabla_{\perp}^2 \alpha)_2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \Big|_{y_1} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Big|_{z_1} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \Big|_{y_1} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Big|_{z_1} \right) \frac{1}{T} \int_0^T a_1 a_2 dt,$$

откуда следует, что

$$\overline{\chi^2} = \frac{1}{4} \int_0^L \int_0^L (L-x_1)(L-x_2) \nabla_{\perp 1}^2 \nabla_{\perp 2}^2 B_n(x_2-x_1) dx_1 dx_2.$$

Вводим новые переменные интегрирования

$$\xi = \frac{x_2 - x_1}{2}; \quad \eta = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

и учитывая, что якобиан равен 1 и $\eta = x_1 + \frac{\xi}{2}$, получаем

$$\overline{\chi^2} = \frac{1}{4} \int_0^L \int_{\frac{\xi}{2}}^{L+\frac{\xi}{2}} \left[(L-\eta)^2 - \left(\frac{\xi}{2} \right)^2 \right] (\nabla_{\perp}^2)^2 B_n(\xi) d\eta d\xi.$$

Выполняем интегрирование по η и π , учитывая, что $B_n(\xi)$ имеет заметную величину лишь в пределах $l_0 \ll L$, получаем

$$\overline{\chi^2} = \frac{L^3}{12} \int_0^L (\nabla_{\perp}^2)^2 B_n(\xi) d\xi.$$

Верхний предел интегрирования берем равным бесконечности и, учитывая четность функции $B_n(\xi)$, получаем

$$\overline{\chi^2} = \frac{L^3}{24} \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla_{\perp}^2)^2 B_n(\xi) d\xi.$$

Как и при вычислении характеристик флуктуаций фазы и угла прихода, применяем представленные корреляционной функции тройным интегралом Фурье и находим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla_{\perp}^2)^2 B_n(\xi, y, z) d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (m_y^2 + m_z^2)^2 \Phi_n(\mathbf{m}) \times \\ &\times e^{i(m_y y + m_z z)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{im_{\xi} \xi} d\xi dm_{\xi} dm_y dm_z. \end{aligned}$$

Учтем свойства дельта-функции и получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\nabla_{\perp}^2)^2 B_n(\xi) d\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (m_y^2 + m_z^2)^2 \Phi_n(m) dm_y dm_z,$$

или, применяя полярную систему координат m , φ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\nabla_{\perp}^2)^2 B_n(\xi) d\xi = (2\pi)^2 \int_0^{\infty} m^5 \Phi_n(m) dm.$$

Подставив под интегралом

$$\Phi_n(m) = 0,033 C_n^2 m^{-\frac{11}{3}}$$

и заменив верхний предел интегрирования величиной

$$M_0 = \frac{2\pi}{l_0},$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla_{\perp}^2)^2 B_n(\xi) d\xi &= 4\pi^2 0,033 C_n^2 \int_0^{M_0} m^{\frac{4}{3}} dm = \\ &= 4\pi^2 \cdot 0,033 C_n^2 \frac{3}{7} M_0^{\frac{7}{3}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\overline{\chi^2} = \frac{\pi^2}{6} L^3 \cdot 0,033 \cdot \frac{3}{7} C_n^2 \left(\frac{2\pi}{l_0} \right)^{\frac{7}{3}}$$

или

$$\overline{\chi^2} = 1,74 C_n^2 L^3 l_0^{-\frac{7}{3}}.$$

В ближней зоне флуктуации амплитуды ΔA еще малы и поэтому можно положить

$$\chi = \ln \frac{A_0 + \Delta A}{A_0} = \frac{\Delta A}{A_0}.$$

Таким образом, отношение среднего квадрата флуктуаций амплитуды к квадрату начальной амплитуды равно

$$\frac{\overline{\Delta A^2}}{A^2} = 1,74 C_n^2 L^3 l_0^{-\frac{7}{3}}.$$

ЛЕКЦИЯ 21

ФЛУКТУАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ВОЛНЫ В ДАЛЬНОЙ ЗОНЕ. СПЕКТРЫ ФЛУКТУАЦИЙ

1. Краткие сведения о методе плавных возмущений и методе некогерентно рассеивающих неоднородностей.
2. Формулы для расчета характеристик флуктуаций в дальней зоне.
3. Спектры флуктуаций и экспериментальные данные.

1. Краткие сведения о методе плавных возмущений и методе некогерентно рассеивающих неоднородностей

На больших расстояниях, соответствующих дальней зоне неоднородностей, фронт волны в пределах эллипсоида, существенного для распространения электромагнитных волн из-за наличия неоднородности, уже не плоский и поэтому приближение геометрической оптики неприменимо.

В этом случае, как уже было указано, расчет характеристик флуктуаций производится по методу плавных возмущений Рытова—Обухова или методу некогерентно рассеивающих неоднородностей.

В методе плавных возмущений, как и в приближении геометрической оптики, должно соблюдаться условие медленности изменения показателя преломления в пространстве и флуктуация показателя преломления должна быть малой, т. е.

$$|\alpha| \ll 1.$$

Однако в данном методе в отличие от геометрической оптики область, существенная для распространения электромагнитных волн, определяется не на основе принципа Гюйгенса—Френеля, а на основе иных соображений. Здесь существенно, чтобы имело место неравенство

$$\lambda \ll l_0.$$

В этом случае угол рассеяния на неоднородностях показателя преломления имеет порядок величины $\frac{\lambda}{l_0}$. Соответственно наибольший вклад в поле рассеяния неоднородностями вносят лишь те неоднородности, которые заключены в конусе с вершиной в точке наблюдения, осью, направленной на источник и с углом раствора

$$\frac{\lambda}{l_0} \ll 1.$$

Получаемые при этих исходных предположениях формулы оказываются справедливыми при дальностях L , удовлетворяющих условию

$$L \ll \frac{l_0^4}{\lambda^3} = \frac{l_0^2}{\lambda} \left(\frac{l_0}{\lambda} \right)^2,$$

или

$$\lambda L \ll l_0^2 \frac{l_0^2}{\lambda^2}. \quad (21.1)$$

Поскольку в оптическом диапазоне волн

$$\left(\frac{l_0}{\lambda} \right)^2 \gg 1,$$

то условие (21.1) является значительно менее жестким, чем условие применимости формул приближения геометрической оптики.

Метод некогерентно рассеивающих неоднородностей состоит в следующем.

Предполагается, что выполняется условие

$$L_0 \ll \sqrt{\lambda L},$$

где L_0 — внешний масштаб турбулентности и флуктуация показателя преломления $|\alpha| \ll 1$. В этом случае в пределах существенного эллипсоида для распространения электромагнитных волн в его поперечных сечениях укладывается большое число неоднородностей. Поскольку же диэлектрическая проницаемость является случайной функцией координат и времени, можно считать, что каждая из неоднородностей рассеивает электромагнитные волны независимо от других. Следовательно, каждая из неоднородностей может рассматриваться как независимый источник вторичных волн и можно полагать, что в точку приема одновременно с первичной волной приходит множество вторичных волн со случайными амплитудами и фазами.

Существенным ограничением области применимости метода, как впрочем и метода плавных возмущений, является условие малости флуктуаций. Это ограничение не позволяет применять метод при всех расстояниях L , а лишь до определенного верхнего предела.

Дальнейшие подробности обонх методов можно найти в [3]. Здесь же мы приведем готовые расчетные формулы, полученные тем или другим методом.

2. Формулы для расчета характеристик флуктуаций в дальней зоне

Следует иметь в виду, что при выводе формулы для характеристики флуктуаций фазы в ближней зоне не накладывалось никаких ограничений на величину флуктуаций.

Поэтому полученная ранее формула для среднего квадрата флуктуаций по прямой трассе

$$\begin{aligned}\overline{\Delta\varphi^2} &= k^2 L \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\xi) d\xi = \\ &= k^2 L (2\pi)^2 \int_0^{\infty} m \Phi_n(m) dm\end{aligned}$$

справедлива для произвольной длины трассы L .

Для трассы длиной

$$L < \frac{l_0^4}{\lambda^3}$$

средний квадрат логарифма отношения амплитуды к ее начальному значению согласно методу плавных возмущений равен

$$\overline{\chi^2} = \left(\ln \frac{A}{A_0} \right)^2 = 0,31 C_n^2 k^7 L^{\frac{11}{6}},$$

а средний квадрат флуктуаций угла прихода равен

$$\overline{\Delta\theta^2} = 1,64 C_n^2 L l_0^{-\frac{1}{3}}.$$

Для длин трасс

$$L > \frac{L_0^2}{\lambda},$$

где L_0 — внешний масштаб турбулентности, согласно методу некогерентно рассеивающих неоднородностей, средний квадрат флуктуаций фазы и отношение среднего квадрата флуктуаций амплитуды к квадрату начальной амплитуды равны друг другу, причем

$$\overline{\Delta\varphi^2} = \frac{\overline{\Delta A^2}}{A_0^2} = 2 \frac{\pi^{\frac{5}{2}}}{\lambda^2} L L_0 \alpha^2. \quad (21.2)$$

Средний квадрат флуктуаций угла прихода равен

$$\overline{\Delta\theta^2} = 4\sqrt{\pi\alpha^2} \frac{L}{L_0}. \quad (21.3)$$

Следует иметь в виду, что формулы (21.2) и (21.3) рассчитаны при корреляционной функции флуктуаций показателя преломления

$$\overline{\alpha_1\alpha_2} = \overline{\alpha^2} e^{-\left(\frac{r}{L_0}\right)^2}.$$

Такая весьма общего вида корреляционная функция принята потому, что в данном случае, когда масштаб турбулентности больше L_0 , законы, управляющие турбулентным движением воздуха, недостаточно изучены.

3. Спектры флуктуаций и экспериментальные данные

Экспериментальные измерения позволяют выполнить проверку рассмотренной в предыдущих лекциях теории флуктуаций.

Однако для этого необходимо перейти от пространственного описания к временному. Последнее возможно, если воспользоваться предположением о переносе как целого всей совокупности неоднородностей без учета флуктуаций скорости переноса и эволюции неоднородностей в процессе движения, или, иначе говоря, если считать справедливой гипотезу *замороженной* турбулентности.

Прежде чем приступить к интерпретации спектра флуктуаций интенсивности волны, распространяющейся в турбулентной атмосфере, необходимо выяснить, какую роль играют различные составляющие скорости неоднородности — продольная и поперечная составляющие v_{\parallel} и v_{\perp} относительно направления распространения волны.

Амплитуда волны определяется интегралом по объему с поперечным сечением $\sqrt{\lambda L}$.

Очевидно, что за время τ продольное и поперечное смещения неоднородностей составят соответственно $v_{\parallel}\tau$ и $v_{\perp}\tau$. При этом, если $v_{\perp}\tau \sim \sqrt{\lambda L}$, то амплитуда волны в точке наблюдения изменяется существенно. В то же время продольное смещение будет иметь порядок величины

$$v_{\parallel} \frac{\sqrt{\lambda L}}{v_{\perp}} \ll L$$

и, следовательно, это смещение приведет лишь к незначительному изменению интенсивности в конце трассы. Поэтому при $\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \sim 1$ в силу того, что $\sqrt{\lambda L} \ll L$, достаточно учитывать лишь поперечное по

отношению к трассе смещение неоднородностей. Очевидно, что имеет место равенство

$$\chi(r, t + \tau) = \chi(r - v_{\perp} \tau, t).$$

Поэтому временная корреляционная функция логарифма отношения амплитуды к ее начальному значению равна

$$R_{\chi}(\tau) = \overline{\chi(r, t + \tau)\chi(r, t)} = B_{\chi}(v_{\perp} \tau).$$

В силу однородности случайного поля рассматриваемый случайный процесс стационарен.

Согласно теореме Хинчина для стационарного случайного процесса можем написать соотношения

$$R_{\chi}(\tau) = B_{\chi}(v_{\perp} \tau) = \int_0^{\infty} \cos(2\pi f \tau) w_{\chi}(f) df;$$

$$w_{\chi}(f) = 4 \int_0^{\infty} \cos(2\pi \tau f) B_{\chi}(v_{\perp} \tau) d\tau, \quad (21.4)$$

где $w_{\chi}(f)$ — спектральная плотность мощности флуктуаций.

Эту последнюю функцию можно сравнительно просто получить экспериментально и сравнить с функцией $w_{\chi}(f)$, полученной теоретическим путем.

Рассчитанная по формуле (21.4) для дальнейней зоны спектральная плотность мощности флуктуаций амплитуды равна

$$w_{\chi}(f) = 1,14 \bar{\chi}^2 \frac{\Omega^{-\frac{8}{3}}}{f_0}, \quad (21.5)$$

где согласно изложенному выше

$$\bar{\chi}^2 = 0,31 C_n^2 k^{\frac{7}{6}} L^{\frac{11}{6}},$$

а

$$\Omega = \frac{f}{f_0}, \quad f_0 = \frac{v_{\perp}}{\sqrt{2\pi\lambda L}}.$$

Формула (21.5) справедлива при $\Omega \gg 1$. При $\Omega \ll 1$

$$w_{\chi}(f) = 0,15 \frac{\bar{\chi}^2}{f_0}.$$

Экспериментальный нормированный частотный спектр флуктуации интенсивности света при скорости ветра $v_{\perp} \sim 3 \frac{м}{сек}$ приведен на рис. 21.1.

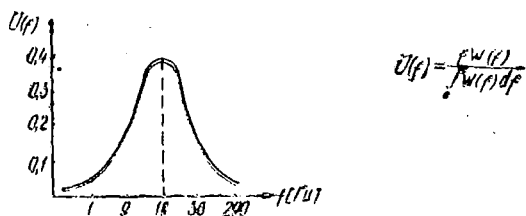


Рис. 21.1

$$U(f) = \frac{f w(f)}{\int_0^{\infty} w(f) df}$$

В результате сравнения экспериментальных и теоретических данных получено, что

$$C_n \sim 10^{-6} м^{-\frac{1}{3}}$$

ЛЕКЦИЯ 22

ОТРАЖЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

1. Допустимые высоты неровностей для зеркального отражения; критерий Релея.
2. Диффузное отражение; закон Ламберта.

1. Допустимые высоты неровностей для зеркального отражения; критерий Релея

Как известно, на границе раздела двух различных сред происходит отражение электромагнитных волн. При этом, если поверхность раздела плоская и ровная, количественно отражение определяется коэффициентами отражения Френеля, характеризующими зеркальное отражение. Однако в действительности, как в радиотехнике, так и в оптике, поверхности не являются гладкими, ровными, а шероховатыми. Ввиду этого представляется необходимым выяснить, каков характер отражения электромагнитных волн от шероховатых поверхностей.

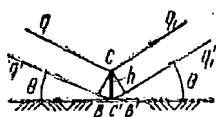


Рис. 22.1

Сначала найдем высоты допустимых неровностей для зеркального отражения. Пусть для упрощения неровность представляется в виде столбика высотой h (рис. 22.1). Очевидно, что можно будет считать отражение зеркальным, если в направлении зеркального отражения в направлении зеркального отражения геометрическая разность хода лучей qcq_1 и $q'c'q'_1$ значительно меньше длины волны λ . Отражение, как и в оптике, считают зеркальным, если эта разность хода меньше $\frac{\lambda}{8}$. Это соответствует разности фаз $\frac{\pi}{4}$.

Из рис. 22.1 видно, что геометрическая разность хода равна

$$BCB' = L = 2h \sin \theta.$$

Соответствующая разность фаз равна

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi L}{\lambda} = \frac{4\pi h \sin \theta}{\lambda}.$$

Следовательно, должно быть

$$\frac{4\pi h}{\lambda} \sin \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

или

$$h \leq \frac{\lambda}{16 \sin \theta} = h_{\text{макс}}. \quad (22.1)$$

Эта формула представляет собой так называемый критерий Релея для зеркального отражения. Из этой формулы видно, что высоты допустимых неровностей для зеркального отражения определяются не только длиной волны, но и существенно зависят от угла скольжения θ . Они тем больше, чем меньше угол скольжения. С этой точки зрения практически требования к существенному участку для отражения с уменьшением угла скольжения θ понижаются и, следовательно, допустимые неровности могут быть большими. Например, для $\lambda = 1$ м и $\theta = 30^\circ$ допустимая высота неровности $h_{\text{макс}} = 0,125$ м, а при $\theta = 1^\circ$ эта высота $h_{\text{макс}} = 3,75$ м.

2. Диффузное отражение; закон Ламберта

Зависимость характера отражения от угла скольжения легко продемонстрировать, наблюдая отражение от листа бумаги световых волн. Белый лист бумаги, наблюдаемый под углом скольжения, близким к 0° , представляется блестящим. Если же лист наблюдать под углом, заметно большим 0° , то блеск исчезает. Выясним, каким будет отражение, если критерий Релея не выполняется. Для этого представим неровность снова в виде столбика. Поскольку теперь отражение незеркальное, лучи, исходящие от пары вторичных источников: источника, расположенного на вершине, и источника у основания столбика — могут иметь произвольное направление (рис. 22.2).

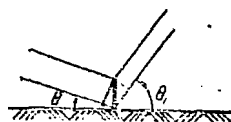


Рис. 22.2

Разность фаз, образованная разностью хода лучей, как видно из рис. 22.2, равна

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi h}{\lambda} (\sin \theta + \sin \theta_1).$$

Суммарное поле этой пары источников соответственно представляется выражением

$$U = ae^{i(\omega t - kr)}(1 + e^{i\Delta\varphi}),$$

где a — амплитуда колебаний поля, созданного одним вторичным источником.

Заменяя каждую неровность парой вторичных источников, мы можем поверхность земли рассматривать как ровную, но с распределенными на ней парами вторичных источников.

Суммарное поле, создаваемое равномерным распределением в пределах площадки ΔS пар источников, равно

$$U = \sum_i u_i = ae^{i\omega t} \sum_i e^{-ikr_i} (1 + e^{i\Delta\varphi_i}). \quad (22.2)$$

Рассчитаем, чему равна плотность потока энергии этого поля, создаваемого источниками площадки в дальней зоне. Для этой цели вычислим интенсивность излучения источников площадки ΔS в ее дальней зоне.

Здесь под интенсивностью излучения понимается мощность, излучаемая в заданном направлении и отнесенная к единице телесного угла и единице площади, излучающей поверхности. Так, если в телесном угле $\Delta\Omega$ площадка ΔS в направлении угла φ излучает мощность ΔP (рис. 22.3), то средняя интенсивность излучения равна

$$I_{\text{ср}} = \frac{\Delta}{\Delta S} \left(\frac{\Delta P}{\Delta\Omega} \right) = \frac{\Delta^2 P}{\Delta\Omega \Delta S}. \quad (22.3)$$

В дальней зоне лучи, исходящие из всех точек площадки, становятся параллельными и соответственно между сечением $\Delta S'$ параллельного пучка лучей и сечением площадки ΔS устанавливается соотношение (рис. 22.4)

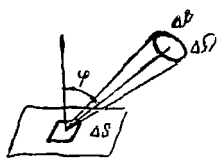


Рис. 22.3

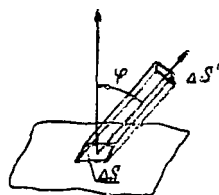


Рис. 22.4

$$\Delta S' = \Delta S \cos \varphi.$$

Отсюда следует, что точная интенсивность излучения в направлении угла φ , получаемая при предельном переходе путем устремления $\Delta\Omega \rightarrow 0$ и $\Delta S' \rightarrow 0$, должна равняться

$$I = \frac{d^2 P}{d\Omega dS'} \cos \varphi. \quad (22.4)$$

Но при $\Delta S' \rightarrow 0$ в формуле (22.2) в пределе имеем и $r_i \rightarrow r$ (рис. 22.4) и мы находим

$$U = \sum_i u_i = a e^{i(\omega t - kr)} \sum_i (1 + e^{i\Delta\varphi_i}).$$

Квадрат модуля U соответственно равен

$$|U|^2 = a^2 \left| \sum_i (1 + e^{i\Delta\varphi_i}) \right|^2 = a^2 \left[\left(\sum_i (1 + \cos \Delta\varphi_i) \right)^2 + \left(\sum_i \sin \Delta\varphi_i \right)^2 \right] = 2na^2 + 2a^2 \left(\sum_i \sum_{k \neq i} \cos(\Delta\varphi_i - \Delta\varphi_k) + \sum_i \cos \Delta\varphi_i \right),$$

где n — число неровностей на единицу площади.

Поскольку $\Delta\varphi_i$ — случайные величины, то суммы с очень большой вероятностью будут равны нулю и поэтому

$$|U|^2 = 2na^2.$$

Отсюда следует, что плотность потока энергии S , излучаемой вторичными источниками достаточно малой площадки dS при фиксированной дальности r от этой площадки, остается постоянной величиной, не зависящей от направления излучения. При этом излучение происходит только в верхнюю полусферу.

А так как

$$S = \frac{dP}{dS'},$$

то вместо формулы (22.4) получаем

$$I = \frac{1}{2\pi} S \cos \varphi;$$

при $\varphi = 0$

$$I = I_0 = \frac{1}{2\pi} S,$$

и, следовательно

$$I = I_0 \cos \varphi. \quad (22.5)$$

Полученное здесь теоретическим путем соотношение (22.5) есть очень хорошо известный «закон косинуса» или закон Ламберта. Последний установил этот закон в результате экспериментальных исследований яркости светящихся поверхностей.

Из самого вывода формулы (22.5) следует, что закон Ламберта имеет место при выполнении двух условий:

а) концентрация неровностей сохраняет постоянное значение на всей отражающей поверхности;

б) отражающая поверхность в среднем не уклоняется от плоскости — в этом случае $\cos \varphi$ сохраняет постоянное значение на всей отражающей поверхности.

Далее, из очевидных соображений следует, что, помимо этих условий, для того, чтобы отражение происходило по закону коси-

пуца, необходимо также, чтобы неровности не создавали теневых областей. Это условие выполняется, если размеры неровностей имеют порядок величины, не больший длины волны.

Отражение, происходящее по закону косинуса, называется рассеянным или диффузным, а поверхности, отражающие диффузное, называются матовыми или шероховатыми. Полный поперечник рассеяния σ участка матовой поверхности площадью ΔS в предположении, что вся перехватываемая этим участком энергия первичной волны полностью рассеивается, определяется из условия

$$P_{\text{расс}} = S_{\text{перв}} \cdot \Delta S \cos \varphi,$$

т. е.

$$\sigma = \frac{P_{\text{расс}}}{S_{\text{перв}}} = \Delta S \cos \varphi.$$

Диаграмма интенсивности излучения, имеющая место при отражении по закону косинуса, приведена на рис. 22.5. Вид диаграммы не зависит от угла падения первичной волны.

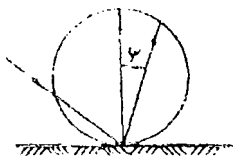


Рис. 22.5

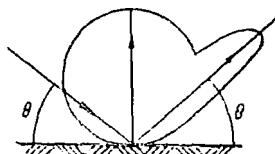


Рис. 22.6

Однако как в оптике, так и в радиотехнике нет так называемых идеально матовых поверхностей, которые бы полностью диффузно отражали. Имеются поверхности, которые лишь приближаются к идеально матовым. Поэтому, строго говоря, отражение от границы раздела различных сред в большей или меньшей степени является полудиффузным, или иначе полурассеянным (рис. 22.6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. Изд-во «Наука», 1970.
2. Шифрин К. С. Рассеяние света в мутной среде. Гостехиздат, 1951.
3. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. Изд-во «Наука», 1967.
4. Зуев В. Е. Распространение видимых и инфракрасных волн в атмосфере. Изд-во «Советское радио», 1970.
5. Черный Ф. Б. Распространение радиоволн. Изд-во «Советское радио», 1972.
6. Распространение лазерного излучения в атмосфере. Экспресс-информация. Радиолокация, телевидение, радиосвязь, 1972; № 33.
7. Чернов Л. А. Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. Изд.-во АН СССР, 1958.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>ЛЕКЦИЯ 1.</i> Решение волнового уравнения для вектора Герца	
Введение	3
1. Сведение системы уравнений электромагнитного поля к волновому уравнению	4
2. Общее решение волнового уравнения для вектора Герца	5
<i>ЛЕКЦИЯ 2.</i> Принцип Гюйгенса-Френеля	
1. Математическая формулировка принципа Гюйгенса—Френеля; формула Кирхгофа	10
2. Гюйгенсовские вторичные источники электромагнитных волн	12
<i>ЛЕКЦИЯ 3.</i> Область пространства, существенная для распространения электромагнитных волн	
1. Упрощение формулы Кирхгофа	15
2. Зоны Френеля	17
3. Эллипсоид, существенный для распространения электромагнитных волн	20
<i>ЛЕКЦИЯ 4.</i> Дифракция электромагнитных волн на полубезграничном экране	
1. Постановка задачи и ее решение на основе построения зон Френеля	21
2. Расчет дифракционного поля вблизи линии наблюдения	23
<i>ЛЕКЦИЯ 5.</i> Дифракция на экранах конечных размеров	
1. Принцип Бабине	27
2. Дифракция Френеля и дифракция Фраунгофера	28
3. Формула для расчета фраунгоферовой дифракции	31
<i>ЛЕКЦИЯ 6.</i> Расчет рассеянного поля экранами конечных размеров по поверхностным токам	
1. Основная формула для расчета поля рассеяния по поверхностному току	33

2. Рассеяние электромагнитных волн круглым экраном	34
3. Метод расчета рассеянного поля идеально проводящими телами	35
4. Рассеяние электромагнитных волн идеально проводящим шаром	37
ЛЕКЦИЯ 7. Максимальная дальность действия радиолокации в свободном пространстве	
1. Краткие сведения о реальных излучателях радиоволн — антеннах	38
2. Максимальная дальность радиосвязи	41
3. Максимальная дальность радиолокации	42
ЛЕКЦИЯ 8. Рассеяние электромагнитных волн шаром с произвольными электрическими параметрами	
1. Постановка задачи	45
2. Формула Релея	45
3. Абсолютно отражающая частица	49
4. Резонанс	50
ЛЕКЦИЯ 9. Рассеяние электромагнитных волн диэлектрическим шаром большого радиуса	
1. Производные лучи	51
2. Отраженные и преломленные лучи	54
3. Лучи, испытавшие несколько внутренних отражений. Радуги	56
ЛЕКЦИЯ 10. Электрические параметры атмосферы	
1. Введение	58
2. Электрические параметры тропосферы	59
3. Электрические параметры поносферы	62
ЛЕКЦИЯ 11. Распространение электромагнитных волн в неоднородных средах	
1. Исходные положения о распространении электромагнитных волн в неоднородных средах	65
2. Геометрооптическое приближение. Основные соотношения	67
3. Уравнение эйконала и лучей	69
4. Интегральный инвариант Лагранжа. Принцип Ферма	70
5. Конгруэнтция лучей и фокальные свойства	73
6. Теорема Малюса и Дюшана	74
ЛЕКЦИЯ 12. Амплитуда волны и закон интенсивностей в приближении геометрической оптики	
1. Уравнение для амплитуды и его решение	75
2. Замечание о ВКБ-приближении	79
3. Закон интенсивностей в геометрической оптике	80
ЛЕКЦИЯ 13. Рефракция электромагнитных волн в атмосфере	
1. Уравнение луча в сферической слонстой атмосфере	82
2. Эйконал для плоскостной атмосферы	83
3. Радиус кривизны луча в сферически слонстой атмосфере	84
4. Эквивалентный радиус Земли	85

ЛЕКЦИЯ 14. Рефракция электромагнитных волн в атмосфере (продолжение)	
1. Приведенный показатель преломления и модуль приведенного показателя преломления (индекс рефракции)	82
2. Виды рефракции	90
ЛЕКЦИЯ 15. Ошибки в измерении угловых координат объекта, обусловленные рефракцией электромагнитных волн в атмосфере	
1. Введение	97
2. Объект находится на конечном расстоянии в пределах тропосферы и стратосферы при $\frac{dn}{dz} = \text{const}$	98
3. Астрономическая рефракция	99
ЛЕКЦИЯ 16. Ослабление электромагнитных волн в атмосфере	
1. Связь дисперсии с поглощением	102
2. Поглощение в газах	103
3. Молекулярное рассеяние	106
4. Аэрозольное ослабление	—
ЛЕКЦИЯ 17. Распространение электромагнитных волн в турбулентной атмосфере. Турбулентная атмосфера и ее характеристики	
1. Понятие о турбулентном движении воздуха	109
2. Закон «двух трегей» Колмогорова-Обухова	110
3. Характеристики случайного поля	112
4. Структурная функция	113
5. Спектральная плотность корреляционной функции	114
ЛЕКЦИЯ 18. Основные соотношения по рассеянию электромагнитных волн в среде со случайными неоднородностями	
1. Решение уравнений Максвелла для среды со случайными неоднородностями	116
2. Приближение Борна	118
3. Амплитуда поля рассеяния	119
ЛЕКЦИЯ 19. Оценка характеристик флуктуации параметров плоской волны в геометрооптическом приближении. Флуктуации фазы	
1. О методах расчета характеристик флуктуаций параметров волны	123
2. Характеристика флуктуаций фазы	124
ЛЕКЦИЯ 20. Характеристики флуктуаций угла прихода и амплитуды плоской волны	
1. Характеристика флуктуаций угла прихода	127
2. Характеристика флуктуаций амплитуды	130
ЛЕКЦИЯ 21. Флуктуации параметров волны в дальней зоне. Спектры флуктуаций	
1. Краткие сведения о методе плавных возмущений и методе некогерентно рассеивающих неоднородностей	134

2. Формулы для расчета характеристик флуктуаций в дальней зоне	136
3. Спектры флуктуаций и экспериментальные данные	137

ЛЕКЦИЯ 22. Отражение и рассеяние электромагнитных волн шероховатой поверхностью

1. Допустимые высоты неровностей для зеркального отражения; критерий Релея	140
2. Диффузное отражение; закон Ламберта	141
Литература	145

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
ЧЕРНЫЙ ФИШЕЛЬ БЕРКОВИЧ

Для внутриведомственной продажи. (Цена 43 коп.).

Литературный редактор *ГОРДЕИЧУК Н. А.*
Технический редактор *ПЕЧУРОВА Г. К.*
Корректор *ЩЕБЛЫКИНА А. П.*

Сдано в набор и подписано к печати 17.8.73. Г—854094. Зак. 208.

Печ. л. 9³/₈. Уч.-изд. л. 9. Бумага 60×90¹/₁₆.

Типография ВИРТА.

Бесплатно

93118

04

14977