ТЕОРІЯ

ОПРЕДѢЛЕННЫХЪ АЛГЕБРАИЧЕСКИХЪ УРАВНЕНІЙ

ВЫСШИХЪ СТЕПЕНЕЙ.

СОЧИНЕНІЕ

ИМПЕРАТОРСКАГО Московскаго Университета Кандидата

І. СОМОВА

МОСКВА.

Въ типографіи Лазаревыхъ Института Восточныхъ языковъ.

1838.

ПЕЧАТАТЬ ПОЗВОЛЯЕТСЯ

съ тѣмъ, чтобы по отпечатаніи представлено было узаконенное число экземпляровъ.
Москва, 1837 года. Марта 22 дня.

Цензоръ Д. Перевощиковъ.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Алгебраическій Анализъ въ послѣднія времена оказалъ быстрые успѣхи. Педагоги наши не переставали за ними слѣдовать и сообщать учащимся новыя открытія, составляя или переводя съ иностранныхъ языковъ хорошія руководства. Но наиболѣе принесли услугу нашей литературѣ Г-да *Бурачекъ* и *Зеленый*, изданіемъ *Лекцій Алгебрическаго Анализа*, читанныхъ въ прошломъ году Академикомъ Остроградскимъ. Не смотря на нѣкоторыя погрѣшности, ускользнувшія отъ вниманія издателей, вѣроятно отъ поспѣшности изданія, этотъ трудъ, истинно-полезный, заслуживаетъ полную благодарность тѣхъ, которые пожелаютъ ознакомиться съ остроумными пріемами нашего Геометра и съ Философскимъ его взглядомъ на предметъ и систему Анализа. Я думаю, что наши соотечественники полюбопытствуютъ прочесть также на Русскомъ языкѣ изложеніе *Теоріи опредѣленныхъ алгебраическихъ уравненій высшихъ степеней* по пріемамъ другихъ знаменитыхъ Геометровъ: Лагранжа, Фурье, и пр. Тогда могутъ они составить полный взглядъ на современное состояніе предмета, здѣсь излагаемаго.

Руководствомъ преимущественно я имѣлъ *Traité de la résolution des équations numériques, par Lagrange* и *Analyse des équations déterminées, par Fourier*. Но такъ какъ первое не содержитъ новѣйшихъ открытій Абеля, Штурма, и проч., а второе заключаетъ только способъ вычисленія дѣйствительныхъ корней, предполагая извѣстными всѣ прочія основныя свойства алгебраическихъ уравненій; то я долженъ былъ прибѣгнуть къ другимъ сочиненіямъ. Для этого я избралъ: *Analyse algébrique, par Cauchy*,— его *Exercices de Mathématiques*,—*Journal von Crelle*,—*Grundzüge der Lehre von den hœheren numerischen Gleichungen, von Drobisch* и многіе елементарные курсы. Въ ясности изложенія я принялъ за образецъ Фурье, въ изящности и простотѣ доказательствъ Лагранжа и Коши, а для системы я взялъ за основную мысль мнѣніе Абеля и Академика Остроградскаго о предметѣ Алгебры, о различіи алгебраическихъ функцій отъ трансцендентныхъ и о рѣшеніи алгебраическихъ уравненій. Печатаніе начато было, когда уже вышли въ свѣтъ Лекціи Академика Остроградского; прочитавъ ихъ, я усмотрѣлъ, что много нужно перемѣнить въ моемъ сочиненіи, и я это сдѣлалъ по возможности. Пріемъ Академика Остроградскаго для доказательства, что во всякой дробной радикальной функціи можно сдѣлать знаменателя раціональнымъ, послужилъ мнѣ для доказательства, что всякое радикальное уравненіе можетъ быть преобразовано въ раціональное. Но я преимущественно пользовался превосходными Лекціями въ шестой главѣ: здѣсь я ввелъ знакъ, предлагаемый Академикомъ Остроградскимъ для изображенія рѣшенія опредѣленныхъ алгебраическихъ уравненій; прибавилъ доказательство, что всякая алгебраическая функція удовлетворяетъ алгебраическому уравненію, котораго коеффиціенты раціональныя функціи, и, чтобы сдѣлать болѣе доступнымъ доказательство Абеля невозможности радикальнаго рѣшенія общаго уравненія 5-й степени, я помѣстилъ теорію подобныхъ и неподобныхъ функцій.

Радикальное рѣшеніе двучленныхъ уравненій по способу Гаусса я по тому не изложилъ, что оно требуетъ предварительныхъ знаній изъ Теоріи чиселъ и что оно болѣе любопытно, нежели необходимо; ему предпочелъ я Тригонометрическое рѣшеніе двучленныхъ уравненій, которое весьма важно въ Трансцендентномъ Анализѣ, и помѣстилъ его въ прибавленіяхъ вмѣстѣ съ другими предметами, которые, хотя не составляютъ существенной принадлежности Алгебры, весьма любопытны, и могутъ быть полезны во многихъ случаяхъ. Въ этихъ прибавленіяхъ я также изложилъ новой способъ Коши приближенія къ дѣйствительнымъ корнямъ, который я прочелъ, уже при концѣ печатанія, въ 10-мъ номерѣ *Comtes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 1837, 5 *Septembre*, *Paris*. Сравнивъ его съ Нютоновымъ способомъ, и открывъ быстроту приближенія, я показалъ въ какомъ случаѣ можно имъ пользоваться съ выгодою, и пояснилъ это примѣромъ.

Предоставляю читателямъ оцѣнить мой трудъ; съ своей стороны я признаюсь, что я могъ бы его совершить лучше; взявши въ первый разъ перо въ руки и излагая предметъ столь важный, я не могъ избѣжать недостатковъ. Впрочемъ надѣюсь, что эта книга принесетъ пользу тѣмъ, которые приготовляются къ дальнѣйшему изученію Анализа.

І. С.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ВВЕДЕНІЕ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Объ общемъ видѣ коеффиціентовъ и корней численнаго уравненія, и о числѣ корней.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

О соотношеніяхъ, существующихъ между корнями и коеффиціентами.

Симметричныя функціи.

Функціи, принимающія два значенія отъ перемѣщенія всѣми возможными образами количествъ, въ нихъ входящихъ.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

О преобразованіяхъ уравненій.

Исключеніе.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

О разъисканіи равныхъ и мнимыхъ корней.

Равные корни.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

О вычисленіи дѣйствительныхъ корней.

Предѣлы корней.

Соизмѣримые корни.

Отдѣленіе корней.

(СПОСОБЪ ЛАГРАНЖА).

(СПОСОБЪ ШТУРМА).

ПРИБАВЛЕНІЯ.

I.

Стран.

II.

III.

IV.

V.

VI.

ТЕОРІЯ

ОПРЕДѢЛЕННЫХЪ АЛГЕБРАИЧЕСКИХЪ УРАВНЕНІЙ ВЫСШИХЪ СТЕПЕНЕЙ.

ВВЕДЕНІЕ.

§ 1. *Математика есть наука объ измѣреніи величинъ.* Вотъ опредѣленіе, которое обыкновенно даютъ одной изъ главныхъ вѣтвей положительныхъ знаній. Опредѣленіе, хотя точное, но недовольно развитое. Въ него входятъ слова: *наука, измѣреніе* и *величина;* первое изъ нихъ выражаетъ понятіе о систематическомъ изложеніи свѣдѣній о какомъ либо предметѣ; второе означаетъ сравненіе величины съ другою однородною, принятою за единицу; наконецъ величиною называютъ все то, что можетъ быть болѣе или менѣе въ отношеніи себѣ однороднаго. Неужели Математика, наука столь обширная, имѣетъ цѣлью изложить систематически только *механическія производства*, какъ то: *наложеніе, взвѣшиваніе* и пр., посредствомъ которыхъ мы сравниваемъ однородные предметы?

Мы слышимъ, что Астрономъ измѣряетъ взаимныя разстоянія тѣлъ небесныхъ, и взвѣшиваетъ планеты. Кто не проникъ въ тайны небесной механики, тотъ не повѣритъ этой истинѣ, и невольно спроситъ: какъ онъ шелъ отъ земли къ солнцу? Гдѣ опора вѣсовъ, на которыхъ онъ вѣсилъ нашу землю? Способъ, которымъ измѣряетъ Астрономъ разстоянія небесныя и опора его вѣсовъ суть произведенія умственныхъ трудовъ великихъ мужей: *Кеплера, Нютона* и *Лапласа.*

И такъ, кромѣ прямаго, непосредственнаго способа измѣренія, есть другой, которой составляетъ существенный предметъ Математики. Въ самомъ дѣлѣ, если одна величина связана извѣстными условіями съ другими, изъ которыхъ каждая, либо только нѣкоторыя подлежатъ прямому измѣренію, тогда будемъ знать также зависимость неизвѣстной величины отъ единицы, и, сообразно этой зависимости, почти всегда можно будетъ опредѣлить ихъ отношеніе. На прим., зная законъ паденія или зависимость высоты отъ времени, въ которое тѣло проходитъ эту высоту, мы въ состояніи будемъ измѣрить глубину пропасти, кинувъ на дно камень, и замѣтивъ время, въ которое онъ прошелъ глубину пропасти. Умственная связь, существующая здѣсь между временемъ и пространствомъ, пройденнымъ въ это время, на математическомъ языкѣ называется *функціею, и выражаетъ рядъ умственныхъ дѣйствій, предполагаемыхъ произвести надъ величинами.* И такъ ***Математика есть наука о функціяхъ величинъ.***

Цѣль ея: 1) изслѣдовать свойства всякой функціи, и умѣть опредѣлять неизвѣстныя величины, въ нее входящія; 2) открывать функціи въ природѣ, т. е. выражать математически зависимость, существующую между величинами, входящими въ какое-либо явленіе природы. Посему Математика раздѣляется на двѣ отрасли: *на чистую* (математическій анализъ = Mathématique abstraite) и *прикладную* (Mathématique concraite).

§ **2.** Пусть v будетъ функція количествъ x_1, $x_2, \ldots\ldots x_n$; для краткости это изображаютъ такъ:

$$v = F\ (x_1,\ x_2, \ldots x_n)$$

Буква F (*) называется *характеристикою*, и выражаетъ дѣйствіе, которое должно произвести надъ x_1, $x_2, \ldots\ldots x_n$, чтобы получить v. Когда это дѣйствіе извѣстно, тогда v есть явная функція (fonction explicite) количествъ x_1, $x_2, \ldots x_n$. Когда же это дѣйствіе неизвѣстно, и F означаетъ только одну зависимость v отъ x_1, $x_2, \ldots\ldots x_n$, тогда v называется неявною функціею (fonction implicite).

Простѣйшія основныя функціи выражаютъ дѣйствія: *сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе* и *извлеченіе корня цѣлой первоначальной степени* (**).

Полагаю, что читателю извѣстны значенія этихъ словъ и знаки, принятые для ихъ изображенія.

Отъ соединенія и повторенія этихъ дѣйствій происходятъ функціи сложныя. Сложная функція, составленная изъ конечнаго числа основныхъ,

---

(*) Буква F для различія функцій замѣняется буквами f, θ, ξ, φ, ψ, Φ, $\mathcal{f}$, и проч.

(**) Возвышеніе въ цѣлую степень есть частный случай умноженія, а извлеченіе корня цѣлой составной степени приводится къ послѣдовательному извлеченію корней первоначальныхъ степеней, которыхъ показатели суть первоначальные множители даннаго показателя.

относится къ разряду функцій, называемыхъ *алгебраическими*; сложная алгебраическая функція, называется *ирраціональною*, когда содержитъ ирраціональные корни; а *раціональною*, когда ихъ не содержитъ. Раціональная функція называется цѣлою, когда знаменатель ея не зависитъ отъ x_1, $x_2, \ldots\ldots x_n$.

§ 3. Понятно, что если

$$(1)\qquad v = f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n).$$

есть цѣлая функція количествъ x_1, $x_2, \ldots\ldots x_n$, то $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ представляется суммою конечнаго числа членовъ вида

$$(2)\qquad A x_1^{m_1} . x_2^{m_2} . x^{m_3} \ldots . x^{m_n},$$

гдѣ A есть количество, независимое отъ x_1 $x_2 \ldots\ldots\ldots x_n$, положительное или отрицательное; а показатели m_1, $m_2, \ldots\ldots m_n$,— всѣ цѣлые положительные. Первыя три основныя дѣйствія суть частные случаи дѣйствія, изображаемаго чрезъ f.

Пусть v_1, $v_2, \ldots\ldots v_n$, будутъ цѣлыя функціи количествъ $x_1, x_2, \ldots x_n$; тогда W — цѣлая раціональная функція количествъ v_1, $v_2, \ldots\ldots v_n$ представляется конечною суммою членовъ вида:

$$A . v_1^{m_1} . v_2^{m_2} . v_3^{m_3} \ldots v_n^{m_n}.$$

Каждый изъ таковыхъ членовъ, по совершеніи алгебраическаго умноженія полиномовъ v_1, $v_2, \ldots\ldots$, представится суммою членовъ вида (2); посему цѣлая функція W будетъ имѣть видъ (1), т. е. будетъ также цѣлою функціею количествъ x_1, $x_2, \ldots\ldots x_n$. Изъ этого видно, что отъ повторенія первыхъ трехъ основныхъ дѣйствій, сколько бы ни было разъ, въ результатѣ всегда получится цѣлая раціональная функція, заключающаяся въ общемъ видѣ (1).

Означивъ чрезъ S и T двѣ цѣлыя функціи количествъ x_1, $x_2, \ldots\ldots x_n$, частное

$$(3)\qquad v = \frac{S}{T}$$

будетъ дробная раціональная функція. Въ ней, какъ частный случай, заключается дѣленіе и общій видъ всякой цѣлой функціи. Послѣдній случай встрѣчается тогда, когда знаменатель T есть количество, независимое отъ $x_1, x_2, \ldots x_n$. Пусть $v_1, v_2, \ldots\ldots v_n$ будутъ раціональныя цѣлыя или дробныя функціи количествъ x_1, $x_2, \ldots\ldots x_n$; очевидно, что W дробная раціональная функція функцій v_1, $v_2, \ldots\ldots v_n$, можетъ быть приведена къ виду (3), т. е. къ дробной функціи количествъ $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$. Посему, сколько бы разъ мы ни повторяли первыя четыре дѣйствія надъ

$x_1, x_2, \ldots$, въ результатѣ всегда получимъ раціональную функцію, заключающуюся какъ частный случай въ общемъ видѣ (1).

Пусть функція p' выражаетъ совокупность дѣйствія раціональной функціи $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ съ дѣйствіями

$$\sqrt[n_1]{p_1},\ \sqrt[n_2]{p_2},\ \sqrt[n_3]{p_3}, \ldots\ldots \sqrt[n_m]{p_m},$$

гдѣ $n_1, n_2, n_3 \ldots\ldots n_m$ суть цѣлыя первоначальныя числа, а $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_m$ раціональныя функціи количествъ $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$; тогда

$$(4) \qquad p' = f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, \sqrt[n_1]{p_1}, \sqrt[n_2]{p_2}, \ldots\ldots \sqrt[n_m]{p_m})$$

будетъ общій видъ алгебраическихъ ирраціональныхъ функцій, въ которыхъ пятое основное дѣйствіе предполагается производить только надъ раціональными функціями.

Функціи вида p', Абель называетъ ирраціональными функціями *перваго порядка* (*).

Изобразивъ чрезъ $p'_1, p'_2, \ldots\ldots p'_{m_2}$ нѣсколько функцій перваго порядка т. е. вида (4), а чрезъ $n'_1, n'_2, \ldots\ldots n'_{m_2}$ первоначальныя числа, выраженіе.

$$(5) \qquad p'' = f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, \sqrt[n_1]{p_1}, \sqrt[n_2]{p_2}, \ldots, \sqrt[n_m]{p_m}, \sqrt[n'_1]{p'_1}, \sqrt[n'_2]{p'_2}, \ldots \sqrt[n'_{m_2}]{p'_{m_2}})$$

будетъ общій видъ функцій, въ которыхъ пятое основное дѣйствіе относится только къ функціямъ раціональнымъ и къ ирраціональнымъ перваго порядка.

Функціи вида p'' называются ирраціональными функціями *втораго порядка*.

Выраженіе

$$(6) \quad p''' = f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, \sqrt[n_1]{p_1}, \sqrt[n_2]{p_2}, \ldots\ldots \sqrt[n_{m_1}]{p_{m_1}}, \sqrt[n'_1]{p'_1}, \sqrt[n'_2]{p'_2}, \ldots\ldots$$
$$\sqrt[n'_{m_2}]{p'_{m_2}}, \sqrt[n''_1]{p''_1}, \sqrt[n''_2]{p''_2}, \ldots\ldots \sqrt[n''_{m_3}]{p''_{m_3}}),$$

гдѣ $p''_1, p''_2, p_3, \ldots\ldots p''_{m_3}$ суть ирраціональныя функціи втораго порядка, а $n''_1, \ldots\ldots n'_{m_3}$ первоначальныя числа, есть общій видъ ирраціональныхъ

(*) Journal für die reine und angewandte Mathematik. Herausgegeben von A. L. Crelle. 1827. Erstes Heft, Seite 67.

функцій, въ которыхъ 5-е основное дѣйствіе относится къ функціямъ раціональнымъ и къ ирраціональнымъ первыхъ двухъ порядковъ. Функція вида p''' называется ирраціональною функціею *третьяго порядка.*

Продолжая эти сужденія, мы дойдемъ до общихъ видовъ алгебраическихъ ирраціональныхъ функцій четвертаго, пятаго,... μ порядковъ, и очевидно, что выраженіе алгебраической ирраціональной функціи порядка μ можетъ быть принято за общій видъ, не только всякой ирраціональной функціи, но также всякой раціональной.

И такъ выраженіе

$$v = f\left(r', r'', \ldots \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''}, \ldots\right), \tag{7}$$

гдѣ $p', p'', \ldots$ суть ирраціональныя функціи $\mu-1$ порядка, $n', n'', \ldots$ первоначальныя числа, $r', r'', \ldots$ ирраціональныя функціи порядка $\mu-1$ и порядковъ низшихъ, есть общій видъ алгебраическихъ ирраціональныхъ функцій порядка μ, и можетъ служить общимъ видомъ всякой ирраціональной алгебраической функціи.

Замѣтимъ, что здѣсь f означаетъ всегда раціональную функцію выраженій, заключенныхъ въ скобкахъ.

Когда видъ (7) относится къ ирраціональной функціи порядка μ, тогда необходимо между выраженіями $\sqrt[n']{p'}$, $\sqrt[n'']{p''}$, ... покрайней мѣрѣ одно не можетъ быть приведено къ функціи порядка низшаго μ; ибо въ противномъ случаѣ v была бы порядка $\mu-1$, а не μ.

§ 4. Всякій математическій вопросъ состоитъ изъ предложеній, въ которыхъ подлежащія и сказуемыя суть функціи извѣстныхъ и неизвѣстныхъ количествъ; а связью служатъ понятія о равенствѣ или неравенствѣ. Такія предложенія, будучи выражены математическимъ языкомъ, называются *уравненіями* или *неравенствами.*

Всякое алгебраическое уравненіе, составленное изъ вопроса, заключающаго n неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots\ldots x', x'', \ldots$ представляется въ видѣ

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots) = \Phi(x', x'', x''', \ldots\ldots), \tag{8}$$

гдѣ характеристики F и Φ изображаютъ дѣйствія надъ количествами $x_1, x_2, \ldots\ldots, x', x'', \ldots\ldots$, заключающіяся, какъ частные случаи въ дѣйствіи (7). Уравненіе (8) пишется обыкновенно такъ:

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots) - \Phi(x', x'', x''', \ldots\ldots) = 0.$$

Выраженіе по лѣвую сторону знака равенства называется *первою частью уравненія*. Изобразивъ ее чрезъ $\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots x', x'', x''', \ldots)$, предъидущее выраженіе замѣнится слѣдующимъ:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x', x'', \ldots) = 0,$$

гдѣ φ означаетъ ирраціональную функцію количествъ $x_1, x_2, x_3, \ldots$ $x', x'', x''', \ldots$ порядка μ. Впослѣдствіи мы увидимъ (гл. III), что эта функція можетъ быть замѣнена цѣлою раціональною функціею тѣхъ же количествъ. И такъ всякое алгебраическое уравненіе можетъ быть приведено къ виду

$$f(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n) = 0, \tag{9}$$

гдѣ первая часть есть конечная сумма членовъ вида

$$A . x_1^{m_1} . x_2^{m_2} \ldots\ldots x_n^{m_n}.$$

Рѣшить уравненіе относительно одного изъ неизвѣстныхъ количествъ, на пр. относительно x, значитъ найти значеніе x посредствомъ ряда дѣйствій, производимыхъ надъ прочими количествами, входящими въ это уравненіе. Ясно, что x тогда только опредѣлится совершенно, когда всѣ прочія количества будутъ извѣстны. Посему уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ называется *опредѣленнымъ*; а въ противуположность ему, — уравненіе, заключающее нѣсколько неизвѣстныхъ, называется *неопредѣленнымъ*.

И такъ вопросъ тогда только будетъ опредѣленный, когда онъ приводится къ рѣшенію столькихъ опредѣленныхъ уравненій, сколько въ немъ неизвѣстныхъ. Для этого, какъ мы увидимъ впослѣдствіи, достаточно, чтобъ изъ него можно было составить столько уравненій, сколько неизвѣстныхъ; не смотря на то, будетъ ли каждое изъ этихъ уравненій заключать по нѣскольку неизвѣстныхъ, или только по одному, лишь бы эти уравненія выражали различныя условія.

Изъ сказаннаго предъ этимъ легко заключить, что общій видъ всякаго алгебраическаго опредѣленнаго уравненія есть такой:

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + a_{m-1} x + a_m = 0. \tag{10}$$

Здѣсь m цѣлое положительное число, а коэффиціенты $a_0, a_1, a_2, \ldots$ a_{m-1}, a_m результаты дѣйствительные или мнимые, происходящіе отъ производства алгебраическихъ дѣйствій надъ числами, данными въ вопросѣ. Мы скоро покажемъ, что общій видъ этихъ коэффиціентовъ есть

$$a + b\sqrt{-1},$$

гдѣ a и b суть дѣйствительныя количества, положительныя или отрицательныя.

§ 5. Выраженія, которыя, будучи вставлены вмѣсто x въ первую часть уравненія (10), дѣлаютъ ее тожественно нулемъ, по совершеніи назначенныхъ дѣйствій, называются *корнями*.

Не должно думать, чтобы эти корни всегда получались чрезъ дѣйствіе, заключающееся въ общемъ видѣ (7): *Абель* показалъ невозможность этого для уравненія пятой степени, и тѣмъ доказалъ, что *рѣшеніе опредѣленныхъ алгебраическихъ уравненій* есть особое дѣйствіе, которое не можетъ быть всегда выражено знаками, принятыми для изображенія прочихъ алгебраическихъ дѣйствій. Притомъ основныя дѣйствія суть частные случаи рѣшенія уравненій; такъ напр. извлеченіе корня m-ой степени изъ A есть рѣшеніе двучленнаго уравненія

$$x^m - A = o;$$

ибо здѣсь корни суть именно тѣ значенія, которыхъ m-ая степень равна количеству A.

Изъ всего сказаннаго заключаемъ, что основныхъ алгебраическихъ дѣйствій шесть, а именно: *сложеніе*, *вычитаніе*, *умноженіе*, *дѣленіе*, *извлеченіе первоначальныхъ степеней* и *рѣшеніе уравненій вида* (10).

Всякая функція нѣсколькихъ количествъ $x_1, x_2, \ldots$, происходящая отъ совокупленія и повторенія этихъ основныхъ дѣйствій конечное число разъ, называется *алгебраическою*. Если же число этихъ дѣйствій безконечно и не приводимо къ конечному, то функція называется *трансцендентною* (*). Мы впослѣдствіи докажемъ, что всякая алгебраическая функція v нѣсколькихъ количествъ x_1, x_2, $x_3, \ldots$ удовлетворяетъ уравненію вида

$$v^n + A_1 v^{n-1} + A_2 v^{n-2} + \ldots\ A_{n-1} v + A_n = o, \tag{12}$$

гдѣ A_1, $A_2, \ldots A_n$ суть раціональныя функціи количествъ x_1, x_2, $x_3, \ldots$

§ 6. Основываясь на сказанномъ въ § 4, Алгебру естественно раздѣлить на двѣ отрасли: первую составляетъ *анализъ опредѣленный*, или *теорія опредѣленныхъ алгебраическихъ уравненій*; а вторую составляетъ *анализъ неопредѣленный*, заключающій *теорію неопредѣленныхъ алгебраическихъ уравненій*, неразлучную съ теоріею чиселъ (**), и *теорію неравенствъ*.

(*) Ученыя записки М. Университета. 1834. N IV, стр. 24.

(**) *Лежандръ* въ знаменитомъ своемъ сочиненіи Théorie des nombre (Préface xij) говоритъ: Je ne sépare point la Théorie des nombres de l'Analyse indéterminé, et je

Излагая *теорію опредѣленныхъ алгебраическихъ уравненій высшихъ степеней*, я предполагаю, что читателю извѣстны начала Алгебры изъ сочиненій, которыхъ довольно имѣется на отечественномъ языкѣ.

Но я считаю нужнымъ изложить предварительно необходимыя для насъ нѣкоторыя общія свойства функцій, теоремы о безконечномалыхъ и безконечновеликихъ количествахъ и теорію производныхъ функцій: это по справедливости должно отнести къ Алгебрѣ; но оно обыкновенно излагается въ Дифференціальномъ Исчисленіи, которое, можетъ быть, большой части изъ моихъ читателей не знакомо. Я здѣсь имѣлъ руководствомъ сочиненія *Коши: Analyse Algébrique* и *Краткое изложеніе уроковъ о Дифференціальномъ и Интегральномъ Исчисленіи*, переведенное Г-мъ Академикомъ Буняковскимъ.

§ 7. *Перемѣнными* количествами называются тѣ, которыя получаютъ послѣдовательныя значенія, отличныя одно отъ другихъ.

Если $v = f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ представляетъ функцію нѣсколькихъ количествъ $x_1, x_2, \ldots x_m$, т. е. если она результатъ дѣйствія f, производимаго надъ этими количествами, то ея значеніе будетъ измѣняться съ измѣненіемъ $x_1, x_2, \ldots x_m$. Когда послѣднія по свойству вопроса совершенно произвольны, тогда они называются *главными* или *независимыми перемѣнными*; напротивъ того, количества, съ измѣненіемъ которыхъ измѣняется вопросъ, называются *постоянными*.

Случается, что $x_1, x_2, \ldots x_m$, суть функціи количествъ $t_1, t_2, \ldots t_n$, которыхъ значенія совершенно произвольны: тогда $x_1, x_2, \ldots x_m$, а потому и v, будутъ измѣняться зависимо отъ значеній, приписываемыхъ $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n$. Въ такомъ случаѣ v есть функція отъ функцій $x_1, x_2, \ldots x_m$, и независимыя перемѣнныя будутъ $t_1, t_2, \ldots t_n$.

§ 8 Если количество, измѣняясь, приближается къ другому постоянному такъ, что разнится отъ него произвольно мало, то второе количество называется *предѣломъ* перваго. Количество, котораго значеніе, независимое отъ знака + или —, можетъ быть менѣе всякаго даннаго, или котораго предѣлъ есть нуль, называется *безконечномалымъ*, а, въ противоположность ему, количество, котораго значеніе можетъ превзойти всякое данное, называется *безконечновеликимъ*: оно будетъ имѣть предѣломъ *положительную безконечность* ($+\infty$), если оно само положительное, а *отрицательную безконечность* ($-\infty$), если оно отрицательное.

---

regarde ces deux parties comme ne faisant q'une seule et même branche de l'Analyse algébrique. En effet, il n'est pas de théorème sur les nombres qui ne soit rélatif à la résolution d'une ou de plusieurs équations indéterminées.

Всякое количество, которое не есть безконечномалое или безконечновеликое, называется *конечнымъ*.

§ 9. Пусть i и $f(i)$ будутъ безконечномалыя количества; предѣлъ отношенія $\frac{f(i)}{i^n}$ можетъ быть количество или безконечномалое, или конечное, или безконечновеликое. Если оно безконечномалое при $n < a$, а безконечновеликое при $n > a$; то говорятъ, что f(i) *есть безконечномалое количество порядка* a *основанія* i. Такъ напр. i^a есть количество безконечномалое порядка a; ибо отношеніе $\frac{i^a}{i^n} = i^{a-n}$ безконечномало при $n < a$, а безконечновелико при $n > a$; посему n-ая *степень безконечномалаго количества есть безконечномалое количество* n-го *порядка относительно своего корня*. Изъ даннаго опредѣленія безконечномалыхъ количествъ выводимъ слѣдующія заключенія:

1) При $n = a$, отношеніе $\frac{f(i)}{i^a}$ имѣетъ предѣломъ вообще какое-либо количество k, которое можетъ быть также o или ∞; посему будетъ

$$f(i) = ki^a,$$

и выраженіе ki^a можетъ служить общимъ видомъ безконечномалыхъ количествъ.

2) Пусть k будетъ количество конечное. Полагая послѣдовательно $a = o, 1, 2, 3, \ldots$, получимъ рядъ количествъ

$$k,\ ki,\ ki^2,\ ki^3, \ldots,$$

которыя суть безконечномалыя o-го, 1-го, 2-го, 3-го,.... порядковъ основанія i. Отсюда также видимъ, что *конечное количество, можно считать безконечномалымъ порядка* o.

3) Для $a = -1, -2, -3, \ldots, -n$ получимъ рядъ количествъ

$$\frac{k}{i},\ \frac{k}{i^2},\ \frac{k}{i^3}, \ldots \frac{k}{i^n}$$

безконечновеликихъ; слѣдовательно *безконечномалое количество отрицательнаго порядка*—n, *есть не что иное какъ безконечновеликое количество положительнаго порядка* n.

4). Пусть i^l будетъ безконечномалое количество порядка l, разумѣя подъ l число цѣлое положительное; тогда значеніе корня

$$\sqrt[m]{\kappa^m \cdot i^l} = \kappa i^{\frac{l}{m}}$$

будетъ безконечномалое; и очевидно, что отношеніе

$$\frac{\kappa i^{\frac{l}{m}}}{i^n}$$

имѣетъ предѣломъ

$$o, \ \kappa, \ \pm \infty,$$

смотря потому будетъ ли

$$n < \frac{l}{m}, \ n = \frac{l}{m}, \ n > \frac{l}{m};$$

посему $\kappa i^{\frac{l}{m}}$ есть безконечномалое количество дробнаго порядка $\frac{l}{m}$. Если l отрицательное, то $\kappa i^{\frac{l}{m}}$ есть безконечновеликое количество порядка $-\frac{l}{m}$

§ **10**. Вотъ еще нѣкоторыя свойства безконечномалыхъ, необходимыя для насъ впослѣдствіи.

1) *Безконечномалое количество цѣлаго положительнаго порядка* n, *т. е. вида*

$$\kappa i^n,$$

мѣняетъ свой знакъ съ перемѣною знака количества i, *когда* n *есть нечетное число; а сохраняетъ знакъ количества* κ, *когда* n *четное*. Ибо въ первомъ случаѣ степень i^n мѣняетъ свой знакъ вмѣстѣ съ i, а во второмъ остается положительною, какой бы ни былъ знакъ количества i.

2) *Сумма нѣсколькихъ безконечномалыхъ количествъ*

$$\kappa i^n, \ \kappa' i^{n'}, \ \kappa'' i^{n''}, \ldots\ldots,$$

гдѣ n', n'',..... *не меньше* n, *есть безконечномалое количество порядка* n. Ибо предѣлъ отношенія

$$\frac{\kappa i^n + \kappa' i^{n'} + \kappa'' i^{n''} + \ldots}{i^s} = \kappa i^{n-s} + \kappa' i^{n'-s} + \kappa'' i^{n''-s} + \ldots\ldots$$

при $s < n$ обращается въ нуль; а при $s > n$, въ безконечность.

3) *Полиномъ*

$$a i^n + b i^{n'} + c i^{n''} + \ldots\ldots,$$

расположенный по возрастающимъ степенямъ i, *для весьма малыхъ значеній* i *имѣетъ знакъ перваго члена* $a i^n$. Представивши этотъ полиномъ въ видѣ

$$a i^n \left(1 + \frac{b}{a} i^{n'-n} + \frac{c}{a} i^{n''-n} + \ldots\right),$$

видно, что часть, заключенная въ скобкахъ съ уменьшеніемъ i, приближается къ единицѣ; а посему предѣлъ всего полинома будетъ ai^n.

Когда $n=o$, тогда знакъ нашего полинома для безконечномалаго i, одинаковъ съ знакомъ a. Такъ напр. въ полиномѣ

$$a+bi+ci^2+di^3+\ldots,$$

4) *Полиномъ*

$$ai^n+bi^{n'}+ci^{n''}+\ldots..,$$

расположенный по возрастающимъ степенямъ i, *для* n' *нечетнаго и для весьма малыхъ значеній* i, *будетъ то больше, то меньше своего перваго члена; смотря потому, будутъ ли знаки количествъ* b *и* i *одинакіе или разные*. Это видно изъ того, что по сказанному выше, знакъ полинома

$$bi^{n'}+ci^{n''}+\ldots..$$

для весьма малаго i, одинаковъ съ знакомъ произведенія $bi^{n'}$ или bi.

5) *Если въ полиномѣ*

$$ai^n+bi^{n'}+ci^{n''}+\ldots..,$$

расположенномъ по возрастающимъ степенямъ i, *показатель* n *есть число четное; то для весьма малаго* i, *значеніе всего полинома будетъ больше перваго члена* ai^n, *когда* b *положительное, а меньше, когда* b *отрицательное*. Ибо для весьма малаго i, по сказанному въ членѣ 3), знакъ количества

$$bi^{n'}+ci^{n''}+\ldots..,$$

одинаковъ съ знакомъ bi^n, а посему и съ знакомъ b.

Положивъ $n=o$, выводимъ слѣдующее заключеніе.

6) *Если въ полиномѣ*

$$a+bi^{n'}+ci^{n''}+\ldots..$$

расположенномъ по возрастающимъ степенямъ i, *показатель* n' *есть число четное; то изъ всѣхъ значеній этого полинома, соотвѣтствующихъ весьма малымъ значеніямъ* i, *то, которое соотвѣтствуетъ* $i=o$, *т. е.* a, *будетъ наибольшее, когда* b *отрицательное, а наименьшее, когда* b *положительное*.

§ **11**. Припомнивъ, что безконечновеликія количества можно принимать за безконечномалыя отрицательныхъ порядковъ, можно вывести подобныя же теоремы и для безконечновеликихъ количествъ. Изъ такихъ теоремъ замѣчательна слѣдующая;

Когда съ полиномъ

(13) $$a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots\ldots a_{m-1}x+a_m$$

дадимъ x *довольно большое значеніе, знакъ этого полинома будетъ одинаковъ съ знакомъ перваго члена.* Чтобъ доказать это, положимъ $x=\frac{1}{\alpha}$, означая чрезъ α количество безконечномалое; тогда данный полиномъ приметъ видъ

$$\frac{a_0}{\alpha^m}\left(+\frac{a_1}{a_0}\alpha+\frac{a_2}{a_0}\alpha^2+\ldots\ldots\frac{a_{m-1}}{a_0}\alpha^{m-1}+\frac{a_m}{a_0}\alpha^m\right).$$

Множитель въ скобкахъ для безконечномалаго α, т. е. для безконечновеликаго x, весьма мало отличается отъ единицы; посему можно выбрать всегда такое α, или такое x, чтобъ этотъ множитель былъ положительный; слѣдовательно, чтобъ знакъ всего произведенія былъ одинаковъ съ знакомъ другаго множителя $\frac{a_0}{\alpha^m}=a_0x^m$, т. е. съ знакомъ перваго члена даннаго полинома.

Когда m четное, тогда какъ для положительнаго, такъ и для отрицательнаго x, знакъ $\frac{1}{\alpha^m}=a_0x^m$, слѣдовательно и знакъ всего полинома (13) будетъ одинаковъ съ a_0. А когда m нечетное, тогда для x отрицательнаго знакъ полинома, будетъ противенъ знаку коеффиціента a_0. Посему значеніе полинома будетъ $(-\infty)$ для $x=-\infty$, когда m нечетное, и a_0 положительное количество.

§ 12. Если функція $f(x)$ для каждаго частнаго значенія перемѣннаго x, средняго между двумя предѣлами a и b, получаетъ одно опредѣленное значеніе; то приписавъ x-су значеніе какое-либо изъ среднихъ между a и b, и давши потомъ ему безконечномалое приращеніе Δx, разность

$$f(x+\Delta x)-f(x)$$

всегда бываетъ безконечномалая для безконечномалаго Δx. Въ такомъ случаѣ говорятъ, что *функція* f (x) *непрерывна относительно* x *между двумя предѣлами* a *и* b.

Когда эти предѣлы безконечноблизки къ частному значенію x, тогда говорятъ, что f (x) *есть непрерывная функція* x, *въ сопредѣльности частнаго значенія, взятаго для этого перемѣннаго.*

Если функція $f(x)$ перестаетъ быть непрерывною въ сопредѣльности частнаго значенія x, тогда называютъ ее *прерывною*, и говорятъ, что для частнаго значенія перемѣннаго x, функція $f(x)$ имѣетъ *разрывъ непрерывности* (solution de continuité).

Очевидно, что функція

$$x^m,$$

когда m цѣлое положительное число непрерывна между предѣлами $-\infty$ и $+\infty$, и непрерывна также въ сопредѣльности всякаго частнаго значенія x, взятаго между этими предѣлами. Но функціи

$$\frac{a}{x},\ \frac{a}{x^m},\ \frac{a}{x-a},\ \frac{a}{(x-a)^m}$$

между тѣми же предѣлами имѣютъ разрывъ непрерывности: первыя двѣ при $x=o$, а вторыя при $x=a$. Притомъ для каждаго изъ этихъ частныхъ значеній, онѣ получаютъ два значенія: $+\infty$ и $-\infty$; смотря потому, было ли прежде

$$x > \text{или} < o \text{ и } a.$$

§ **13.** Пусть функція $f(x, y, z, \ldots)$ нѣсколькихъ перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots$ непрерывна относительно каждаго изъ нихъ, въ сопредѣльности ихъ частныхъ значеній $X, Y, Z, \ldots$; тогда, давши послѣднимъ безконечномалыя приращенія

$$\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z, \ldots,$$

каждая изъ разностей

$$f(X+\Delta x, Y, Z, \ldots) - f(X, Y, Z, \ldots)$$
$$f(X+\Delta x, Y+\Delta y, Z, \ldots) - f(X+\Delta x, Y, Z, \ldots)$$
$$f(X+\Delta x, Y+\Delta y, Z+\Delta z, \ldots) - f(X+\Delta x, Y+\Delta y, Z, \ldots)$$

будетъ безконечномалая; посему и сумма ихъ

$$f(X+\Delta x, Y+\Delta y, Z+\Delta z, \ldots) - f(X, Y, Z, \ldots)$$

также безконечномалая; слѣдовательно съ приближеніемъ перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots$, къ постояннымъ количествамъ $x, y, z, \ldots$, функція $f(x, y, z, \ldots)$ будетъ приближаться къ $f(X, Y, Z, \ldots)$. Ничто не препятствуетъ допустить, что перемѣнныя $x, y, z, \ldots$ связаны извѣстными условіями, или, что каждое изъ нихъ есть функція новаго независимаго перемѣннаго t. Въ послѣднемъ случаѣ $f(x, y, z, \ldots)$, будетъ непрерывна относительно перемѣннаго t, въ сопредѣльности частнаго его значенія. Такимъ образомъ цѣлая функція

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

непрерывна для всякаго дѣйствительнаго значенія x; потому что она непрерывна относительно каждаго члена, а каждый членъ непрерывенъ относительно x. То же должно сказать о всякой цѣлой функціи $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ нѣсколькихъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$. Если каждое изъ перемѣнныхъ x_1, x_2,.....x_n, есть цѣлая раціональная функція новаго независимаго перемѣннаго t, то $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_m)$ будетъ также цѣлая раціональная функція количества t; а посему она непрерывна относительно t, между предѣлами $-\infty$ и $+\infty$.

Дробная раціональная функція вида (3) превращается въ $\pm\infty$ для значеній x_1, x_2.... x_n, уничтожающихъ знаменатель F, т. е. для корней уравненія $F=o$.

§ 14. Пусть будетъ $y=f(x)$ функція одного перемѣннаго x. Приписавъ послѣднему частное значеніе, и измѣнивъ его безконечномалымъ количествомъ Δx, функція $f(x)$, если она непрерывна въ сопредѣльности частнаго значенія x, измѣнится также какимъ-либо безконечномалымъ количествомъ Δy. Отношеніе $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ съ уменьшеніемъ безконечномалыхъ количествъ Δx и Δy, будетъ приближаться къ одному опредѣленному положительному предѣлу. Этотъ предѣлъ измѣняется съ измѣненіемъ частнаго значенія x, и зависитъ отъ вида данной функціи $f(x)$; посему онъ называется *производною функціею*, и изображается обыкновенно чрезъ $f'(x)$ или y'.

Займемся изысканіемъ производныхъ функцій отъ функцій алгебраическихъ.

1) Для $y=f(x)=x^m$, гдѣ есть цѣлое положительное число, отношеніе безконечномалыхъ приращеній будетъ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^m-x^m}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^m-x^m}{(x+\Delta x)-x};$$

совершивъ дѣленіе въ послѣднемъ выраженіи, находимъ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=(x+\Delta x)^{m-1}+x(x+\Delta x)^{m-2}+x^2(x+\Delta x)^{m-3}+\ldots\ldots x^{m-2}(x+\Delta x)+x^{m-1};$$

переходя къ предѣламъ, получаемъ

$$\text{пред.}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=x^{m-1}+x^{m-1}+x^{m-1}+\ldots\ldots+x^{m-1}+x^{m-1}=mx^{m-1}.$$

И такъ производная отъ $y=x^m$, есть

$$(14)\qquad y'=mx^{m-1}\ldots\ldots$$

2) Имѣя $y=A\,f(x)$, гдѣ A не зависитъ отъ x; давши послѣднему приращеніе Δx, перемѣнится только $f(x)$ на $f(x+\Delta x)$, отъ чего получимъ

$$y+\Delta y=Af(x+\Delta x);$$

вычтя изъ этого равенства предъидущее, будемъ имѣть

$$\Delta y=A[f(x+\Delta x)-f(x)];$$

раздѣливъ обѣ части на Δx, предѣлъ отношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ будетъ равенъ постоянному A, помноженному на предѣлъ отношенія $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, т. е. на $f'(x)$; слѣдственно $y'=A\,f'(x)$.

По этой причинѣ, производная отъ $y=ax^m$, будетъ $y'=max^{m-1}$.

3) Производная отъ $y=f(x)+A$, гдѣ A постоянное, будетъ

$$y' = \text{пред.}\left(\frac{[f(x+\Delta x)+A]-[f(x)+A]}{\Delta x}\right) = \text{пред.}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right).$$

Отсюда видимъ, что постоянный членъ, придаваемый къ данной функціи, исчезаетъ въ производной.

Посему для $y=f(x)=x\pm a$, производная будетъ $y'=f'(x)=1$.

4) Возмемъ сумму нѣсколькихъ функцій: $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\xi(x)$..... Означивъ ее чрезъ $y=f(x)$, имѣемъ

$$y=f(x) = \varphi(x) + \psi(x) + \xi(x) + \ldots\ldots$$

Давши x приращеніе Δx, каждая изъ слагаемыхъ функцій получитъ себѣ соотвѣтственное; посему будетъ

$$f(x+\Delta x) = \varphi(x+\Delta x) + \psi(x+\Delta x) + \xi(x+\Delta x) + \ldots\ldots$$

Вычтя изъ этого выраженія предъидущее, найдемъ приращеніе Δy, которое будетъ

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)+\psi(x+\Delta x)-\psi(x)+\xi(x+\Delta x)-\xi(x)+\ldots\ldots;$$

раздѣливъ его на приращеніе Δx, и перейдя потомъ къ предѣламъ, получимъ

$$\text{пред.}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\text{пред.}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)=\text{пред.}\left(\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}\right)$$
$$+\ \text{пред.}\left(\frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x}\right)+\text{пред.}\left(\frac{\xi(x)+\Delta x)-\xi(x)}{\Delta x}\right),$$

или $f'(x)=\varphi'(x)+\psi'(x)+\xi'(x)+\ldots..$ Откуда видно, что *производная отъ суммы нѣсколькихъ функцій, есть сумма производныхъ отъ каждой слагаемой.*

Посему для

$$y=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+a_3x^{m-3}+\ldots\ldots+a_{m-1}x+a^m,$$

производная будетъ

(15) $y'=a_0mx^{m-1}+a_1(m-1)x^{m-2}+a_2+(m-2)x^{m-3}+\ldots\ldots+a_{m-1}$.

5) Пусть дано произведеніе двухъ функцій: $y=\varphi(x).\ \psi\ (x)$. Давши количеству x приращеніе Δx, функціи $y, \varphi\ (x), \psi\ (x)$ получатъ соотвѣтственныя имъ приращенія Δy, $\Delta [\varphi\ (x),]$ Δ $[\psi\ (x)\ ]$; отъ чего будемъ имѣть

$$y+\Delta y=\left(\varphi(x)+\Delta[\varphi(x)]\right).\left(\psi(x)+\Delta[\psi(x)]\right);$$

или

$$y+\Delta y=\varphi(x).\psi(x)+\psi(x)\Delta[\varphi(x)]+\varphi(x)\Delta[\psi(x)]+\Delta[\varphi(x)]\Delta[\psi(x)];$$

вычтя изъ этого уравненія предъидущее $y=\varphi(x).\psi(x)$; раздѣливъ потомъ обѣ части полученнаго уравненія на Δx, и перейдя къ предѣлу, найдемъ

$$\text{пред.}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=y'=\text{пред.}\left(\frac{\psi(x)\Delta[\varphi(x)]}{\Delta x}\right)+\text{пред.}\left(\frac{\varphi(x)\Delta[\psi(x)]}{\Delta x}\right)$$
$$+\text{пред.}\left(\frac{\Delta[\varphi(x)]\Delta[\psi(x)]}{\Delta x}\right).$$

Но какъ $\psi\ (x)$ и $\varphi\ (x)$ не заключаютъ приращенія Δx, то онѣ отъ приближенія послѣдняго къ нулю не измѣняются; посему

$$\text{пред.}\left\{\psi\ (x).\ \frac{\Delta[\varphi\ (x)]}{\Delta x}\right\}=\psi\ (x).\ \varphi'\ (x.)\ \text{и}$$
$$\text{пред.}\left\{\varphi\ (x).\ \frac{\Delta[\psi(x)]}{\Delta x}\right\}=\varphi\ (x).\ \psi'\ (x).$$

Отношеніе $\dfrac{\Delta[\varphi(x)]}{\Delta x}$ съ уменьшеніемъ Δx приближается къ конечному предѣлу $\varphi'\ (x)$, и множится на безконечномалое количество $\Delta[\psi\ (x)]$, имѣющее предѣломъ нуль; посему

$$\text{пред.}\left\{\frac{\Delta\ [\ \varphi\ (x)\ ].\ \Delta\ [\psi\ (x)\ ]}{\Delta x}\right\}=\varphi'(x).o=o,$$

и производная отъ $y=\varphi\ (x).\ \psi\ (x)$ будетъ

(16) $$y'=\psi\ (x).\varphi'(x)+\varphi\ (x).\psi'(x)$$

Подобнымъ образомъ найдется производная отъ $y=\varphi\ (x).\ \psi\ (x).\ \xi\ (x)$. Положивъ $\psi\ (x).\ \xi\ (x)=F(x)$, по доказанному, производная отъ $y=\varphi(x).\ F(x)$ будетъ $y'=\varphi\ (x).\ F'\ (x)+F\ (x).\ \varphi'(x)$, гдѣ $F'=\psi(x).\xi'(x)+\psi(x).\psi'(x)$. Посему: $y'=\varphi(x)\ \psi(x).\ \xi'(x)+\varphi(x).\ \psi'(x).\ \xi(x)+\psi(x).\ \xi(x).\ \varphi'(x)$.

Пусть вообще будетъ

$$y=z.\ u.\ v.\ w\ldots\ldots s.\ t\,,$$

гдѣ $z, u, v, w,\ldots, s, t$ суть функціи x. Положивъ $F(x)=u.\ v.\ w\ldots s.\ t$, производная отъ y будетъ

$$y'=z'.\ F(x)+z\ F'(x)=z'.\ u.\ v.\ w\ldots s.\ t=z.\ F'(x);$$

но

$$F'(x)=u'.\ v.\ w\ldots s.\ t.+u.\ \text{произв.}\ (v\ w\ldots s.\ t),$$

произв. $(v.\ w\ldots s.\ t)=v'.\ w\ldots s.\ t+v.$ произв. $(w.\ \ldots s.\ t)$, и т. д.,

наконецъ

$$\text{произв.}\ (s.\ t)=s'.\ t+t'.\ s.$$

Вставляя каждое изъ этихъ выраженій въ предъидущее, найдемъ:

$$(17)\quad y'=z'.\ u.\ v.\ w\ldots s.\ t+z.\ u'.\ v.\ w\ldots s.\ t.+z.\ u.\ v'.\ w\ldots s.\ t+\ldots$$
$$+z.\ u.\ v.\ w\ldots s'.\ t+z.\ u.\ v.\ w\ldots s.\ t',$$

т. е. *производная отъ произведенія* m *функцій состоитъ изъ суммы членовъ, изъ которыхъ каждый есть произведеніе производной одной изъ* m *функцій на всѣ прочія.*

Для примѣра найдемъ производную отъ

$$y=f(x)=(x-a_1)\ (x-a_2)\ (x-a_3)\ldots(x-a_{m-1})\ (x-a_m),$$

гдѣ $a_1, a_2, a_3,\ldots a_m$ суть количества постоянныя. Производная отъ каждаго множителя есть единица, отъ чего искомая производная будетъ:

$$(18)\ \left\{\begin{aligned} y'=f'(x)=&\ (x-a_2)\ (x-a_3)\ (x-a_4)\ldots\ldots(x-a_{m-1})\ (x-a_m)\\ &+(x-a_1)\ (x-a_3)\ (x-a_4)\ldots\ldots(x-a_{m-1})\ (x-a_m)\\ &+(x-a_1)\ (x-a_2)\ (x-a_4)\ldots\ldots(x-a_{m-1})\ (x-a_m)\\ &+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+(x-a_1)\ (x-a_2)\ (x-a_3)\ldots\ldots(x-a_{m-2})(x-a_{m-1}). \end{aligned}\right.$$

§ 15. Такъ какъ производная функція $f'(x)$ есть функція x, то она въ свою очередь можетъ имѣть свою производную, которая въ отношеніи къ данной функціи $f(x)$ называется *второю производною* или *производною втораго порядка*. Послѣдняя можетъ также быть функціею x; слѣдовательно также можетъ имѣть производную, которая называется *третьею производною* и т. д. Такимъ образомъ будемъ имѣть рядъ функцій, изъ которыхъ каждая есть производная предъидущей; ихъ означаютъ такъ:

$$y', y'', y'''\ldots\ldots y^m, \text{ или}$$
$$f'(x), f''(x), f'''(x)\ldots\ldots f^m(x);$$

здѣсь $y'=f(x)$ означаетъ производную функцію, $y''=f''(x)$ производную отъ $f'(x)$, или производную втораго порядка отъ $f(x)$; $y'''=f'''(x)$, производную перваго порядка отъ $f''(x)$ или производную втораго порядка отъ $f'(x)$, и т. д.; наконецъ $y^m=f^m=(x)$ есть производная перваго порядка отъ $y^{(m-1)}=f^{m-1}(x)$, производная втораго порядка отъ $y^{(m-2)}=f^{(m-2)}(x)$, производная третьяго порядка отъ $y^{(m-3)}=f^{m-3}(x)$, производная четвертаго порядка отъ $f^{m-4}(x)$, наконецъ она есть производная порядка m отъ данной функціи $y=f(x)$.

Составленіе этихъ функцій весьма легко: каждая изъ нихъ составляется изъ предъидущей, какъ $f'(x)$ составлена изъ $f(x)$.

Такъ напр. для

$$y=f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+a_3x^{m-3}+\ldots\ldots+a_{m-2}x^2+a_{m-1}x+a_m,$$

по уравненіямъ (13), (14), производная перваго порядка отъ этой функціи получится, когда *помножимъ каждый членъ на соотвѣтствующій ему показатель при* x, *уменьшимъ этотъ показатель единицею, и уничтожимъ постоянный членъ*; посему

$$y'=f(x)=a_0mx^{m-1}+a_1(m-1)x^{m-2}+a_2(m-2)x^{m-3}+a_3(m-3)x^{m-4}+\ldots$$
$$\ldots\ldots+a_{m-3}.3.x^2+a_{m-2}.2.x+a_{m-1},$$

изъ y' по тому же правилу составится вторая производная

$$y''=f''(x)=a_0m(m-1)x^{m-2}+a_1(m-1)(m-2)x^{m-3}+a_2(m-2)(m-3)x^{m-4}$$
$$+a_3(m-3)(m-4)x^{m-5}+\ldots\ldots+a_{m-3}.3.2x+a_{m-2}.2,$$

по томуже правилу найдутся производныя.

$$y'''=f'''(x)=a_0m(m-1)(m-2)x^{m-3}+a_1(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4}$$
$$+a_2(m-2)(m-3)(m-4)x^{m-5}+a_3(m-3)(m-4)(m-5)x^{m-6}+\ldots\ldots+a_{m-3}.3.2$$

и т. д.

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)=a_0m(m-1)\ldots.(m-n+1)x^{m-n}+a_1(m-1)\ldots.(m-n)x^{m-n-1}$$
$$+a_2(m-2)\ldots.(m-n-1)x^{m-n-2}+\ldots.+n(n-1)\ldots.3.2.a_{m-n+1},$$

послѣднія производныя будутъ

$$y^{(m-3)}=f^{m-3}(x)=a_0m(m-1)\ldots.5.4x^3+a_1(m-1)(m-2)\ldots.4.3x^2$$
$$+a_2(m-2)\ldots3.2x+(m-3)\ldots3.2.a_3$$
$$y^{(m-2)}=f^{m-2}(x)=a_0m(m-1)\ldots.4.3x+a_1(m-1)(m-2)\ldots.3.2$$
$$y^{(m-1)}=f^{m-1}(x)=a_0m(m-1)\ldots.3.2x+a_1(m-1)(m-2)\ldots.3.2$$
$$y^{(m)}=f^m(x)=a_0m(m-1)\ldots.3.2.1$$

Предложимъ себѣ еще найти производныя различныхъ порядковъ отъ функціи

$$f(x)=(x-a_1)\,(x-a_2)\,(x-a_3)\,(x-a_4)\ldots(x-a_m).$$

Ея производная перваго порядка найдена въ § 14 см. ур. (18), и очевидно, что первый членъ функціи $f'(x)$ есть не что иное, какъ частное $\frac{f(x)}{x-a_1}$, второй членъ есть частное $\frac{f(x)}{x-a_2}$ и т. д., такихъ членовъ m, и послѣдній будетъ $\frac{f(x)}{x-a_m}$; посему имѣемъ

$$(20)\qquad f'(x)=\frac{f(x)}{x-a_1}+\frac{f(x)}{x-a_2}+\frac{f(x)}{x-a_3}+\ldots+\frac{f(x)}{x-a_m}.$$

Чтобы получить вторую производную $f''(x)$, должно поступать съ каждымъ членомъ $f'(x)$ такъ, какъ мы поступали съ $f(x)$ для полученія $f'(x)$; т. е. должно взять сумму производныхъ отъ каждаго изъ членовъ: $\frac{f'(x)}{x-a_1}$, $\frac{f(x)}{x-a_2}$, ... $\frac{f(x)}{x-a_{m-1}}$, $\frac{f(x)}{x-a_m}$. Эти производныя будутъ

$$\text{произв.}\left(\frac{f(x)}{x-a_1}\right)=\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)}+\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_3)}+\ldots+\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_m)}$$

$$\text{произв.}\left(\frac{f(x)}{x-a_2}\right)=\frac{f(x)}{(x-a_2)(x-a_1)}+\frac{f(x)}{(x-a_2)(x-a_3)}+\ldots+\frac{f(x)}{(x-a_2)(x-a_m)}$$

$$\text{произв.}\left(\frac{f(x)}{x-a_3}\right)=\frac{f(x)}{(x-a_3)(x-a_1)}+\frac{f(x)}{(x-a_3)(x-a_2)}+\ldots+\frac{f(x)}{(x-a_3)(x-a_m)}$$

и т. д.

$$\text{произв.}\left(\frac{f(x)}{x-a_m}\right)=\frac{f(x)}{(x-a_m)(x-a_1)}+\frac{f(x)}{(x-a_m)(x-a_2)}+\ldots+\frac{f(x)}{(x-a_m)(x-a_{m-1})}:$$

сумма ихъ составитъ $f''(x)$. Ясно, что знаменатели всѣхъ членовъ этой суммы суть всѣ возможныя переложенія изъ m множителей

$$(21)\qquad x-a_1,\ x-a_2,\ x-a_3,\ldots x-a_m,$$

по 2; посему каждый членъ будетъ имѣть себѣ равный. Соединивъ равные члены въ одинъ, знаменатели неравныхъ членовъ будутъ всѣ возможныя сочетанія изъ m множителей, (21) по 2, отъ чего имѣемъ

$$f''(x)=1.\,2\left\{\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)}+\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_3)}+\dots+\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_m)}\right.$$
$$+\frac{f(x)}{(x-a_2)(x-a_3)}+\frac{f(x)}{(x-a_2)(x-a_4)}+\dots+\frac{f(x)}{(x-a_2)(x-a_m)}$$
$$+\frac{f(x)}{(x-a_3)(x-a_4)}+\frac{f(x)}{(x-a_3)(x-a_5)}+\dots+\frac{f(x)}{(x-a_3)(x-a_m)}$$
$$\left.+\text{ и т. д. }+\frac{f(x)}{(x-a_{m-1})(x-a_m)}\right\}$$

или

$$(22)\quad f''(x)=1.\,2.\{(x-a_3)(x-a_4)\dots(x-a_m)+(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_m)$$
$$+(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_{m-1})+\dots(x-a_1)(x-a_4)\dots(x-a_m)$$
$$+(x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_{m-1})+\text{и т. д.}+(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{m-1}).$$

Изъ послѣдняго уравненія видно, что $\frac{f''(x)}{1.\,2}$ есть сумма всѣхъ различныхъ произведеній изъ m множителей (21) по $m-2$, и изъ теоріи сочетаній извѣстно, что число этихъ произведеній есть $\frac{m(m-1)(m-2)\dots4.3}{1.\,2.\,3\dots(m-2)}=\frac{m(m-1)}{1.\,2}$.

Производная третьяго порядка $f'''(x)$ будетъ сумма производныхъ отъ каждаго члена второй производной $f''(x)$; но каждый членъ функціи $f''(x)$, будучи послѣдовательно раздѣленъ на множители (21), не входящіе въ его знаменатель, произведетъ $m-2$ членовъ; посему число членовъ въ $f'''(x)$ будетъ $m-2$ взятое столько разъ, сколько $f''(x)$ имѣетъ неравныхъ членовъ, т.е. это число будетъ $m-2.\frac{m(m-1)}{2}=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.}$. Каждый изъ членовъ $f'''(x)$, въ числѣ прочихъ, будетъ имѣть два члена себѣ равныхъ, отличающихся только порядкомъ множителей знаменателя, и по соединеніи этихъ равныхъ членовъ будемъ имѣть

$$f'''(x)=1.2.3.\left\{\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}+\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)}+\dots\right.$$
$$+\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_m)}+\frac{f(x)}{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}+\dots\frac{f(x)}{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_m)}$$
$$+\dots+\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_{m-1})(x-a_m)}+\frac{f(x)}{(x-a_2)(x-a_{m-1})(x-a_m)}+$$
$$\left.+\text{ и т. д. }+\frac{f(x)}{(x-a_{m-2})(x-a_{m-1})(x-a_m)}\right\}$$

или

(23) $$f'''(x)=1.2.3.\{(x-a_4)(x-a_5)\ldots(x-a_{m-1})(x-a_m)$$
$$+(x-a_3)(x-a_5)\ldots(x-a_m)+\ldots+(x-a_1)(x-a_5)\ldots(x-a_m)$$
$$\ldots+(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{m-3})\}.$$

И такъ $\frac{f'''(x)}{1.2.3.}$ есть сумма всѣхъ различныхъ произведеній изъ m множителей (21), взятыхъ по $m-3$, и число этихъ членовъ будетъ

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots5.4}{1.2.3\ \ldots\ (m-3)}=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}.$$

Замѣтивъ законъ составленія функцій $f'(x)$, $\frac{f''(x)}{1.\ 2.}$, $\frac{f'''(x)}{1.2.3}$, легко заключить, что функція $\frac{f^n(x)}{1.2.3\ldots n}$ будетъ сумма частныхъ, отъ раздѣленія $f(x)$ послѣдовательно на всѣ различныя произведенія, составленныя изъ m множителей (21), взятыхъ по n; посему она будетъ сумма всѣхъ различныхъ произведеній изъ m множителей (21) по $m-n$, и число членовъ въ ней будетъ

$$\frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{1.\ 2.\ 4.\ (m-n)}=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots n}.$$

Слѣдовательно

(25) $$\frac{f^{m-2}(x)}{1.2\ldots(m-2)}=(x-a_1)(x-a_2)+(x-a_1)(x-a_3)+\ldots+(x-a_1)(x-a_m)$$
$$+(x-a_2)(x-a_3)+\ldots+(x-a_2)(x-a_m)+\ldots+(x-a_{m-1})(x-a_m),$$

гдѣ вторая часть содержитъ $\frac{m(m-1)}{1.\ 2}$ членовъ.

Равнымъ бразомъ находимъ

(26) $$\frac{f^{m-1}(x)}{1.2\ldots(m-2)}=(x-a_1)+(x-a_2)+\ldots(x-a_m),$$

гдѣ вторая часть имѣетъ m членовъ.

Наконецъ, взявши производную этой функціи, получаемъ

$$\frac{f^m(x)}{1.2\ldots(m-2)(m-1)}=1+1+1+\ldots+1=m,$$

или

(27) $$\frac{f^m\ (x)}{1.2.3\ldots(m-1)m}=1$$

Условимся означать чрезъ C_n $(a, b, c, \ldots\ldots)$ сумму всѣхъ различныхъ произведеній, составленныхъ изъ буквъ a, b, $c \ldots\ldots$ по n; тогда выраженія, выведенныя для производныхъ различнаго порядка $f(x)$, могутъ быть изображаемы такъ:

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{l} f(x)=C_m(x-a_1, x-a_2, x-a_3, \ldots\ldots x-a_m).\\ f'(x)=1.C_{m-1}\,(x-a_1, \ldots\ldots x-a_m)\\ f''(x)=1.2.\,C_{m-2}(x-a_1, \ldots\ldots x-a_m) \text{ и т. д.}\\ f^{m-2}(x)=1.2\ldots\ldots(m-1)C_2\,(x-a_1, \ldots\ldots x-a_m)\\ f^{m-1}(x)=1.2(m-1)C_1(x-a_1, \ldots\ldots x-a_m)\\ f^m(x)=1.2\ldots\ldots mC_0\,(x-a, \ldots\ldots x-a_m). \end{array}\right.$$

§ **16.** Пусть будетъ функція $f(x)$, непрерывная въ сопредѣльности частнаго значенія $x=x_0$. Дадимъ послѣднему положительное приращеніе Δx, тогда $f(x_0)$ перемѣнится въ $f(x_0+\Delta x)$. Здѣсь могутъ встрѣтиться два случая: 1) что $f(x_0+\Delta x)>f(x_0)$, т. е. съ возрастаніемъ перемѣннаго x, функція $f(x)$ также возрастаетъ; 2) что $f(x_0+\Delta x)<f(x_0)$, т. е. съ возрастаніемъ x, функція $f(x_0)$ уменьшается. Въ первомъ случаѣ разность

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

будетъ положительная, а во второмъ отрицательная. Найдемъ признаки, отличающіе эти два случая.

Такъ какъ $f'(x_0)$ есть предѣлъ отношенія

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-(x_0)}{\Delta x},$$

то можно положить

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)+\varepsilon,$$

гдѣ ε есть количество положительное или отрицательное, и можетъ быть взято такъ малымъ, чтобъ знакъ количества $f'(x_0)+\varepsilon$ былъ одинаковъ съ знакомъ $f'(x_0)$. Отсюда видно, что для безконечномалаго ε или для безконечномалаго Δx, знакъ отношенія

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

одинаковъ съ знакомъ производной $f'(x_0)$. Посему: 1) ежели $f'(x_0)$ положительная, то знаки приращеній

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \text{ и } \Delta x$$

одинаковы; слѣдовательно, когда x_0 увеличится положительнымъ приращеніемъ Δx, тогда $f(x_0)$ также увеличится положительнымъ приращеніемъ $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$; 2) если же $f'(x_0)$ отрицательная, то для положительнаго Δx разность $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ должна быть отрицательною, т. е. съ увеличеніемъ x_0 безконечномалымъ количествомъ Δx, функція $f(x_0)$ уменьшится безконечномалымъ количествомъ $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

§ **17.** Когда функція $f(x)$ непрерывна относительно x между предѣлами $x=x_0$ и $x=X$ (разумѣя $x_0<X$), тогда съ возрастаніемъ x, начиная отъ x_0 до X, она можетъ либо непрерывно возрастать, либо непрерывно уменьшаться, смотря потому, будетъ ли производная $f'(x)$ для всѣхъ значеній x среднихъ между x_0 и X, положительная или отрицательная. Но функція $f(x)$, возрастая съ возрастаніемъ x, можетъ перестать возрастать для нѣкотораго частнаго значенія $x=a$ средняго между x_0 и X, послѣ чего она станетъ уменьшаться: это значеніе $f(x)$, соотвѣтствующее $x=a$, будетъ болѣе всѣхъ смежныхъ значеній, какъ для $x<a$, такъ и для $x>a$, и называется *maximum*. Для значеній x безконечноблизкихъ къ a, при $x<a$ производная $f'(x)$ будетъ положительная, а при $x>a$—отрицательная; слѣд. при переходѣ x изъ состоянія $<a$ въ состояніе $>a$, $f'(x)$ переходитъ изъ положительнаго состоянія въ отрицательное, и потому она должна при $x=a$ сдѣлаться ∞ либо o. Когда же съ возрастаніемъ x, функція $f(x)$ уменьшается до $x=a$, послѣ чего станетъ увеличиваться; тогда значеніе $f(x)$ меньше всѣхъ смежныхъ, какъ для $x<a$, такъ и для $x>a$, и называется *minimum*. Здѣсь для значеній x безконечноблизкихъ къ a, производная $f'(x)$ при $x<a$ отрицательная, а для $x>a$ положительная; посему $f'(a)$ должна быть либо ∞, либо o. И такъ въ обоихъ случаяхъ, будетъ ли $f(a)$ *maximum* или *minimum*, значеніе производной $f'(a)$ будетъ либо ∞, либо o.

Обратное заключеніе не имѣетъ мѣста, потому что $f'(x)$, обращаясь въ ∞ или o для $x=a$, можетъ имѣть одинъ тотъ же знакъ, какъ для $x<a$, такъ и для $x>a$; тогда $f'(a)$ сама есть *miximum* или *minimum*, а $f(x)$ въ сопредѣльности $x=a$, либо непрерывно возрастаетъ, либо непрерывно уменьшается.

§ **18.** Пусть, $f(x)$ и $F(x)$ будуть двѣ функціи, уничтожающіяся при $x=a$, и остающіяся непрерывными между предѣлами $x=a$ и $x,=b$, а $F'(x)$ сохраняетъ свой знакъ для всѣхъ значеній x среднихъ между a и b; тогда отношеніе этихъ функцій $\frac{f(b)}{F(b)}$ будетъ заключаться между наибольшимъ и наименьшимъ значеніемъ отношенія ихъ производныхъ $\frac{f'(x)}{F'(x)}$.

Означивъ наибольшее значеніе этого отношенія чрезъ A, а наименьшее чрезъ B, будемъ имѣть неравенства

$$A-\frac{f'(x)}{F'(x)}>o, \text{ и } B-\frac{f'(x)}{F'(x)}<o.$$

Такъ какъ $F'(x)$ имѣетъ одинъ и тотъ же знакъ для всякаго значенія x средняго между a и b, то помноживъ предъидущія выраженія на $F'(x)$, разности $A.\ F'(x)-f'(x)$, $B.\ F'(x)-f'(x)$ будутъ имѣть противные знаки для всѣхъ значеній x, среднихъ между a и b. Но эти выраженія суть производныя отъ

$$A.\ F(x)-f(x),\ B.\ F(x)-f(x);$$

а какъ производныя имѣютъ противные знаки, то изъ (§ 16) слѣдуетъ, что одно изъ послѣднихъ выраженій съ непрерывнымъ возрастаніемъ x отъ $x=a$ до $x=b$ будетъ увеличиваться, а второе уменьшаться. Но такъ какъ они оба уничтожаются при $x=a$, то очевидно, что $A.\ F(x)-f(x)$ и $B.\ F(x)-f(x)$ при всѣхъ значеніяхъ x, начиная отъ $x=a$ до $x=b$ будутъ имѣть противные знаки; слѣдовательно $A.\ F(b)-f(b)$ и $B.\ F(b)-f(b)$ будутъ съ противными знаками. Раздѣливъ эти выраженія на $F(b)$, знаки разностей $A-\frac{f(b)}{F(b)}$ и $B-\frac{f(b)}{F(b)}$ также будутъ противны. Ясно, что $A-\frac{f(b)}{F(b)}$ не можетъ быть отрицательною; ибо тогда $\frac{f(b)}{F(b)}>A>B$, и разность $B-\frac{f(b)}{F(b)}$ также отрицательная, что быть не можетъ. Равнымъ образомъ $B-\frac{f(b)}{F(b)}$ не можетъ быть положительною; ибо тогда $A>B>\frac{f(b)}{F(b)}$, и $A-\frac{f(b)}{F(b)}$ будетъ также положительная, что также не возможно. Слѣдовательно разность $A-\frac{f(b)}{F(b)}$ должна быть положительною, а $B-\frac{f(b)}{F(b)}$ отрицательною; посему $A>\frac{f(b)}{F(b)}$ и $B<\frac{f(b)}{F(b)}$ т. е.

$\frac{f(b)}{F(b)}$ содержится между A и B. Отсюда выводимъ слѣдующія замѣчательныя уравненія:

1.) Положивъ $b=a+h$, будемъ имѣть:

$$A>\frac{f(a+h)}{F(a+h)}>B.$$

Такъ какъ $f'(x)$ и $F'(x)$ по положенію непрерывны для всѣхъ значеній x среднихъ между a и b, то отношеніе $\frac{f'(x)}{F'(x)}$, переходя отъ A до B, необходимо пройдетъ чрезъ значеніе равное $\frac{f(a+h)}{F(a+h)}$; соотвѣтствующее значеніе x, среднее между a и $b=a+h$ можно изобразить чрезъ $a+\phi h$, гдѣ ϕ есть количество, содержащееся между o и 1; посему имѣемъ:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}=\frac{f'(a+\phi h)}{F'(a+\phi h)}. \tag{28}$$

2.) Если $n-2$ производныхъ отъ $f(x)$ и $F(x)$:

$$f''(x), f'''(x), \ldots\ldots f^{n-1}(x)$$

$$F''(x), F'''(x), \ldots\ldots F^{n-1}(x)$$

имѣютъ то же свойство, что и $\begin{Bmatrix} f(x), f'(x) \\ F(x), F'(x) \end{Bmatrix}$, т. е. остаются непрерывными между тѣми же предѣлами x, и уничтожаются при $x=a$; притомъ функціи второй строки и $f^n(x)$ также сохраняютъ свои знаки для всѣхъ значеній x среднихъ между a и b; тогда сказанное объ $\begin{Bmatrix} f(x), & f'(x) \\ F(x), & F'(x) \end{Bmatrix}$ можно приложить и къ функціямъ:

$$\begin{Bmatrix} f'(x), f''(x) \\ F'(x), F''(x) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} f''(x), f'''(x) \\ F''(x), F'''(x) \end{Bmatrix} \text{ и т. д.} \ldots \begin{Bmatrix} f^{(n-1)}(x), f^n(x) \\ F^{(n-1)}(x), F^n(x) \end{Bmatrix};$$

посему будемъ имѣть

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}=\frac{f'(a+\phi h)}{F'(a+\phi h)}=\frac{f''(a+\phi' h)}{F''(a+\phi' h)}=\frac{f'''(a+\phi'' h)}{F'''(a+\phi'' h)}=\frac{f^{n-1}(a+\phi^{(n-2)} h)}{F^{n-1}(a+\phi^{(n-2)} h)}=\frac{f^n(a+\phi^{(n-1)} h)}{F^n(a+\phi^{(n-1)} h)},$$

гдѣ $\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi''', \ldots\ldots \varphi^{(n-2)} \varphi^{(n-1)}$ заключаются между o и 1, и удовлетворяютъ условію

$$\varphi > \varphi' > \varphi'' > \varphi''' > \ldots\ldots \varphi^{(n-2)} > \varphi^{(n-1)}.$$

Сравнивъ двѣ крайнія дроби, имѣемъ:

(29) $$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f^n(a+\varphi^{(n-1)}h)}{F^n(a+\varphi^{(n-1)}h)} = \frac{f^n(a+\theta h)}{F^n(a+\theta h)}.$$

3) Ежели низшій предѣлъ a будетъ нуль, то уравненія (28) и (29) обратятся въ слѣдующія:

$$\frac{f(h)}{F(h)} = \frac{f'(\varphi h)}{F'(\varphi h)}, \quad \frac{f(h)}{F(h)} = \frac{f^n(\theta h)}{F^n(\theta h)}.$$

Положивъ въ первомъ изъ нихъ $F(x)=x$, будемъ имѣть: $F(h)=h$, $F'(\varphi h)=1$, и

(30) $$f(h)=h.f'(\varphi h).$$

А положивъ во второмъ $F(x)=x^n$, будетъ $F^n(x)=n\ldots\ldots 3.2.1$ и

(31) $$f(h)=\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}.f^n(\theta h).$$

4). Возмемъ n производныхъ отъ $f(x)$, и вставимъ въ нихъ $x+h$ вмѣсто x, тогда получимъ рядъ выраженій:

$$f(x+h),\ f'(x+h),\ f''(x+h), \ldots f^n(x+h),$$

изъ которыхъ каждое есть функція количества h, непрерывная въ сопредѣльности $h=o$. Разность $f(x+h)-f(x)$ есть такая же функція h, и уничтожается при $h=o$; посему она имѣетъ то же свойство, какъ и $f(h)$ въ уравненіи (30). Замѣтивъ, что производная отъ $f(x+h)-f(x)$, взятая относительно h есть $f'(x+h)$, по уравненію (30) находимъ:

(32) $$f(x+h)-f(x)=h.\ f'(x+\varphi h).$$

Сдѣлавъ здѣсь $\varphi=o$, равенство нарушится, и положивъ

$$f(x+h)-f(x)-h.\ f'(x)=Z,$$

функція Z количества h и ея производная

$$Z'=f'(x+h)-f'(x)$$

относительно h имѣютъ свойство уничтожаться при $h=o$, а производная втораго порядка Z будетъ $Z''=f''(x+h)$; слѣдовательно по уравненію (31) можно положить

$$f(x+h)-f(x)-h.\ f'(x)=\frac{h^2}{1.\ 2}\cdot f''(x+\varphi' h).$$

Сдѣлавъ во второй части $\varphi'=o$, и положивъ

$$f(x+h)-f(x)-h\ f'(x)-\frac{h^2}{1.\ 2}f''(x)=U,$$

эта функція h и ея производныя

$$U'=f'(x+h)-f'(x)-\frac{h}{1}f''(x)$$

$$U''=f''(x+h)-f''(x)$$

относительно h уничтожаются при $h=o$, а производная 3-го порядка будетъ $U'''=f'''(x+h)$; отъ чего по ур. (31) выходитъ

$$f(x+h)-f(x)-h.\ f'(x)-\frac{h^2}{1.2}f''(x)=\frac{h^3}{1.2.3}\cdot f'''(x+\varphi'' h).$$

Разсмотрѣвъ ходъ этихъ сужденій, понятно будетъ уравненіе

$$(33)\ f(x+h)-f(x)-\frac{h}{1}f'(x)-\frac{h^2}{1\ 2}f''(x)-..-\frac{h^{n-1}}{1.\ 2...(n-1)}f^{n-1}(x)=\frac{h^n}{1.2...n}f^n(x+\theta h),$$

котораго первая часть и ея $n-1$ производныхъ имѣютъ свойство уничтожаться при $h=o$.

Положивъ въ этомъ уравненіи $x=o$, имѣемъ:

$$(34)\ f(h)-f(o)-\frac{h}{1}\cdot f'(o)-\frac{h^2}{1.\ 2}\cdot f''(o)-..-\frac{h^{n-1}}{1.2...(n-1)}f^{n-1}(o)=\frac{h^n}{1.\ 2...n}f^n(\theta h).$$

Перенеся въ каждомъ изъ уравненій (33) и (34) члены съ — въ правую часть, и вставивъ во второе x вмѣсто h, получимъ двѣ строки:

$$(35)\quad f(x+h)=f(x)+h.\ f'(x)+\frac{h^2}{1.\ 2}\cdot f''(x)+\frac{h^3}{1.\ 2.\ 3}f'''(x)+..+\frac{h^n}{1.2...n}\cdot f^n(x+\theta h)$$

$$(36)\quad f(x)=f(o)+\frac{x}{1}\cdot f'(o)+\frac{x^2}{1.2}\cdot f''(o)+\frac{x^3}{1.2.3}\cdot f'''(o)+...+\frac{x^n}{1.2...n}\cdot f^n(\theta x).$$

Первая строка называется *Тейлоровой*, а вторая *Маклореневой*.

Положивъ въ ур. (35) $f(x)=x^m$ и $m=n$, выводимъ извѣстную Нютонову биномію:

$$(x+h)^m=x^m+\frac{m}{1}x^{m-1}h+\frac{m(m-1)}{1.\,2}x^{m-2}h^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3.}x^{m-3}h^3+\ldots..$$

$$\ldots.+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}x^3h^{m-3}+\frac{m(m-1)}{1.\,2}x^2h^{m-2}+\frac{m}{1}xh^{m-1}+h^m.$$

А для $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m$, при $n=m$, замѣтивъ, что $f^m(x)=1.\ 2.\ldots\ldots\ m.\ a_0=f^m(x+\theta h)=f^m(\theta h)$, уравненія (35) и (36) обращаются въ слѣдующія:

$$(37)\qquad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+\ldots\frac{h^{m-2}}{1.2..(m-2)}f^{m-2}(x)$$

$$+\frac{h^{m-1}}{1.2..(m-1)}f^{m-1}(x)+a_0h^m$$

$$\begin{array}{l|l|l|r|l}
=a_0x^m & +ma_0x^{m-1} & h+\frac{m(m-1)}{2}a_0x^{m-2} & h^2+\ldots+ma_0x & h^{m-1} \\
+a_1x^{m-1} & +(m-1)a_1x^{m-2} & +\frac{(m-1)(m-2)}{2}a_1x^{m-3} & +a_1 & +a_0h^m \\
+a_2x^{m-2} & +(m-2)a_2x^{m-3} & +\frac{(m-2)(m-3)}{2}a_0x^{m-4} & & \\
+\ldots\ldots. & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
+a_{m-1}x & +2\ a_{m-2}x & & & \\
+a_m & +\ a_{m-1} & +a_{m-2} & &
\end{array}$$

$$(38)\qquad f(x)=f(o)+\frac{f'(o)}{1}x+\frac{f''(o)}{1.2}x^2+\frac{f'''(o)}{1.2.3}x^3+\ldots+\frac{f^{m-1}(o)}{1.2\ldots(m-1)}x^{m-1}+a_0x^m$$

$$=a_m+a_{m-1}x+a_{m-2}x^2+a_{m-3}x^3+\ldots+a_2x^{m-2}+a_1x^{m-1}+a_0x^m.$$

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Объ общемъ видѣ коеффиціентовъ и корней уравненія численнаго, и о числѣ корней.

§ **19.** Уравненіе

$$(1)\qquad f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=o$$

называется *численнымъ*, когда его коеффиціенты a_0, a_1,.. a_m суть численныя выраженія. Посмотримъ, какой видъ имѣютъ эти численныя выраженія и результатъ дѣйствія, надъ ними производимаго для полученія неизвѣстнаго x.

Извѣстныя количества, входящія въ вопросъ, изъ котораго получилось уравненіе $f(x)=o$, суть дѣйствительныя числа, а коеффиціенты $a_0, a_1,\ldots a_m$, результаты какихъ-либо дѣйствій, производимыхъ надъ этими числами; поэтому, для опредѣленія вида коеффиціентовъ a_0, a_1,... a_m, должно опредѣлить общій видъ результата всякаго дѣйствія. Мы въ состояніи здѣсь это сдѣлать только для алгебраическихъ дѣйствій.

§ **20.** Извѣстно, что первыя четыре основныя дѣйствія, т. е. *сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе*, будучи производимы надъ дѣйствительными числами, въ результатѣ всегда даютъ дѣйствительное число, положительное или отрицательное, а потому, когда A, x_1, x_2,... x_n будутъ означать дѣйствительныя числа, тогда результатъ сложнаго дѣйствія вида

$$Ax_1^{m_1}\,.\,x_2^{m_2}\,.\,x_3^{m_3}\ldots\, x_n^{m_n}$$

будетъ также дѣйствительное число (разумѣя здѣсь показатели m_1, m_2,... m_n дѣйствительными, цѣлыми и положительными); слѣдовательно сумма такихъ членовъ или результатъ цѣлой раціональной функціи чиселъ x_1, x_2,... x_n будетъ дѣйствительное число.

Такъ какъ дробная раціональная функція есть частное двухъ цѣлыхъ функцій (§ 3), то результатъ дѣйствія, которое она изображаетъ, будетъ частное двухъ дѣйствительныхъ чиселъ; слѣдовательно этотъ результатъ будетъ также дѣйствительное число.

§ **21**. Пусть требуется совершить дѣйствіе

$$(2)\qquad \sqrt[m]{r},$$

гдѣ m есть число цѣлое, первоначальное и положительное, а r дѣйствительное положительное или отрицательное число. Если m не равно 2, то оно всегда будетъ нечетное; въ такомъ случаѣ дѣйствіе (2) имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный результатъ. Результатъ дѣйствія (2) будетъ также дѣйствительный, когда $m=2$ и r положительное число. Но если r отрицательное, тогда нѣтъ такого дѣйствительнаго числа, котораго бы квадратъ былъ отрицательный; слѣдовательное дѣйствіе

$$\sqrt{-b^2},$$

гдѣ b^2 есть число положительное, не возможно. Послѣднему выраженію даютъ обыкновенно видъ

$$(3)\qquad b\sqrt{-1},$$

гдѣ b есть дѣйствительное положительное или отрицательное число. Это выраженіе, называемое мнимымъ, показываетъ несообразность вопроса; но можетъ быть введено въ вычисленіе какъ количество, и тѣмъ доставляетъ, какъ увидимъ впослѣдствіи, большую пользу Анализу.

§ **22**. Разсмотримъ результатъ радикальной функціи

$$p'=(x_1,\ x_2,\dots\ x_n,\ \sqrt[n_1]{p_1},\ \sqrt[n_2]{p_2},\dots\ \sqrt[n_m]{p_m})$$

перваго порядка относительно $x_1,\ x_2,\dots\ x_n$.

Если между показателями $n_1,\ n_2,\dots\ n_m$ нѣтъ числа 2, то каждое изъ дѣйствій

$$\sqrt[n_1]{p_1},\ \sqrt[n_2]{p_2},\dots\ \sqrt[n_m]{p_m},$$

имѣетъ по крайней мѣрѣ по одному дѣйствительному результату; поэтому p' будетъ раціональная функція дѣйствительныхъ чиселъ, и по § 19, имѣетъ дѣйствительное значеніе. То же самое будетъ, когда нѣкоторые изъ показателей $n_1,\ n_2,\dots\ n_m$, равны 2, и соотвѣтствующія имъ подкоренныя количества $p_1,\ p_2,\dots\ p_m$ положительныя. Но если p' содержитъ радикалы вида $\sqrt{-b^2}=b\sqrt{-1}$, то, означивъ ихъ чрезъ $b_1\sqrt{-1}$, $b_2\sqrt{-1}$,

$b_2\sqrt{-1}, \dots b_\lambda\sqrt{-1}$, а чрезъ $a_1, a_2, \dots a_{m-\lambda}$ дѣйствительныя значенія прочихъ радикаловъ, p' будетъ раціональная функція выраженій: $x_1, x_2, \dots x_n, b_1\sqrt{-1}, b_2\sqrt{-1}, \dots b_\lambda\sqrt{-1}, a_1, a_2 \dots a_{m-\lambda}$. Опредѣлимъ простѣйшій видъ результата p' въ этомъ случаѣ.

1). Во-первыхъ мнимое выраженіе можетъ соединяться съ дѣйствительнымъ, положительнымъ или отрицательнымъ числомъ знакомъ + или —, тогда результатъ представляется въ несократимомъ видѣ:

$$a + b\sqrt{-1}, \tag{4}$$

гдѣ a и b означаютъ дѣйствительныя положительныя или отрицательныя числа.

Если мнимое выраженіе $b'\sqrt{-1}$ соединяется знакомъ + или — съ мнимымъ же выраженіемъ $b''\sqrt{-1}$, тогда сумма $b'\sqrt{-1} + b''\sqrt{-1}$ и разность $b'\sqrt{-1} - b''\sqrt{-1}$ приводятся къ виду:

$$(b' \pm b'').\sqrt{-1}.$$

Посему сумму нѣсколькихъ выраженій вида (4)

$$(a'+b'\sqrt{-1}) + (a''+b''\sqrt{-1}) + (a'''+b'''\sqrt{-1}) + \dots (a^{(l)}+b^{(l)}\sqrt{-1})$$

и разность

$$(a'+b'\sqrt{-1}) - (a''+b''\sqrt{-1})$$

можно замѣнить слѣдующими выраженіями:

$$(a'+a''+a'''+\dots a^{(l)}) + (b'+b''+b'''+\dots b^{(l)}).\sqrt{-1}.$$

$$(a'-a'') + (b'-b'')\sqrt{-1},$$

которыя также принадлежатъ виду (4).

2) Произведеніе мнимаго выраженія $b\sqrt{-1} = \sqrt{-b^2}$ на дѣйствительное a есть не что иное, какъ

$$\sqrt{-b^2}.\sqrt{a^2} = \sqrt{-a^2b^2} = \sqrt{-(ab)^2} = ab.\sqrt{-1}.$$

Произведеніе мнимаго выраженія $b\sqrt{-1}$ на мнимое же $b'\sqrt{-1}$ будетъ

$$\sqrt{-b^2}.\sqrt{-b'^2} = \sqrt{(-1).b^2}.\sqrt{(-1).b'^2} = \sqrt{(-1)^2 b^2 b'^2} = -1.b.b' = -bb'.$$

Слѣдовательно произведеніе

$$(a'+b'\sqrt{-1}).(a''+b''\sqrt{-1})$$

есть тоже, что

$$a'a''+a''b'\sqrt{-1}+a'b''\sqrt{-1}-bb';$$

но это выраженіе, по выше сказанному замѣняется слѣдующимъ:

$$(a'a''-b'b'') + (a''b'+a'b'')\sqrt{-1}.$$

Степень

$$(b\sqrt{-1})^m,$$

гдѣ m есть цѣлое число, принимаетъ видъ

$$b^m.(\sqrt{-1})^m.$$

Возвышая послѣдовательно $\sqrt{-1}$ въ степени 1, 2, 3, 4 и т. д. находимъ:

$$(\sqrt{-1})^1=\sqrt{-1},\ (\sqrt{-1})^2=-1,\ (\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1},\ (\sqrt{-1})^4=+1,$$
$$(\sqrt{-1})^5=\sqrt{-1},\dots \text{ и т. д.}$$

Означивъ чрезъ i какое нибудь цѣлое положительное число, изъ послѣднихъ выраженіи видно, что

$$(\sqrt{-1})^{4i}=[(\sqrt{-1})^4]^i=(+1)^i=+1$$
$$(\sqrt{-1})^{4i+1}=(\sqrt{-1})^{4i}.\sqrt{-1}=+\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^{4i+2}=(\sqrt{-1})^{4i+1}.\sqrt{-1}=-1$$
$$(\sqrt{-1})^{4i+3}=(\sqrt{-1})^{4i+2}.\sqrt{-1}=-\sqrt{-1};$$

слѣдовательно $(\sqrt{-1})^m$ будетъ одно изъ выраженій:

$$+1,\ +\sqrt{-1},\ -1,\ -\sqrt{-1},$$

смотря потому, какой изъ видовъ:

$$4i,\ 4i+1,\ 4i+2,\ 4i+3,$$

имѣетъ показатель m.

Отсюда заключаемъ, что степень $(b\sqrt{-1})^m=b^m.(\sqrt{-1})^m$, будетъ одно изъ выраженій:

$$b^m,\ b^m.\sqrt{-1},\ -b^m,\ -b^m\sqrt{-1},$$

и имѣетъ дѣйствительное значеніе, когда m есть число четное.

Разложивъ по Нютоновой строкѣ выраженіе $(a+b\sqrt{-1})^m$, имѣемъ въ слѣдствіе выше сказаннаго:

$$(a+b\sqrt{-1})^m$$
$$=a^m+ma^{m-1}b\sqrt{-1}-\frac{m(m-1)}{1.\,2}a^{m-2}b^2-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}a^{m-3}b^3\sqrt{-1}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\,2.\,3.\,4}a^{m-4}b^4+\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-4i+1)}{1.\,2\dots\dots\dots 4i}a^{m-4i}b^{4i}$$
$$+\frac{m(m-1)\dots(m-4i)}{1.\,2\dots(4i+1)}a^{m-4i-1}b^{4i+1}\sqrt{-1}-\frac{m(m-1)\dots(m-4i-1)}{1.\,2\dots(4i+2)}a^{m-4i-2}b^{4i+2}$$

$$-\frac{m(m-1)\ldots(m-4i-2)}{1.\,2\ldots(4i+3)}a^{m-4i-3}b^{4i+3}\sqrt{-1}+\ldots+ab^{m-1}(\sqrt{-1})^{m-1}+b^m(\sqrt{-1})^m;$$

отдѣливъ дѣйствительную часть отъ мнимой, получаемъ

$$(a+b\sqrt{-1})^m=[a^m-\frac{m(m-1)}{1.\,2}a^{m-2}b^2+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\,2.\,3.\,4}a^{m-4}b^4+\text{и пр.}]$$

$$+[ma^{m-1}b-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}a^{m-3}b^3+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}a^{m-5}b^5$$

$$+\text{ и пр.}].\sqrt{-1}=a^m[1-\frac{m(m-1)}{1.\,2}\;\frac{b^2}{a^2}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\,2.\,3.\,4}\cdot\frac{b^4}{a^4}+\text{и пр.}]$$

$$+\;a^m.b\;[\frac{m}{a}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}\;\frac{b^2}{a^3}+\ldots\text{и пр.}].\;\sqrt{-1}.$$

Отсюда видно, что результатъ дѣйствія $(a+b\sqrt{-1})^m$ приводится къ виду (4).

3) Такъ какъ *дѣленіе* имѣетъ цѣлью: *по данному произведенію и одному множителю найти другой множитель*; то выводимъ слѣдующія заключенія:

a) Частное отъ раздѣленія мнимаго выраженія $b\sqrt{-1}$ на дѣйствительное γ есть не что иное, какъ $\frac{b}{\gamma}\sqrt{-1}$; потому что произведеніе $\left(\frac{b}{\gamma}\cdot\sqrt{-1}\right)\gamma$, по сказанному предъ этимъ есть то же, что

$$\frac{b\gamma}{\gamma}\sqrt{-1}=b\sqrt{-1}.$$

b) Частное $(b'\sqrt{-1})$: $(b''\sqrt{-1})=\frac{b'\sqrt{-1}}{b''\sqrt{-1}}$ будетъ $\frac{b'}{b''}$; ибо

$$\left(\frac{b'}{b''}\right).b''\sqrt{-1}=\frac{b'b''}{b''}\sqrt{-1}=b'\sqrt{-1}.$$

c) Означимъ частное $\frac{a'+b'\sqrt{-1}}{\gamma}$ чрезъ $x+y\sqrt{-1}$, тогда будетъ

$$(a'+b'\sqrt{-1})=\gamma.(x+y\sqrt{-1})=x\gamma+y\gamma\sqrt{-1};$$

откуда

$$(a'+b'\sqrt{-1})-(x\gamma+y\gamma\sqrt{-1})=0$$

или

$$(a'-x\gamma)+(b'-y\gamma).\sqrt{-1}=0.$$

Возможность этого равенства требуетъ, чтобъ

$$a'-x\gamma=o \text{ и } b'-y\gamma=o \ (*);$$

отсюда имѣемъ

$$x=\frac{a'}{\gamma},\ y=\frac{b'}{\gamma}$$

и

$$\frac{a'+b'\sqrt{-1}}{\gamma}=\frac{a'}{\gamma}+\frac{b'}{\gamma}\sqrt{-1}$$

d) Наконецъ пусть $\frac{a'+b'\sqrt{-1}}{a''+b''\sqrt{-1}}=x+y\sqrt{-1}$, тогда

$$a'+b'\sqrt{-1}=(x+y\sqrt{-1})(a''+b''\sqrt{-1})=(xa''-yb'')+(xb''+ya'')\sqrt{-1};$$

посему

$$(a'-xa''+yb'')+(b'-xb''-ya'').\sqrt{-1}=o,$$

и подобно предъидущему, имѣемъ два уравненія:

$$a'-xa''+yb''=o,\ b'-xb''-ya''=o,$$

по разрѣшеніи которыхъ относительно x и y, получимъ

$$x=\frac{a'a''+b'b''}{a''^2+b''^2},y=\frac{a''b'-a'b''}{a''^2+b''^2};$$

слѣдовательно

$$\frac{a'+b'\sqrt{-1}}{a''+b''\sqrt{-1}}=\frac{a'a''+b'b''}{a''^2+b''^2}+\frac{a''b'-a'b''}{a''^2+b''^2}.\sqrt{-1}$$

Изъ всего сказаннаго въ этомъ §, видно, что результаты первыхъ трехъ основныхъ дѣйствій, производимыхъ надъ мнимыми выраженіями вида $a+b\sqrt{-1}$, суть выраженія такого же вида. Когда эти результаты дѣйствительные, тогда $b=o$, а когда они вида (3), тогда $a=o$. И такъ значеніе ирраціональной функціи p' перваго порядка относительно дѣйствительныхъ чиселъ x_1, x_2,... x_m или раціональной функціи выраженій:

$$x_1,\ x_2,\ldots\ldots x_n, b_1\sqrt{-1}, b_2\sqrt{-1},\ldots\ldots b_\lambda\sqrt{-1}, a_1, a_2,\ldots\ldots a_{m-\lambda},$$

есть выраженіе вида $a+b\sqrt{-1}$, гдѣ a и b суть дѣйствительныя числа, и могутъ быть равны o и $\pm\infty$.

§ **22.** Въ ирраціональной функціи втораго порядка § 3 ур. (5) значенія

(*) Ибо въ противномъ случаѣ выходило бы, что дѣйствительное количество, $a'-x\gamma$ равняется мнимому выраженію $-(b'-y.\gamma).\sqrt{-1}$, что невозможно.

функцій

$$\sqrt[n_1]{p_1},\ \sqrt[n_2]{p_2},\ldots\ldots\sqrt[n_{m_1}]{p_{m_1}},\ p'_1,\ p'_2,\ p'_3,\ldots\ldots p'_m$$

имѣютъ вообще видъ $a+b\sqrt{-1}$; посему значеніе p'' будетъ результатъ раціональнаго дѣйствія: 1) надъ дѣйствительными числами, 2) надъ мнимыми выраженіями вида $a+b\sqrt{-1}$ и 3) надъ выраженіями вида $\sqrt[m]{\alpha+\beta\sqrt{-1}}$, гдѣ m есть число первоначальное. Если бы послѣднее выраженіе само приводилось къ виду $a+b\sqrt{-1}$, тогда p'' была бы раціональная функція только дѣйствительныхъ количествъ и выраженій вида $a+b\sqrt{-1}$; посему результатъ ея, въ слѣдствіе сказаннаго въ § 21, былъ бы также вида $a+b\sqrt{-1}$.

§ **23.** Прежде нежели докажемъ, что $\sqrt[m]{\alpha+\beta\sqrt{-1}}$ имѣетъ видъ $a+b\sqrt{-1}$, сдѣлаемъ нѣкоторыя необходимыя для насъ замѣчанія о выраженіяхъ вида $a+b\sqrt{-1}$.

1) Мнимыя выраженія

$$a+b\sqrt{-1},\ a-b\sqrt{-1},$$

отличающіяся только знакомъ при $\sqrt{-1}$, называются *сопряженными*.

2) Произведеніе двухъ сопряженныхъ выраженій:

$$(a+b\sqrt{-1}).(a-b\sqrt{-1})$$

есть дѣйствительное положительное количество

$$a^2+b^2.$$

Значеніе $\sqrt{a^2+b^2}$ будетъ всегда дѣйствительное, и будучи взято съ знакомъ $+$, называется *модулемъ* выраженій: $a+b\sqrt{-1}$, $a-b\sqrt{-1}$.

3) Положивъ

$$(a'+b'\sqrt{-1})(a''+b''\sqrt{-1})=A+B\sqrt{-1},$$

по доказанному въ § 21, имѣемъ:

$$A=a'a''-b'b''$$

$$B=a''b'+a'b'';$$

посему будетъ

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{(a'a''-b'b'')^2+(a''b'+a'b'')^2}$$

$$=\sqrt{a'^2a''^2+b'^2b''^2+a''^2b'^2+a'^2b''^2}$$

$$=\sqrt{(a'^2+b'^2)\,(a''^2+b''^2)}=\sqrt{(a'^2+b'^2)}\,\sqrt{a''^2+b''^2};$$

отсюда видимъ, что *модуль произведенія двухъ мнимыхъ выраженій вида* (4) *есть произведеніе модулей каждаго множителя.*

Изъ этого вытекаютъ слѣдствія: a) *Модуль произведенія какого нибудь числа множителей есть произведеніе модулей каждаго множителя.* b) *Модуль степени* n *мнимаго выраженія есть степень* n *модуля этого выраженія.*

4) Мы уже видѣли (§ 21 замѣч. (*)); что мнимое выраженіе вида $a+b\sqrt{-1}$, тогда только можетъ быть нулемъ, когда $a=o$ и $b=o$; но въ этомъ случаѣ модуль $\sqrt{a^2+b^2}$, будетъ также нулемъ; и такъ, *мнимое выраженіе вида* (4) *тогда только можетъ быть нулемъ, когда его модуль будетъ нуль.*

Обратно: *когда модуль мнимаго выраженія* $a+b\sqrt{-1}$ *есть нуль, тогда само выраженіе* $a+b\sqrt{-1}$ *должно быть нулемъ.* Въ самомъ дѣлѣ, чтобы удовлетворить равенству

$$\sqrt{a^2+b^2}=o,$$

должно положить

$$a^2+b^2=o,$$

для этого необходимо, чтобы

$$a=o, \text{ и } b=o,$$

или чтобы

$$a+b\sqrt{-1}=o.$$

Это ведетъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

a) *Произведеніе нѣсколькихъ выраженій вида* $a+b\sqrt{-1}$ *будетъ нулемъ, когда одинъ изъ его множителей есть нуль.* Въ самомъ дѣлѣ, чтобъ произведеніе было нулемъ, его модуль долженъ быть нулемъ; но этотъ модуль есть произведеніе модулей каждаго изъ множителей; посему одинъ изъ этихъ модулей долженъ быть нулемъ; слѣдовательно мнимое выраженіе, ему соотвѣтствующее, должно быть также нулемъ.

b) *Модуль какой-либо степени мнимаго выраженія* $a+b\sqrt{-1}$ *будетъ нулемъ, когда корень его нуль. И обратно.*

5) *Модуль суммы или разности двухъ выраженій вида* (4), *менѣе суммы модулей каждаго слагаемаго, а болѣе ихъ разности.* Это докажется слѣдующимъ образомъ:

Пусть r и r' будутъ модули выраженій:

$$a'+b'\sqrt{-1} \text{ и } a''+b''\sqrt{-1},$$

а R модуль ихъ суммы; то будетъ

$$R^2=a'^2+b'^2+a''^2+b''^2+2(a'a''+b'b'')=r^2+r'^2+2(a'a''+b'b''),$$

и

$$(r\pm r')^2=r^2+r'^2\pm 2rr'=r^2+r'^2\pm 2\sqrt{(a'^2+b'^2)(a''^2+b''^2)};$$

но

$$2\sqrt{(a'^2+b'^2)(a''^2+b''^2)}=2\sqrt{a'^2a''^2+b'^2b''^2+a'^2b''^2+a''^2b'^2},$$

и

$$2(a'a''+b'b'')=2\sqrt{(a'a''+b'b'')^2}=2\sqrt{a'^2a''^2+b'^2b''^2+2a'a''b'b''};$$

притомъ

$$a'^2b''^2+a''^2b'^2>2a'a''b'b'';$$

ибо

$$a'^2b''^2+a''^2b'^2-2a'a''b'b''=(a'b''-a''b')^2>o;$$

посему

$$2\sqrt{(a'^2+b'^2)(a''^2+b''^2)}>2(a'a''+b'b''),$$

и

$$(r-r'^2)<R^2<(r+r'^2)^2,$$

или

$$r-r'<R<r+r'.$$

Ежели

$$R=\sqrt{(a'-b'')^2+(b'-b'')^2},$$

то

$$R^2=r^2+r'^2-2(a'a''+b'b'');$$

посему опять

$$(r-r')^2<R^2<(r+r')^2,$$

или

$$(r-r')<R<(r+r').$$

6) Всякое дѣйствительное количество заключается въ выраженіи вида $a+b\sqrt{-1}$, какъ частный случай, а именно: когда коеффиціентъ b при $\sqrt{-1}$ будетъ нулемъ; посему модуль дѣйствительнаго количества a будетъ количество a, взятое независимо отъ знака.

§ **24.** Докажемъ, теперь что дѣйствіе

$$\sqrt[m]{\alpha+\beta\sqrt{-1}},$$

гдѣ m положительное первоначальное число, имѣетъ покрайней мѣрѣ одинъ результатъ вида $a+b\sqrt{-1}$.

Положивъ

$$z=\sqrt[m]{\alpha+\beta\sqrt{-1}}$$

или

(5) $$z^m = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

доказательство наше приводится къ тому, чтобы узнать, существуетъ ли для z значеніе вида (4), удовлетворяющее уравненію (5).

Здѣсь m можетъ быть четное или нечетное.

1) Въ первомъ случаѣ $m=2$. Положивъ тогда

$$z = x + y\sqrt{-1},$$

если это предположеніе справедливо, то x и y должны имѣть дѣйствительныя значенія, и мнимое уравненіе

$$(x+y\sqrt{-1})^2 = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

или

$$x^2 - y^2 + 2xy\sqrt{-1} = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

даетъ два дѣйствительныхъ:

$$x^2 - y^2 = \alpha \text{ и } 2xy = \beta.$$

Исключивъ изъ нихъ сперва y, а потомъ x, получимъ два уравненія:

$$x^4 - \alpha x^2 - \frac{\beta^2}{4} = 0,$$

$$y^4 + \alpha y^2 - \frac{\beta^2}{4} = 0,$$

которыя, будучи разрѣшены относительно x^2 и y^2, даютъ:

$$x^2 = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2} \text{ и } y^2 = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}.$$

Такъ какъ квадраты x^2 и y^2 должны быть количества положительныя, то въ найденныхъ для нихъ выраженіяхъ корень $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ должно взять съ знакомъ $+$, отъ чего получимъ для x и y дѣйствительныя значенія:

$$x = \left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad y = \left(\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

и искомое значеніе z будетъ

(6) $$\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}.$$

2) Если m не $=2$, то оно нечетное. Когда въ уравненіи

$$z^m=\alpha+\beta\sqrt{-1}$$

количество β будетъ нулемъ, тогда $z=\sqrt[m]{\alpha}$, и имѣетъ дѣйствительное значеніе. Но когда $\alpha=o$, тогда

$$z^m=\beta\sqrt{-1},$$

и положивъ $z=z'\sqrt{-1}$, имѣемъ

$$\pm z'^m\sqrt{-1}=\beta.\sqrt{-1}\ (*)\ ;$$

отсюда $\pm z'^m=\beta$ или $z'^m=\pm\beta$, и $z'=\sqrt[m]{\pm\beta}=\pm\sqrt[m]{\beta}$. Слѣдовательно z' имѣетъ дѣйствительное значеніе, и предположеніе $z=z'\sqrt{-1}$ справедливо.

Наконецъ пусть α и β имѣютъ значенія отличныя отъ нуля. Положивъ $z=x+y\sqrt{-1}$, и разложивъ $(x+y\sqrt{-1})^m$ по Ньютоновой строкѣ (§ 21, 1), разность

$$(x+y\sqrt{-1})^m-(\alpha+\beta\sqrt{-1})$$

будетъ вида

$$F(x,y)=\varphi(x,y)+\psi(x,y).\sqrt{-1},$$

гдѣ $\varphi(x,y),\psi(x,y)$ означаютъ цѣлыя, раціональныя функціи количествъ x и y.

Пусть будетъ $\mathfrak{R}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $\mathfrak{r}=\sqrt{x^2+y^2}$, $R=\sqrt{[\varphi(x,y)]^2+[\psi(x,y)]^2}$; давши x и y частныя значенія $x=\sqrt[m]{\alpha}$ и $y=o$, находимъ

$$F(x,y)=\alpha-(\alpha+\beta\sqrt{-1})=-\beta\sqrt{-1},$$

и

$$\varphi(x,y)=o,\psi(x,y)=-\beta\sqrt{-1};$$

посему

$$R^2=\beta^2 \text{ и}$$

(7) $$R^2<\alpha^2+\beta^2,\ R<\mathfrak{R}.$$

Такъ какъ $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ остаются непрерывными для всякихъ дѣйствительныхъ значеній x и y, то R^2, слѣдовательно и R, съ непрерывнымъ измѣненіемъ x и y, будутъ также измѣняться непрерывно; въ продолженіи этого измѣненія модуль R необходимо долженъ достигать

(*) Первая часть будетъ съ + или —, смотря по тому, будетъ ли m вида $4n+1$ или $4n+3$. (Смотр. § 21.)

покрайней мѣрѣ однажды наименьшаго состоянія. Легко доказать, что это *minimum* значеніе R есть нуль.

Изъ неравенства (7) слѣдуетъ, что оно меньше $\mathfrak{R}$. Очевидно, что оно не можетъ соотвѣтствовать слѣдующимъ значеніямъ x и y:

$$\begin{gathered} x=o,\ y=o \\ x,\ y=\infty \\ y,\ x=\infty \\ x=\infty,\ y=\infty; \end{gathered}$$

ибо въ первомъ случаѣ, т. е. когда $x=o$ и $y=o$, будетъ $R=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\mathfrak{R}$; а въ прочихъ $R=\infty$, потому что $r=\infty$ и $R>r^m$.

Пусть x и y соотвѣтствуютъ наименьшему модулю, и для сокращенія изобразимъ чрезъ c выраженіе $x+y\sqrt{-1}$, а чрезъ C результатъ $c^m-(\alpha+\beta\sqrt{-1})$. Перемѣнивъ c на $c+\kappa$, разумѣя подъ κ выраженіе вида (4), получимъ:

$$(8)\qquad (c+\kappa)^m-(\alpha+\beta\sqrt{-1})$$
$$=C+mc^{m-1}\kappa+\frac{m(m-1)}{2}c^{m-2}\kappa^2+\ldots\ldots+\kappa^m.$$

Положивъ $\kappa=\dfrac{-C}{mc^{m-1}}\cdot\varepsilon$, означая чрезъ ε дѣйствительное безконечно-малое количество. Внеся это значеніе κ въ разложеніе (8), сдѣлавъ C общимъ множителемъ, и изобразивъ чрезъ $f_1, f_2\ldots f_{m-1}$ коеффиціенты при степеняхъ $\varepsilon^2, \varepsilon^3,\ldots\ldots\varepsilon^m$, будемъ имѣть

$$(c+\kappa)^m-(\alpha+\beta\sqrt{-1})=c(1-\varepsilon+f_1\varepsilon^2+f_2\varepsilon^3+\ldots+f_{m-1}\varepsilon^m).$$

Пусть R_0 будетъ модуль выраженія C, а θ модуль множителя заключеннаго въ скобкахъ, то R_1 модуль выраженія (8) будетъ:

$$R_1=R_0\ \theta.$$

Изобразимъ чрезъ $r_1, r_2,\ldots r_{m-1}$, соотвѣтственно модули выраженій $f_1, f_m\ldots f_{m-1}$; тогда количества

$$1-\varepsilon,\ r_1\ \varepsilon^2,\ldots\ldots r_{m-1}\ \varepsilon^m,$$

будутъ соотвѣтственно модули выраженій:

$$1-\varepsilon,\ f_1\varepsilon^2,\ f_2\varepsilon^3,\ldots\ldots f_{m-1}\varepsilon^m;$$

и въ слѣдствіе (§ 23, 5), количество θ не можетъ превосходить сумму

$$1-\varepsilon+r_1\varepsilon^2+\ldots+r_{m-1}\varepsilon^m.$$

Здѣсь ε разумѣется положительнымъ, отъ чего по (§ 10, 4), значеніе этого полинома будетъ меньше 1 для безконечнаго ε; по этому $0<1$ и $(R_1=R_0 0)<R_0$, но это не возможно, потому что R_0, какъ мы положили, есть наименьшій модуль.

И такъ нельзя положить, что *minimum* значеніе модуля R больше нуля, а какъ оно не можетъ быть и меньше, т. е. быть отрицательнымъ, то оно равно нулю. Соотвѣтствующія значенія x и y, даютъ

$$F(x,y)=(x+y\sqrt{-1})^m-(\alpha+\beta.\sqrt{-1})=o$$

или

$$x+y\sqrt{-1}=\sqrt[m]{(\alpha+\beta.\sqrt{-1})}.$$

Слѣдовательно дѣйствіе $\sqrt[m]{\alpha+\beta.\sqrt{-1}}$ имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ результатъ вида $a+b\sqrt{-1}$.

§ **25.** Теперь ясно, что въ выраженіи p'', ирраціональной функціи втораго порядка, каждый изъ радикаловъ:

$$\sqrt[n'_1]{p'_1},\ \sqrt[n'_2]{p'_2},\dots\ \sqrt[n'_{m_2}]{p'_{m_2}}$$

будетъ имѣть видъ $a+b\sqrt{-1}$; посему p'' будетъ раціональная функція только выраженій вида $a+b\sqrt{-1}$, и по § 21, значеніе ея должно быть также вида $a+b\sqrt{-1}$.

Въ ирраціональную функцію 3-го порядка входятъ радикалы, содержащіе подъ $\sqrt{\ }$ функціи 2-го порядка; а какъ послѣднія имѣютъ видъ $a+b\sqrt{-1}$, то всѣ радикалы будутъ вида $\sqrt[m]{\alpha+\beta.\sqrt{-1}}$. Но въ слѣдствіе предъидущаго §, такіе радикалы имѣютъ видъ $a+b\sqrt{-1}$; посему p''' будетъ раціональная функція выраженія вида $a+b\sqrt{-1}$, и сама будетъ такого же вида.

Продолжая эти сужденія далѣе, заключаемъ, что v, ирраціональная функція дѣйствительныхъ количествъ $x_1, x_2, \dots x_n$ порядка μ, имѣетъ видъ $a+b\sqrt{-1}$.

Отсюда слѣдуетъ, что коеффиціенты $a_0, a_1, \dots a_m$, когда они результаты дѣйствій, заключающихся въ дѣйствіи (7) § 3, какъ частные случаи, имѣютъ вообще видъ $a+b\sqrt{-1}$, въ которомъ для дѣйствительныхъ коеффиціентовъ, должно полагать $b=o$. Это справедливо даже и въ томъ случаѣ, когда $a_0, a_1, \dots a_m$ суть корни алгебраическихъ уравненій, или результаты трансцендентныхъ дѣйствій. Послѣдній случай здѣсь не можетъ входить въ разсмотрѣніе.

§ **26.** Въ уравненіи (1), когда его коэффиціенты вида $a+b\sqrt{-1}$, коэффиціентъ перваго члена можно всегда сдѣлать единицею. Въ самомъ дѣлѣ, положивъ

$$(9) \qquad \frac{a_1}{a_0}=A,\ \frac{a_2}{a_0}=B, \ldots\ldots \frac{a_{m-1}}{a_0}=I,\ \frac{a_m}{a_0}=K,$$

частныя $A, B, \ldots I, K$ будутъ по (§ 21, 3) выраженія вида $a+b\sqrt{-1}$. Изъ равенствъ (9) имѣемъ:

$$a_1=a_0A,\ a_2=a_0B, \ldots\ldots a_{m-1}=a_0I,\ a_m=a_0K;$$

посему первая часть даннаго уравненія приметъ видъ

$$a_0x^m+a_0Ax^{m-1}+a_0Bx^{m-2}+\ldots\ldots a_0Ix+a_0K$$

или

$$a_0(x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots\ldots Ix+K).$$

Чтобъ это произведеніе было нулемъ, одинъ изъ его множителей долженъ быть нулемъ; но такъ какъ a_0 не есть нуль (ибо тогда $a_0x^m=o$ и данное уравненіе, было бы только степени $m-1$, а не m), то

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots\ldots+Ix+K=o.$$

И такъ уравненіе (1), если его коэффиціенты вида $a+b\sqrt{-1}$, замѣняется уравненіемъ

$$(10) \qquad x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots\ldots+a_{m-1}x+a_m=o,$$

гдѣ $a_1, a_2, \ldots a_{m-1}, a_m$ суть также выраженія вида $a+b\sqrt{-1}$.

§ **27.** Докажемъ теперь, что послѣднее основное дѣйствіе, т. е. рѣшеніе уравненій вида (10), имѣетъ результатъ вида $a+b\sqrt{-1}$ (*).

(*) Вскорѣ послѣ того, какъ *Тарталеа* и *Ферари* нашли способы рѣшать уравненія 3-й и 4-й степени, Геометры замѣтили, что корни такихъ уравненій одного вида съ корнями уравненій 2-й степени: это подало имъ поводъ думать, что такого же вида должны быть корни уравненій всѣхъ высшихъ степеней. *Даламбертъ* первый приступилъ къ рѣшенію этого вопроса; но его попытки были не совсѣмъ удачны. Хотя впослѣдствіи *Лагранжъ* ихъ исправилъ, однакожъ онѣ оставляютъ за собою большіе недостатки. *Ейлеръ* и *Фонтенексъ* также занимались этимъ предметомъ. Наконецъ *Лагранжъ* и *Лапласъ*, пользуясь ихъ открытіями, доказали, что первая часть даннаго уравненія, не имѣющаго мнимыхъ коэффиціентовъ, разлагается на дѣйствительные множители 1-й и 2-й степени, а какъ корни послѣднихъ заключаются въ видѣ $a+b\sqrt{-1}$, и должны уничтожать первую часть даннаго уравне-

Вставимъ въ уравненіе (10) вмѣсто x какое-либо выраженіе вида $a+b\sqrt{-1}$, которое изобразимъ чрезъ $t+u\sqrt{-1}$; тогда первая часть уравненія (10) приметъ видъ

$$f(t+u\sqrt{-1})=\varphi(t,u)+\psi(t,u).\sqrt{-1},$$

гдѣ $\varphi(t,u)$ и $\psi(t,u)$ суть цѣлыя раціональныя дѣйствительныя функціи количествъ t, u, и по § 19 должны имѣть дѣйствительныя значенія. Чтобы выраженіе $f(t+u\sqrt{-1})$ было нулемъ, модуль его

$$R=\sqrt{[\varphi(t,u)]^2+[\psi(t,u)]^2}$$

долженъ быть нулемъ, а для этого по (§ 23,4) должно, чтобъ

$$\varphi(t,u)=o \text{ и } \psi(t,u)=o.$$

И такъ нужно доказать, что для t и u существуютъ такія дѣйствительныя значенія, для которыхъ функціи:

$$R,\ \varphi(t,u),\ \psi(t,u)$$

уничтожаются.

Означимъ чрезъ r модуль выраженія $t+u\sqrt{-1}$, чрезъ $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{m-1}\ \varrho_m$ модули коеффиціентовъ $a_1, a_2, \ldots a_{m-1}, a_m$, а чрезъ $\mathfrak{R}$ модуль выраженія

$$f(t+u\sqrt{-1})-(t+u\sqrt{-1})^m=a_1(t+u\sqrt{-1})^m+a_2(t+u\sqrt{-1})^{m-2}+\ldots+a_m;$$

тогда по § 23 имѣемъ:

$$R>r^m-\mathfrak{R} \text{ и } \mathfrak{R}<\varrho_1 r^{m-1}+\varrho_2 r^{m-2}+\ldots+\varrho_{m-1}r+\varrho_m;$$

слѣдовательно

$$(11) \qquad R>r^m-\varrho_1 r^{m-1}-\varrho_2 r^{m-2}-\ldots-\varrho_{m-1}r-\varrho_m.$$

По § 11, для безконечновеликаго r, вторая часть этого неравенства будетъ имѣть безконечновеликое значеніе; посему значеніе R будетъ также безконечновеликое. Если всѣ коеффиціенты $a_1, a, \ldots a_m$, слѣдовательно и ихъ модули $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_m$, имѣютъ конечныя значенія;

нія: что эти знаменитые Геометры заключили, что данное уравненіе имѣетъ корни вида $a+b\sqrt{-1}$. Но доказательство *Коши*, данное имъ въ *Exercices de Mathématiques* имѣетъ преимущество, потому что оно непосредственно ведетъ къ цѣли, и относится къ уравненію съ мнимыми коеффиціентами, въ которомъ уравненіе съ дѣйствительными коеффиціентами заключается какъ частный случай. По этой причинѣ я предпочелъ доказательство *Коши*.

что функціи: $\varphi(t,u)$, $\psi(t,u)$ и R, по § 13, для всѣхъ конечныхъ значеній t и u, будутъ имѣть конечныя значенія. По этому, измѣняя t и u непрерывно, модуль R будетъ также измѣняться непрерывно, и ясно, что, въ продолженіи этого непрерывнаго измѣненія, онъ долженъ достигать по крайней мѣрѣ однажды наименьшаго состоянія.

Пусть это наименьшее состояніе модуля R будетъ R_0, а t_0 и u_0, соотвѣтствующія ему значенія количествъ t и u, и для сокращенія означимъ чрезъ c выраженіе $x=t_0+u_0\sqrt{-1}$. Давши c дѣйствительное или мнимое приращеніе k, и изобразивъ чрезъ R_1 модуль, соотвѣтствующій $x=c+k$, этотъ новый модуль R_1 не можетъ быть меньше модуля R_0; по этому разность

(12)
$$R_1-R_0$$

не можетъ быть отрицательною.

Разложивъ $f(c+k)$ по возрастающимъ степенямъ k (*), получимъ

(13)
$$f(c+k)=f(c)+f'(c).k+\tfrac{1}{2}f''(c).k^2+\ldots+k^m;$$

въ этомъ разложеніи $f(c)$ не будетъ нулемъ, если R_0 не равно нулю. Принявъ, что $f(c)$ и $f'(c)$ не равны нулю, положивъ

$$k=-\frac{f(c)}{f'(c)}.\varepsilon,$$

означая чрезъ ε дѣйствительное безконечномалое количество, внеся это значеніе k въ разложеніе (13), и сдѣлавъ $f(c)$ общимъ множителемъ, имѣемъ:

(*) Такъ какъ

$$f(c+k)=(c+k)^m+a_1(c+k)^{m-1}+a\,(c+k)^{m-2}+\ldots+a_{m-1}(c+k)+a_m,$$

то разложивъ каждый членъ, принимая въ соображеніе сказанное въ § 20, и расположивъ все по возвращающимъ степенямъ k, находимъ:

$$\begin{array}{l|l|l|r|l}
=c^m & +mc^{m-1} & k+\frac{m(m-1)}{2}c^{m-2} & k^2+\text{и т.д.}+mc & k^{n-1} \\
+a_1c^{m-1} & +a_1(m-1)c^{m-2} & +\frac{a_1(m-1)(m-2)}{2}c^{m-3} & +a_1 & +k^m; \\
+a_2c^{m-2} & +a_2(m-2)c^{m-3} & +\frac{a_2(m-2)(m-3)}{2}c^{m-4} & & \\
+\ldots\ldots & +\ldots\ldots\ldots & +\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
+a_{m-1}c & +2\,a_{m-2}c & +a_{m-2} & & \\
+a_m & +\,a_{m-1} & & &
\end{array}$$

$$f(c+\kappa)=f(c).\left\{1-\varepsilon+\tfrac{1}{2}\frac{f(c)}{[f'(c)]^2}f''(c).\varepsilon^2.-.+(-1)^m\frac{[f(c)]^{m-1}}{[f'(c)]^m}.\varepsilon^m\right\}$$

Пусть r_1, $r_2,\ldots r_{m-1}$ будуть соотвѣтственно модули коэффиціентовъ при степеняхъ:

$$\varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots \varepsilon^m,$$

а θ модуль выраженія въ скобкахъ $\{\}$; то по § 23, должно быть

$$(14) \qquad \theta<1-\varepsilon+r_1\varepsilon^2+r_2\varepsilon^3+\ldots+r_{m-1}\varepsilon^m$$

и

$$R_1=R_0\ \theta$$

или

$$(15) \qquad R_1-R_0=R_0(\theta-1).$$

По (§ 10, 5), для весьма малаго ε, вторая часть неравенства (14) меньше 1; по этому θ также меньше единицы и разность (15) отрицательныя, т. е. $R_1<R_0$, что не можетъ быть, ибо по положенію R_0 есть наименьшій модуль. И такъ нельзя допустить, чтобы R_0 не былъ нулемъ.

Пусть $f'(c), f''(c),\ldots f^{n-1}(c)$ равны нулю, тогда будетъ

$$f(c+\kappa)=f(c)+\frac{1}{1.\ 2\ldots\ n}f^n(c).\kappa^n+\frac{1}{1.2\ldots(n+1)}f^{n+1}(c).\kappa^{n+1}+\ldots+\kappa^m.$$

Положивъ

$$\kappa=\varepsilon\left(\frac{-1.2..nf(c)}{f^n(c)}\right)^{\frac{1}{n}},$$

по § 24, κ имѣетъ значеніе вида $\varepsilon(a+b\sqrt{-1})$. Внеся его въ разложеніе $f(c+\kappa)$, и сдѣлавъ $f(c)$ общимъ множителемъ, находимъ:

отсюда видно, что коэффиціенты при степеняхъ κ получатся, когда въ функціи

$$f(x), f'(x), \frac{f''(x)}{1.\ 2}\ldots\frac{f^{m-1}(x)}{1\ldots(m-1)}$$

вставимъ вмѣсто x мнимое выраженіе c. Здѣсь ничто не препятствуетъ допустить, что въ $f(c+\kappa)$ первый членъ $(c+\kappa)^m$ имѣетъ какой—либо коэффиціентъ a_0; въ такомъ случаѣ разложеніе $(c+\kappa)$ получится изъ разложенія (57) § 17 замѣнивъ x чрезъ c, а h чрезъ κ. Посему формулы (57) (58) § 17 справедливы и въ томъ случаѣ, когда x и h мнимыя выраженія.

$$f(c+k)=f(c)\left\{1-\varepsilon^n+\frac{(a+b\sqrt{-1})_{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\cdot\frac{f^{n+1}(c)}{f(c)}\varepsilon^{n+1}+\ldots+\frac{(a+b\sqrt{-1})^m}{f(c)}\varepsilon^m\right\}$$

Изобразивъ опять чрезъ r_n, $r_{n+1}, \ldots r_{m-1}$, модули коеффиціентовъ при степеняхъ $\varepsilon^{n+1}, \varepsilon^{n+2}, \ldots \varepsilon^m$, а чрезъ θ модуль выраженія въ скобкахъ $\{\}$, имѣемъ:

$$(16) \qquad \theta<1-\varepsilon^n+r_n\varepsilon^{n+1}+\ldots+r_{m-1}\varepsilon^m$$

и

$$R_1=R_0\theta$$

или

$$R_1-R_0=R_0(\theta-1).$$

По (§ 10, 5), для безконечномалаго ε, вторая часть неравенства (16) меньше 1, отъ чего $\theta<1$, и разность R_1-R_0 опять отрицательная; но это невозможно, потому что R_0 есть наименьшій модуль. И такъ нельзя положить $R_0>o$; посему опять $R_0=o$. Значенія $t=t_0$ и $u=u_0$, соотвѣтствующія $R_0=o$, даютъ $\varphi(t_0,u_0)=o$, $\psi(t_0,u_0)=o$; слѣдовательно

$$f(t_0+u_0\sqrt{-1})=\varphi(t_0,u_0)+\psi(t_0,u_0)\sqrt{-1}=o,$$

т. е. выраженіе $t_0+u_0\sqrt{-1}$ есть корень уравненія $f(x)=o$.

Изъ всего сказаннаго въ этой Главѣ слѣдуетъ, что *результатъ всякаго алгебраическаго дѣйствія имѣетъ видъ $a+b\sqrt{-1}$, въ которомъ дѣйствительное значеніе результата заключается какъ частный случай, а именно, когда $b=o$.*

И такъ, *всякое алгебраическое уравненіе имѣетъ видъ (10), и рѣшеніе его даетъ по покрайней мѣрѣ одинъ результатъ вида $a+b\sqrt{-1}$. Этотъ результатъ будетъ дѣйствительный, когда $b=o$.*

§ 28. Раздѣлимъ первую часть уравненія

$$f(x)=x^m+a_0x^{m-1}+a_2x^{m-2}\ldots\ldots+a_{m-1}x+a_m=o$$

на линейное выраженіе $x-\alpha$, гдѣ α имѣетъ видъ $a+b\sqrt{-1}$, частное будетъ полиномъ вида

$$f_1(x)=b_0x^r+b_0x^{r-1}+b_2x^{r-2}+\ldots\ldots\ldots+b_{r-1}x+b_0;$$

а остатокъ будетъ количество независимое отъ x. Изобразивъ этотъ остатокъ чрезъ R, и придавши его къ произведенію частнаго $f_1(x)$ на дѣлителя $x-\alpha$, получимъ равенство

$$x^m+a_1x^{m-1}+\ldots..+a_{m-1}x+a_m=(b_0x^r+b_1x^{r-1}+\ldots.b_{r-1}x+b_r)(x-a)+R$$
$$=b_0x^{r-1}+(b_1-b_0a)x^r+(b_2-b_1a)x^{r-1}+\ldots+(b_r-b_{r-1}a)x-b_ra+R\ ,$$

въ которомъ вторая часть должна быть тождественна съ первою ; но для этого должно, чтобъ

$$m=r+1,\ 1=b_0,\ a_1=b_1-b_0a,\ a_2=b_2-b_1a \text{ и т. д.}$$
$$a_m=-b_ra+R=-b_{m-2}a+R\ ;$$

отсюда имѣемъ:

$$b_0=1$$
$$b_1=a_1+b_0a=a_1+a$$
$$b_2=a_2+b_1a=a_2+a_1a+a^2$$
$$b_3=a_3+b_2a=a_3+a_2a+a_1a^2+a^3$$

и т. д.

$$b_{m-1}=a_{m-1}+a_{m-2}a+a_{m-3}a^2+\ldots\ldots+a_1a^{m-2}+a^{m-1}$$
$$R=a_m+a_{m-1}a+a_{m-2}a^2+\ldots\ldots+a_1a^{m-1}+a^m,$$

и заключаемъ: 1) *Отъ раздѣленія первой части опред. алгебр. уравненія степени* m, *на линейное выраженіе* x—a, *въ частномъ получится цѣлая алгебраическая функція неизвѣстнаго* x *степени* m—1 *съ коеффиціентами вида* $a+b\sqrt{-1}$. 2) *Коеффиціентъ перваго члена частнаго равенъ коеффиціенту перваго члена дѣлимаго или единицѣ.* 3) *Коеффиціентъ каждаго члена частнаго равенъ коеффиціенту члена того же мѣста въ дѣлимомъ, сложенному съ произведеніемъ предъидущаго коеффиціента частнаго на* a. *Коеффиціентъ* n *мѣста въ частномъ получится, когда въ первой части даннаго уравненія возмемъ первые* n *членовъ, раздѣлимъ ихъ на* x^{m-n+1} *и* x *замѣнимъ* a. 4) *Остатокъ дѣленія есть результатъ, получаемый отъ вставки* a *вмѣсто* x *въ первую часть даннаго уравненія.*

§ **29.** Пусть $t_1+u_1\sqrt{-1}$ будетъ корень уравненія $f(x)=0$. Раздѣлимъ $f(x)$ на линейное выраженіе $x-(t_1+u_1.\sqrt{-1})$, по доказанному въ предъидущемъ §, остатокъ этого дѣленія будетъ $f(t_1+u_1\sqrt{-1})$. Но какъ $f(t_1+u_1\sqrt{-1})=0$, то $f(x)$ на $x-(t_1+u_1\sqrt{-1})$ раздѣлится безъ остатка. Частное этого дѣленія, какъ мы уже сказали, должно быть цѣлая алгебраическая функція степени $m-1$ относительно x; означивъ ее чрезъ $f_1(x)$, будемъ имѣть:

$$f(x)=[x-(t_1+u_1.\sqrt{-1})].f_1(x).$$

Такъ какъ уравненіе $f_1(x)=0$ одинакого вида съ уравненіемъ $f(x)=0$, то по § 27, оно должно имѣть по крайней мѣрѣ одинъ корень вида $a+b\sqrt{-1}$. Пусть этотъ корень будетъ $t_2+u_2\sqrt{-1}$, тогда функція $f_1(x)$ должна дѣлиться безъ остатка на $x-(t_2+u_2\sqrt{-1})$, и частное этого дѣленія опять будетъ цѣлая алгебраическая функція степени $m-2$. Изобразивъ это частное чрезъ $f_2(x)$, имѣемъ:

$$f(x)=[x-(t_1+u_1\sqrt{-1})].[x-(t_2+u_2\sqrt{-1})].f_2(x).$$

Для уравненія $f_2(x)=0$ существуетъ также по крайней мѣрѣ одинъ корень $t_3+u_3\sqrt{-1}$; слѣдовательно $f_2(x)$ дѣлится безъ остатка на $x-(t_3+u_3\sqrt{-1})$. Положивъ $\frac{f_2(x)}{x-(t_3+u_3\sqrt{-1})}=f_3(x)$, предъидущее равенство обратится въ слѣдующее:

$$f(x)=[x-(t_1+u_1\sqrt{-1})].[x-(t_2+u_2\sqrt{-1})].[x-(t_3+u_3\sqrt{-1})].f_3(x)$$

Продолжая эти сужденія далѣе, найдемъ, что $f(x)$ есть произведеніе $m-2$ линейныхъ множителей:
$x-(t_1+u_1\sqrt{-1}), x-(t_2+u_2\sqrt{-1}), x-(t_3+u_3\sqrt{-1}), \ldots . x-(t_{m-1}+u_{m-1}\sqrt{-1})$ на трехчленное квадратное выраженіе $f_{m-1}(x)$ вида x^2+px+q. Уравненіе $x^2+px+q=0$ имѣетъ корень вида $t_{m-1}+u_{m-1}\sqrt{-1}$; посему x^2+px+q, дѣлится безъ остатка на $x-(t_{m-1}+u_{m-1}\sqrt{-1})$, и въ частномъ даетъ линейное выраженіе, которое можетъ быть изображено чрезъ $x-(t_m+u_m\sqrt{-1})$; слѣдовательно $x^2+px+q=[t_{m-1}+u_{m-1}\sqrt{-1})].[x-(t_m+u_m\sqrt{-1})]$, и наконецъ, положивъ для сокращенія $\sqrt{-1}=i$, получаемъ:

$$f(x)=[x-(t_1+u_1 i)]\ [x-(t_2+u_2 i)]\ldots[x-(t_{m-1}+u_{m-1} i)]\ [x-(t_m+u_m i)]$$

Количества $t_1, u_1, t_2, u_2 \ldots\ldots t_{m-1}, u_{m-1}, t_m, u_m$ всѣ дѣйствительныя. Чтобы произведеніе m мнимыхъ множителей было нулемъ, по (§ 23, 4) необходимо, чтобъ одинъ изъ этихъ множителей равнялся нулю. Слѣдовательно дѣйствительное или мнимое значеніе x, уничтожающее $f(x)$, необходимо должно быть равно одному изъ выраженій:

(17) $$t_1+u_1 i, t_2+u_2 i \ldots\ldots t_{m-1}+u_{m-1} i, t_m+u_m i.$$

И потому для функціи f(x) *существуютъ* m *выраженій, которыя, будучи въ нее вставлены вмѣсто* x, *обращаютъ ее въ нуль, или другими словами: уравненіе* f(x)=0 *имѣетъ* m *корней вида* $a+b\sqrt{-1}=a+bi$.

Уравненіе $f(x)=0$ не можетъ имѣть болѣе m различныхъ корней; ибо положивъ, что для x существуетъ какое-либо значеніе γ, отличное отъ предъидущихъ, обращающее $f(\gamma)$ въ нуль, это значеніе должно уничтожить также выраженіе тождественное съ $f(\gamma)$, т. е. должно быть:

$$[\gamma-(t_1+u_1 i)]\,[\gamma-(t_2+u_2 i)]\,[\gamma-(t_3+u_3 i.)]....[\gamma-(t_m+u_m i)]=o.$$

Но для этого необходимо, чтобъ γ было равно одному изъ предъидущихъ m корней, что по предположенію невозможно.

И такъ заключаемъ, *что уравненіе степени* m, *съ коеффиціентами вида* $a+b\sqrt{-1}$, *имѣетъ* m *корней, и не можетъ имѣть болѣе.*

Когда два или нѣсколько изъ выраженій (17) будутъ равны между собою, тогда говорятъ, что уравненіе $f(x)=o$ имѣетъ *равные корни.* Первая часть будетъ заключать столько равныхъ линейныхъ множителей, сколько равныхъ корней.

§ **30.** Изъ (§ 21, 2) видно, что степень

$$(a+b\sqrt{-1})^m$$

можно представить въ видѣ $\varphi(b^2)+b\theta(b^2)\sqrt{-1}$, гдѣ $\varphi(b^2)$ и $\theta(b^2)$ суть раціональныя функціи b^2, т. е. заключають только четныя степени количества b, и потому отъ перемѣны b на $-b$, онѣ не измѣняются. Слѣдовательно если

$$(a+b\sqrt{-1})^m=\varphi(b^2)+b.\theta(b^2).\sqrt{-1}\ ,$$

то

$$(a-b\sqrt{-1})^m=\varphi(b^2)-b.\theta(b^2).\sqrt{-1};$$

отсюда видно, что одинакія степени сопряженныхъ мнимыхъ выраженій суть также сопряженныя мнимыя выраженія.

Пусть въ уравненіи

$$f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+.....+a_{m-1}x+a_m=o$$

всѣ коеффиціенты: $a_1, a_2, a_3 ......a_{m-1}, a_m$ дѣйствительные. Вставивъ въ первую часть $t+ui$ (гдѣ $i=\sqrt{-1}$) вмѣсто x, и положивъ

$$(t+ui)^m=\varphi(u^2)+u.\theta(u^2).i,$$

$$(t+u)^{m-1}=\varphi_1(u^2)+u.\theta_1(u^2).i,$$

$$(t+ui)^{m-2}=\varphi_2(u^2)+u.\theta_2(u^2).i,$$

и т. д.

$$(t+ui)^2=\varphi_{m-2}(u^2)+u.\theta_{m-2}(u^2).i,$$

получимъ:

$$f(t+ui)=(t+ui)^m+a_1(t+ui)^{m-1}+\ldots a_{m-1}(t+ui)+a_m$$

$$=\varphi(u^2)+a_1\varphi_1(u^2)+a_2\varphi_2(u^2)+\ldots+a_{m-2}\varphi_{m-2}(u^2)+a_{m-1}t+a_m+$$

$$u[\theta(u^2)+a_1\theta_1(u^2)+a_2\theta_2(u^2)+\ldots\ldots+a_{m-2}\theta_{m-2}(u^2)+a_{m-1}]i.$$

Полиномы:

$$\varphi(u^2)+a_1\varphi_1(u^2)+a_2\varphi_2(u^2)+\ldots\ldots a_{m-2}\varphi_{m-2}(u^2)+a_{m-1}t+a_m$$

и

$$\theta(u^2)+a_1.\theta_1(u^2)+a_2\theta_2(u^2)+\ldots\ldots a_{m-2}\theta_{m-2}(u^2)+a_{m-1}$$

сушь раціональныя функціи u^2; изобразивъ ихъ чрезъ $\xi(u^2)$ и $\psi(u^2)$, имѣемъ:

$$f(t+u)=\xi(u^2)+u.\psi(u^2)i.$$

Такъ какъ функціи $\xi(u^2)$ и $\psi(u^2)$ отъ перемѣны u на $-u$ не измѣняются, то будетъ:

$$f(t-u)=\xi(u^2)-u.\psi(u^2)i.$$

Если $t+ui$, есть корень уравненія $f(x)=o$, то

$$f(t+ui)=\xi(u^2)+u.\psi(u^2).i=o,$$

для чего должно, чтобъ

$$\xi(u^2)=o \text{ и } \varphi(u^2)=o;$$

но въ такомъ случаѣ

$$\xi(u^2)-u.\psi(u^2).i=o,$$

т. е.

$$f(t-ui)=o.$$

Отсюда видно, что $t-ui$ есть корень уравненія $f(x)=o$.

И такъ, *если уравненіе* $f(x)=o$, *котораго всѣ коеффиціенты дѣйствительные, имѣетъ корень* $t+ui$; *то выраженіе* $t-ui$, *сопряженное съ этимъ корнемъ, будетъ также корень уравненія* $f(x)=o$.

Линейные множители, соотвѣтствующіе этимъ двумъ корнямъ, будутъ:

$$x-(t+ui),\ x-(t-ui)$$

или

$$x-t-ui,\ x-t+ui.$$

Отсюда видно, что они также сопряженные. Произведеніе ихъ будетъ трехчленное дѣйствительное выраженіе

$$(x-t)^2+u^2,$$

которое входитъ множителемъ въ первую часть даннаго уравненія.

Изъ всего сказаннаго выводимъ заключенія:

1) *Уравненіе, не имѣющее мнимыхъ коэффиціентовъ, можетъ имѣть только четное число мнимыхъ корней*; ибо каждый такой корень предполагаетъ другой, съ нимъ сопряженный.

2) *Первая часть такого уравненія разлагается на дѣйствительные, линейные или квадратные множители.*

§ **31.** Когда степень уравненія $f(x)=o$, не имѣющаго мнимыхъ коэффиціентовъ, нечетная; тогда квадратные дѣйствительные множители, соотвѣтствующіе каждой парѣ мнимыхъ корней, по перемноженіи между собою, даютъ произведеніе всегда четной степени, и потому первая часть такого уравненія должна необходимо имѣть по крайней мѣрѣ одного множителя линейнаго. Этотъ множитель долженъ быть дѣйствительный; ибо, въ противномъ случаѣ, уравненіе $f(x)=o$ имѣло бы мнимые коэффиціенты. Слѣдовательно: *всякое уравненіе нечетной степени съ дѣйствительными коэффиціентами имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный корень.*

Если же это уравненіе имѣетъ болѣе одного дѣйствительнаго корня, то число ихъ не можетъ быть четное: ибо число мнимыхъ корней должно быть всегда четное.

Изъ предъидущаго § также слѣдуетъ, *что уравненіе четной степени можетъ совсѣмъ не имѣть дѣйствительныхъ корней. Если же оно имѣетъ такіе корни, то число ихъ необходимо должно быть четное.*

ГЛАВА ВТОРАЯ.

О соотношеніяхъ, существующихъ между корнями и коеффиціентами.

Симметричныя функціи корней.

§ 32. Пусть дано уравненіе

$$f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+a_3+x^{m-3}+\ldots . a_{m-1}x+a_m=0$$

съ коеффиціентами вида $a+b\sqrt{-1}$. Означивъ чрезъ $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots . x_m$ его корни, которые (§ 27) также имѣютъ видъ $a+b\sqrt{-1}$, первая часть этого уравненія, по § 29, должна быть тождественная съ произведеніемъ линейныхъ выраженій:

$$x-x_1,\ x-x_2,\ x-x_3 \ldots . x-x_{m-1},\ x-x_m$$

И такъ имѣемъ:

$$x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}\ldots+a_m=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{m-1})(x-x_m)$$

$$=x^m-(x_1+x_2+\ldots x_m)x^{m-1}+(x_1x_2+x_1x_3 \ldots . x_2x_3+\ldots x_{m-1}x_m)x^{m-2}$$

$$-(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots . x_2x_3x_4+\ldots x_{m-2}x_{m-1}x_m)x^{m-3}+\ldots ..$$

$$\ldots\ldots+(-1)^m x_1x_2x_3x_4 \ldots . x_m.$$

Отсюда, по сравненіи коеффиціентовъ, получаемъ:

$$(1)\begin{cases} a_1=-(x_1+x_2+x_3+x_4+\ldots\ldots x_m) \\ a_2=(x_1x_2+x_1x_3+\ldots\ldots x_2x_3+\ldots . x_{m-1}x_m) \\ a_3=-(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots\ldots x_2x_3x_4+\ldots . x_{m-2}x_{m-1}x_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m-1}=(-1)^{m-1}(x_1x_2x_3\ldots x_{m-1}+x_1x_2x_3\ldots x_{m-2}x_m+\ldots+x_1x_3x_4\ldots x_m) \\ a_m=(-1)^m(x_1x_2x_3\ldots . x_m). \end{cases}$$

Эти уравненія могутъ быть также выведены изъ уравненій (28) § 15. Положивъ въ нихъ $x=o$, и замѣтивъ равенства (38), § 18, получимъ:

$$f(o)=a_m=C_m(-x_1,-x_2,\ldots-x_m)=(-1)^m x_1 x_2\ldots x_m$$

$$f'(o)=a_{m-1}=C_{m-1}(-x_1,-x_2,\ldots-x_m)=(-1)^{m-1}(x_1 x_2 x_3\ldots x_{m-1}$$
$$+x_1 x_2\ldots x_{m-2} x_m+\ldots+x_2 x_3\ldots x_{m-1} x_m)$$

и т. д.

$$\frac{f^{m-2}(o)}{1.2.3\ldots(m-2}=a_2=C_2(-x_1,-x_2,\ldots-x_m)=(x_1x_2+x_1x_3+\ldots x_2x_3$$
$$+\ldots x_{m-1}x_m)$$

$$\frac{f^{m-1}(o)}{1.2.3\ldots(m-1)}=a_1=C_1(-x_1,-x_2\ldots-x_m)=-(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_m).$$

Уравненія (1) выражаютъ слѣдующую теорему: *Въ опредѣленномъ алгебраическомъ уравненіи, освобожденномъ отъ коеффиціента перваго члена, коеффиціенты членовъ: втораго, третьяго, четвертаго и т. д. до послѣдняго, взятые попеременно, то съ +, то съ —, равны соотвѣтственно: 1) суммѣ всѣхъ корней, 2) суммѣ произведеній этихъ корней, взятыхъ по два, 3) суммѣ произведеній корней, взятыхъ по три, и т. д.; наконецъ произведенію всѣхъ корней.*

§ 33. Замѣтимъ, что отъ перемѣщенія буквъ: $x_1,x_2\ldots x_m$ всѣми возможными образами, вторыя части уравненій (1) не измѣняютъ ни вида, ни значенія. Это свойство имѣютъ безчисленное множество функцій, называемыхъ, по свойству, ихъ характеризующему, *неизмѣняющимися* (invariables) или *симметричными*. Онѣ раздѣляются на *раціональныя* и *ирраціональныя*. Первыя играютъ весьма важную роль въ Математическомъ Анализѣ, и могутъ быть всегда выражены раціональными функціями коеффиціентовъ даннаго уравненія.

Ежели

$$U=F(x_1,x_2,\ldots x_m)$$

есть цѣлая раціональная функція корней: $x_1,x_2,x_3\ldots x_m$, то, по § 3, она представляется суммою членовъ вида:

$$(2)\qquad Ax_\lambda^{p'}x_\mu^{p''}x_\nu^{p'''}\ldots x_\tau^{p^{(n)}},$$

гдѣ показатели: $p',p''\ldots p^{(n)}$ суть какія-либо цѣлыя положительныя числа, а значки: $\lambda,\mu,\nu,\ldots\tau$ изображаютъ различные члены ряда: $1,2,3,\ldots m$. Чтобы U была симметричная функція, т. е., чтобы она не измѣняла своего значенія и вида отъ всѣхъ возможныхъ перемѣщеній буквъ:

$x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$, эти буквы должны въ нее входить одинакимъ образомъ. И потому, если выраженіе (2) будетъ одинъ изъ ея членовъ, то она должна также содержать всѣ члены, которые получатся, замѣняя порядокъ значковъ: $\lambda, \mu, \nu, \ldots \tau$, всѣми возможными переложеніями изъ m значковъ $1, 2, 3, \ldots m$ по n. Означимъ сумму этихъ членовъ чрезъ $\Sigma(Ax_1^{p'} x_2^{p''} \ldots x_n^{p^{(n)}})$, или чрезъ $A\Sigma(x_1^{p'} x_2^{p''} x_3^{p'''} \ldots x_n^{p^{(n)}})$, потому что A есть общій множитель всѣхъ членовъ. Прилагая эти сужденія къ каждому изъ членовъ, отличающихся по крайней мѣрѣ однимъ показателемъ или числомъ значковъ: $1, 2, \ldots n$, заключаемъ, что всякая цѣлая раціональная функція представляется въ видѣ

$$(3)\ A + A_1 \Sigma(x_1^{p'} x_2^{p''} x_3^{p'''} \ldots x_n^{p^{(n)}}) + A_2 \Sigma(x_1^{q'} x_2^{q''} x_3^{q'''} \ldots x_n^{q^{(n')}}),$$

гдѣ $A, A_1, A_2, \ldots$ суть количества независимыя отъ $x_1, x_2, \ldots x_m$.

Дробная раціональная функція по § 3 есть частное двухъ цѣлыхъ функцій; чтобы эта дробь была симметричная относительно $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$, ея члены должны быть симметричные; посему они должны имѣть видъ (3).

§ 34. Покажемъ теперь, что всякая симметричная раціональная функція корней: $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ уравненія $f(x) = o$ выражается раціональною функціею коеффиціентовъ даннаго уравненія. Для этого мы воспользуемся слѣдующими двумя теоремами, данными Коши въ его *Exercices de Mathematiques*.

I. Пусть U будетъ цѣлая симметричная функція корней: $x_1, x_2, \ldots x_m$ уравненія $f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots a_m = o$. Допустимъ, что она способна принимать видъ полинома

$$(4)\qquad U = Ax_1^n + Bx_1^{n-1} Cx_1^{n-2} + \ldots Lx_1 + M,$$

въ которомъ $A, B, C, \ldots L, M$ суть цѣлыя раціональныя функціи коеффиціентовъ $a_1, a_2, \ldots a_m$; и положимъ на первый разъ, что всѣ корни: $x_1, x_2, \ldots x_m$ неравные.

Такъ какъ значеніе U не должно измѣняться отъ замѣненія x_1 корнями: $x_1, x_2, \ldots x_m$, то уравненію

$$(5)\qquad Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots Lx + M = U$$

будутъ удовлетворять всѣ корни: $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$, и потому степень этого уравненія не должна быть ниже степени даннаго уравненія. Если раздѣлимъ первую часть уравненія (5) на $f(x)$, то въ остаткѣ получимъ цѣлую функцію x, степени не выше $m-1$. Изобразивъ этотъ остатокъ чрезъ

$$r_1^{m-1} + r_2 x^{m-2} r_3 x^{m-3} + \ldots r_{m-1} x + r_m,$$

а чрезъ Q частное, имѣемъ равенство

(6) $$U=Q.f(x)+(r_1x^{m-1}+r_2x^{m-2}+r_3x^{m-3}\ldots.r_{m-1}x+r_m).$$

Полагая $x=x_1, x_2, \ldots . x_m$, функція $f(x)$ исчезаетъ; посему всѣ эти корни должны удовлетворять уравненію

(7) $$U=r_1x^{m-1}+r_2x^{m-2}+\ldots.r_{m-1}x+r_m.$$

Но это невозможно по § 29, если ур. (7) не есть тожественное; и такъ необходимо, чтобъ

$$r_1=o, r_2=o, \ldots r_{m-1}=o,\ r_m=U.$$

Отсюда заключаемъ, что отъ раздѣленія полинома (4) на $f(x_1)$, въ остаткѣ получимъ раціональную функцію коэффиціентовъ, независимую отъ x_1, которая и будетъ искомое значеніе симметричной функціи U.

Остается теперь показать, какимъ образомъ всякую раціональную функцію можно привести къ виду (4)

Это легко сдѣлать для уравненія второй степени

(8) $$x^2+a_1x+a_2=o.$$

Пусть U будетъ симметричная функція его корней, означаемыхъ чрезъ x_1 и x_2. По § 33 имѣемъ $x_1+x_2=-a_1$; выведя отсюда значеніе x_2, внеся его въ U, и расположивъ результатъ по степенямъ x_1, получимъ полиномъ вида (4).

Замѣтимъ, что этотъ результатъ по § 28 есть не что иное, какъ остатокъ дѣленія функціи U, расположенной по x_2, на линейное выраженіе $x_2-(-a_1-x_1)$. Слѣдовательно, чтобъ получить значеніе симметричной функціи U двухъ корней уравненія (8), должно: 1) полиномъ U, расположенный по буквѣ x_2, раздѣлить на $x_2-(-a_1-x_1)=x_2+x_1+a_1$; 2) потомъ остатокъ этого дѣленія, расположенный по буквѣ x_1, раздѣлить на триномъ $x_1^2+a_1x_1+a_2$: этотъ новый остатокъ, независимый отъ x_1, будетъ искомое значеніе U.

Пусть ещё требуется опредѣлить значеніе цѣлой симметричной функціи U для уравненія 3-й степени:

(9) $$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=o.$$

Означивъ корни этого ур. чрезъ x_1, x_2, x_3, и раздѣливъ его первую часть на $x-x_1$, въ остаткѣ получимъ

(10) $$x_1^3+a_1x_1^2+a_2x_1+a_3,$$

а въ частномъ

(11) $$x^2+(x_1+a_1)x+(x_1^2+a_1x_1+a_2).$$

Послѣднее имѣетъ только 2 корня: x_2 и x_3; посему функцію U, разсматриваемую относительно этихъ корней, по сказанному предъ этимъ, легко выразить функціею коэффиціентовъ: (x_1+a_1) и $(x_1^2+a_1x_1+a_2)$;

шакъ, чшо она будешъ содержашь шолько x_1 и коеффиціеншы даннаго уравненія. Для досшиженія эшого, расположимъ функцію U по сшепенямъ x_3, и раздѣлимъ ее на линейное выраженіе

$$x_3-(-x_1-x_2-a_1);$$

осшашокъ будешъ содержашь x_1, x_2, a_1. Расположивъ его по x_2, и раздѣливъ на

$$x_2^2+(x_1+a_1)x_2+(x_1^2+a_1x_1+a_2),$$

получимъ вшорой осшашокъ, содержащій шолько x_1 и коеффиціеншы a_1, a_2, и пошому имѣющій значеніе полинома (4); наконецъ по раздѣленіи эшого новаго осшашка на

$$x^3+a_1x_1^2+a_2x_1+a_3,$$

найдемъ осшашокъ, независимый ошъ x_1, коморый и будешъ искомое значеніе U. И шакъ, чшобъ найши значеніе симмешричной функціи U корней ур. 3-й сшепени (9), должно поспупашь слѣдующимъ образомъ:

1) Первую часшь даннаго уравненія (9) должно раздѣлишь на $x-x_1$, чрезъ чшо получишся осшашокъ (10) и часшное (11).

2) Расположивъ данную симмешричную функцію U по буквѣ x_3, дѣлимъ U на выраженіе

$$x_3-(-x_1-x_2-a_1)=x_3+x_1+x_2+a_1;$$

осшашокъ эшого дѣленія не будешъ заключашь x_3

3) Расположивъ эшошъ осшашокъ по буквѣ x_2, дѣлимъ его на $x_2^2+(x_1+a_1)x_2+(x_1^2+a_1x_1+a_2)$; новый осшашокъ будешъ заключашь шолько x_1 и коеффиціеншы даннаго уравненія.

4) Наконецъ, раздѣливъ послѣдній осшашокъ на полиномъ (10), въ осшашкѣ получимъ значеніе U.

Возмемъ еще уравненіе 4-й сшепени

$$(12) \qquad x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=o,$$

и означимъ корни его чрезъ x_1, x_2, x_3, x_4.

Раздѣливъ первую его часшь на $x-x_1$, часшное и осшашокъ будушъ:

$$(13) \quad x^3+(x_1+a_1)x^2+(x_1^2+a_1x_1+a_2)x+x_1^3+a_1x_1^2+a_1x_1+a_3,$$

$$(14) \quad x_1^4+a_1x_1^3+a_2x_1^2+a_3x_1+a_4.$$

Такъ какъ функція

$$x^3+(x_1+a_1)x^2+(x_1^2+a_1x_1+a_2)x+(x_1^3+a_1x_1^2+a_2x+a_3)$$

имѣетъ только три корня: x_2, x_3, x_4, то U легко опредѣлить по предъидущему правилу, разсматривая ее какъ функцію этихъ трехъ корней.

1) Расположивъ ее по степенямъ буквы x_4, дѣлимъ ее на линейное выраженіе

$$x_4-(x_1-x_2-x_3-a_1)=x_4+x_1+x_2+x_3+a_1.$$

2) Остатокъ этого дѣленія, расположенный по степенямъ буквы x_3, дѣлимъ на

$$x_3^2+(x_1+x_2+a_1)x_3+x_1^2+x_1x_2+x_2^2+a_1(x_1+x_2)+a_2.$$

(Это выраженіе есть частное отъ раздѣленія $\frac{f(x)}{x-x_1}$ на $x-x_2$, гдѣ x замѣнено чрезъ x_3).

3) Новый остатокъ располагаемъ по буквѣ x_2, и дѣлимъ на

$$x_2^3+(x_1+a_1)x_2^2+(x_1^2+a_1x_1+a_2)x_2+(x_1^3+a_1x_1^2+a_2x_1+a_3);$$

это дѣленіе даетъ третій остатокъ, заключающій только одинъ корень x_1; слѣдовательно, имѣющій значеніе полинома (4). Наконецъ по раздѣленіи послѣдняго на

$$x_1^4+a_1x_1^3+a_2x_1^2+a_3x_1+a_4,$$

получимъ искомое значеніе U.

Подобнымъ образомъ мы въ состояніи будемъ опредѣлить симметричныя функціи корней уравненій 5-й, 6-й...и т. д. вообще какой бы то ни было степени. И такъ имѣемъ слѣдующую теорему:

II. Пусть будетъ дано уравненіе

$$f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+a_3x^{m-3}+\dots\dots+a_{m-1}x+a_m=0$$

и видъ цѣлой симметричной функціи U корней: $x_1, x_2, x_3, \dots x_m$ этого уравненія; то U можно будетъ выразить раціональною функціею коэффиціентовъ $a_1, a_2, a_3 \dots a_m$, поступая слѣдующимъ образомъ:

1) Первую часть даннаго уравненія $f(x)$ дѣлимъ на $x-x_1$, частное будетъ

$$x^{m-1}+(x_1+a_1)x^{m-1}+(x_1^2+a_1x_1+a_2)x^{m-2}+\dots\dots\dots+(x_1^{m-1}+a_1x^{m-2}+a_1x_1^{m-3}$$
$$+\dots a_{m-2}x_1+a_{m-1})=Q_1,$$

а остатокъ

$$x_1^m+a_1x_1^{m-1}+a_2x_1^{m-2}+\ldots\ldots+a_{m-1}x_1+a_m=R_1.$$

2) Раздѣливъ Q_2 на $x-x_2$, находимъ частное

$$x^{m-2}+(x_1+x_2+a_1)x^{m-3}+[x_2^2+(x_1+a_1)x_2+x_1^2+a_1x_1+a_2]x^{m-4}+\ldots$$
$$+x_2^{m-2}+(x_1+a_1)x_2^{m-3}+\ldots a_{m-2}=Q_2$$

и остатокъ $x_2^{m-1}+(x_1+a_1)x_2^{m-2}+(x_1^2+a_1x_1+a_2)x_2^{m-3}+\ldots\ldots(x_2^{m-1}+$
$a_1x^{m-2}+\ldots\ldots+a_{m-2}x_1+a_{m-1})\ldots=R_1.$

3) Q_2 дѣлимъ на $x-x_3$, получаемъ частное

$$x^{m-3}+(x_1+x_2+x_3+a_1)x^{m-4}+[x_3^2+(x_1+x_2+a_1)x_3+x_1^2+(x_1+a_1)x_2+a_2x_2+$$
$$a_2]x^{m-1}+\ldots=Q_3$$

и остатокъ

$$x_3^{m-4}+(x_1+x_2+a_1)x_3^{m-5}+[x_2^2+(x_1+a_1)x_2+x_1^2+a_1x_1+a_2]x_3^{m-6}+\ldots=R_3.$$

Продолжая такимъ образомъ далѣе, доходимъ до трехъ послѣднихъ остатковъ:

$$x_{m-2}^3+(x_1+x_2+x+\ldots x_{m-3}+a_1)x_{m-2}^2+\ldots\ldots\ldots=R_{m-2}$$

$$x^2_{m-1}+(x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots+x_{m-2}+a_1)x_{m-1}+x^2_{m-2}+\ldots\ldots x_2^2+x_1^2+$$

$$x_{m-2}x_1+x_{m-3}x_1+\ldots\ldots+x_2x_1+a_1(x_{m-2}+x_{m-3}+\ldots\ldots+x_2+x_2)+a_1=R_{m-1}$$

$$x_m+x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{m-2}+x_{m-1}+a_1=R_m.$$

Найдя остатки $R_m,R_{m-1},\ldots R_2,R_3$, располагаемъ U по степенямъ x_m, и дѣлимъ на R_m; полученный остатокъ, не содержащій уже x_m, располагаемъ по степенямъ x_{m-1}, и дѣлимъ на R_{m-1}; остатокъ этого дѣленія, не заключающій x_{m-1}, дѣлимъ на R_{m-2}, чрезъ что получимъ остатокъ, независимый отъ x_{m-2}. Продолжая поступать такимъ образомъ далѣе, доходимъ наконецъ до остатка, содержащаго только корень x_1 и коэффиціенты: $a_1,a_2,\ldots a_m$. Этотъ остатокъ есть не что иное какъ полиномъ (4); раздѣливъ его на R_1, по теоремѣ I, получимъ въ остаткѣ искомое значеніе U.

§ 35. Мы полагали, что корни уравненія неравные; но выведенныя нами теоремы имѣютъ мѣсто и въ случаѣ равныхъ корней: ибо U есть раціональная функція относительно коэффиціентовъ $a_1,a_2,\ldots a_m$, и потому не измѣнитъ своего вида и сохранитъ конечное значеніе, если коеффиціенты возьмутся такіе, что нѣкоторые изъ корней $x_1, x_2, .. x_m$ сдѣлаются равными.

§ **36.** Приложимъ теперь показанныя нами правила вычисленія симметричныхъ функцій къ примѣрамъ:

Примѣръ I.

Предложимъ себѣ найти значеніе симметричной функціи:

$$U = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2$$

для уравненія $x^3+2x+4=o$.

По § 37 имѣемъ:

$$Q_1 = x^2 + x_1x + (x_1^2+2) \qquad R_1 = x_1^3 + 2x_1^2 + 4$$

$$Q_2 = x + (x_1 + x_2) \qquad R_2 = x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 + 2$$

$$Q_3 = 1 \qquad R_3 = R_m = x_3 + x_1 + x_2.$$

Остатокъ дѣленія U на R_3 можно получить прямо, внеся (x_1+x_2) въ U вмѣсто x_3; результатъ этой вставки будетъ

$$U = x_1^2x_2 - (x_1^2+x_2^2)(x_1+x_2) + x_1x_2^2 + (x_1+x_2)(x_1+x_2)^2 = 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2.$$

По раздѣленіи $3x_1^2x_2+3x_1x_2^2$ на $R_2 = x_2^2+x_1x_2+x_1^2+2$, получимъ остатокъ

$$U = -(3x_1^3 + 2x_1),$$

который, будучи раздѣленъ на $R_1 = x_1^3+2x_1+4$, даетъ въ остаткѣ $+12$. Слѣдовательно

$$U = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 = +12.$$

Примѣръ II.

Возмемъ $U = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$ цѣлую простую симметричную функцію 3-й степени, относительно корней x_1, x_2, x_3, x_4 уравненія 3-й степени

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = o.$$

Для этого уравненія, по § 37, имѣемъ:

$R_4=R_m=x_4+x_3+x_2+x_1+a_1$

$R_3=x_3^2+(x_1+x_2+a_1)x_3+x_2^2+x_2(x_1+a_1)+x_1^2+a_1x_1+a_2$

$R_2=x_2^3+(x_1+a_1)x_2^2+(x_1^2+a_1x_1+a_2)x_2+(x_1^3+a_1x_1^2+a_1x_1+a_3)$

$R_1=x_1^4+a_1x_1^3+a_1x_1^2+a_3x_1+a_4.$

Расположивъ функцію U по степенямъ x_4, и раздѣливъ ее на R_4, получимъ остатокъ

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3-(x_1+x_2+x_3+a_1)^3=-3x_3^2(x_2+x_1+a_1)-3x_3(x_2+x_1+a_1)^2$$
$$-3x_2^2(x_1+a_1)-3x_2(x_1+a_1)^2-3x_1^2a_1-3x_1a_1^2-a_1^3.$$

По раздѣленіи этого остатка на R_3, найдемъ второй остатокъ

$$3x_2^3+3(x_1+a_1)x_2^2+4(x_1^2+a_1x_1+a_2)x_2+3x_1^3+3a_1x_1^2+3a_2x_1+3a_1a_2-a_1^3.$$

Раздѣливъ послѣднее выраженіе на R_1, получимъ въ остаткѣ:

$$-a_1^3+3a_1a_2-3a_3,$$

выраженіе, не содержащее корней: x_1, x_2, $x_3,\dots x_m$, и потому оно есть искомое значеніе U.

Мы видимъ, что здѣсь дѣйствіе прекращается, не доходя до полинома R_1. Это бываетъ во многихъ случаяхъ; вотъ еще такого рода примѣръ:

Примѣръ III.

Значеніе симметричной функціи

$$U=x_1^2+x_2^2+x_3^2+\dots\dots+x_{m-1}^2+x_m^2$$

m корней: x_1, x_2, x_3, $x_4\dots\dots x_m$ уравненія $f(x)=o$ находится слѣдующимъ образомъ:

Остатокъ дѣленія U на R_m получится, когда въ U вмѣсто x_m внесемъ $-(a_1+x_1+x_2+\dots\dots+x_{m-1})$, онъ будетъ

$$U=x_1^2+x_2^2+x_3^2+\dots\dots x_{m-1}^2+(a_1+x_1+x_2+\dots\dots+x_{m-1})^2$$

или

$$U=a_1^2+2[(x_1+x_2+x_3+\dots\dots x_{m-1})a_1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+\dots\dots x_{m-2}^2+x_{m-1}^2+x_1x_2$$
$$+x_1x_3+\dots x_2x_3+x_2x_4+\dots\dots+x_{m-2}x_{m-1}]$$

Въ послѣднемъ выраженіи часть, заключенная въ скобкахъ, [ ] есть не что иное какъ $R_{m-1}-a_2$, (см. § 34); посему $U=a_1^2+2(R_{m-1}-a_2)$.

По раздѣленіи этого выраженія U на R_{m-1}, получаемъ въ остаткѣ $a_1^2-2a_2$; слѣдовательно

$$U=a_1^2-2a_2.$$

Примѣръ IV.

Взявши всѣ возможныя разности корней: x_1, x_2, x_3,......x_m по два, возвысимъ ихъ въ квадратъ. Ясно, что произведеніе этихъ квадратовъ будетъ симметричная функція, и легко опредѣлится по изложеннымъ правиламъ.

На первый разъ опредѣлимъ произведеніе квадратовъ разностей корней: x_1, x_2 уравненія $x^2+a_1x+a_2=o$.

И такъ пусть

$$U=(x_1-x_2)^2,$$

чтобы получить значеніе U, независимое отъ x_2 или остатокъ отъ раздѣленія U на $x_2-(-x_1-a_1)$ стоитъ только внести $(-x_1-a_1)$ въ U вмѣсто x_2. По этому имѣемъ:

$$U=(x_1+x_1+a_1)^2=(2x_1+a_1)^2=4x_1^2+4x_1a_1+a_1^2=a_1^2+4(x_1^2+x_1a_1).$$

Но $x_1^2+a_1x_1=-a_2$; слѣдовательно

$$(15)\qquad U=a_1^2-4a_2.$$

Пусть еще

$$(16)\qquad U=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2,$$

гдѣ x_1, x_2, x_3 означаютъ корни уравненія 3-й степени

$$(17)\qquad x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=o.$$

По раздѣленіи 1-й части этого уравненія на $x-x_1$, будемъ имѣть

$$(x-x_2)(x-x_3)=x^2+(x_1+a_1)x+x_1^2+a_1x_1+a_2;$$

посему

$$(18)\qquad (x_1-x_2)(x_1-x_3)=3x_1^2+2a_1x_1+a_2.$$

Такъ какъ x_2 и x_3 суть корни функціи (17), то симметричная ихъ функція $(x_2-x_3)^2$ опредѣляется по формулѣ (15), помощію коеффиціентовъ: (x_1+a_1) и $(x_1^2+a_1x_1+a_2)$, и будетъ

$$(19)\qquad (x_2-x_3)^2=(x_1+a_1)^2-4(x_1^2+a_1x_1+a_2)=a_1^2-4a_2-2a_1x_1-3x_1^2$$

Обративъ вниманіе на уравненія (16), (18) и (19), находимъ

$$U=(3x_1^2+2a_1x_1+a_2)^2(a_1^2-4a_2-2a_1x_1-3x_1^2).$$

Раздѣливъ вторую часть этого уравненія на

$$x_1^3+a_1x_1^2+a_2x_1+a_3,$$

найдемъ въ остаткѣ значеніе U, независимое отъ x_1. Но этого легко достигнуть слѣдующимъ путемъ:

Такъ какъ $x_1^3+a_1x_1^2+a_2x_1+a_3=o$, то

$$(3x_1^2+2a_1x_1+a_2)^2=(a_1^2-3a_2)x_1^2+(a_1a_2-9a_3)x_1+a_1^2-3a_1a_3$$

и

$$U=[(a_1^2-3a_2)x_1^2+(a_1a_2-9a_3)x_1+a_1^2-3a_1a_3)](a_1^2-4a_2-2a_1x_1-3x_1^2).$$

Произведя показанное умноженіе, замѣнивъ потомъ x_1^3 и x_1^4 соотвѣтственно выраженіями:

$$-a_1x_1^2-a_2x_1-a_3,$$

$$-a_1x_1^3-a_2x_1^2-a_3x_2=(a_1^2-a_2)x_1^2+(a_1a_2-a_3)x_1+a_1a_3,$$

найдемъ:

$$U=a_1^2a_2^2-4a_1^3a_3-4a_2^3-27a_3^2+18a_1a_2a_3.$$

Когда $a_1=o$, тогда $U=-4a_2^3-27a_3^2$.

Подобнымъ образомъ опредѣлится значеніе симметричной функціи

$$U=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2\ldots(x_1-x_m)^2(x_2-x_3)^2\ldots(x_2-x_m)^2\ldots(x_{m-1}-x_m)^2,$$

выражающей произведеніе квадратовъ разностей корней: $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ уравненія степени m.

Замѣтимъ, что опредѣливъ произведеніе квадратовъ разностей корней $x_1, x_2\ldots x_m$ уравненія степени $(m-1)$, легко получить значеніе U, содержащее только x_1.

Пусть данное уравненіе будетъ $f(x)=o$; раздѣливъ $f(x)$ на $x-x_1$, получимъ:

$$\frac{f(x)}{x-x_1}=x^{m-1}+(x_1+a_1)+a_1x^{m-2}+(x_1^2+x_1a_1+a_2)x^{m-3}+\ldots+x_1{}^{m-1}+a_1x^{m-2}$$
$$+\ldots a_{m-2}x_1+a_{m-1}=o$$

Корни этого уравненія суть x_2, x_3, x_4,.....x_m; посему имѣемъ:

$$(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)...(x-x_m)=x^{m-1}+(x_1+a_1)x^{m-2}+(x_1^2+x_1a_1+a_2)x^{m-3}$$
$$+.....+x_1^{m-1}+a_1x_1^{m-2}+x^{m-3}+.....+a_{m-2}x_1+a_{m-1}=o.$$

Замѣнивъ x корнемъ x_1, получимъ:

$$(x_1-x_2)(x_1-x_2)(x_1-x_4)....(x_1-x_m)=mx_1^{m-1}+(m-1)a_1x_1^{m-2}$$
$$+(m-2)a_2x_1^{m-3}+.....a_{m-1}.$$

Если мы въ состояніи выразить симметричную функцію

$$V=(x_2-x_3)^2......(x_{m-1}-x_m)^2$$

корней уравненія $\frac{f(x)}{x-x_1}=o$ функціею коеффиціентовъ:

$$(x_1+a_1),\ (x_1^2+a_1x_1+a_2),.....(x_1^{m-1}+a_1x_1^{m-2}+a_2x^{m-3}+......a_{m-1});$$

то значеніе U, содержащее только x_1 и коеффиціенты даннаго уравненія, будетъ

$$U=V.[x_1^{m-1}+(m-1)a_1x_1^{m-2}+(m-2)a_2x_1^{m-3}+.....a_{m-1}]=V.f'(x_1).$$

Раздѣливъ ее на

$$x^m+a_1x^{m-1}+a_2x_1^{m-2}+....+a_{m-1}x_1+a_m$$

по теоремѣ 1, получимъ въ остаткѣ значеніе U, независимое отъ x_1.

Когда уравненіе имѣетъ равные корни, тогда нѣкоторыя изъ разностей будутъ нулями; слѣдовательно симметричная функція U будетъ также нулемъ. Во всякомъ другомъ случаѣ U будетъ цѣлая функція коеффиціентовъ: a_1, a_2, a_3,.....a_m. По этому, когда всѣ коеффиціенты дѣйствительные; тогда U будетъ также имѣть дѣйствительное значеніе, будутъ ли корни даннаго уравненія дѣйствительные или мнимые.

Въ послѣднемъ случаѣ знакъ U будетъ зависѣть отъ числа паръ мнимыхъ корней. Это легко доказать, разсматривая видъ квадратовъ разностей мнимыхъ корней. Пусть данное уравненіе съ дѣйствительными коеффиціентами имѣетъ пару мнимыхъ корней:

$$t+ui,\quad t-ui.$$

Разность ихъ будетъ $\pm 2ui$, а квадратъ этой разности будетъ дѣйствительное количество $-4u^2$.

Разности между каждымъ изъ этихъ корней и какимъ-либо дѣйствительнымъ x_λ будутъ мнимыя сопряженныя выраженія: $\pm(x-t-ui)$ и $\pm(x_\lambda-t+ui)$; но произведеніе ихъ квадратовъ

$$(x_\lambda-t-ui)^2(x_\lambda-t+ui)^2=[(x_\lambda-t)^2+u^2]^2$$

всегда дѣйствительное.

Наконецъ для квадрата разности двухъ непарныхъ мнимыхъ корней:

$$t+ui,\ t'+u'i,$$

находимъ

$$[(t+ui)-(t'+u'i)]^2=[(t-t')+(u-u').i]^2;$$

но U будетъ содержать также квадратъ

$$[(t-ui)-(t'-u'i)]^2=[(t-t')-(u-u')i]^2,$$

и произведеніе этихъ двухъ квадратовъ будетъ дѣйствительное положительное количество

$$[(t-t')+(u-u').i]^2[(t-t')-(u-u').i]^2=[(t-t')^2+(u-u')^2].$$

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что U будетъ произведеніе дѣйствительныхъ положительныхъ количествъ на дѣйствительныя отрицательныя, которыхъ число равно числу паръ мнимыхъ корней, и потому, когда это число нечетное, тогда значеніе U отрицательное; во всякомъ другомъ случаѣ оно положительное.

Когда коеффиціенты a_1, a_2,.....a_m суть цѣлыя числа, и данное уравненіе не имѣетъ корней равныхъ, тогда значеніе U будетъ также цѣлое число; означивъ его чрезъ N^2, и взявши N съ знакомъ $+$, всегда будемъ имѣть

$$N\overline{\overline{>}}1.$$

§ 37. Предложенный способъ вычисленія симметричныхъ функцій не всегда бываетъ удобенъ въ приложеніи; посему употребляютъ другой, который состоитъ въ томъ, чтобы всякую раціональную симметричную функцію выразить раціональною функціею симметричныхъ функцій вида

$$(19)\qquad \Sigma(x_1^p)=x_1^p+x_2^p+x_3^p+......+x_{m-1}^p+x_m^p,$$

которыя очень просто опредѣляются помощію коеффиціентовъ даннаго уравненія.

Функція вида (19) называется *простою симметричною функціею*, и имѣетъ свойство выражаться цѣлою линейною функціею такихъ же функцій степеней низшихъ. Это легко доказать изъ разсматриванія выраженія

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x-x_1}+\frac{f(x)}{x-x_2}+\frac{f(x)}{x-x_3}+\dots\dots+\frac{f(x)}{x-x_m}.$$

Раскрывши первый членъ, по § 28, найдемъ

$$\frac{f(x)}{x-x_1}$$

$$=\begin{array}{r|r|r|r|r|r}
x^{m-1}+x_1 & x^{m-2}+\ \ x_1^2 & x^{m-3}+\ \ x_1^3 & x^{m-4}+\ \ x_1^4 & x^{m-5}+\dots x_1^{m-2} & x+\ \ x_1^{m-1} \\
+a_1 & +a_1x_1 & +a_1x_1^2 & +a_1x_1^3 & +a_1x_1^{m-3} & +a_1x_1^{m-2} \\
 & +\ \ a_2 & +a_2x_1 & +a_2x_1^2 & +a_2x_1^{m-4} & +a_2x_1^{m-3} \\
 & & +\ \ a_3 & +a_3x_1 & \dots\dots\dots\dots & +a_4x_1^{m-4} \\
 & & & +\ \ a_4 & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
 & & & & +a_{m-3}x_1 & \dots\dots\dots\dots \\
 & & & & +a_{m-2} & +a_{m-3}x_1 \\
 & & & & & +a_{m-2}x_1 \\
 & & & & & +a_{m-1}
\end{array}$$

Замѣнивши корень x_1 послѣдовательно корнями $x_2, x_3\dots x_m$, получимъ разложенія членовъ: $\frac{f(x)}{x-x_2}, \frac{f(x)}{x-x_3},\dots\dots\frac{f(x)}{x-x_m}$.

Сложивъ эти разложенія, и для сокращенія, положивъ:

$$x_1+x_2+x_3+\dots\dots+x_m=S_1$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\dots\dots+x_m^2=S_2$$

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+\dots\dots+x_m^3=S_3$$

и т. д.

$$x_1^{m-1}+x_2^{m-1}+{}_3^{m-1}+\dots\dots+x_m^{m-1}=S_{m-1},$$

имѣемъ:

$$f'(x)=mx^{m-1}+(S_1+ma_1)x^{m-2}+(S_2+a_1S_1+ma_2)x^{m-3}+$$
$$(S_3+a_1S_2+a_2S_1+ma_3)x^{m-4}+\dots(S_{m-1}+a_1S_{m-2}+a_2S_{m-3}+\dots\dots ma_{m-1}).$$

Вторая часть этого равенства должна быть тожественною съ выраженіемъ

$$mx^{m-1}+(m-1)a_1x^{m-2}+(m-2)a_2x^{m-3}+(m-3)a_3x^{m-4}+\ldots a_{m-1};$$

посему должно быть:

$$(20)\left\{\begin{array}{l} S_1+ma_1=(m-1)a_1 \\ S_2+a_1S_1+ma_2=(m-2)a_2 \\ S_3+a_1S_2+a_2S_1+ma_3=(m-3)a_3 \\ S_4+a_1S_3+a_2S_2+a_3S_1+ma_4=(m-4)a_4 \end{array}\right.$$

и т. д.

$$S_{m-1}+a_1S_{m-2}+a_2S_{m-3}+a_3S_{m-4}+\ldots a_{m-2}S_1+ma_{m-1}=(m-1)a_{m-1}.$$

Эти уравненія ограничиваются функціею S_{m-1}. Чтобы вывести уравненія, содержащія простыя симметричныя функціи степеней m, $m+1$, $m+2,\ldots m+n$, вставимъ въ первую часть даннаго уравненія, вмѣсто x, послѣдовательно корни: x_1, x_2, $x_3\ldots x_m$. Отъ того выйдутъ уравненія:

$$x_1^m+a_1x_1^{m-1}+a_2x_1^{m-2}+a_3x_1^{m-3}+\ldots+a_{m-1}x_1+a_m=0$$

$$x_2^m+a_1x_2^{m-1}+a_2x_2^{m-2}+a_3x_2^{m-3}+\ldots+a_{m-1}x_2+a_m=0$$

$$x_3^m+a_1x_3^{m-1}+a_2x_3^{m-2}+a_3x_3^{m-3}+\ldots+a_{m-1}x_3+a_m=0$$

и т. д.

$$x_m^m+a_1x_m^{m-1}+a_2x_m^{m-2}+a_3x_m^{m-3}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=0,$$

которыя, будучи помножены соотвѣтственно на x_1^n, x_2^n, $x_3^n,\ldots\ldots x_m^n$, даютъ слѣдующія:

$$x_1^{m+n}+a_1x_1^{m+n-1}+a_2x_1^{m+n-2}+a_3x_1^{m+n-3}+\ldots\ldots+a_{m-1}x_1^{n+1}+a_mx_1^n=0,$$

$$x_2^{m+n}+a_1x_2^{m+n-1}+a_2x_2^{m+n-2}+a_3x_2^{m+n-3}+\ldots\ldots+a_{m-1}x_1^{n+1}+a_mx_2^n=0,$$

и т. д.

$$x_m^{m+n}+a_1x_m^{m+n-1}+a_2x_m^{m+n-2}+a_3x_m^{m+n-3}+\ldots\ldots+a_{m-1}x_m^{n+1}+a_mx_m^n.$$

Сложивъ эти уравненія, получимъ

$$(21)\ S_{m+n}+a_1S_{m+n-1}+a_2S_{m+n-2}+a_3S_{m+n-3}+\ldots\ldots+a_{m-1}S_{n+1}+a_mS_n=0.$$

Полагая послѣдовательно $n=1, 2, 3,\ldots\ldots$ и т. д., выводимъ линейныя уравненія:

$$(22)\left\{\begin{array}{l} S_m+a_1S_{m-1}+a_2S_{m-2}+a_3S_{m-3}+\ldots\ldots+a_{m-1}S_1+a_mS_0=0 \\ S_{m+1}+a_1S_m+a_2S_{m-1}+a_3S_{m-2}+\ldots\ldots+a_{m-1}S_2+a_mS_1=0 \\ S_{m+2}+a_1S_{m+1}+a_2S_m+a_3S_{m-1}+\ldots\ldots+a_{m-1}S_3+a_mS_2=0 \\ \text{и т. д.,} \end{array}\right.$$

служащія къ послѣдовательному вычисленію функцій: S_m, S_{m+1}, S_{m+2}, и т. д. помощію функцій S_{m-1}, S_{m-2}, S_{m-3},......S_1, S_0, которыя опредѣляются изъ ур. (20). Замѣтимъ, что уравненія (20) и (22) составлены по одному и тому же закону. Изъ нихъ легко вывести формулы:

$$(23)\left\{\begin{array}{l} S_0=m. \\ S_1=-a_1 \\ S_2=a_1^2-2a_2 \\ S_3=-a_1^3+3a_1a_2-3a_3 \\ S_4=a_1^4-4a_1^2a_2+4a_1a_3-4a_4 \\ \text{и т. д.,} \end{array}\right.$$

называемыя *Нютоновыми*.

Такимъ образомъ всякая цѣлая простая симметричная функція корней можетъ быть выражена линейною функціею цѣлыхъ простыхъ симметричныхъ функцій низшихъ степеней, или цѣлою раціональною функціею коеффиціентовъ даннаго уравненія.

§ **38.** Изъ уравненія (21) можно также вывести линейныя уравненія, связывающія дробныя простыя симметричныя функціи:

$$S_{-1}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots\ldots+\frac{1}{x_m}$$

$$S_{-2}=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{x_m^2}$$

$$S_{-3}=\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}+\frac{1}{x_3^3}+\ldots\ldots+\frac{1}{x_m^3}$$

и т. д.

съ цѣлыми: S_0, S_1, S_2,.....S_{m-1}. Въ самомъ дѣлѣ, полагая въ уравненіи (21) послѣдовательно $n=-1,-2,-3,\ldots\ldots$, получаемъ:

$$
(24)\left\{\begin{array}{l}
S_{m-1}+a_1S_{m-2}+a_2S_{m-3}+\ldots\ldots+a_{m-2}S_1+a_{m-1}S_0+a_mS_{-1}=0\\
S_{m-2}+a_1S_{m-3}+a_2S_{m-4}+\ldots\ldots+a_{m-2}S_0+a_{m-1}S_{-1}+a_mS_{-2}=0\\
S_{m-3}+a_1S_{m-4}+a_2S_{m-5}+\ldots\ldots+a_{m-2}S_{-1}+Sa_{m-1}S_{-2}+a_mS_{-3}=0\\
\text{и т. д.}
\end{array}\right.
$$

Но такъ какъ, по уравненіямъ (20), имѣемъ:

$$S_{m-1}+a_1S_{m-2}+a_2S_{m-3}+\ldots\ldots\ldots+a_{m-2}S_1=-(m-1)a_{m-1}$$

$$S_{m-2}+a_1S_{m-3}+a_2S_{m-4}+\ldots\ldots\ldots+a_{m-3}S_1=-(m-2)a_{m-2}$$

$$S_{m-3}+a_1S_{m-4}+a_2S_{m-5}+\ldots\ldots\ldots+a_{m-4}S_1=-(m-3)a_{m-3}$$

и т. д.

$$S_1=-a_1 \quad \text{и}$$

$$S_0=m,$$

то уравненія (24) обратятся въ слѣдующія:

$$-(m-1)a_{m-1}+ma_{m-1}+a_mS_{-1}=0$$

$$-(m-2)a_{m-2}+ma_{m-2}+a_{m-1}S_{-1}+a_mS_{-2}=0$$

$$-(m-3)a_{m-3}+ma_{m-3}+a_{m-2}S_{-1}+a_{m-1}S_{-2}+a_mS_{-3}=0$$

и т. д.

или въ слѣдующія:

$$
(25)\left\{\begin{array}{l}
a_mS_{-1}+a_{m-1}=0\\
a_mS_{-2}+a_{m-1}S_{-1}+2a_{m-2}=0\\
a_mS_{-3}+a_{m-1}S_{-2}+a_{m-2}S_{-1}+3a_{m-3}=0.\\
\text{и т. д.}
\end{array}\right.
$$

Отсюда видно, что формулы для вычисленія выраженій S_{-1}, S_{-2}, S_{-3}, и пр. получаются изъ формулъ для вычисленія S_1, S_2 S_3 и пр., перемѣнивъ въ послѣднихъ a_1, a_2, a_3,....a_m соотвѣтственно на

$$\frac{a_{m-1}}{a_m},\ \frac{a_{m-2}}{a_m}\ \frac{a_{m-3}}{a_m}\ldots\ldots\frac{1}{a_m}.$$

§ **39.** Ежели всѣ коэффиціенты даннаго уравненія дѣйствительные, то изъ формулъ (20), (22) видно, что простыя симметричныя функціи его корней будутъ также дѣйствительныя. Впрочемъ это легко объяснить, разсматривая видъ функціи $S_p = x_1^p + x_2^p + x_3^p + \ldots\ldots + x_m^p$.

Пусть $t+ui$ и $t-ui$ будутъ сопряженные корни даннаго уравненія; то, по § 30, одинакія цѣлыя положительныя степени этихъ корней будутъ также сопряженныя. Посему, положивъ

$$(t+ui)^p = \varphi(u^2) + u.\theta(u^2).i\,,$$

будемъ имѣть

$$(t-ui)^p = \varphi(u^2) - u.\theta(u^2).i.$$

Сумма этихъ степеней есть дѣйствительное количество $2\varphi(u^2)$.

Такимъ образомъ члены въ функціи S_p, происходящіе отъ сопряженныхъ мнимыхъ корней, соединяются въ дѣйствительное количество; слѣдовательно функція S_p будетъ состоять только изъ дѣйствительныхъ членовъ, и потому сама будетъ дѣйствительная.

То же можно сказать о дробной простой симметричной функціи

$$S_{-p} = \frac{1}{x_1^p} + \frac{1}{x_2^p} + \frac{1}{x_3^p} + \ldots\ldots \frac{1}{x_m^p}.$$

Члены, соотвѣтствующіе сопряженнымъ корнямъ $t+ui$, $t-ui$, будутъ:

$$\frac{1}{(t+ui)^p} = \frac{1}{\varphi(u^2) + u.\theta(u^2).i},$$

$$\frac{1}{(t-ui)^p} = \frac{1}{\varphi(u^2) - u.\theta(u^2).i}$$

и для суммы ихъ находимъ:

$$\frac{\varphi(u^2) - u.\theta(u^2).i}{[\varphi(u^2)]^2 + u^2[\theta(u^2)]^2} + \frac{\varphi(u^2) + u.\theta(u^2).i}{[\varphi(u^2)]^2 + u^2[\theta(u^2)]^2} = \frac{2\varphi(u^2)}{[\varphi(u^2)]^2 + u^2[\varphi(u^2)]^2}.$$

количество дѣйствительное; посему всѣ члены функціи S_{-p} суть также дѣйствительные.

§ **40.** Приложимъ теперь формулы (20) (22) (25) къ примѣрамъ.

Примѣръ I.

Въ уравненіи $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=o$

коеффиціенты суть

$$a_1=-4,\ a_2=-19,\ a_3=+106,\ a_4=-120,$$

а корни: $x_1=-5,\ x_2=2,\ x_3=3,\ x_4=4.$

Формулы (22) даютъ:

$$S_1=-a_1=-(-4)=-5+2+3+4=4$$

$$S_2=-a_1S_1-2a_2=16+2.19=25+4+9+16=54$$

$$S_3=-a_1S_2-a_2S_1-3a_3=4.54+19.4-3.106=-125+8+27+64=-26$$

$$S_4=-a_1S_3-a_2S_2-a_3S_1-4a_4=-4.26+19.54-106.4+4.120=625+16+81+256=978$$

$$S_5=-a_1S_4-a_2S_3-a_3S_2-a_4S_1-5a_5=4.978-19.26-106.54+120.4=-3125+32+243+1024=-1826$$

и т. д.

А по уравненіямъ (25) имѣемъ:

$$S_{-1}=-\frac{a_3}{a_4}=\frac{106}{+120}=-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=+\frac{53}{60}$$

$$S_{-2}=-\frac{a_3}{a}S_{-1}-2\frac{a_2}{a_4}=\frac{53}{60}\cdot\frac{53}{60}-\frac{2.19}{120}=\frac{1}{25}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}=\frac{1669}{3600}$$

и т. д.

Примѣръ II.

Для уравненія

$$x^3-2x+5=o,$$

простыя симметричныя функціи будутъ

$$S_1=o$$
$$S_2=-2a_2=+4$$
$$S_3=-3a_3=-15$$
$$S_4=-a_2S_2=+8$$
$$S_5=-a_2S\ -a_3S_2=-50$$
$$S_6=-a_2S_4-a_3S_3=+91.$$

и т. д.

$$S_{-1}=\frac{a_2}{-a_3}=-\frac{2}{5}$$
$$S_{-2}=-\frac{a_2}{a_3}S_{-1}=+\frac{4}{25}$$
$$S_{-3}=-\frac{a_2}{a_3}S_{-2}=-\frac{8}{25}.$$

и т. д.

§ 11. Г-нъ *Пулье-Делиль* достигъ уравненій (20) (22) (25) другимъ путемъ (*); но его способъ не имѣетъ значительнаго преимущества предъ изложеннымъ; они одинакаго достоинства по своей простотѣ, хотя оба искусственны. Мы можемъ довольствоваться изложеннымъ. Теперь остается намъ показать, какимъ образомъ цѣлая симметричная функція вида $\Sigma(x_1^{p'}.x_2^{p''}.x_3^{p'''}\ldots\ldots x_n^{p^{(n)}})$ можетъ быть выражена цѣлою функціею простыхъ функцій: S_0, S_1, S_2......и проч.

Начнемъ съ функціи $\Sigma(x_1^{p'}x_2^{p''})$, называемой *двойною*. Перемноживши выраженія

$$S_{p'}=x_1^{p'}+x_2^{p'}+x_3^{p'}+\ldots.+x_m^{p'}$$

$$S_{p''}=x_1^{p''}+x_2^{p''}+x_3^{p''}+\ldots.x_m^{p''},$$

произведеніе ихъ будетъ

$$S_{p'}.S_{p''}=x_1^{p'+p''}+x_2^{p'+p''}+x_3^{p'+p''}+\ldots+x_m^{p'+p''}$$

$$+x_1^{p'}x_2^{p''}+x_1^{p'}x_3^{p''}+\ldots+x_1^{p'}x_m^{p''}+x_2^{p'}.x_1^{p''}+x_2^{p'}.x_3^{p''}+\ldots+x_{m-1}^{p'}x_m^{p''}.$$

Ясно, что во второй части этого равенства, первая строка представляетъ простую симметричную функцію $S_{p'+p''}$, а вторая, искомую функцію $\Sigma(x_1^{p'}x_2^{p''})$; по этому имѣемъ:

$$(26)\qquad S_{p'}.S_{p''}=S_{p'+p''}+\Sigma(x_1^{p'}x_2^{p''}),$$

а отсюда выводимъ:

$$(27)\qquad \Sigma(x_1^{p'}x_2^{p''})=S_{p'}S_{p''}-S_{p'+p''}.$$

Такимъ образомъ, двойная симметричная функція $\Sigma(x_1^{p'}x_2^{p''})$ опредѣляется помощію трехъ простыхъ: $S_{p'}$,$S_{p''}$ и $S_{p'+p''}$, которыхъ значенія получаются изъ формулъ (20) и (22).

Для опредѣленія симметричной функціи $\Sigma(x_1^{p'}x_2^{p''}x_3^{p'''})$, называемой *тройною*, помножимъ обѣ части уравненія (26) на уравненіе

$$S_{p'''}=x_1^{p'''}+x_2^{p'''}+x_3^{p'''}+\ldots+x_m^{p'''};$$

отъ того выйдетъ

$$(28)\qquad S_{p'}.S_{p''}.S_{p'''}=S_{p'+p''}(x_1^{p'''}+x_2^{p'''}+\ldots+x_m^{p'''})$$

$$+(x_1^{p'''}+x_2^{p'''}+\ldots+x_m^{p'''})\Sigma(x_1^{p'}.x_2^{p''}).$$

(*) Leçons d'Algèbre par *Lefébure de Fourcy*. Page 497.

Вторая часть этого уравненія состоитъ изъ членовъ 5-ти родовъ, а именно:

1) Изъ членовъ вида $x_\lambda^{p'+p''+p'''}$, составляющихъ функцію $S_{p'+p''+p'''}$

2) — — — $x_\lambda^{p'+p''}.x_\mu^{p'''}$, — — — $\Sigma(x_1^{p'+p''}.x_2^{p'''})$

3) — — — $x_\lambda^{p'+p'''}.x_\mu^{p''}$, — — — $\Sigma(x_1^{p'+p'''}.x_2^{p''})$

4) — — — $x_\lambda^{p''+p'''}.x_\mu^{p'}$, — — — $\Sigma(x_1^{p''+p'''}.x_2^{p'})$

5) — — — $x_\lambda^{p'}.x_\mu^{p''}.x_\nu^{p'''}$, — — — $\Sigma(x_1^{p'}.x_2^{p''}.x_3^{p'''})$.

И такъ уравненіе (28) приметъ видъ

$$(29)\qquad S_{p'}.S_{p''}.S_{p'''}=S_{p'+p''+p'''}+\Sigma(x_1^{p'+p''}.x_2^{p'''})+\Sigma(x_1^{p''+p'''}.x_2^{p'})$$
$$+\Sigma(x_1^{p''+p'''}.x_2^{p'})+\Sigma(x_1^{p'}.x_2^{p''}.x_3^{p'''}).$$

По уравненію (27) имѣемъ:

$$\Sigma(x_1^{p'+p''}.x_2^{p'''})=S_{p'+p''}.S_{p'''}-S_{p'+p''+p'''}$$
$$\Sigma(x_1^{p'+p'''}.x_2^{p''})=S_{p'+p'''}.S_{p''}-S_{p'+p''+p'''}$$
$$\Sigma(x_1^{p''+p'''}.x_2^{p'})=S_{p''+p'''}.S_{p'}-S_{p'+p''+p'''}\ ;$$

отъ чего уравненіе (29) обратится въ слѣдующее:

$$S_{p'}.S_{p''}.S_{p'''}=S_{p'+p''}.S_{p'''}+S_{p'+p'''}.S_{p''}+S_{p''+p'''}.S$$
$$-2\ S_{p'+p''+p'''}+\Sigma(x_1^{p'}.x_2^{p''}x_3^{p'''}),$$

изъ котораго наконецъ выводимъ:

$$(30)\qquad \Sigma x(_1^{p'}.x_2^{p''}.x_3^{p'''})=S_{p'}.S_{p''}.S_{p'''}-S_{p'+p''}.S_{p'''}.-S_{p'+p'''}.S_{p''}$$
$$-S_{p''+p'''}.S_{p'}+2S_{p'+p''+p'''}.$$

Такимъ образомъ, поступая далѣе, найдемъ такія же выраженія для симметричныхъ функцій видовъ:

$$\Sigma(x_1^{p'}x_2^{p''}x_3^{p'''}x_4^{p^{(4)}}),\Sigma(x_1^{p'}x_2^{p''}.x_3^{p'''}.x_4^{p^{(4)}}.x_5^{p^{(5)}})\ \text{и т. д.}$$

вообще симметричной функціи вида

$$\Sigma(x_1^{p'}.x_2^{p''}\ldots x_n^{p^{(n)}}).$$

Послѣ этого понятно, что всякая цѣлая симметричная функція, т. е.

вида (3) способна выражаться цѣлою функціею простыхъ симметричныхъ функцій: S_0, S_1, S_2, и пр. И такъ всякая раціональная симметричная функція U корней: $x_1, x_2, \ldots x_m$, можетъ быть выражена раціональною функціею симметричныхъ функцій вида $x_1^p + x_2^p + x_3^p + \ldots x_m^p$, и потому она будетъ также раціональная функція коеффиціентовъ $a_1, a_2, \ldots a_m$.

Замѣтимъ еще, что выведенныя нами уравненія (27) (30) существуютъ и для отрицательныхъ показателей $p', p'', \ldots p^{(n)}$.

Функціи, принимающія только два значенія отъ перемѣщенія всѣми возможными образами количествъ, въ нихъ входящихъ.

§ **42.** Пусть v и r будутъ двѣ раціональныя функціи корней: $x_1, x_2, \ldots x_m$, и каждая принимаетъ два значенія отъ перестановки этихъ корней всѣми возможными образами. Притомъ положимъ, что функція r цѣлая, и перемѣняетъ только свой знакъ, сохраняя то же численное значеніе, т. е. переходитъ изъ $+r$ въ $-r$ и изъ $-r$ въ $+r$. Означивъ чрезъ v_1 и v_2 значенія функціи v, ясно, что выраженія:

$$v_1 + v_2 \text{ и } v_1 r - v_2 r$$

будутъ симметричныя функціи корней: $x_1, x_2, \ldots x_m$, и потому могутъ быть выражены раціональными функціями коеффиціентовъ даннаго уравненія. Изобразивъ первую чрезъ S, а вторую чрезъ T, и опредѣливъ v_1 и v_2 изъ уравненій:

$$v_1 + v_2 = S, \quad v_1 r - v_2 r = T,$$

получаемъ:

$$v_1 = \frac{S}{2} + \frac{T}{2r}, \quad v_2 = \frac{S}{2} - \frac{T}{2r}$$

или

$$v_1 = \frac{S}{2} + \frac{T}{2r^2}.r, \quad v_2 = \frac{S}{2} - \frac{T}{2r^2}.r.$$

здѣсь $\frac{S}{2}$ и $\frac{T}{2r^2}$ суть симметричныя функціи, и два значенія функціи v

отличаются только знакомъ при r. Положивъ для сокращенія $\frac{S}{2}=p$ и $\frac{T}{2r^2}=q$, имѣемъ

$$(31)\qquad v=p+q.\ r.$$

Это выраженіе можетъ служить общимъ видомъ всякой раціональной функціи, принимающей только два значенія отъ всѣхъ возможныхъ перемѣщеній количествъ, въ нее входящихъ.

Ежели $p=o$, то равенство (31) обратится въ слѣдующее:

$$(32)\qquad v=q.\ r,$$

и функція v будетъ только перемѣнять свой знакъ, сохраняя то же численное значеніе. Такого рода функціи называются *знакоперемѣняющими* (alternées).

Функція r можетъ быть произведеніемъ симметричной функціи p' на знакоперемѣняющую r', которая въ свою очередь есть произведеніе симметричной функціи p'' на знакоперемѣняющую r'', и т. д., и ясно, что наконецъ r будетъ имѣть множителемъ знакоперемѣняющую функцію, несодержащую ни симметричной функціи, ни постояннаго множителя, неравнаго единицѣ. Означивъ эту знакоперемѣняющую функцію чрезъ ϱ, уравненія: (31) и (32) могутъ быть замѣнены слѣдующими:

$$(33)\qquad v=p+q.\ \varrho$$

$$(34)\qquad v=q.\ \varrho$$

§ 43. Займемся теперь опредѣленіемъ знакоперемѣняющей функціи ϱ.

Такъ какъ ϱ есть цѣлая функція, то она представляется суммою членовъ вида (2) § 3. Пусть будетъ

$$(35)\qquad Kx_\lambda^p x_\mu^q x_\nu^r \ldots x_\sigma^s x_\tau^t$$

одинъ изъ ея членовъ, означая чрезъ $\lambda,\mu,\nu,\ldots\sigma,\tau$ какіе-либо различные члены ряда $1, 2, 3,\ldots m$. Перемѣнивъ значки λ и μ одинъ на другой, функція ϱ измѣнится въ $-\varrho$. Но $-\varrho$ также получится, перемѣнивъ знаки всѣхъ членовъ функціи ϱ; по этому ϱ должна заключать членъ равный и съ противнымъ знакомъ члену функціи $-\varrho$, выводимому изъ члена (35) чрезъ взаимное перемѣщеніе значковъ λ и μ. И такъ ϱ будешъ сумма двучленныхъ выраженій вида

$$(36) \qquad Kx_\lambda^p x_\mu^q x_\nu^r \ldots x_\sigma^s x_\tau^t - Kx_\mu^p x_\lambda^q x_\nu^r \ldots x_\sigma^s . x_\tau^t$$
$$= K(x_\lambda^p x_\mu^q - x_\lambda^q x_\mu^p) x_\nu^r \ldots x_\sigma^s x_\tau^t.$$

Здѣсь p и q можно положишь неравными; попому что въ случаѣ $p=q$, разносшь

$$x_\lambda^p x_\mu^q - x_\lambda^q x_\mu^p$$

уничшожаешся, и соошвѣшсшвующіе ей члены исчезаюшъ.

Эша разносшь, какъ легко видѣшь, дѣлишся безъ осшашка на $x_\lambda - x_\mu$ или на $x_\mu - x_\lambda$; слѣдовашельно всѣ двучленныя выраженія вида (36), а попому и ихъ сумма ϱ, будушъ дѣлишься безъ осшашка на

$$\pm(x_\lambda - x_\mu).$$

Такъ какъ λ и μ означаюшъ два какіе нибудь неравные члены ряда $1, 2, 3, \ldots m$; *то функція ϱ должна дѣлиться безъ остатка* на каждую изъ разносшей:

$$\pm(x_1 - x_2), \pm(x_1 - x_3), \pm(x_1 - x_4), \ldots \pm(x_1 - x_{m-1}), \pm(x_1 - x_m)$$
$$\pm(x_2 - x_3), \pm(x_2 - x_4), \ldots \pm(x_2 - x_{m-1}), \pm(x_2 - x_m)$$
$$\pm(x_3 - x_4), \ldots \pm(x_3 - x_{m-1}), \pm(x_3 - x_m)$$

и проч.

$$\pm(x_{m-2} - x_{m-1}), \pm(x_{m-2} - x_m)$$
$$\pm(x_{m-1} - x_m),$$

приписывая имъ произвольно знакъ + или —; слѣдовашельно функція ϱ должна дѣлишься и на произведеніе эшѣхъ разносшей. Эшо произведеніе есшь шакже знакоперемѣняющая функція; попому что ошъ взаимнаго перемѣщенія λ и μ, одинъ изъ его множишелей перемѣняешъ свой знакъ; слѣдовашельно и знакъ произведенія шакже перемѣнишся. Раздѣливъ на эшо произведеніе функцію ϱ, часшное должно бышь или симмешричная функція или посшоянное количесшво. Но какъ, по положенію, ϱ не можешъ содержашь множишелемъ ни симмешричной функціи, ни посшояннаго количесшва неравнаго единицѣ; то можно положишь

$$(37) \quad \varrho = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_m)(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_m)\ldots(x_{m-1} - x_m).$$

Число разностей, содержащихъ одно и тоже количество x_λ, есть $m-1$; по этому высшая степень x_λ есть x_λ^{m-1}; слѣдовательно въ разложеніи ϱ, показатель каждаго количества не можетъ быть болѣе $m-1$. Но мы уже замѣтили, что въ каждомъ членѣ всѣ показатели должны быть различные; посему въ каждый членъ должны входить всѣ m показателей:

$$o,\ 1,\ 2,\ldots(m-1).$$

Ясно, что коеффиціентъ каждаго члена, взятаго независимо отъ знака, есть 1. И такъ каждый членъ разложенія ϱ, взятый независимо отъ знака, есть произведеніе количествъ: $x_1, x_2, \ldots x_m$ въ какомъ-либо порядкѣ, съ показателями: $o,\ 1,\ 2,\ldots m-1$. И всѣ члены разложенія ϱ могутъ быть выведены изъ члена

$$x_1^0 x_2^1 x_3^2 \ldots x_m^{m-1},$$

перемѣняя мѣста значковъ: $1,\ 2,\ 3,\ldots m$ всѣми возможными образами.

Разность (36) показываетъ, что при каждомъ перемѣщеніи двухъ какихъ нибудь значковъ, знакъ члена долженъ перемѣняться. По этому два члена, которые способны выводиться одинъ изъ другаго чрезъ четное число перемѣщеній двухъ значковъ, должны имѣть одинакіе знаки; а тѣ, которые выводятся одинъ изъ другаго чрезъ нечетное число такихъ перемѣщеній, будутъ съ противными знаками. Эти замѣчанія ведутъ къ слѣдующимъ двумъ теоремамъ, служащимъ къ построенію функціи ϱ (*)

I. *Если присоединимъ къ члену*

$$(38) \quad x_1^0 x_2^1 x_3^2 \ldots x_m^{m-1}$$

всѣ тѣ, которые выводятся изъ него чрезъ одно или нѣсколько послѣдовательныхъ перемѣщеній двухъ какихъ нибудь значковъ, то число всѣхъ членовъ будетъ

$$1.\ 2.\ 3\ldots(m-1)\ m.$$

Всѣ эти члены раздѣлятся на два класса: первый классъ составляютъ члены, выводимые изъ члена (38) чрезъ четное число перемѣщеній, а вто-

(*) Cours d'Analyse par M. Cauchy, I-re partie, note IV.

рой содержитъ члены, выводимые изъ первыхъ чрезъ нечетное число перемѣщеній. Члены перваго класса, взятые съ + въ соединеніи съ членами втораго класса, взятыми съ —, составляютъ знакоперемѣняющую функцію ϱ.

Вторая теорема даетъ правило узнавать будутъ ли два члена, произвольно взятые, съ одинакими или разными знаками. Вотъ въ чемъ она состоитъ:

II. *Написавши расположеніе значковъ одного члена подъ расположеніемъ значковъ другаго, должно всѣ значки:* 1, 2, 3...m *распредѣлить въ группы слѣдующимъ образомъ:* 1) *Если значки, стоящіе вертикально, не равны между собою, то ихъ должно совокупить въ одну группу; но такъ, что, если одинъ изъ разсматриваемыхъ значковъ уже находится въ какой-либо группѣ, то ему соотвѣтствующій значекъ должно помѣстить въ ту же группу.* 2) *Составивъ такія группы, каждый изъ остальныхъ значковъ должно брать за особую группу. Послѣ этого, сосчитавъ всѣ группы, надобно число ихъ вычесть изъ числа* m: *если остатокъ будетъ число четное, то знаки разсматриваемыхъ членовъ одинакіе; въ противномъ случаѣ, они будутъ разные.*

Первую теорему легко понять, соображаясь съ сказаннымъ выше; вторую же мы пояснимъ сперва примѣромъ, а потомъ ее докажемъ.

Положимъ, что $m=7$, и возмемъ два члена, у которыхъ расположенія значковъ такія:

$$(39) \qquad \begin{matrix} 1\ 2\ 5\ 3\ 4\ 7\ 6 \\ 1\ 2\ 7\ 6\ 4\ 5\ 3. \end{matrix}$$

По изложенной теоремѣ, всѣ значки: 1,2,3,4,5,6,7 распредѣляются въ слѣдующія 5 группъ:

$$[1],\ [2],\ [5,7],\ [3,6],\ [4].$$

Разность 7—5=2 есть число четное, и потому взятые члены имѣ—ютъ одинакіе знаки. Чтобы судить, будетъ ли этотъ общій знакъ + или—, сличимъ одинъ изъ взятыхъ членовъ съ первоначальнымъ:

$$x_1^0 x_2^1 x_3^2 x_4^3 x_5^4 x_6^5 x_7^6.$$

Изъ расположеній:

$$\begin{matrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \\ 1\ 2\ 5\ 3\ 4\ 6\ 7 \end{matrix}$$

составляемъ 4 группы

$$[1],\ [2],\ [3,5,4],\ [6,7].$$

Разность $7-4=3$ есть число нечетное, по этому общій знакъ предъидущихъ членовъ есть —.

Прежде, нежели приступимъ къ доказательству 2-й теоремы, сдѣлаемъ слѣдующія замѣчанія:

1) Пусть данные члены будутъ

$$x_a^0 x_b^1 x_c^2 x_d^3 \ldots x_k^{m-2} x_l^{m-1}$$

и

$$x_\alpha^0 x_\beta^1 x_\gamma^2 x_\delta^3 \ldots x_\varkappa^{m-2} x_\lambda^{m-1}.$$

Ежели мы станемъ перемѣщать показатели съ соотвѣтствующими имъ значками; то ясно, что отъ этого ни величина, ни знакъ члена не измѣнятся. Такъ наприм. первый изъ взятыхъ членовъ можетъ принять такой видъ

$$x_d^3 x_b^1 x_k^{m-2} x_a^0 x_c^2 \ldots x_l^{m-1}.$$

2) Переставливая въ обоихъ членахъ одинакіе показатели съ своими значками на одинакія мѣста, отъ того не измѣнится относительное положеніе значковъ въ обоихъ членахъ, т. е. вертикальные столбцы значковъ останутся тѣ же. По этому также, ни мало не измѣнятся группы, выводимыя по теоремѣ II. Напр. измѣнивъ такимъ образомъ выраженіе (39) въ слѣдующее

$$\begin{matrix} 5\ 4\ 1\ 3\ 6\ 7\ 2 \\ 7\ 4\ 1\ 6\ 3\ 5\ 2, \end{matrix}$$

получимъ опять тѣ же группы:

$$[5,7],\ [4],\ [1],\ [3,6],\ [2].$$

3) Для бо́льшаго удобства станетъ располагать вертикальныя пары значковъ одну подлѣ другой такимъ образомъ, чтобъ верхній значекъ былъ тотъ самый, который находится внизу въ предъидущей парѣ. Это продолжится до тѣхъ поръ, какъ нижній значекъ послѣдней пары будетъ тотъ, съ котораго мы начали расположеніе. Послѣ этого беремъ другую пару, состоящую изъ неравныхъ значковъ, и поступаемъ съ

нею такимъ же образомъ. Что же касается до паръ, состоящихъ изъ равныхъ значковъ, то ихъ можно оставить на своемъ мѣстѣ, или поставить всѣ рядомъ.

И такъ выраженіе (39) замѣнится слѣдующимъ

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & 57 & 36 & 4 \\ 1 & 2 & 75 & 63 & 4 \end{array}\right|;$$

отсюда видно, что все выраженіе раздѣляется на столько отдѣленій, сколько по теоремѣ II составляется группъ. Притомъ горизонтальныя значки каждаго отдѣленія суть именно тѣ, которые входятъ въ составъ каждой группы. Это легко понять изъ самаго образованія группъ.

4) Чтобы короче выражаться, станемъ называть группы: [5,7], [3,6] *многочленными*, а группы: [1], [2], [4], *одночленными*.

Возмемъ отдѣленіе

$$\begin{matrix} a\ b\ c\ d\ e\ f \ldots\ldots k\ l \\ b\ c\ d\ e\ f\ g \ldots\ldots l\ a, \end{matrix}$$

заключающее только одну группу многочленную, состоящую изъ n значковъ. Ясно, что, перемѣщая въ нижнемъ ряду b и a, потомъ c и b, потомъ d и c, и т. д.: послѣ $n-1$ такихъ перемѣщеній, расположеніе значковъ нижняго ряда будетъ такое же, какъ и въ верхнемъ. Наприм., положивъ $n=6$, нижній рядъ отдѣленія

$$(40) \qquad \begin{matrix} a\ b\ c\ d\ e\ f \\ b\ c\ d\ e\ f\ a \end{matrix}$$

отъ пяти послѣдовательныхъ перемѣщеній:

$$b \text{ и } a,\ c \text{ и } b,\ d \text{ и } c,\ e \text{ и } d,\ f \text{ и } e,$$

будетъ постепенно переходить въ выраженія:

$$\begin{matrix} a\ c\ d\ e\ f\ b \\ a\ b\ d\ e\ f\ c \\ a\ b\ c\ e\ f\ d \\ a\ b\ c\ d\ f\ e \\ a\ b\ c\ d\ e\ f, \end{matrix}$$

и послѣднее есть не что иное какъ верхній рядъ отдѣленія (40).

Слѣдовательно, если два члена (A) и (B) даютъ только одну многочленную группу, состоящую изъ n значковъ; то (A) можно вывести изъ (B) чрезъ $n-1$ послѣдовательныхъ перемѣщеній двухъ значковъ, и по теоремѣ I, знаки членовъ (A) и (B) будутъ одинакіе или разные, смотря по тому, будетъ ли $n-1$ число *четное* или *нечетное*. Здѣсь число одночленныхъ группъ есть $m-n$; придавши къ нему 1 (число многочленныхъ группъ), и вычтя сумму $m-n+1$ изъ m, (числа всѣхъ значковъ), получимъ

$$m-(m-n+1)=n-1$$

число, по которому въ теоремѣ II узнается, имѣютъ ли члены: (A) и (B) одинакіе или разные знаки.

Возмемъ теперь два члена (A) и (N), дающихъ μ многочленныхъ группъ. Пусть 1-я группа состоитъ изъ n значковъ, 2-я изъ p, 3-я изъ q, и т. д., послѣдняя изъ t. Составимъ $\mu-1$ новыхъ членовъ

$$(B),\ (C),\ (D),\ldots.(M)$$

такихъ, что (A) и (B) даютъ только одну многочленную группу, состоящую изъ n значковъ; (B) и (C), одну только группу, состоящую изъ p значковъ; (C) и (D), одну только группу, состоящую изъ q значковъ; наконецъ (M) и (N) одну только группу, состоящую изъ t значковъ. По сказанному предъ этимъ, (A) перейдетъ въ (B) чрезъ $n-1$ перемѣщеній значковъ по два; (B) перейдетъ въ (C) чрезъ $p-1$ такихъ перемѣщеній, и потому (A) перейдетъ въ (C) чрезъ $n-1+p-1$ перемѣщеній. Членъ (C) перейдетъ въ (D) чрезъ $q-1$ перемѣщеній, и т. д., наконецъ (M) перейдетъ въ (N) чрезъ $t-1$ перемѣщеній. Слѣдовательно (A) переходитъ въ (N) чрезъ

$$(n-1)+(p-1)+(q-1)+\ldots.+(t-1)=n+p+q+\ldots.+t-\mu$$

перемѣщеній, и смотря по тому, будетъ ли это число четное или нечетное, знаки членовъ (A) и (N) будутъ одинакіе или разные.

Такъ какъ число вертикальныхъ паръ, состоящихъ изъ неравныхъ значковъ, есть $n+p+q+\ldots+t$; то число вертикальныхъ паръ, состоящихъ изъ равныхъ значковъ, или число одночленныхъ группъ будетъ

$$m-(n+p+q+\ldots.+t).$$

Придавши къ этому числу μ,— число многочленныхъ группъ, и вычтя сумму $m-(n+p+q+\ldots.+t)+\mu$ изъ m,—числа всѣхъ значковъ, остатокъ

$$m-[m-(n+p+q+\ldots+t)+\mu]$$

есть не что иное, какъ

$$n+p+q+\ldots+t-\mu.$$

И такъ число, которое предлагаетъ теорема II, чтобы судить, будутъ ли знаки членовъ (A) и (N) одинакіе или разные, есть не что иное, какъ число перемѣщеній значковъ по 2, чрезъ которыя членъ (A) переходитъ въ (N).

Функція ϱ^2 симметричная, и мы показали въ § 36, примѣръ IV, какъ ее выразить чрезъ кеффиціенты даннаго уравненія. Слѣдовательно, когда послѣдніе будутъ извѣстны, тогда будетъ извѣстно значеніе радикала $\sqrt{\varrho^2}$, которое, будучи взято съ знакомъ $+$ и $-$, даетъ два значенія знакоперемѣняющей функціи ϱ.

Узнавши ϱ, мы опредѣлимъ изъ равенствъ (33) и (34) значенія v.

ГЛАВА ТРЕТІЯ.

О преобразованіяхъ уравненій.

Исключеніе.

§ 44. *Исключеніемъ* неизвѣстныхъ, называется преобразованіе уравненій со многими неизвѣстными въ уравненія, содержащія меньшее число неизвѣстныхъ.

Такъ какъ первая часть всякаго алгебраическаго уравненія (какъ мы увидимъ скоро) можетъ быть преобразована въ цѣлую раціональную функцію, то мы станемъ здѣсь разсматривать только уравненія раціональныя.

Показателемъ степени раціональнаго уравненія.

$$f(x, y, z, \ldots)=o,$$

заключающаго n неизвѣстныхъ: $x, y, z, \ldots$, называется наибольшая сумма показателей всѣхъ неизвѣстныхъ въ каждомъ членѣ. Разсматривая данное уравненіе относительно только двухъ неизвѣстныхъ x, y, степень его относительно этихъ неизвѣстныхъ опредѣляется наибольшею суммою показателей x и y въ каждомъ членѣ.

Ежели степень даннаго уравненія относительно x и y есть m, то ясно, что степень x не можетъ быть выше x^m; по этому данное уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ:

$$(1)\qquad A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_{m-1}x+A_m=o,$$

гдѣ A_0, A_1, $A_2, \ldots A_{m-1}$, A_m суть цѣлыя функціи остальныхъ неизвѣстныхъ. Расположивъ каждый изъ этихъ коэффиціентовъ по возрастающимъ степенямъ y, находимъ:

1) Коэффиціентъ A_0 не долженъ содержать y; ибо, въ противномъ случаѣ, степень даннаго уравненія, относительно x и y, была бы больше m.

2) По той же причинѣ, A_1 можетъ быть только первой степени относительно y; слѣдовательно имѣетъ видъ

$$b_0+b_1y$$

3) A_2 можетъ заключать только первую и вторую степень y, и потому имѣетъ видъ

$$c_0+c_1y+c_2y^2.$$

И т. д.

4) Вообще коеффиціентъ A_n при x^{m-n} можетъ быть только степени n относительно y, т. е. онъ долженъ быть вида

$$h_0+h_1y+h_2y^2+\ldots.h_ny^n.$$

И такъ всякое алгебраическое раціональное уравненіе степени m, относительно только двухъ неизвѣстныхъ x и y, можетъ быть представлено въ видѣ

$$(2)\quad A_0x^m+(b_0+b_1y)x^{m-1}+(c_0+c_1y+c_2y)x^{m-2}+\ldots+(k_0+k_1y+\ldots+k_my^m)=o,$$

гдѣ $A_0, b_0, b_1, c_0, c_1, c_2, \ldots k_0, k_1, \ldots k_m$ суть выраженія, независимыя отъ x и y, которыя могутъ быть либо цѣлыя функціи прочихъ неизвѣстныхъ, содержащихся въ данномъ уравненіи, либо постоянныя вида $a+b\sqrt{-1}$.

Ежели данное уравненіе неполное, то въ уравненіи (2) должно полагать нулями коеффиціенты тѣхъ членовъ, которыхъ недостаетъ въ данномъ уравненіи.

Замѣтимъ, что въ уравненіи (2) не всегда можно коеффиціентъ перваго члена сдѣлать$=1$; потому что A_0 можетъ быть нулемъ, т. е. уравненіе (2) заключаетъ въ себѣ, какъ частный случай, уравненіе

$$(b_0+b_1y)x^{m-1}+(c_0+c_1y+c_2y^2)x^{m-2}+\ldots=o.$$

Число всѣхъ членовъ въ уравненіи (2) есть

$$1+2+3+\ldots+(m-1)+m+(m+1)=\frac{(m+2)(m+1)}{2}.$$

и равно числу коеффиціентовъ: $A_0, b_0, b_1, c_0, \ldots k_0, \ldots k_m$.

Такъ какъ k_0 независитъ отъ x и y, то число членовъ въ ур. (2), зависимыхъ отъ x и y, будетъ

$$\frac{(m+2)(m+1)}{2}-1=\frac{m(m+3)}{2}$$

Пусть данныя уравненія, разсматриваемыя относительно только двухъ неизвѣстныхъ x и y, будутъ:

$$(3)\qquad Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+Jx+K=0$$

$$(4)\qquad Px^n+Qx^{n-1}+Rx^{n-2}+\ldots Sx+T=0.$$

Положимъ, что количества $y, z, \ldots$ получили извѣстныя значенія; тогда, чтобы уравненія (3) и (4) существовали вмѣстѣ, первыя ихъ части должны уничтожаться для одного и того же значенія x, т. е. должны имѣть общаго дѣлителя, по крайней мѣрѣ линейнаго относительно x.

Обратно, ежели уравненія (3) и (4) имѣютъ общаго дѣлителя, функцію x, напр. D; то каждое значеніе x, выведенное изъ уравненія $D=0$, будетъ уничтожать первыя части уравненій (3) и (4); потому что эти функціи, имѣя общаго множителя D, обращающагося въ нуль, сами обращаются въ нули.

Эти значенія x съ значеніями y, z, и пр., вставленными въ уравненія (3) и (4), называются *соотвѣтственными корнями* уравненій (3) и (4).

Означивъ чрезъ $a, b, c, d, \ldots i, k$ значенія x, удовлетворяющія уравненію (3), а чрезъ $p, q, r, \ldots s, t$ значенія x, удовлетворяющія ур. (4), составимъ произведеніе

$$U=$$

$$(a-p)(a-q)\ldots(a-t)\times(b-p)(b-q)\ldots(b-t)\times\ldots\times(k-p)(k-q)\ldots(k-t).$$

Чтобы уравненія (3) и (4) существовали вмѣстѣ, они должны, по сказанному въ предъидущемъ §, имѣть по крайней мѣрѣ одинъ общій корень, т. е. по крайней мѣрѣ одинъ изъ корней: $a, b, c, \ldots i, k$ долженъ быть равенъ одному изъ корней: $p, q, \ldots s, t$; отъ того будетъ $U=0$. Наоборотъ, когда $U=0$, тогда по крайней мѣрѣ одинъ изъ множителей, составляющихъ U, будетъ нулемъ, и одинъ изъ корней: $a, b, \ldots i, k$, будетъ равенъ одному изъ корней: $p, q, \ldots s, t$. И такъ уравненіе $U=0$ существуетъ всегда вмѣстѣ съ уравненіями (3) и (4).

Такъ какъ

$$(x-p)(x-q)\ldots(x-s)(x-t)=x^n+\frac{Q}{P}x^{n-1}+\frac{R}{P}x^{n-2}+\ldots+\frac{S}{P}x+\frac{T}{P},$$

то вставляя сюда послѣдовательно a, b, c,...i, k вмѣсто x, получимъ:

$$(a-p)(a-q)\dots(a-s)(a-t)=a^n+\frac{Q}{P}a^{n-1}+\frac{R}{P}a^{n-2}+\dots+\frac{S}{P}a+\frac{T}{P}$$

$$(b-p)(b-q)\dots(b-s)(b-t)=b^n+\frac{Q}{P}b^{n-1}+\frac{R}{P}b^{n-2}+\dots+\frac{S}{P}b+\frac{T}{P}$$

и т. д.

$$(k-p)(k-q)\dots(k-s)(k-t)=k^n+\frac{Q}{P}k^{n-1}+\frac{R}{P}k^{n-2}+\dots+\frac{S}{P}k+\frac{T}{P}.$$

Перемноживши первыя части, а потомъ вторыя, находимъ:

$$(5)\qquad U=(a^n+\frac{Q}{P}a^{n-1}+\dots+\frac{T}{P})(b^n+\frac{Q}{P}b^{n-1}+\dots+\frac{T}{P})\dots(k^n+\frac{Q}{P}k^{n-1}+\dots+\frac{T}{P})$$

Вторая часть этого равенства есть цѣлая симметричная функція корней: $a,b,c,\dots i,k$, и потому она можетъ быть выражена, по правиламъ предъидущей главы, раціональною функціею коеффиціентовъ:

$$(6)\qquad \frac{Q}{P},\ \frac{R}{P},\dots\frac{T}{P},\ \frac{B}{A},\ \frac{C}{A},\dots\frac{K}{A}.$$

А какъ послѣдніе суть раціональныя функціи только y, то U будетъ также раціональная функція только y.

Чтобы уравненія (3) и (4) существовали вмѣстѣ, по сказанному выше, необходимо, чтобы функція U была нулемъ. И такъ уравненіе

$$U=o$$

можно принять за результатъ исключенія неизвѣстнаго x изъ двухъ уравненій (3) и (4). Его называютъ *конечнымъ уравненіемъ.*

Ежели коеффиціенты P и A постоянные, то U будетъ цѣлая функція y. Но когда P и A (или одинъ только изъ нихъ) суть цѣлыя функціи y; тогда коеффиціенты (6) будутъ дробные, и потому U будетъ также дробная функція y. Означивъ ее чрезъ $\frac{V}{W}$, имѣемъ

$$\frac{V}{W}=o.$$

и конечнымъ уравненіемъ можетъ служить уравненіе

$$V = o.$$

§ **45.** Если мы имѣемъ n уравненій съ n неизвѣстными: $x, y, z, \ldots t, u$; то, исключая одно изъ этихъ неизвѣстныхъ, напр. x, между однимъ уравненіемъ и всѣми прочими, мы получимъ $n-1$ уравненій съ $n-1$ остальными неизвѣстными. Ясно, что поступая такимъ образомъ далѣе, мы будемъ уменьшать постепенно единицею число уравненій и число неизвѣстныхъ, и наконецъ дойдемъ до одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ. Сдѣлавши одно и то же съ каждымъ неизвѣстнымъ, мы получимъ n уравненій опредѣленныхъ относительно всѣхъ n неизвѣстныхъ: $x, y, z, \ldots u$.

Можно предвидѣть, что изложенный способъ исключенія не удобенъ въ приложеніи, и потому онъ замѣняется другимъ, который будетъ изложенъ ниже.

§ **46.** Но прежде посмотримъ, какова должна быть степень конечнаго уравненія $U = o$.

Положивъ на первый разъ, что уравненія (3) и (4) полныя, возмемъ одинъ изъ членовъ произведенія (5), который означимъ чрезъ M. Онъ происходитъ отъ умноженія одного изъ членовъ 1-го множителя на одинъ изъ членовъ 2-го, на одинъ изъ членовъ 3-го, и т. д. такъ, что въ него войдетъ изъ каждаго множителя по одному члену. Пусть всѣ эти члены будутъ

$$(7) \qquad Y_1 a^{\lambda'}, Y_2 b^{\lambda''}, Y_3 c^{\lambda'''}, \ldots Y_m k^{\lambda^{(m)}};$$

число ихъ $= m$. И такъ

$$M = Y_1 Y_2 Y_3 \ldots Y_m \times a^{\lambda'} b^{\lambda''} c^{\lambda'''} \ldots k^{\lambda^{(m)}}$$

Такъ какъ функція U симметрична относительно $a, b, c, \ldots k$, то, по § 33, она должна заключать всѣ члены, которые выведутся изъ M, перемѣняя $a, b, c \ldots k$ всѣми возможными образами, и потому U будетъ состоять изъ членовъ вида

$$N = Y_1 Y_2 Y_3 \ldots Y_m \times \Sigma(a^{\lambda'} b^{\lambda''} c^{\lambda'''} \ldots k^{\lambda^{(m)}}).$$

Функція

$$\Sigma(a^{\lambda'} b^{\lambda''} c^{\lambda'''} \ldots k^{\lambda^{(m)}}) \tag{8}$$

раціональна относительно простыхъ симметричныхъ функцій $S_{\lambda'}, S_{\lambda''}$, $S_{\lambda'''}, \ldots S_{\lambda^{(m)}}, S_{\lambda'+\lambda''}$, и пр., и первый ея членъ (§ 41) будетъ

$$S_{\lambda'}.S_{\lambda''}.S_{\lambda'''}\ldots S_{\lambda^{(m)}}. \tag{9}$$

Изъ формулъ (23), § 37 видно, что показатели степеней функцій $S_{\lambda'}, S_{\lambda''}, S_{\lambda'''}, \ldots S_{\lambda^{(m)}}$ относительно y, будутъ соотвѣтственно

$$\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots \lambda^{(m)},$$

и потому членъ (9) будетъ степени

$$\lambda'+\lambda''+\lambda'''+\ldots+\lambda^{(m)}. \tag{10}$$

Но видъ формулъ (26), (30) § 40 и законъ ихъ происхожденія показываютъ, что всѣ члены функціи (8) одинакой степени съ членомъ (9); слѣдовательно функція (8) будетъ также степени (10).

Такъ какъ члены

$$Y_1 x^{\lambda'}, Y_2 x^{\lambda''}, \ldots Y_m x^{\lambda^{(m)}}$$

уравненія (4) должны быть степени n, то функціи $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ будутъ соотвѣтственно степеней:

$$n-\lambda', n-\lambda'', n-\lambda''', \ldots n-\lambda^{(m)}.$$

Слѣдовательно произведеніе

$$Y_1 Y_2 Y_3 \ldots Y_m \tag{11}$$

будетъ степени

$$n-\lambda'+n-\lambda''+\ldots+n-\lambda^{(m)}=mn-(\lambda'+\lambda''+\ldots+\lambda^{(m)}).$$

Но какъ произведеніе (9) на (11) составляетъ N; то N, а по этому и U, будутъ степени

$$nm-(\lambda'+\lambda''+\ldots+\lambda^{(m)})+(\lambda'+\lambda''+\ldots+\lambda^{(m)})=mn.$$

Возмемъ шеперь какія нибудь два уравненія, которыя изобразимъ чрезъ

$$(12) \qquad Ax^{m-\mu}+Bx^{m-\mu-1}+Cx^{m-\mu-2}+\ldots+Ix+K=o$$

$$(13) \qquad Px^{n-\nu}+Qx^{n-\nu-1}+Rx^{n-\nu-2}+\ldots+Sx+T=o,$$

означая чрезъ m показашеля степени перваго уравненія, а чрезъ n показашеля степени вшораго. Коеффиціенты A и P могушъ бышь цѣлыя функціи y; но показашель степени перваго не можешъ бышь болѣе μ, а показашель степени вшораго не можешъ бышь болѣе ν.

Освободивъ опшъ эшихъ коеффиціеншовъ первые члены, получимъ уравненія

$$(14) \qquad x^{m-\mu}+\frac{B}{A}x^{m-\mu-1}+\ldots+\frac{I}{A}x+\frac{K}{A}=o$$

$$(15) \qquad x^{n-\nu}+\frac{Q}{P}x^{n-\nu-1}+\ldots+\frac{S}{P}x+\frac{T}{P}=o,$$

которыхъ коеффиціенты

$$(16) \qquad \frac{B}{A}, \ldots\frac{I}{A}, \frac{K}{A}, \frac{Q}{P}\ldots\frac{S}{P}, \frac{T}{P}$$

сушь дробныя функціи y. Сшанемъ называшь навремя сшепенью дробной функціи разносшь между сшепенью числишеля и сшепенью знаменашеля; по эшому $\frac{B}{A}$ и $\frac{Q}{P}$ будушъ дроби не выше первой сшепени, $\frac{C}{A}$ и $\frac{R}{P}$ не выше вшорой, и ш. д.

Означимъ опяшь $m-\mu$ корней уравненія (14) чрезъ a, b, c,...i, k, а $n-\nu$ корней уравненія (15) чрезъ p, q, r,...s, t. Внесемъ a, b, c,...i, k послѣдовашельно вмѣсшо x въ уравненіе (15), и сосшавимъ по прежнему произведеніе

$$(17) \qquad U=$$

$$(a-p)(a-q)\ldots(a-t)\times(b-p)(b-q)\ldots(b-t\times\ldots\times k-p)(k-q)\ldots(k-t)=$$

$$(a^{n-\nu}+\frac{Q}{P}a^{n-\nu-1}+\ldots\frac{T}{P})(b^{n-\nu}+\frac{Q}{P}b^{n-\nu-1}+\ldots\frac{T}{P})\ldots(k^{n-\nu}+\frac{Q}{P}k^{n-\nu-1}+\ldots+\frac{T}{P})$$

Это произведеніе симметрично относительно a, b,...k, и потому оно выразится раціональною функціею коеффиціентовъ (16); но какъ послѣдніе суть дробныя функціи y, то U будетъ также дробная функція относительно этого неизвѣстнаго. Означивъ ее чрезъ $\frac{V}{W}$, конечное уравненіе будетъ

$$V=o.$$

Опредѣлимъ его степень.

Разсматривая выраженіе U, видимъ, что степень P въ знаменателѣ W есть $m-\mu$, и что $P^{m-\mu}$ служитъ общимъ множителемъ этого знаменателя. Перемѣнивъ знаки всѣхъ разностей: $a-p$, $a-q$,...$b-p$, и т. д. и ихъ порядокъ, уравненіе (17) измѣнится въ слѣдующее

$$(-1)^{(m-\mu)(m-\nu)}U=$$

$$(p-a)(p-b)...(p-k)\times(q-a)(q-b)...(q-k)\times...\times(t-a)(t-b)...(t-k)=$$

$$(p^{m-\mu}+\frac{B}{A}p^{m-\mu-1}+...\frac{K}{A})(q^{m-\mu}+\frac{B}{A}q^{m-\mu-1}+...\frac{K}{A})...(t^{m-\mu}+\frac{B}{A}t^{m-\mu-1}+...\frac{K}{A}),$$

изъ котораго видно, что степень A въ знаменателѣ W есть $n-\nu$, и что $A^{n-\nu}$ служитъ общимъ множителемъ этого знаменателя. Но какъ W кромѣ A и P никакихъ другихъ функцій содержать не можетъ, то

$$W=P^{m-\mu}A^{n-\nu}.$$

Здѣсь P есть функція y степени ν, а A — функція y степени μ; посему показатель степени знаменателя W будетъ

$$\nu(m-\mu)+\mu(n-\nu).$$

Опредѣлимъ теперь степень общаго члена произведенія U, который будетъ вида

$$(18)\qquad Y_1Y_2Y_3....Y_{(m-\mu)}\times\Sigma(a^{\lambda'}b^{\lambda''}c^{\lambda'''}k^{\lambda^{(m-\mu)}}).$$

Симметричныя функціи $S_{\lambda'}, S_{\lambda''},...S_{\lambda^{(m-\mu)}}$ выразятся дробными функціями y, и изъ формулъ, ихъ опредѣляющихъ, легко замѣтить, что показатели ихъ степеней будутъ соотвѣтственно не больше $\lambda', \lambda'',....\lambda^{(m-\mu)}$. Поэтому произведеніе

$$S_{\lambda'} S_{\lambda''} \dots S_{\lambda^{(m-\mu)}}$$

и функція

$$\Sigma\left(a^{\lambda'} b^{\lambda''} c^{\lambda'''} \dots k^{\lambda^{(m-\mu)}}\right)$$

будутъ дробныя функціи y степеней не выше

$$\lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \dots \lambda^{(m-\mu)}.$$

Показатели степеней функцій $Y_1, Y_2, \dots Y_{(m-\mu)}$ будутъ соотвѣтственно не больше

$$n-\nu-\lambda',\ n-\nu-\lambda'', \dots n-\nu-\lambda^{(m-\mu)}.$$

Слѣдовательно показатель степени члена (18) не больше суммы

$$n-\nu-\lambda' + n-\nu-\lambda'' + \dots + n-\nu-\lambda^{(m-\mu)} + \lambda' + \lambda'' + \dots \lambda^{(m-\mu)} = (n-\nu)(m-\mu),$$

т. е. разность между показателемъ степени V и показателемъ степени W не больше $(n-\nu)(m-\mu)$.

Но какъ показатель W есть $\nu(m-\mu)+\mu(n-\nu)$, то показатель конечнаго уравненія

$$V = o$$

будетъ не больше

$$\nu(m-\mu)+\mu(n-\nu)+(m-\mu)(n-\nu) = mn - \mu\nu;$$

слѣдовательно, онъ опять не больше произведенія mn.

Замѣтимъ, что здѣсь заключается случай, когда уравненія полныя. Въ самомъ дѣлѣ, когда уравненія (12) и (13) полныя, тогда μ и ν будутъ нулями, и степень конечнаго уравненія будетъ mn. Тоже самое, когда одно изъ данныхъ уравненій полное.

Сказанное въ этомъ § ведетъ къ слѣдующей теоремѣ:

Если мы исключимъ одно неизвѣстное изъ двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными степеней m *и* n, *то показатель степени конечнаго уравненія не можетъ быть болѣе* mn (*).

(*) *Коши* далъ въ Exercices de Mathématiques весьма замѣчательное доказательство этой теоремы; но оно не такъ прямо ведетъ къ цѣли, какъ изложенное, которое почти одинаково съ доказательствомъ Крамера, смотр. *Introduction à l'analyse des lignes courbes*.

Эту важную теорему *Безу* распространилъ на какое нибудь число уравненій. Его доказательство имѣетъ недостатки, и потому мы изложимъ то, которое далъ *Поассонъ* (*). Но прежде посмотримъ, какъ опредѣляются симметричныя функціи корней уравненій со многими неизвѣстными.

§ 47. Положимъ, что дано n уравненій съ n неизвѣстными $x, y, z, \ldots u$, и что

$$x_1, y_1, z_1, \ldots u_1,$$

суть соотвѣтственные корни, т. е. значенія неизвѣстныхъ $x, y, z, \ldots u$, удовлетворяющія въ одно время даннымъ уравненіямъ; пусть еще $x_2, y_2, z_2, \ldots u_2$ будетъ другая система такихъ же корней; $x_3, y_3, z_3, \ldots u_3$, третья, и т. д. Ежели раціональная функція

$$f(x_1, y_1, z_1, \ldots u_1,\ x_2, y_2, z_2, \ldots u_2,\ x_3, y_3, z_3, \ldots u_3, \text{ и пр.})$$

не измѣняетъ своего вида и значенія отъ перестановки значковъ: 1, 2, 3, и пр. всѣми возможными образами (т. е. отъ замѣненія всѣми возможными образами одной системы соотвѣтственныхъ корней другою); то она называется *симметричною функціею* коеффиціентовъ данныхъ уравненій.

Легко увѣриться такъ же, какъ и въ § 33, что всякая функція такого рода представляется въ видѣ

$$A + A_1\Sigma_1 + A_2\Sigma_2 + A_3\Sigma_3 + \text{и проч.} \tag{19}$$

гдѣ A, A_1, A_2, A_3, и пр. суть постоянныя количества, а каждая изъ буквъ: $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, и пр. означаетъ сумму членовъ вида

$$x_1^{p'} y_1^{p''} z_1^{p'''} \ldots u_1^{p^{(n)}} \times x_2^{q'} y_2^{q''} z_2^{q'''} \ldots u_2^{q^{(n)}} \times x_3^{r'} y_3^{r''} z_3^{r'''} \ldots u_3^{r^{(n)}},$$

выводимыхъ изъ одного какого нибудь чрезъ взаимное перемѣщеніе значковъ: 1, 2, 3, и пр. всѣми возможными образами.

Симметричныя функціи вида

$$x_1^{p'} y_1^{p''} z_1^{p'''} \ldots u_1^{p^{(n)}} + x_2^{p'} y_2^{p''} z_2^{p'''} \ldots u_2^{p^{(n)}} + x_3^{p'} y_3^{p''} z_3^{p'''} \ldots u_3^{p^{(n)}} + \text{ и т. д.} \tag{20}$$

можно называть *простыми* или *основными*; потому, что онѣ служатъ основою всѣхъ прочихъ. *Варингъ* первый показалъ способъ опредѣлять эти симметричныя функціи. Онъ состоитъ въ томъ, чтобъ положить $x^{p'} y^{p''} z^{p'''} \ldots u^{p^{(n)}} = v$, и исключить изъ этого уравненія и n уравненій данныхъ n неизвѣстныхъ $x, y, z, \ldots u$; такимъ образомъ получится урав-

(*) *Journal de l'Ecole Polytechnique, cahier* 18-e, *page.*, 199.

ненie только по v, и коэффиціентъ втораго члена въ этомъ уравненіи, взятый съ знакомъ противнымъ, будетъ не что иное какъ значеніе симметричной функціи (20) (см. § 32). Этотъ способъ неудобенъ, потому что онъ вводитъ новое неизвѣстное. *Поассонъ* предложилъ другой, болѣе удовлетворительный. Мы объяснимъ его сперва для двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными x и y.

Положимъ $v=x+Ay$, означая чрезъ A произвольное количество; выведемъ отсюда значеніе одного изъ неизвѣстныхъ x или y, на пр. x, и внесемъ его въ данныя уравненія: отъ того будемъ имѣть два уравненія между v и y. Исключивъ изъ нихъ y, получимъ уравненіе по v, котораго коэффиціенты будутъ раціональныя функціи относительно A и коэффиціентовъ данныхъ уравненій. Изобразимъ его чрезъ $V=o$, и пусть

$$x_1 \text{ и } y_1,\ x_2 \text{ и } y_2,\ x_3 \text{ и } y_3 \text{ и пр.}$$

будутъ соотвѣтственныя значенія x и y, удовлетворяющія даннымъ уравненіямъ; то выраженія

$$x_1+Ay_1,\ x_2+Ay_2,\ x_3+Ay_3, \text{ и пр.}$$

будутъ корни уравненія $V=o$, и потому всякая простая симметричная функція этихъ корней

$$(x_1+Ay_1)^r+(x_2+Ay_2)^r+(x_3+Ay_3)^r+ \text{ и пр.} \tag{21}$$

можетъ быть выражена раціональною функціею коэффиціентовъ уравненія $V=o$, т. е. раціональною функціею произвольнаго количества A и коэффиціентовъ даннаго уравненія; слѣдовательно она будетъ вида

$$K+K'A+K''A^2+ \text{ и пр.} \tag{22}$$

Но расположивъ по степенямъ A выраженіе (21), имѣемъ

$$\begin{array}{ll|l|l|l}
x_1^r & +x_1^{r-1}y_1 & rA+x_1^{r-2}y_1^2 & \frac{r(r-1)}{2}A^2+\text{ и т. д.}+y_1^r & A^r; \\
+\ x_2^r & +x_2^{r-1}y_2 & \quad +x_2^{r-2}y_2^2 & \qquad\qquad\qquad\qquad +y_2^r & \\
+\ x_3^r & +x_3^{r-1}y_3 & \quad +x_3^{r-2}y_3^2 & \qquad\qquad\qquad\qquad +y_3^r & \\
+\text{ и пр.} & +\text{ и пр.} & \quad +\text{и пр.} & \qquad\qquad\qquad\quad +\text{ и пр.} &
\end{array}$$

отсюда видно, что выраженіе (22) должно быть степени r относительно A. Сравнивая коэффиціенты одинакихъ степеней A въ выраженіяхъ: (21) и (22), получаемъ

$$x_1^r+x_2^r+x_3^r+\text{ и пр. } = K$$

$$r(x_1^{r-1}y_1+x_2^{r-1}y_2+x_3^{r-1}y_3+\text{ и пр.}) = K'$$

$$\frac{r(r-1)}{2}(x_1^{r-2}y_1^2+x_2^{r-2}y_2^2+x_3^{r-2}y_3^2+\text{ и пр.}) = K''$$

и проч.;

отсюда выводимъ:

$$\Sigma(x_1^r)=K, \quad \Sigma(x_1^{r-1}y_1)=\frac{K'}{r}, \quad \Sigma(x_1^{r-2}y_1^2)=\frac{2K''}{r(r-1)}, \text{ и пр.}$$

И такъ мы въ состояніи опредѣлить всякую симметричную функцію вида

$$(23) \qquad \Sigma(x_1^p y_1^{p'})=x_1^p y_1^{p'}+x_2^p y_2^{p'}+x_3^p y_3^{p'}+\text{ и пр.},$$

гдѣ $p+p'=r$, а r можетъ быть всякое цѣлое число.

Помноживши $\Sigma(x_1^p y_1^{p'})$ на $\Sigma(x_1^q y_1^{q'})$, имѣемъ

$$\Sigma(x_1^p y_1^{p'}).\Sigma(x_1^q y_1^{q'})=x_1^{p+q}y_1^{p'+q'}+x_2^{p+q}y_2^{p'+q'}+\text{ и пр.}$$

$$+x_1^p y_1^{p'}x_2^q y_2^{q'}+x_1^q y_1^{q'}x_2^p y_2^{p'}+\text{ и пр.}=\Sigma(x_1^{p+q}y_1^{p'+q'})+\Sigma(x_1^p y_1^{p'}x_2^q y_2^{q'}).$$

Функціи: $\Sigma(x_1^p y_1^{p'})$, $\Sigma(x_1^q y_1^{q'})$, $\Sigma(x_1^{p+q}y_1^{p'+q'})$ опредѣляются по изложенному способу; посему изъ послѣдняго уравненія опредѣлимъ и функцію

$$\Sigma(x_1^p y_1^{p'}x_2^q y_2^{q'}).$$

Ясно, что, поступая такъ же, какъ и въ § 41, мы въ состояніи будемъ опредѣлить значеніе всякой симметричной функціи.

Распространимъ теперь изложенный способъ для вычисленія симметричныхъ функцій корней уравненій съ двумя неизвѣстными на какое нибудь число уравненій. И такъ возмемъ n уравненій съ n неизвѣстными x, y, z,....u, и означимъ соотвѣтственныя значенія этихъ неизвѣстныхъ опять чрезъ

$$x_1, y_1, z_1, \ldots u_1,$$

$$x_2, y_2, z_2, \ldots u_2,$$

$$x_3, y_3, z_3, \ldots u_3,$$

и т. д.

Положимъ $v=x+Ay+Bz+....+Mu$, и вставимъ $v-Ay-Bz-....-Mu$ вмѣсто x въ данныя уравненія; потомъ исключимъ изъ этихъ уравненій неизвѣстныя: y, z,....u; отъ того получимъ уравненіе по v, котораго корни будутъ:

$$x_1+Ay_1+Bz_1+....+Mu_1,\quad x_2+Ay_2+Bz_2+....+Mu_2, \text{ и пр.},$$

а коеффиціенты — раціональныя функціи произвольныхъ количествъ A, B,....M, и коеффиціентовъ данныхъ уравненій. Поэтому всякая симметричная функція

$$\Sigma(x_1+Ay_1+Bz_1+....+Mu_1)^r \tag{24}$$

также можетъ быть выражена раціональною функціею U относительно произвольныхъ количествъ: A, B,....M и коеффиціентовъ данныхъ уравненій.

Расположивъ U и выраженіе (24) по степенямъ и произведеніямъ степеней количествъ A, B,....M; сравнивши потомъ коеффиціенты подобныхъ членовъ, мы получимъ уравненія для опредѣленія симметричныхъ функцій вида

$$\Sigma(x_1^{p'}y_1^{p''}z_1^{p'''}....u_1^{p^{(n)}}), \tag{25}$$

гдѣ $p'+p''+p'''+....+p^{(n)}=r$, а r можетъ быть всякое цѣлое число.

Чрезъ умноженіе функцій вида (25) получаются уравненія для опредѣленія симметричныхъ функцій вида

$$\Sigma(x_1^{p'}y_1^{p''}....u_1^{p^{(n)}}\times x_2^{q'}y_2^{q''}...u_2^{q^{(n)}}\times \text{и пр.}).$$

Слѣдовательно мы въ состояніи будемъ опредѣлить значеніе всякой раціональной симметричной функціи.

§ 48. Эти изысканія намъ нужны для опредѣленія степени конечнаго уравненія, происходящаго отъ исключенія $n-1$ неизвѣстныхъ $x, y, z,...t$, u, изъ n уравненій.

Предположимъ, что данныя уравненія полныя, и примемъ на-время u за извѣстное количество. Возмемъ $n-1$ данныхъ уравненій, и произведемъ исключеніе такимъ образомъ, чтобы каждое изъ конечныхъ уравненій заключало только u и одно изъ прочихъ неизвѣстныхъ: x, y, z,..t; такъ что бы 1-е заключало только u и x, 2-е — только u и y, 3-е только u и z, и т. д.; наконецъ послѣднее только u и t.

Такъ какъ данныя уравненія полныя, то они одинакихъ степеней относительно каждаго изъ неизвѣстныхъ x, y, z,.....t, а потому всѣ найденныя конечныя уравненія должны бышь одинакой сшепени. Пусшь показашель общей сшепени эшихъ уравненій есшь μ; положимъ, чшо они рѣшены, и чшо

$$\begin{array}{lcl} x_1, x_2, \ldots x_\mu & \text{суть значенія} & x \\ y_1, y_2, \ldots y_\mu & \text{———————} & y \\ z_1, z_2, \ldots z_\mu & \text{———————} & z \\ & \text{и т. д.,} & \\ t_1,\ t_2, \ldots t_\mu & \text{———————} & t, \end{array}$$

означая одинакими значками соошвѣшсшвенные корни.

Опъ данныхъ уравненій у насъ осшалось шолько одно, содержащее всѣ неизвѣсшныя x, y, z,...t, u. Изобразимъ его чрезъ

$$(26)\qquad (x, y, z, \ldots, t, u)^m = o,$$

и внесемъ въ него вмѣсто x, y, z,....t послѣдовательно группы соошвѣшсшвенныхъ корней

$$(27)\left\{\begin{array}{c} x_1,\ y_1,\ z_1, \ldots t_1 \\ x_2,\ y_2,\ z_2, \ldots t_2 \\ x_3,\ y_3,\ z_3, \ldots t_3 \\ \text{и т. д.} \\ x_\mu,\ y_\mu,\ z_\mu, \ldots t_\mu \end{array}\right.$$

отъ того получимъ μ уравненій:

$$\begin{array}{c} (x_1,\ y_1,\ z_1, \ldots t_1, u)^m = o \\ (x_2,\ y_2,\ z_2, \ldots t_2, u)^m = o \\ (x_3,\ y_3,\ z_3, \ldots t_3, u)^m = o \\ \text{и т. д.} \\ (x_\mu,\ y_\mu,\ z_\mu, \ldots t_\mu, u)^m = o, \end{array}$$

которымъ удовлетворяютъ различныя значенія u. Слѣдовательно произведенію

$$(28)\quad (x_1, y_1, z_1, \ldots u)^m . (x_2, y_2, z_2 \ldots u)^m . (x_3, y_3, z_3, \ldots u)^m \ldots (x_\mu, y_\mu, z_\mu, \ldots u)^m = o$$

будушъ удовлетворять всѣ значенія x, y, z,....u, удовлетворяющія даннымъ уравненіямъ, и наоборотъ. Поэтому уравненіе (28) можно назвать *конечнымъ*. Первая его часть, отъ перемѣны одной группы соотвѣтственныхъ корней (27) на другую, не измѣняетъ своего значенія и вида, и потому она можетъ быть выражена раціональною функціею коеффиціентовъ данныхъ уравненій.

Такъ какъ въ уравненіи (26) сумма показателей при x, y, z,...t,u въ въ каждомъ членѣ не болѣе m, то сумма показателей при x_1, y_1, z_1, ...t_1, x_2, y_2, z_2,....t_2, и u въ каждомъ членѣ уравненія (28) не можетъ быть болѣе $m\mu$.

Ежели уравненіе (28) заключаетъ членъ

$$Ku^k . x_1^p y_1^{p'} z_1^{p''} \ldots . x_2^q y_2^{q'} z_2^{q''} \ldots .. x_\mu^r y_\mu^{r'} z_\mu^{r''} \ldots ,$$

то оно должно заключать всѣ члены, которые выведутся изъ этого члена, перемѣняя значки: 1, 2, 3,.....n всѣми возможными образами; слѣдовательно оно будетъ состоять изъ членовъ вида

$$(29) \qquad Ku^k \Sigma (x_1^p y_1^{p'} z_1^{p''} \ldots . x_2^q y_2^{q'} z_2^{q''} \ldots . x_\mu^r y_\mu^{r'} z_\mu^{r''} \ldots),$$

гдѣ сумма $k+p+p'+p''+\ldots q+q'+q''+\ldots r+r'+r''+\ldots$ не больше $m\mu$.

По сказанному въ предъидущемъ §, симметричная функція

$$(30) \qquad \Sigma (x_1^p y_1^{p'} z_1^{p''} \ldots . x_2^q y_2^{q'} z_2^{q''} \ldots . x_\mu^r y_\mu^{r'} z_\mu^{r''} \ldots .)$$

получится изъ уравненія, происходящаго отъ перемноженія простыхъ симметричныхъ функцій

$$(31) \qquad \Sigma (x_1^p y_1^{p'} z_1^{p''} \ldots), \ \Sigma (x_1^q y_1^{q'} z_1^{q''} \ldots), \ldots . \ \Sigma (x_1^r y_1^{r'} z_1^{r''} \ldots),$$

и потому, когда эти функціи будутъ выражены цѣлыми раціональными функціями u; тогда степень функціи (30) относительно u не должна превосходить степень произведенія функцій (31).

Положивъ $v = x + Ay + Bz + \ldots . Lt$, внеся $v - Ay - \ldots . Lt$, вмѣсто x въ $n-1$ данныхъ уравненій, нами прежде разсматриваемыхъ, и исключивъ потомъ y, z,...t, мы получимъ конечное уравненіе по v и u степени μ (потому что v взошло во всѣ уравненія такъ же, какъ и x). Если мы изобразимъ его чрезъ

$$v^\mu + Pv^{\mu-1} + Qv^{\mu-2} + \ldots + T = o,$$

то коеффиціентъ P не выше 1-й степени относительно u

———— Q — — 2-й ———— —

и т. д.

———— T — — μ ———— —

Симметричная функція $\Sigma(x_1+Ay_1+Bz_1+\ldots Lt_1)^s$ какъ видно изъ формулъ (23) § 37, будетъ степени s относительно u, а поэтому и симметричная функція вида

$$\Sigma(x_1^p y_1^{p'} z_1^{p''}\ldots)$$

будетъ также степени $p+p'+p''+\ldots=s$ относительно u.

Послѣ этого ясно, что показатель произведенія функцій (31) или показатель функціи (30) относительно u не больше суммы

$$p+p'+p''+\ldots+q+q'+q''+\ldots+r+r'+r''+\ldots,$$

которая, какъ мы уже видѣли не больше $\mu m-k$. Слѣдовательно показатель члена (29) относительно u не больше μm, а потому показатель степени конечнаго уравненія есть μm.

Мы видѣли, что для трехъ уравненій степеней a, b, m, показатель μ равенъ произведенію ab; поэтому степень конечнаго уравненія будетъ $\mu m=abm$.

Для четырехъ уравненій степеней a, b, c, m, показатель $\mu=abc$, и потому степень конечнаго уравненія будетъ $abcm$, и т. д.

Вообще, *если мы имѣемъ* n *уравненій степеней* a, b, c,...k, l *съ* n *неизвѣстными: то по исключеніи всѣхъ этихъ неизвѣстныхъ, кромѣ одного, мы получимъ конечное уравненіе степени не выше* abc....kl *относительно оставшагося неизвѣстнаго.* Вотъ въ чемъ состоитъ замѣчательная теорема *Безу*.

§ **49.** Мы предполагали, что данныя уравненія полныя; но сказанное справедливо и для неполныхъ уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, если даны какія нибудь уравненія, то можно ихъ замѣнить на-время уравненіями полными и общими, и найти по изложенному способу общее выраженіе конечнаго уравненія $U=o$, изъ котораго можно будетъ вывести, какъ частный случай, конечное уравненіе, соотвѣтствующее даннымъ уравненіямъ. Для этого стоитъ только приписать частныя значенія коеффиціентамъ общихъ уравненій. Ежели данныя уравненія неполныя, то коеффиціенты общихъ уравненій, соотвѣтствующіе недостающимъ членамъ, должно полагать нулями; отъ того нѣкоторые члены U уничтожатся, а остальные будутъ представлять первую часть конечнаго уравненія, и степень ихъ не выше степени U.

Но можетъ случиться, что всѣ члены U содержатъ уничтожаемые коеффиціенты, и отъ того U дѣлается тожественно нулемъ. Чтобы отъискать въ этомъ случаѣ конечное уравненіе, должно поступать слѣдующимъ образомъ: сперва должно уничтожить члены U, содержащіе одинъ изъ коеффиціентовъ полагаемыхъ нулями; оставшіеся члены могутъ содержать общимъ множителемъ одного или нѣсколько уничтожаемыхъ коеффиціентовъ, и будучи сокращены на эти множители, даютъ новые члены, съ которыми должно поступать по предъидущему. Ясно, что, продолжая поступать такимъ образомъ далѣе, мы наконецъ дойдемъ до выраженія, въ которомъ нѣкоторые члены не будутъ содержать уничтожаемыхъ коеффиціентовъ: совокупность этихъ членовъ будетъ представлять первую часть искомаго конечнаго уравненія. Впрочемъ можно и непосредственно выводить конечное уравненіе.

Пояснимъ сказанное примѣрами.

Примѣръ I.

Исключимъ, по способу изложенному въ § 45, неизвѣстное x между двумя уравненіями:

$$Ax^2+Bx+C=o$$

$$Px^3+Qx^2+Rx+S=o.$$

Означивъ чрезъ a и b корни перваго уравненія, вносимъ ихъ во второе вмѣсто x, и составляемъ уравненіе

$$U=\left(a^3+\frac{Q}{P}a^2+\frac{R}{P}a+\frac{S}{P}\right)\left(b^3+\frac{Q}{P}b^2+\frac{R}{P}b+\frac{S}{P}\right)=o,$$

которое приводится къ слѣдующему

$$(a)\quad a^3b^3+\frac{Q}{P}(a^2b^3+a^3b^2)+\frac{R}{P}(ab^3+a^3b)+\frac{Q^2}{P^2}a^2b^2+\frac{RQ}{P^2}(ab^2+a^2b)+\frac{S}{P}(a^3+b^3)$$
$$+\frac{SQ}{P^2}(a^2+b^2)+\frac{R^2}{P^2}ab+\frac{RS}{P^2}(a+b)+\frac{S^2}{P^2}=o,$$

Такъ какъ $ab=\frac{C}{A}$ и $a+b=-\frac{B}{A}$; то находимъ:

$$a^3b^3=\frac{C^3}{A^3},\ a^2b^3+a^3b^2=a^2b^2(a+b)=-\frac{BC^2}{A^3},\ a^2+b^2=\frac{B^2}{A^2}-2\frac{C}{A}$$

$$ab^3+a^3b=ab(a^2+b^2)=\frac{C}{A}.S_2=\frac{C}{A}\left(\frac{B^2}{A^2}-2\frac{C}{A}\right)=\frac{B^2C}{A^3}-2\frac{C^2}{A^2}$$

$$ab^2+a^2b=ab(a+b)=-\frac{BC}{A^2},\quad a^3+b^3=S_3=-\frac{B^3}{A^3}+3\frac{BC}{A^2}.$$

Отъ того уравненіе (α) обратится въ слѣдующее

$$U=\frac{C^3}{A^3}-\frac{BC^2Q}{A^3P}+\frac{B^2CR}{A^3P}-\frac{2C^2R}{A^2P}+\frac{C^2Q^2}{A^2P^2}-\frac{BCQR}{A^2P^2}-\frac{B^3S}{A^3P}+\frac{3BCS}{A^2P}+\frac{B^2QS}{A^2P^2}$$
$$-\frac{2CQS}{AP^2}+\frac{CR^2}{AP^2}-\frac{BRS}{AP^2}+\frac{S^2}{P^2}=o.$$

Приведя всѣ члены къ одному знаменателю, и освободивъ отъ него все уравненіе, имѣемъ

$$(\beta)\ C^3P^2-BC^2PQ+B^2CPR-2AC^2PR+AC^2Q^2-ABCQR-B^3PS+ABCPS$$
$$+AB^2QS-2A^2CQS+A^2CR^2-A^2BRS+A^3S^2=o.$$

Коеффиціенты P и A могутъ быть или постоянныя количества, или функціи y. Первый случай представляется, когда данныя уравненія полныя.

Ежели второе изъ данныхъ уравненій 2-й степени относительно x, то для полученія конечнаго уравненія, стоитъ только въ уравненіи (β) положить $P=o$, и сократить остальное на A; отъ того конечное уравненіе будетъ

$$C^2Q^2-BCQR+B^2QS-2A^2CQS+CRA-ABRS+A^2S^2=o,$$

и если $A=Q=1$, то оно обратится въ слѣдующее

$$C^2BCR+B^2S-2CS+CR^2BRS+S^2=o$$

или

$$(C-S)^2+(BS-CR)(B-R)=o.$$

Примѣръ II.

Чтобы исключить x изъ уравненій:

$$x^2(y-1)+x-2=o$$

$$x^3y-3x+1=o,$$

должно въ уравненіи (β) предъидущаго примѣра положить: $P=y$, $Q=o$, $R=-3$, $S=1$, $A=y-1$, $B=1$, $C=-2$, и конечное уравненіе будетъ

$$y^3-8y^2+20y-16=o.$$

Примѣръ III.

Возмемъ еще уравненія:

$$x^2-y^2+3=o$$

$$yx^3-(y^3-3y-1)x+y=o.$$

Положивъ въ ур. (β) $P=y$, $R=-(y^3-3y-1)$, $S=y$, $A=1$, $B=o$ $C=-y^2+3$, первая часть конечнаго уравненія обратится въ постоянное количество 3; слѣдовательно конечнаго уравненія не имѣется. Это показываетъ, что данныя уравненія не могутъ существовать вмѣстѣ.

§ 50. Хотя изложенный способъ исключенія вполнѣ удовлетворяетъ теоріи; но въ приложеніи бываетъ затруднителенъ, по причинѣ огромныхъ умноженій, которыя должно совершать надъ коеффиціентами степеней исключаемаго неизвѣстнаго. Поэтому предпочитаютъ способъ, основанный на нахожденіи общаго большаго дѣлителя.

Пусть будутъ даны два уравненія

$$F(x,y)=o \text{ и } \Phi(x,y)=o$$

съ двумя неизвѣстными x и y. Прежде, нежели приступимъ къ изложенію новаго способа исключенія, замѣнимъ функціи: $F(x,y)$, $\Phi(x,y)$ простѣйшими.

Расположивъ ту и другую функцію по степенямъ y, возмемъ сперва одну и станемъ искать общаго большаго дѣлителя коеффиціентовъ степеней x, потомъ сдѣлаемъ тоже самое съ другою функціею: эти дѣлители будутъ вообще функціи x. Послѣ того, расположивъ данныя функціи по степенямъ x, станемъ искать, въ каждой отдѣльно, общаго большаго дѣлителя коеффиціентовъ степеней x: эти дѣлители будутъ вообще функціи y. Означимъ дѣлители перваго рода чрезъ X (для $F(x,y)$) и X' (для $\Phi(x,y)$), а дѣлители втораго рода чрезъ Y (для $F(x,y)$) и Y' (для $\Phi(x,y)$), и сыщемъ частныя:

$$\frac{F(x,y)}{X.Y}=U, \quad \frac{\Phi(x,y)}{X'.Y'}=U';$$

отъ того имѣемъ:

$$F(x,y)=X.Y.U$$

$$\Phi(x,y)=X'.Y'.U'.$$

Такимъ образомъ каждая изъ функцій: $F(x,y)$ и $\Phi(x,y)$ разлагается на три множителя, изъ которыхъ первый есть вообще цѣлая функція x, второй вообще цѣлая функція y, а третій цѣлая функція x и y.

Функціи X и X' могутъ имѣть общимъ большимъ дѣлителемъ функцію x; функціи Y и Y' могутъ имѣть общимъ большимъ дѣлителемъ функцію y; наконецъ общій большой дѣлитель функцій U и U' можетъ быть функціею x и y. Означимъ этихъ дѣлителей соотвѣтственно чрезъ $D_x, D_y, D_{x,y}$, и сыщемъ частныя:

$$\frac{X}{D_x}=Q_x, \quad \frac{Y}{D_y}=Q_y, \quad \frac{U}{D_{x,y}}=A$$

$$\frac{X'}{D_x}=Q'_x, \quad \frac{Q'}{D_y}=Q'_y, \quad \frac{U'}{D_{x,y}}=B;$$

тогда данныя уравненія преобразятся въ слѣдующія:

$$F(x,y)=D_x.D_y.D_{x,y}.Q_x.Q_y.A=o$$

$$\Phi(x,y)=D_x.D_y.D_{x,y}.Q'_x.Q'_y.B=o.$$

Этимъ уравненіямъ, во-первыхъ, могутъ удовлетворять корни уравненій:

$$D_x=o, \quad D_y=o, \quad D_{x,y}=o.$$

Значенія x, выведенныя изъ уравненія $D_x=o$, удовлетворяютъ даннымъ при всякомъ значеніи y; потому что D_x не содержитъ этого неизвѣстнаго. Равнымъ образомъ значенія y уравненія $D_y=o$ будутъ удовлетворять даннымъ при всякомъ значеніи x. Наконецъ уравненіе $D_{x,y}=o$ неопредѣленное, т. е. удовлетворяется безчисленнымъ множествомъ значеній x и y. И такъ данныя уравненія $F(x,y)=o$ и $\Phi(x,y)=o$ тогда только могутъ имѣть опредѣленное число системъ соотвѣтственныхъ корней, когда общій большой дѣлитель функцій: $F(x,y)$ и $\Phi(x,y)$ не содержитъ ни x ни y, т. е. когда онъ постоянное количество.

Данныя уравненія могутъ быть еще удовлетворены значеніями x и y, уничтожающими въ одно время одного изъ множителей: Q_x, Q_y, A и одного изъ множителей : Q'_x, Q'_y, B.

Уравненія $Q_x=o$ и $Q'_x=o$ не могутъ существовать вмѣстѣ: ихъ первыя части не имѣютъ общимъ дѣлителемъ функцію x, и потому не могутъ уничтожаться для одного и того же значенія x. По той-же причинѣ, нельзя положить вмѣстѣ $Q_y=o$ и $Q'_y=o$. Прочіе случаи возможны, и даютъ уравненія, содержащія по одному только неизвѣстному, и потому не требующія исключенія. Но положивъ

$$A=o \text{ и } B=o,$$

мы имѣемъ два уравненія, изъ которыхъ каждое заключаетъ оба неизвѣстныя x и y. Для исключенія одного изъ этихъ неизвѣстныхъ, можно пользоваться способомъ уже извѣстнымъ; но здѣсь имѣетъ преимущество способъ основанный на нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя.

Въ этомъ способѣ встрѣчаются два случая, которыя мы разсмотримъ отдѣльно:

1) Расположимъ A и B по степенямъ x, и станемъ искать общаго большаго дѣлителя, не подвергая послѣдовательные остатки ни какимъ измѣненіямъ. Первый случай состоитъ въ томъ, что при каждомъ частномъ дѣленіи коеффиціентъ перваго члена дѣлимаго дѣлится нацѣло на коеффиціентъ перваго члена дѣлителя.

Положимъ, что степень A относительно x, не меньше степени B, которую означимъ чрезъ n; тогда должно дѣлить A на B; означимъ частное, которое будетъ цѣлая функція y чрезъ Q_1, а чрезъ R_1—остатокъ, котораго степень относительно x по крайней мѣрѣ единицею меньше n. Дѣленіе B на R дастъ въ частномъ какую-то цѣлую функцію y, которую означимъ чрезъ Q_2, и остатокъ R_2, котораго степень относительно x меньше $n-1$. Продолжая такимъ образомъ далѣе, мы дойдемъ до остатка R_p, не содержащаго x. Пусть $Q_1, Q_2, \ldots Q_{p-1}, Q_p$ будутъ частныя, соотвѣтствующія остаткамъ $R_1, R_2, \ldots R_{p-1}, R_p$. Основываясь на свойствѣ, что *дѣлимое равно произведенію дѣлителя на частное сложенному съ остаткомъ*, мы имѣемъ равенства:

$$A=B.Q_1+R_1,\ B=R_1.Q_2+R_2, \text{ и т. д. } R_{p-2}=R_{p-1}.Q_p+R_p.$$

Первое равенство показываетъ, что всѣ значенія x, и y, уничтожающія A и B, должны уничтожить и R_1, и на оборотъ: всѣ значенія x и y, уничтожающія B и R_1 должны уничтожать A. Слѣдовательно корни уравненій $A=o$ и $B=o$ совершенно тѣ же, что и корни уравненій $B=o$ и $R_1=o$.

Изъ равенства $B=R_1.Q_2+R_2$ видно, что корни уравненій $B=o$ и $R_1=o$ тѣ же, что и корни уравненій $R_1=o$ и $R_2=o$; поэтому уравненія $A=o$ и $B=o$ можно замѣнить уравненіями $R_1=o$ и $R_2=o$.

Продолжая эти разсмотрѣнія далѣе, заключаемъ наконецъ, что всѣ корни уравненій $A=o$ и $B=o$ должны удовлетворять уравненіямъ $R_{p-1}=o$ и $R_p=o$, и обратно. Но уравненіе $R_p=o$ содержитъ только y; поэтому оно можетъ быть принято за *конечное уравненіе*.

2) Ежели при нахожденіи общаго большаго дѣлителя функцій A и B, въ нѣкоторыхъ частныхъ дѣленіяхъ коеффиціентъ перваго члена дѣлимаго не *дѣлится* нацѣло на коеффиціентъ перваго члена дѣлителя; тогда частное будетъ дробная функція y. Положимъ, что это случилось съ остатками $R_{\kappa-2}$ и $R_{\kappa-1}$, и что

$$R_{\kappa-2}=R_{\kappa-1}.Q_\kappa+R_\kappa:$$

тогда нѣкоторыя значенія x и y, уничтожающія $R_{\kappa-2}$ и $R_{\kappa-1}$, могутъ обратить въ нуль знаменателя частнаго Q_κ; отъ того произведеніе $R_{\kappa-1}.Q_\kappa$ представится въ видѣ $\frac{o}{o}$, и остатокъ $R_\kappa=-R_{\kappa-1}.Q_\kappa$ можетъ не обращаться въ нуль. Равнымъ образомъ нѣкоторыя значенія x и y, уничтожающія R_κ и $R_{\kappa-1}$, могутъ обратить въ нуль знаменателя Q_κ, отъ чего $R_{\kappa-2}=R_{\kappa-1}.Q_\kappa$ будетъ вида $\frac{o}{o}$, и можетъ не обращаться въ нуль.

Это обстоятельство мы можемъ устранить, помноживши $R_{\kappa-1}$ на Y, — такую функцію y, чтобы частное Q'_κ отъ раздѣленія $R_{\kappa-2}.Y$ на $R_{\kappa-1}$ было цѣлая функція y; тогда будемъ имѣть равенство

$$R_{\kappa-2}.Y=R_{\kappa-1}.Q'_\kappa+R_\kappa,$$

изъ котораго видно, что значенія x и y, удовлетворяющія уравненіямъ $R_{\kappa-2}=o$ и $R_{\kappa-1}=o$, должны уничтожать R_κ, а значенія x и y, удовлетворяющія уравненіямъ $R_{\kappa-1}=o$ и R_κ, должны уничтожать произведеніе $R_{\kappa-2}.Y$. Но это произведеніе можетъ быть нулемъ, когда только $Y=o$, между тѣмъ какъ $R_{\kappa-2}$ не $=o$; въ такомъ случаѣ уравненія $R_{\kappa-1}=o$ и $R_\kappa=o$ будутъ имѣть корни, не принадлежащіе уравненію $R_{\kappa-2}=o$.

Положимъ теперь, что мы умножили дѣлимыя: $A_1, B_1, R_1, R_2, \ldots R_{p-2}$, соотвѣтственно на $Y_1, Y_2, \ldots Y_p$, для того, чтобы частныя $Q_1, Q_2, \ldots Q_p$ были цѣлыя функціи y; тогда мы будемъ имѣть равенства:

$$A\ Y_1 = B.Q_1 + R_1,\ B.Y_2 = R_1.Q_2 + R_2, \text{ и т. д. } R_{p-2}.Y_p = R_{p-1}.Q_p + R_p.$$

Изъ этихъ равенствъ и изъ сдѣланнаго замѣчанія слѣдуетъ, что уравненія $R_{p-1} = o$ и $R_p = o$, кромѣ корней уравненій $A = o$ и $B = o$, будутъ также содержать корни уравненій

$$Y_1 = o,\ Y_2 = o, \ldots Y_p = o,$$

не удовлетворяющія уравненіямъ $A = o$ и $B = o$. Слѣдовательно въ этомъ случаѣ $R_p = o$ не есть истинное конечное уравненіе. Однакожъ можно имъ пользоваться какъ конечнымъ, только съ условіемъ: отбросить тѣ значенія x и y, которыя не принадлежатъ уравненіямъ $A = o$ и $B = o$.

Такъ какъ A и B не имѣютъ общаго дѣлителя, то послѣдній остатокъ не можетъ быть тожественно нулемъ. Но въ нѣкоторыхъ случаяхъ онъ можетъ быть постояннымъ количествомъ, и тогда его нельзя приравнять нулю; слѣдовательно уравненія $A = o$ и $B = o$ не будутъ имѣть конечнаго уравненія, а потому не могутъ существовать вмѣстѣ.

Приложимъ эту теорію къ примѣрамъ.

Примѣръ I.

Пусть даны уравненія:

$$A = x^3 - 3yx^2 + (3y^2 - y + 1)x - (y^3 - y^2 + 2y) = o$$
$$B = x^2 - 2yx + (y^2 - y) = o.$$

для исключенія изъ нихъ x.

Раздѣливъ A на B, въ частномъ мы получимъ $Q_1 = x - y$, а въ остаткѣ $R_1 = x - 2y$. Раздѣливъ потомъ B на R_1, частное будетъ $Q_2 = x$, а остатокъ $R_2 = y^2 - y$ цѣлая функція y, не содержащая x. Слѣдовательно конечное уравненіе будетъ

$$y^2 - y = o,$$

и даетъ для y два корня: 1 и 0. Внеся ихъ въ остатокъ $R_1 = x - 2y = o$ для опредѣленія x, получимъ $x = 2$ и $x = o$. И такъ соотвѣтственные корни данныхъ уравненій суть: $(y_1 = 1,\ x_1 = 2)$, $(y_2 = o,\ x_2 = o)$.

Примѣръ II.

Исключимъ x изъ уравненій

$$F(x,y)=y^2x^5+(y^3-y^2)x^4-y^3x^3-y^4x^2-(y^5-y^4)x-y^5=o$$

$$\Phi(x,y)=(y^2+3y)x^5+(y^3+3y^2)x^4-(2y^2+3y)x^3-(2y^3-3y^2)x^2-y^2x+y^3=o.$$

Сдѣлавши опрощенія, показанныя въ началѣ этого §, получимъ

$$F(x,y)=y(x-1)(x+y)y(x^3-y^2)=o$$

$$\Phi(x,y)=y(x-1)(x+y)(x+1)[(y+3)x^2-y)]=o\ ;$$

откуда видно, что $F(x,y)$ и $\Phi(x,y)$ имѣютъ общаго дѣлителя

$$y(x-1)(x+y)\ ,$$

и потому данныя уравненія неопредѣленныя.

Освободивъ ихъ отъ этого дѣлителя, получимъ опредѣленныя уравненія:

$$Q_y.A=y(x^3-y^2)=o,$$

$$Q'_x.B=(x+1)[(y+3)x^2-y]=o,$$

которыя удовлетворяются положеніями:

$$1\begin{cases}Q_y=y=o\\ Q'_x=x+1=o\end{cases}\quad 2\begin{cases}Q_y=y=o\\ B=(y+3)x^2-y=o\end{cases}\quad 3\begin{cases}Q'_x=x+1=o\\ A=x^3-y^2=o\end{cases}\quad 4\begin{cases}A=x^3-y^2=o\\ B=(y+3)x^2-y=o.\end{cases}$$

1^e положеніе дастъ $(x=-1, y=o)$; 2^e $(x=o, y=o)$; 3^e $(x=-1,\ y=+\sqrt{-1})$ и $(x=-1,\ y=-\sqrt{-1})$. Чтобы рѣшить четвертую систему уравненій: $A=o$, $B=o$, исключимъ изъ нихъ x.

Такъ какъ первый членъ A не дѣлится нацѣло на B, то умножимъ A на $Y_1=y+3$, и раздѣлимъ произведеніе AY_1 на B; частное будетъ $Q_1=x$, а остатокъ

$$R_1=yx-y^2(y+3).$$

Первый членъ B не дѣлится нацѣло на первый членъ R_1; но помноживши B на $Y_2=y$, и раздѣливъ произведеніе BY_2 на R_1, получимъ въ частномъ цѣлую функцію $Q_2=(y+3)x+(y+3)^2y$ и остатокъ

$$R_2=y^3(y+3)^3-y^2=o.$$

Мы ввели въ продолженіи дѣйствія два множителя $Y_1=y+3$ и $Y_2=y$, которыхъ корни суть $y=-3$ и $y=o$; но изъ нихъ только второй удовлетворяетъ уравненію $R_2=o$, и будучи внесенъ въ уравненія $A=o$ и $B=o$, превращаетъ ихъ въ $x^3=o$ и $x^2=o$, которыя содержатъ два общихъ корня $x=o$. Слѣдовательно уравненіе $R_2=o$ не имѣетъ лишнихъ корней, и потому оно есть истинное конечное уравненіе.

Примѣръ III.

Возьмемъ еще уравненія

$$A=yx^3-3x+1=o$$

$$B=(y-1)x^2+x-2=o.$$

Чтобы частное отъ раздѣленія A на B было цѣлое, помножимъ A на $Y_1=(y-1)^2$; тогда въ остаткѣ получимъ

$$R_1=(y^2-5y+3)x-y^2+4y-1.$$

Помноживши B на $Y_2=(y^2-5y+3)$, дѣлимъ произведеніе BY_2 на R_1, остатокъ будетъ

$$R_2=y^5-10y^4+37y^3-64y^2+52y-16=o.$$

Легко увѣриться, что корни множителя $Y_2=(y^2-5y+3)^2=o$ не удовлетворяютъ уравненію $R_2=o$. Но оно удовлетворяется корнями множителя $Y_1=(y-1)^2=o$. Чтобы узнать, будутъ ли эти корни принадлежать уравненіямъ $A=o$ и $B=o$, положимъ въ этихъ уравненіяхъ $y=1$; отъ того они обратятся въ слѣдующія:

$$x^3-3+1=o\,,$$

$$x-2=o\,,$$

которыя не имѣютъ общаго множителя. Слѣдовательно уравненіе $R_2=o$ содержитъ два посторонниxъ корня $y=1$, и будучи освобождено отъ нихъ (чрезъ раздѣленіе R_2 на $(y-1)^2$), даетъ истинное конечное уравненіе

$$y^3-8y^2+20y-10=o\,,$$

которое мы уже нашли по первому способу исключенія.

§ **51.** Должно сдѣлать нѣкоторыя замѣчанія касательно изложеннаго способа исключенія.

1) Въ продолженіи дѣйствія можно поступать съ остатками R_1, R_2,

$R_3,\ldots R_{p-1}$ такъ, какъ мы поступали вначалѣ съ функціями $F(x,y)$ и $\Phi(x,y)$, т. е. каждый новый остатокъ можно освобождать отъ множителей, содержащихъ только x или только y. Чрезъ то дѣйствіе дѣлается проще. Но опускаемые множители могутъ унести съ собою нѣкоторые корни уравненій $A=o$ и $B=o$; тогда должно отъискать эти корни и присоединить ихъ къ корнямъ уравненія $R_p=o$.

2) Чтобы получить полиномы A и B; неимѣющіе общихъ множителей, должно искать общаго большаго дѣлителя между $\dfrac{F(x,y)}{X.\ Y}=U$ и $\dfrac{\Phi(x.y)}{X'.Y'}=U'$. Положимъ, что при этомъ дѣйствіи получились остатки: R'_1, $R'_2,\ldots R'_{q-3}$, R'_{q-2}, R'_{q-1}, R'_q. Ежели $R'_q=o$, то R'_{q-1} будетъ общій наибольшій дѣлитель функцій U и U', а потому $\dfrac{U}{R'_{q-1}}=A$ и $\dfrac{U'}{R'_{q-1}}=B$. Но легко увѣриться, что нѣкоторые корни уравненій $A=o$ и $B=o$ должны удовлетворять уравненіямъ $\dfrac{R'_{q-3}}{R'_{q-}}=o$ и $\dfrac{R'_{q-2}}{R'_{q-1}}=o$, а другіе множителямъ, на которые мы сокращали остатки $R_1,\ldots R_{p-2}$, R_{p-1}; слѣдовательно уравненія $A=o$ и $B=o$ можно замѣнить уравненіями $\dfrac{R'_{q-3}}{R'_{q-1}}=o$ и $\dfrac{R'_{q-2}}{R'_{q-1}}=o$, только съ условіемъ: прибавить къ корнямъ этихъ уравненій корни опускаемыхъ множителей, и отбросить корни, не принадлежащіе уравненіямъ $A=o$ и $B=o$.

3) Когда данныя уравненія опредѣленныя и *совмѣстныя*, то послѣдній остатокъ R_p, представляющій первую часть конечнаго уравненія, будетъ всегда цѣлая функція y. Предъидущій остатокъ R_{p-1}, или послѣдній дѣлитель содержитъ x; но степень его относительно этого неизвѣстнаго вообще ниже степени данныхъ уравненій. А потому, для полученія конечнаго уравненія по x, удобнѣе исключать y изъ уравненій $R_p=o$ и $R_{p-1}=o$, нежели изъ данныхъ.

4) Чтобы опредѣлить соотвѣтственныя значенія x и y, должно корни уравненія $R_p=o$ внести послѣдовательно вмѣсто y въ уравненіе $R_{p-1}=o$; чрезъ то мы получимъ столько уравненій по x, сколько этихъ корней, и въ состояніи будемъ опредѣлить значенія x. Ежели последовательные остатки не были подвергаемы сокращеніямъ, то найденныя значенія x будутъ всѣ тѣ, которыя удовлетворяютъ уравненіямъ $A=o$ и $B=o$.

Уравненіе $R_{p-1}=o$ можетъ быть выше первой степени относительно

x; поэтому кажется, что въ такомъ случаѣ, каждому значенію y будетъ соотвѣтствовать необходимо нѣсколько значеній x. Но это не-всегда справедливо; потому что взятое значеніе y можетъ уничтожить въ уравненіи $R_{p-1}=o$ нѣсколько первыхъ членовъ, отъ чего степень уравненія $R_{p-1}=o$ понизится, и число значеній x будетъ меньше.

Если какое-либо значеніе $y=\beta$ уничтожаетъ всѣ члены уравненія $R_{p-1}=o$, то это значитъ, что R_{p-1} имѣетъ множителемъ $y-\beta$, и потому выгоднѣе, прежде изъисканія значеній x, освободить R_{p-1} отъ всѣхъ множителей, независимыхъ отъ y. Положимъ, что произведеніе всѣхъ этихъ множителей есть $\Phi\ (y)$, и что

$$\frac{R_{p-1}}{\Phi(y)}=ax^{\mu}+bx^{\mu-1}+cx^{\mu-2}+\ldots+kx+l.$$

Вставивши сюда β вмѣсто y, первые коеффиціенты a, b, c,.... опять могутъ уничтожаться. Но не возможно, чтобы они уничтожились всѣ; потому что тогда они имѣли бы $y-\beta$ общимъ множителемъ. Когда $a,b,c,\ldots k$ уничтожаются, а l нѣтъ; то $\frac{R_p}{y}$ не можетъ быть нулемъ, и $y=\beta$ не будетъ соотвѣтствовать никакому значенію x. Если же это обстоятельство встрѣтится, когда послѣдовательные остатки были подвергаемы сокращеніямъ; то значенію $y=\beta$ можетъ соотвѣтствовать какое-либо значеніе x, уничтожающее одинъ изъ предъидущихъ остатковъ, или одинъ изъ множителей, на которые мы сокращали остатки.

§ **52.** Изъ этихъ замѣчаній видно, что способъ исключенія неизвѣстныхъ чрезъ нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя имѣетъ свои невыгоды, при изъисканіи истинныхъ значеній неизвѣстныхъ. Но кромѣ изложенныхъ нами двухъ способовъ, есть еще другіе, которые удобно прилагаются къ частнымъ случаямъ: Важнѣйшіе изъ нихъ суть слѣдующіе:

1) Когда одно изъ данныхъ уравненій $F(x,y)=o$ и $\Phi(x,y)=o$ разрѣшается раціональнымъ или радикальнымъ образомъ относительно x, то внеся въ другое вмѣсто x радикальную функцію y, его изображающую, мы получимъ уравненіе, содержащее только y. Если это уравненіе ирраціональное, то иногда легче преобразовать его въ раціональное, нежели исключить x изъ данныхъ уравненій.

2) Положимъ, что данныя уравненія одинакой степени относительно x, и оба содержатъ членъ, независимый отъ x. Изобразимъ ихъ чрезъ

$$(a) \qquad ax^{n}+bx^{n-1}+\ldots+cx+d=o$$

(β) $$a'x^n+b'x^{n-1}+\ldots+c'x+d'=o.$$

Помноживши первое на a', а второе на a, и вычтя одно изъ другаго, мы получимъ уравненіе

(γ) $$(a'b-ab')x^{n-1}+\ldots+(a'c-ac')x+a'd-ad'=o$$

степени $n-1$ относительно x. Помноживши потомъ уравненіе (α) на d', а уравненіе (β) на d, вычтя одно изъ другаго, и освободивъ разность отъ множителя x, мы находимъ уравненіе

(δ) $$(ad'-a'd)x^{n-1}+\ldots+(cd'-c'd)=o.$$

Такимъ образомъ уравненія (α) и (β) замѣнились двумя уравненіями степени $n-1$ относительно x.

Ежели вмѣсто ур. (β), мы имѣемъ уравненіе низшей степени, на пр. ур.

(β') $$a''+b''^{-1}+\ldots+c'x+d'=o;$$ $a''x^{n'}+b''x^{n'-1}+$

то по предъидущему получимъ уравненіе (δ) степени $n-1$. Помноживши ур. (β')на $x^{n-n'}$, мы будемъ имѣть уравненіе степени n, съ которымъ поступаемъ такъ какъ съ (β), и получаемъ ур. (γ) также степени $n-1$.

Поступая съ уравненіями (γ) и (δ) такъ же какъ и съ данными, мы получимъ два уравненія степени $n-2$ относительно x. Продолжая это дѣйствіе далѣе, мы дойдемъ до двухъ уравненій 1-й степени относительно x, которыя наконецъ даютъ одно уравненіе только по y.

§ 53. Положимъ, что дано n уравненій

(a) $$U_1=o,\ U_2=o,\ U_3=o,\ldots U_n=o$$

съ m неизвѣстными $x, y, z, \ldots v$. Въ § 45 мы разобрали случай, когда $n=m$; разсмотримъ теперь случаи $n>m$ и $n<m$.

1) Когда $n>m$, тогда для опредѣленія $x, y, z, \ldots v$, достаточно взять m уравненій:

$$U_1=o,\ U_2=o,\ldots U_m=o.$$

Изъ нихъ по способу, изложенному въ § 45, мы выведемъ уравненія, содержащія только по одному неизвѣстному. Пусть эти конечныя уравненія будутъ

(b) $$X=o,\ Y=o,\ Z=o,\ldots V=o;$$

они опредѣлятъ нѣсколько группъ соотвѣтственныхъ значеній $x, y, z, \ldots v$, которыя означимъ опять чрезъ $(x_1, y_1, z_1, \ldots v_1)$, $(x_2, y_2, z_2, \ldots, v_2)$,

$(x_3, y_3, z_3, \ldots v_3)$ и пр. Вносяпослѣдовательно эти группы вмѣсто $x, y, z, \ldots v$ въ оставшіяся $n-m$ уравненій:

$$U_{m+1}=o,\ U_{m+2}=o, \ldots U_n=o,$$

мы получимъ нѣсколько системъ уравненія

$$U'_{m+1}=o,\ U'_{m+2}=o, \ldots U'_n=o$$

$$U''_{m+1}=o,\ U''_{m+2}=o, \ldots U''_n=o,$$

и т. д.

Изъ которыхъ, чрезъ перемноженіе, составляемъ уравненія

$$(c) \qquad U'_{m+1} \cdot U''_{m+1} \ldots=o,\ U'_{m+2} \cdot U''_{m+2} \ldots=o, \ldots, U'_n \cdot U''_n \ldots=o.$$

Первыя части послѣднихъ уравненій симметричны относительно всѣхъ корней каждаго изъ уравненій (b), а потому онѣ могутъ быть выражены раціональными функціями коеффиціентовъ этихъ уравненій Но какъ эти коеффиціенты суть раціональныя функціи коеффиціентовъ данныхъ уравненій; то уравненія (c) не будутъ содержать никакихъ неизвѣстныхъ количествъ. Слѣдовательно они будутъ представлять условія, которымъ должны удовлетворять коеффиціенты данныхъ уравненій, чтобы эти уравненія могли существовать вмѣстѣ.

2) Если же m—число неизвѣстныхъ болѣе n—числа уравненій; то нельзя получить уравненій (b). Но, приписавъ $m-n$ неизвѣстнымъ совершенно произвольныя частныя значенія, и поступая по § 45, мы получимъ n уравненій для опредѣленія остальныхъ n неизвѣстныхъ. Значенія послѣднихъ будутъ измѣняться съ измѣненіемъ значеній, приписываемыхъ первымъ $m-n$ неизвѣстнымъ, а потому каждое изъ m неизвѣстныхъ можетъ имѣть безчисленное множество значеній. И такъ въ этомъ случаѣ данныя уравненія *неопредѣленныя*. Ихъ всегда можно, по § 45, замѣнить другими n неопредѣленными уравненіями, изъ которыхъ каждое будетъ содержать $m-n+1$ неизвѣстныхъ.

О преобразованіи ирраціональныхъ уравненій въ раціональныя.

§ 54. Первая часть всякаго алгебраическаго уравненія, составленнаго изъ вопроса, заключающаго n неизвѣстныхъ: $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, представляется въ видѣ ирраціональной или, лучше сказать, *радикальной* (*) функціи порядка μ, которую мы условились изображать чрезъ

(*) Г. Остроградскій раздѣляетъ ирраціональныя функціи на: *собственно ирраціо-*

$$v=f(r', r'',\ldots\sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''},\ldots),$$

гдѣ r', r'',....., p', p'' означаютъ радикальныя функціи порядковъ не выше $\mu-1$, а n', n'',.... первоначальныя числа. Мы обѣщали въ § 3 преобразовать эту функцію въ раціональную; и такъ займемся этимъ преобразованіемъ.

§ 55. Прежде всего замѣтимъ, что функцію v можно всегда привести въ такое состояніе, что числитель и знаменатель ея не будутъ содержать никакихъ дробныхъ функцій.

Положимъ, что

$$(1)\qquad r'=\frac{s'}{t'},\quad r''=\frac{s''}{t''},\ldots\quad p'=\frac{\sigma'}{\tau'},\quad p''=\frac{\sigma''}{\tau''},\ldots;$$

тогда радикалы $\sqrt[n']{p'}$, $\sqrt[n'']{p''}$,... могутъ быть замѣнены дробями

$$\frac{\sqrt[n']{\sigma'}}{\sqrt[n']{\tau'}},\quad \frac{\sqrt[n'']{\sigma''}}{\sqrt[n'']{\tau''}},\ldots\ldots$$

Ясно, что приведя къ одному знаменателю всѣ члены числителя функціи v, этотъ числитель приметъ видъ $\frac{S}{T}$, гдѣ S и T не будутъ содержать дробныхъ радикальныхъ функцій порядка $\mu-1$. Тоже можно сдѣлать съ знаменателемъ функціи v; означивъ его чрезъ $\frac{S'}{T'}$, имѣемъ:

$$(2)\qquad v=\frac{S}{T}:\frac{S'}{T'}=\frac{ST'}{S'T},$$

гдѣ ST' и $S'T$ не заключаютъ дробныхъ функцій порядка $\mu-1$.

Поэтому радикальная функція перваго порядка можетъ быть приведена въ такое состояніе, что числитель и знаменатель ея не будутъ содержать дробныхъ раціональныхъ функцій.

Приведя въ такое состояніе радикальныя функціи 1-го порядка, вхо-

---

нальныя и *радикальныя* (см. Лекціи Алгеб. и Трансц. Анализа, часть 2-я стр. 512). Первыя содержатъ рѣшеніе какихъ нибудь алгебраическихъ уравненій, а вторыя содержатъ только рѣшеніе уравненій вида $x^m-A=o$, т. е. извлеченіе радикаловъ. Первые 9 листовъ этой книги были уже отпечатаны, когда я получилъ 2-ю часть лекцій нашего Геометра.

дящія въ радикальную функцію 2-го порядка, и давши потомъ ей видъ (2), она не будетъ содержать никакихъ дробныхъ функцій въ числителѣ и въ знаменателѣ.

Сдѣлавши все это съ радикальными функціями 2-го порядка, входящими въ радикальную функцію 3-го порядка, можно потомъ послѣднію привести къ виду (2).

Положимъ вообще, что въ выраженіяхъ (1), функціи s', s'',.,. σ', σ'',... t', t'',.... τ', τ'',.... не содержатъ никакихъ дробныхъ функцій; тогда функція v, приведенная къ виду (2) также не будетъ содержать въ числителѣ и въ знаменателѣ никакихъ дробныхъ функцій. Для поясненія приложимъ сказанное къ радикальной функціи 3-го порядка

$$\frac{\dfrac{1}{x+\sqrt{\left(\dfrac{1}{x-1}\right)}}+\sqrt[3]{\left(x^2+\sqrt{\left(\dfrac{x-\sqrt{\left(\dfrac{1}{x}\right)}}{x+1}\right)}\right)}}{\dfrac{x+3}{2-\sqrt{x}}+\sqrt{\left(\dfrac{1+\sqrt{\left(\dfrac{x^2-1}{4x}\right)}}{x+\sqrt[3]{x}}\right)}}.$$

Радикальныя функціи перваго порядка, сюда входящія суть

$$\frac{1}{x+\sqrt{\left(\dfrac{1}{x-1}\right)}},\quad \frac{x-\sqrt{\left(\dfrac{1}{x}\right)}}{x+1},\quad \frac{x+3}{2-\sqrt{x}},\quad \frac{1+\sqrt{\left(\dfrac{x^2-1}{4x}\right)}}{x+\sqrt[3]{x}},$$

третья не заключаетъ въ числителѣ и въ знаменателѣ дробныхъ функцій x, а прочія можно преобразовать въ слѣдующія:

$$(1\text{-я})=\frac{\sqrt{(x-1)}}{x\sqrt{(x-1)}+1},\quad (2\text{-я})=\frac{x\sqrt{x}-1}{(x+1)\sqrt{x}},\quad (4\text{-я})=\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{(x^2-1)}}{2(x+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}};$$

отъ чего v превратится въ

$$v=\frac{\dfrac{\sqrt{(x-1)}}{x\sqrt{(x-1)}+1}+\sqrt[3]{\left(x^2+\dfrac{x\sqrt{x}-1}{(x+1)\sqrt{x}}\right)}}{\dfrac{x+3}{2-\sqrt{x}}+\sqrt{\left(\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{(x^2-1)}}{2(x+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}\right)}}.$$

Легко видѣть, что

$$\sqrt[3]{\left(x^2+\frac{x\sqrt{x-1}}{(x+1)\sqrt{x}}\right)}=\frac{\sqrt[3]{[x^2(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x-1}]}}{\sqrt[3]{(x+1)\sqrt{x}}},$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{(x^2-1)}}{2(x+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}\right)}=\frac{\sqrt[3]{[2\sqrt{x}+\sqrt{(x^2-1)}]}}{\sqrt[3]{2(x+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}};$$

поэтому v приметъ видъ

$$v=\frac{\dfrac{\sqrt{(x-1)}}{x\sqrt{(x-1)}+1}+\dfrac{\sqrt[3]{[x^2(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x-1}]}}{\sqrt[3]{(x+1)\sqrt{x}}}}{\dfrac{x+3}{2-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt[3]{[2\sqrt{x}+\sqrt{(x^2-1)}]}}{\sqrt[3]{2(x+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}}}.$$

Наконецъ приведя ее къ виду (2), имѣемъ

$$v=\frac{\{\sqrt{(x-1)}\sqrt[3]{(x+1)\sqrt{x}}+[x\sqrt{(x-1)}+1]\sqrt[3]{[x^2(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x-1}]}\}(2-\sqrt{x})\sqrt[3]{2(x+\sqrt{x}\sqrt{x})}}{\{(x+3)\sqrt[3]{2(x+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}+(2-\sqrt{x})\sqrt{[2\sqrt{x}+\sqrt{(x^2-1)}]}\}[x\sqrt{(x-1)}+1]\sqrt[3]{(x+1)\sqrt{x}}}.$$

Теперь v не содержитъ въ числителѣ и въ знаменателѣ никакой дробной функціи.

И такъ всякую радикальную функцію v можно привести къ виду

$$v=\frac{\Phi(\varphi_1,\ \varphi_2,\ldots\sqrt[n']{\theta_1},\ \sqrt[n'']{\theta_2},\ldots\sqrt[n^{(m)}]{\theta_m})}{F(\varphi_1,\ \varphi_2,\ldots\sqrt[n']{\theta_1},\ \sqrt[n']{\theta_2},\ldots\sqrt[n^{(m)}]{\theta_m})},$$

гдѣ Φ и F означаютъ дѣйствія, въ которыя не входитъ дѣленіе надъ x_1, $x_2,\ldots x_n$. Поэтому функцію вида

$$\Phi(\varphi_1,\ \varphi_2,\ldots\sqrt[n']{\theta_1},\ \sqrt[n'']{\theta_2},\ldots\sqrt[n^{(m)}]{\theta_m})$$

можно назвать *цѣлою радикальною функціею относительно* x_1, $x_2,\ldots x_n$ *порядка* μ.

§ 56. Чтобы функція v была нулемъ для конечныхъ значеній $x_1, x_2, \ldots x_n$, ея числитель долженъ быть нулемъ ; поэтому всѣ корни уравненія $v=o$, должны удовлетворять уравненію

$$(3) \qquad \Phi(\varphi_1,\ \varphi_2, \ldots \sqrt[n']{\theta_1},\ \sqrt[n'']{\theta_2}, \ldots \sqrt[n^{(m)}]{\theta_m}) = o.$$

Наоборотъ, нельзя сказать, чтобы всѣ корни послѣдняго уравненія удовлетворяли уравненію $v=o$; потому что нѣкоторые изъ нихъ могутъ уничтожать знаменателя функціи v, отъ чего v обратится въ $\frac{o}{o}$, и можетъ имѣть значеніе, неравное нулю. Это значеніе по извѣстнымъ правиламъ (*) можетъ быть отыскано, и тогда мы въ состояніи судить, будутъ ли корни уравненія (3) удовлетворять уравненію $v=o$, или нѣтъ (**). Этихъ разсмотрѣній не нужно, когда знаменатель функціи v есть количество постоянное.

§ 57. Здѣсь предполагается, что всѣ радикалы $\sqrt[n']{\theta_1}$, $\sqrt[n'']{\theta_2}, \ldots \sqrt[n^{(m)}]{\theta_m}$ не извлекомы, т. е. не могутъ быть выражены радикальными функціями порядка $\mu-1$. Означимъ одинъ изъ нихъ чрезъ $\sqrt[n]{\theta}$, и положимъ $\sqrt[n]{\theta}=z$, т. е. $z^n=\theta$. Такъ какъ первая часть уравненія (3) есть цѣлая раціональная функція относительно радикаловъ $\sqrt[n']{\theta_1}$, $\sqrt[n'']{\theta_2}, \ldots \sqrt[n^{(m)}]{\theta_m}$; то, можно ей дать видъ

$$(4) \qquad \Phi(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots + A_n z^n + \ldots A_k z^k,$$

гдѣ A_0, A_1, A_2, $A_3, \ldots A_n, \ldots A_k$ представляютъ радикальныя функціи порядка μ, не содержащія радикала z.

Помножая уравненіе $z^n=\theta$, послѣдовательно на z, z^2, $z^3, \ldots$ и т. д., и замѣняя z^n чрезъ θ, находимъ

$$z^{n+1}=\theta z,\ z^{n+2}=\theta z^2,\ z^{n+3}=\theta z^3, \ldots z^{n\sigma}=\theta^\sigma,\ z^{n\sigma+\tau}=\theta^\sigma z^\tau;$$

отсюда слѣдуетъ, что степень z^λ, когда $\lambda > n-1$, можно всегда замѣнить выраженіемъ $\theta^\sigma z^\tau$, гдѣ σ и τ удовлетворяютъ условію $\lambda = n\sigma+\tau$ и

(*) Смотр. Дифференціальное исчисленіе.

(**) Эти изъисканія иногда бываютъ весьма затруднительны, и даже въ нѣкоторыхъ случаяхъ неисполнимы, а именно когда корни несоизмѣримые.

$\tau < n$ (*). Замѣнивъ подобными выраженіями всѣ степени z, превышающія z^{n-1}, функція v приметъ видъ

$$\varphi(z)=(A_0+A_n\theta+\ldots A_{ns}\theta^s)+(A_1+A_{n+1}\theta+\ldots A_{ns+1}\theta^s)z+\ldots+(A^{n-1}+\ldots)z^{n-1}\,.$$

или

$$(5)\qquad \varphi(z)=A+A'z+A''z^2+A'''z^3+\ldots+A^{(n-1)}z^{n-1}.$$

Такимъ образомъ въ уравненіи (4) исчезли всѣ степени z, превышающія z^{n-1}.

Прежде, нежели приступимъ къ преобразованію уравненія (5), разсмотримъ нѣкоторыя свойства *радикаловъ*.

§ **58.** Радикалъ $z=\sqrt[n]{\theta}$, какъ корень уравненія $z^n-\theta=o$, имѣетъ n значій. Означивъ чрезъ u и u' два такія значенія, и положивъ $\frac{u'}{u}=y$, т. е. $u'=uy$, имѣемъ

$$u^n=\theta \text{ и } u^ny^n=\theta,$$

а потому

$$\theta y^n=\theta \text{ или } y^n=1.$$

И такъ, зная u— одно изъ значеній радикала, мы получимъ другое, помноживши u на одинъ изъ корней уравненія $y^n=1$.

Уравненіе $y^n-1=o$ удовлетворено положеніемъ $y=1$; прочіе же корни должны удовлетворять уравненію

$$(6)\qquad \frac{y^n-1}{y-1}=y^{n-1}+y^{n-2}+y^{n-3}+\ldots+y=o.$$

Ежели α есть корень этого уравненія, то αu будетъ корень уравненія $z^n-\theta=o$. Степень α^κ, гдѣ κ цѣлое положительное число, также удовлетворяетъ уравненію $y^n-1=o$; потому что

$$(\alpha^\kappa)^n=\alpha^{\kappa n}=(\alpha^n)^\kappa=1;$$

слѣдовательно всѣ степени α:

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ldots\alpha^\kappa,\ldots$$

будутъ также корни уравненія (6).

(*) σ и τ суть: частное и остатокъ отъ дѣленія λ на n, и потому τ можетъ быть какое нибудь цѣлое число, начиная отъ o до $n-1$.

Когда $\kappa>n-1$, тогда можно положить $\kappa=n.\sigma+\tau$ (гдѣ τ можетъ быть всякое цѣлое положительное число меньшее $n-1$); отъ того будетъ

$$a^{\kappa}=a^{n\sigma+\tau}=a^{n\sigma}.a^{\tau};$$

но какъ $a^n=1$, то $a^{n\sigma}=1$, и $a^{\kappa}=a^{\tau}$. Поэтому всѣ степени a, превышающія a^{n-1}, можно замѣнить членами ряда

$$(7)\qquad a,\ a^2,\ a^3,\ldots a^{n-1}.$$

Этотъ рядъ представляетъ всѣ корни уравненія (6), когда n число первоначальное; потому, что тогда всѣ его члены разные. Допустивъ противное, наприм., что $a^{\sigma}=a^{\tau}$ при $\tau<\sigma<n$, находимъ $\frac{a^{\sigma}}{a^{\tau}}=a^{\sigma-\tau}=1$, или $a^{\omega}=1$, положивъ $\sigma-\tau=\omega$. Такъ какъ n число первоначальное и $\omega<n$, то ω и n не будутъ имѣть общихъ дѣлителей: въ такомъ случаѣ, какъ извѣстно изъ началъ Алгебры, можно всегда найти такія два цѣлыя, положительныя числа μ и ν, чтобы $\omega\lambda-n\mu=1$; отъ того

$$a^{\omega\lambda}=a^{n\mu+1}=a^{n\mu}.a.$$

Но какъ $a^{\omega}=1$ и $a^n=1$, то $a^{\omega^{\lambda}}=1$ и $a^{n\mu}=1$, а потому

$$a=1.$$

Чего быть не можетъ; потому что a есть корень уравненія (6), которое не удовлетворяется положеніемъ $y=1$. И такъ всѣ члены ряда

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ldots a^{n-1}$$

неравные, и представляютъ всѣ корни уравн. $y^n-1=0$. Поэтому

$$u,\ ua,\ ua^2,\ldots ua^{n-1}$$

также всѣ неравные, и представляютъ всѣ корни ур. $z^n-\theta=0$ или всѣ значенія радикала $\sqrt[n]{\theta}$.

Такъ какъ $y=1$, не удовлетворяетъ уравненію (6), то всѣ корни этого уравненія будутъ члены ряда (7). Взявши одинъ какой нибудь изъ нихъ a^{κ}, возвыся его въ степени $2, 3,\ldots n-1$, мы получимъ рядъ

$$(8)\qquad a^{\kappa},\ (a^{\kappa})^2,\ (a^{\kappa})^3, \ldots (a^{\kappa})^{n-1},$$

состоящій изъ тѣхъ же членовъ, какъ и рядъ (7), только расположенныхъ въ другомъ порядкѣ, т. е. (8) будутъ также представлять всѣ корни уравненія (6). Это легко объяснить слѣдующимъ образомъ:

Степень a^{κ} есть корень уравненія $y^n=1$, а потому

$$(a^{\kappa})^n=1.$$

Возвышая обѣ части этого равенства послѣдовательно въ степени 2, 3,...$n-1$, n, получаемъ:

$$(a^{\kappa})^{2n}=[(a^{\kappa})^2]^n=1$$

$$(a^{\kappa})^{3n}=[(a^{\kappa})^3]^n=1$$

и т. д.

$$(a^{\kappa})^{(n-1)n}=[(a^{\kappa})^{n-1}]^n=1;$$

отсюда видно, что (8) суть корни уравненія $y^n=1$, и легко увѣриться, что они всѣ разные, и не равны 1. Поэтому они должны быть члены ряда (7).

Для примѣра, пусть $n=5$, и a корень уравненія

$$(5)\qquad y^4+y^3+y^2+y+1=0;$$

то a, a^2, a^3, a^4 будутъ представлять всѣ корни этого уравненія. Взявши одинъ изъ нихъ напр. a^3, составимъ степени

$$(a^3),\ (a^3)^2,\ (a^3)^3,\ (a^3)^4;$$

эти степени опять представляютъ всѣ корни a, a^2, a^3, a^4. Въ самомъ дѣлѣ

$$(a^3)^1=a^3$$

$$(a^3)^2=a^6=a^5.a=a$$

$$(a^3)^3=a^9=a^5.a^4=a^4$$

$$(a^3)^4=^{12}=a^{10}.a^2=a^{2.5}.a^2=a^2.$$

Чтобы получить симметричныя функціи корней уравненія $y^n=1$, должно въ уравненіяхъ (20) и (22) § 37, положить $a_1=a_2=a_3=..=a_{m-1}=o$. Отъ того имѣемъ:

$$S_1=1+a+a^2+...+a^{n-1}=o$$

$$S^2=1+(a)^2+(a^2)^2+...+(a^{n-1})^2=o$$

$$S_3=1+(a)^3+(a^2)^3+...+(a^{n-1})^3=o$$

и т. д.

$$S_{n-1}=1+(a)^{n-1}+(a^2)^{n-1}+...+(a^{n-1})^{n-1}=o$$

$$S_n=S_0=1+(a)^n+(a^2)^n+...+(a^{n-1})^n=n$$

$$S_{n+1}=1+(a)^{n+1}+(a^2)^{n+1}+...+(a^{n-1})^{n+1}=o \text{ и т. д.}$$

Вообще S_p будетъ $=o$ или $=n$, смотря по тому, будетъ ли p дѣлиться на n съ остаткомъ или безъ остатка.

§ **59.** Уравненіе (5) $\Phi(z)=o$ должно существовать вмѣстѣ съ уравненіемъ $z^n=\theta$. Исключивъ изъ нихъ z, получимъ уравненіе, не содержащее радикала $z=\sqrt[n]{\theta}$, Для этого, по § 44, должно вставить въ уравненіе $\Phi(z)=o$ вмѣсто z корни уравненія $z^n-\theta=o$, которыхъ можно изобразить чрезъ

$$z,\ az,\ a^2z,\ a^3z,...a^{n-1}z,$$

гдѣ a означаетъ одинъ изъ корней уравненія, а потомъ взять произведеніе

$$(9)\qquad \Phi(z).\Phi(az).\Phi(a^2z).\Phi(a^3z)...\Phi(a^{n-1}z)=o,$$

которое будетъ представлять конечное уравненіе.

Замѣнивъ здѣсь z какимъ-либо изъ корней az, az^2,...$a^{n-1}z$ равенство не нарушится; потому что 1-я часть симметрична относительно корней уравненія $z^n=\theta$. Для большей ясности въ самомъ дѣлѣ вставимъ $a^\kappa z$ вмѣсто z, полагая $o<\kappa<n-1$; отъ того первая часть уравненія (9) обратится въ

$$\Phi(a^\kappa z).\Phi(a^{\kappa+1}z).\Phi(a^{\kappa+2}z)...\Phi(a^{\kappa+n-1}z)$$

$$=\Phi(a^nz)\Phi(a^{n+1}z)...\Phi(a^{\kappa+\kappa-1}z).\Phi(a^\kappa z)\Phi(a^{\kappa+1}z)...\Phi(a^{n-1}z);$$

но это, отъ $a^n=1$, обращается въ

$$\varphi(z)\varphi(az)\ldots\varphi(a^{\kappa-1}z)\varphi(a^{\kappa}z)\ldots\varphi(a^{n-1}z)=o.$$

Совершивъ въ уравненіи (9) назначенныя умноженія, это уравненіе приметъ видъ

$$P_0+P_1z+P_2z^2+P_3z^3+\ldots+P_nz^n+\ldots+P_nz^{\kappa}=o,$$

гдѣ P_0, P_1, P_2,...P_κ означаютъ цѣлыя функціи a и остальныхъ радикаловъ порядка μ, кромѣ z.

Замѣтивъ равенство $z^\lambda=z^{n\sigma+\tau}=\theta^\sigma z^\tau$, гдѣ $\lambda>n-1$ и $o<\tau<n$, послѣднему уравненію можно дать видъ

$$(P_0+P_n\theta+\ldots+P_{nt}\theta^t)+(P_1+P_{n+1}\theta+\ldots+P_{nt+1}\theta^t)z+\ldots(A_{n-1}+\ldots)z^{n-1}=o$$

или

(10)
$$P+P'z+P''z^2+\ldots+P^{(n-1)}z^{n-1}=o.$$

Вставивши сюда az вмѣсто z, получаемъ уравненіе

$$P+P'az+P''a^2z^2+P^{(n-1)}a^{n-1}z^{n-1}=o,$$

которое должно быть тожественное съ уравненіемъ (10), и потому имѣемъ:

$$P'=P'a,\ P''=P''a^2,\ P'''=P'''a^3,\ldots P^{(n-1)}=P^{(n-1)}a^{n-1}$$

или

$$P'(1-a)=o,\ P''(1-a^2)=o,\ P'''(1-a^3)=o,\ldots P^{(n-1)}(1-a^{n-1})=o.$$

Но какъ $1-a$, $1-a^2$, $1-a^3$,...$1-a^{n-1}$ не равны нулю, потому что 1 не есть корень уравненія (6); то должно быть

$$P'=o,\ P''=o,\ P'''=o,\ldots P^{n-1}=o.$$

Слѣдовательно уравненіе (10) приводится къ слѣдующему

(11)
$$P=(P_0+P_n\theta+\ldots+P_{nt}\theta^t)=o.$$

Легко увѣриться, что это уравненіе не содержитъ a, т. е. P_0, P_n,...P_{nt} не содержатъ a. Для этого возмемъ вообще полиномъ вида

$$p=a+ba+ca^2+da^3+\ldots+ka^{n-1},$$

гдѣ a, b, c,...k не зависятъ отъ α, и положимъ, что онъ не измѣняетъ своего значенія отъ перемѣны α на одинъ изъ корней α^2, α^3,...α^{n-1}. Принявъ это, мы имѣемъ равенства:

$$p=a+b\alpha+c\alpha^2+d\alpha^3+\ldots+k\alpha^{n-1}$$

$$p=a+b\alpha^2+c(\alpha^2)^2+d(\alpha^2)^3+\ldots+k(\alpha^2)^{n-1}$$

$$p=a+b\alpha^3+c(\alpha^3)^2+d(\alpha^3)^3\ldots+k(\alpha^3)^{n-1}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$p=a+b\alpha^{n-1}+c(\alpha^{n-1})^2+d(\alpha^{n-1})^3+\ldots+k(\alpha^{n-1})^{n-1},$$

которыя, будучи сложены, даютъ

$$(n-1)p=(n-1)a+b(S_1-1)+c(S_2-1)+d(S_3-1)+\ldots+k(S_{n-1}-1).$$

Но $S_1=o$, $S_2=o$, $S_3=o$,...$S_{n-1}=o$, поэтому

$$(n-1)p=(n-1)a-b-c-d-\ldots-k;$$

откуда

$$p=a-\frac{b+c+d+\ldots+k}{n-1},$$

Полиномы $P_0,P_n,\ldots P_{nt}$ имѣютъ совершенно то же свойство, что и p, а потому они не могутъ содержать α. Слѣдовательно уравненіе $P=o$ также не содержитъ α.

То, что мы дѣлали для радикала $z=\sqrt{\theta}$, можно послѣдовательно сдѣлать для каждаго изъ радикаловъ $\sqrt[n']{\theta_1}$, $\sqrt[n'']{\theta_2}$,...$\sqrt[n^{(m)}]{\theta_m}$. Такимъ образомъ мы можемъ исключить изъ даннаго уравненія всѣ радикалы порядка μ; отъ того будемъ имѣть радикальное уравненіе только порядка $\mu-1$. Поступивъ съ этимъ новымъ уравненіемъ такъ, какъ мы поступали съ даннымъ, мы получимъ радикальное уравненіе порядка $\mu-2$. Продолжая эти дѣйствія далѣе, мы наконецъ дойдемъ до уравненія порядка o, т. е. раціональнаго относительно x_1, x_2,...x_m.

И такъ мы имѣемъ общій способъ преобразовать всякое радикальное уравненіе съ однимъ или многими неизвѣстными въ раціональное уравненіе относительно этихъ неизвѣстныхъ. Этотъ способъ хотя вообще бываетъ затруднителенъ, но онъ облегчается для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ, такъ напр. для уравненія вида

$$\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}+\sqrt[n]{C}+\ldots+\sqrt[n]{K}=o \ (*).$$

Здѣсь можетъ случиться то же, что и въ исключеніи: первая часть конечнаго уравненія можетъ быть или тожественно нулемъ, или постояннымъ количествомъ. Въ первомъ случаѣ данное радикальное уравненіе тожественное, а во второмъ оно не можетъ существовать ни для какихъ значеній неизвѣстныхъ, въ него входящихъ.

Приложимъ эту теорію къ примѣрамъ.

Примѣръ 1.

Возмемъ уравненіе

$$(a) \qquad A+B\sqrt[3]{\theta}+C\sqrt[3]{\theta^2}=o,$$

въ которомъ A, B, C, θ суть радикальныя функціи одного или нѣсколькихъ неизвѣстныхъ порядка $\mu-1$.

Положивъ $z=\sqrt[3]{\theta}$, будемъ имѣть

$$A+Bz+Cz^2=o.$$

Внеся сюда вмѣсто z, корни az, a^2z, гдѣ a есть какой нибудь корень уравненія

$$y^2+y+1=o,$$

составимъ произведеніе

$$(A+Bz+Cz^2)(A+Baz+Ca^2z^2)(A+Ba^2z+Caz^2)=o.$$

Наконецъ, совершивъ умноженіе, и истребивъ a помощію $a^3=1$ и $a^2+a+1=o$, мы получимъ уравненіе порядка $\mu-1$:

$$(b) \qquad A^3-3ABC\theta+B^3\theta+C^3\theta^2=o.$$

(*) Смотр. Journal für die reine und angewandte Mathematik. Herausgegeben von A. L. Crelle. 14 Band, 3 Heft. 1835.

Uber das Rationalmachen algebraischer Gleichungen. Von Herrn Förstemann.

Примѣръ II.

Пусть будетъ радикальное уравненіе 3-го порядка:

$$\sqrt{[1+2x+\sqrt{(1+\sqrt[3]{x})}]}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}-1=o.$$

Сдѣлавъ $1+2x+\sqrt{(1+\sqrt[3]{x})}=M$, $z=\sqrt{M}$ и $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}-1=N$, имѣемъ

$$(a) \qquad z+N=o.$$

Такъ какъ $z^2=M$, то уравненіе (6) § 58 будетъ $y+1=o$; откуда $y=\alpha=-1$. Слѣдовательно конечное уравненіе отъ исключенія z будетъ

$$(z+N)(\alpha z+N)=(z+N)(-z+N)=N^2-z^2$$

или

$$N^2-M=o,$$

т. е.

$$(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}-1)^2-1-2x-\sqrt{(1+\sqrt[3]{x})}=o.$$

Возвысивши въ самомъ дѣлѣ первый членъ въ квадратъ, и сдѣлавши возможныя сокращенія, мы получимъ уравненіе 2-го порядка относительно x:

$$(x-2)\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})}=o.$$

Положивъ $(x-2)\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}=P$, $\sqrt{(1+\sqrt[3]{x})}=z=\sqrt{Q}$, имѣемъ уравненіе

$$P-\sqrt{Q}=o,$$

которое такъ же, какъ и уравненіе (a), преобразовывается въ слѣдующее

$$Q-P^2=o,$$

т. е.

$$[(x-2)\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}]^2-(1+\sqrt[3]{x})=o$$

или

$$-2(x-2)x-1+(x-1)\sqrt[3]{x}+(x-2)^2\sqrt[3]{x^2}=o.$$

Сдѣлавъ въ уравненіи (b) предъидущаго примѣра $A=-2(x-2)x-1$, $B=x-1$, $C=(x-2)^2$, $\theta=x$, находимъ раціональное уравненіе

$$-[2(x-2)x+1]^3+3[2(x-2)x+1](x-1)(x-2)^2x+(x-1)^3x+(x-2)^6x^2=o,$$

или

$$x^8-12x^7+58x^6-154x^5+244x^4-218x^3+75x^2-x-1=o$$

§ **60.** Можно производить исключеніе z изъ уравненій $\Phi(z)$ и $z^n=\theta$ по способу § 50; это иногда бываетъ очень выгодно.

Для примѣра возмемъ уравненіе

$$1+\sqrt[5]{\theta}-\sqrt[5]{\theta^2}+\sqrt[5]{\theta^3}-\sqrt[5]{\theta^4}=o.$$

Положивъ $\sqrt[5]{\theta}=z$, имѣемъ два уравненія по z:

$$z^5=\theta \text{ и } 1+z-z^2+z^3-z^4=o.$$

Исключивъ изъ нихъ z по § 50, мы получимъ истинное конечное уравненіе

$$\theta^4-6\theta^3+16\theta^2-26\theta-1=o.$$

Ежели радикальное уравненіе имѣетъ видъ

$$A+\sqrt[n]{\theta^\kappa}=o,$$

гдѣ $\kappa<n$; то положивъ $\sqrt[n]{\theta}=z$, имѣемъ уравненія:

$$(a)\qquad A\pm z^\kappa=o \text{ и } z^n=\theta.$$

Изъ перваго выводимъ $A=\mp z^\kappa$, потомъ

$$(b)\qquad A^n=\pm z^{\kappa n}.$$

Здѣсь знакъ $+$ относится къ четному n, а $-$ къ нечетному.

Второе изъ уравненій (a) даетъ $z^{n\kappa}=\theta^\kappa$; слѣдовательно уравненіе (b) обращается въ раціональное

$$A^n\pm\theta^\kappa=o.$$

Пользуясь этимъ замѣчаніемъ, можно иногда съ выгодою преобразовать радикальное уравненіе въ раціональное чрезъ нѣсколько послѣдовательныхъ возвышеній (b). Такимъ образомъ производится исключеніе радикаловъ $\sqrt{M}$ и $\sqrt{P}$ во второмъ примѣрѣ предъидущаго §.

Это замѣчаніе и симметричность уравненія

$$\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}+\sqrt[n]{C}+\ldots+\sqrt[n]{N}=o$$

относительно A, B, C,...N весьма облегчаютъ преобразованіе этого уравненія.

§ **61.** По изложенному способу преобразованія радикальныхъ уравненій можно преобразовать раціональное уравненіе съ радикальными коэффиціентами въ раціональное уравненіе съ раціональными коэффиціентами. Но если намъ дано условіе, что для каждаго изъ радикальныхъ коэффиціентовъ должно взять по одному только значенію; то мы не въ правѣ дѣлать это преобразованіе. Въ послѣдствіи мы увидимъ, что въ такомъ случаѣ радикальность коэффиціентовъ ни мало не препятствуетъ вычисленію корней уравненія.

О преобразованіи мнимыхъ уравненій въ дѣйствительныя.

§ **62.** Ежели данное раціональное уравненіе $f(x)=o$ имѣетъ коэффиціенты вида $a+b\sqrt{-1}$; то, по правиламъ предъидущихъ §§, можно исключить изъ него $\sqrt{-1}$, чрезъ что выйдетъ уравненіе съ коэффиціентами дѣйствительными. Но конечное уравненіе будетъ тогда содержать посторонніе корни. Въ самомъ дѣлѣ уравненію $f(x)=o$ можно дать видъ

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x).i=o, \tag{1}$$

гдѣ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ суть цѣлыя функціи x съ коэффиціентами дѣйствительными, а $i=\sqrt{-1}$, или $i^2=-1$. Взявши для i два значенія $+i$ и $-i$, конечное уравненіе будетъ

$$[\varphi(x)+\psi(x).i]\,[\varphi(x)-\psi(x).i]=[\varphi(x)]^2+[\psi(x)]^2=o; \tag{2}$$

слѣдовательно будетъ заключать корни уравненія

$$\varphi(x)-\psi(x).i=o,$$

которые могутъ не удовлетворять уравненію $f(x)=o$.

И такъ когда въ данномъ уравненіи (1) i имѣетъ только одно значеніе; тогда нельзя дѣлать преобразованія (2). Но въ такомъ случаѣ можно всегда $f(x)=o$ замѣнить новыми уравненіями съ дѣйствительными коэффиціентами, которыя не будутъ содержать постороннихъ корней.

§ **63.** Ежели a есть дѣйствительный корень уравненія $f(x)=o$, то

$$f(a)=\varphi(a)+\psi(a).i=o. \tag{3}$$

Такъ какъ $\varphi(a)$ и $\psi(a)$ суть количества дѣйствительныя, то уравненіе (3) можетъ существовать только тогда, когда

$$\varphi(a)=o \text{ и } \psi(a)=o.$$

Слѣдовательно всякій дѣйствительный корень уравненія $f(x)=o$ долженъ удовлетворять уравненіямъ

$$\varphi(x)=o \text{ и } \psi(x)=o.$$

На оборотъ, всякій дѣйствительный корень, общій этимъ уравненіямъ, будетъ удовлетворять уравненію $f(x)=o$. Но кромѣ того, уравненія $\Phi(x)=o$ и $\psi(x)=o$ могутъ имѣть общіе мнимые корни, которые также будутъ удовлетворять уравненію $f(x)=o$. Эти общіе мнимые корни должны быть (§ 30) парные. И такъ найдя общаго большаго дѣлителя функцій $\Phi(x)$ и $\psi(x)$, приравнявъ его нулю, мы получимъ уравненіе, котораго всѣ корни будутъ удовлетворять данному $f(x)=o$. Означимъ этого дѣлителя чрезъ $\theta(x)$, и сыщемъ частныя

$$\frac{\Phi(x)}{\theta(x)}=\xi(x),\quad \frac{\psi(x)}{\theta(x)}=\chi(x),\quad \frac{f(x)}{\theta(x)}=\mathfrak{F}(x);$$

тогда данное уравненіе $f(x)=o$ разложится на два

$$\theta(x)=o \text{ и } \mathfrak{F}(x)=\xi(x)+\chi(x).i=o.$$

Первое не имѣетъ мнимыхъ коэффиціентовъ, а второе не имѣетъ ни дѣйствительныхъ корней, ни мнимыхъ парныхъ корней.

Такъ какъ $\xi(x)$ и $\chi(x)$ не имѣютъ общаго множителя, то они не могутъ имѣть общихъ корней, и потому, если вставимъ въ нихъ вмѣсто x какое-либо мнимое выраженіе $t+ui$, то по крайней мѣрѣ одна изъ нихъ не обратится въ нуль. Пусть

$$\xi(t+u.i)=M+Ni$$

$$\chi(t+u.i)=P+Qi,$$

т. е.

$$\mathfrak{F}(x)=M+Ni+(P+Qi)i;$$

Такъ какъ $i^2=-1$, то

$$\mathfrak{F}(t+ui)=M+Ni+Pi-Q=M-Q+(N+P)i,$$

гдѣ $M-Q$ и $N+P$ суть цѣлыя функціи t и u съ коэффиціентами дѣйствительными. Положивъ

$$M-Q=F(t,\ u) \text{ и } N+P=\Phi(t,u),$$

имѣемъ

$$\mathfrak{F}(t+ui)=F(t,u)+\Phi(t,u).i.$$

Чтобы $t+ui$ былъ корень уравненія $\mathfrak{F}(x)=o$, необходимо, чтобы

$$F(t,u)=o \text{ и } \Phi(t,u)=o.$$

И на оборотъ, всякія дѣйствительныя значенія t и u, уничтожающія $F(t,u)$ и $\Phi(t,u)$ уничтожатъ $\mathfrak{F}(t+ui)$, т. е. выраженіе $t+ui$ будетъ корень уравненія $\mathfrak{F}(x)=o$ и уравненія $f(x)=o$. Слѣдовательно, чтобы отъискать всѣ корни уравненія $\mathfrak{F}(x)=o$, должно отъискать соотвѣтственные дѣйствительные корни уравненій:

$$F(t,u)=o \text{ и } \Phi(t,u)=o.$$

Такимъ образомъ рѣшеніе даннаго мнимаго уравненія приводится къ рѣшенію трехъ дѣйствительныхъ уравненій:

$$\theta(x)=o,\ F(t,u)=o \text{ и } \Phi(t,u)=o.$$

Для поясненія сказаннаго возмемъ нѣсколько примѣровъ.

Примѣръ I.

Уравненіе

$$f(x)=x^5+(4+i)x^4+(6+i)x^3+5x^2+(2-i)x-i=o,$$

гдѣ $i=\sqrt{-1}$, можно представить такъ:

$$f(x)=(x^5+4x^4+6x^3+5x^2+2x)+(x^4+x^3-x-1).i=o.$$

Общій большой дѣлитель функцій

$$\varphi(x)=x^5+4x^4+6x^3+5x^2+2x \text{ и } \psi(x)=x^4+x^3-x-1$$

есть $\theta(x)=x^3+2x^2+2x+1$. Раздѣливши на него $\psi(x)$ и $\varphi(x)$, находимъ

$$\frac{\varphi(x)}{\theta(x)}=\xi(x)=x^2+2x,\quad \frac{\psi(x)}{\theta(x)}=\chi(x)=x-1\ ;$$

поэтому уравненіе $\frac{f(x)}{\theta(x)}=\mathfrak{F}(x)=o$ будетъ

$$\mathfrak{F}(x)=(x^2+2x)+(x-1)i=o.$$

Положивъ $x=t+ui$, имѣемъ

$$(t+ui)^2+2(t+ui)+(t+ui-1)i=o$$

или

$$(t^2-u^2+2t-u)+(2tu+2u+t-1)i=o\ ;$$

откуда выводимъ уравненія:

$$F(t,u)=t^2-u^2+2t-u=o$$

$$\Phi(t,u)=2tu+2u+t-1=o.$$

Второе изъ этихъ уравненій даетъ $u=\frac{1-t}{2(1+t)}$; внеся это значеніе u въ первое, мы получимъ уравненіе по t:

$$(a) \qquad 4t^4+16t^3+21t^2+10t-3=o.$$

Уравненіе $\Phi(t,u)$ также даетъ $t=\frac{1-2u}{1+2u}$; внеся это значеніе t въ $F(t,u)=o$, находимъ уравненіе по u

$$(b) \qquad 4u^4+8u^3+9u^2+5u-3=o.$$

И такъ данное мнимое уравненіе замѣняется тремя дѣйствительными уравненіями

$$x^3+2x^2+2x+1=o,\ (a)\ \text{и}\ (b).$$

Впослѣдствіи мы увидимъ, что уравненія (a) и (b) имѣютъ только по два дѣйствительныхъ корня, какъ и должно быть по теоріи.

Примѣръ II.

Возмемъ уравненіе

$$(1+i)x^4+(7+5i)x^3+(13+5i)x^2-3(1-i)x-18(1-i)=o\ ,$$

и дадимъ ему видъ

$$(x^4+7x^3+13x^2-3x-18)+(x^4+5x^3+5x^2+3x+18).i=o.$$

Общій наибольшій дѣлитель функцій

$$\Phi(x)=x^4+7x^3+13x^2-3x-18\ \text{и}$$

$$\psi(x)=x^4+5x^3+5x^2+3x+18$$

есть

$$\theta(x)=x^2+6x+9=(x+3)^2,$$

Раздѣливши на него $\Phi(x)$ и $\psi(x)$, находимъ

$$\frac{\Phi(x)}{\theta(x)}=\xi(x)=x^2+x-2\ ,\quad \frac{\psi(x)}{\theta(x)}=\chi(x)=x^2-x+2\,;$$

поэтому

$$\frac{f(x)}{\theta(x)}=\mathfrak{F}(x)=(x^2+x-2)+(x^2-x+2).i=o.$$

Положивъ здѣсь $x=t+ui$, имѣемъ

$$\mathfrak{F}(t+ui)=[(t+ui)^2+(t+ui)-2]+[(t+ui)^2-(t+ui)+2].i=o$$

или

$$(t^2-u^2-2tu+t+u-2)+(t^2-u^2+2tu-t+u+2).i=o\ ;$$

откуда

$$F(t,u)=t^2-u^2-2tu+t+u-2=o$$

$$\Phi(t,u)=t^2-u^2+2tu-t+u+2=o.$$

Вычтя одно изъ этихъ уравненій изъ другаго, сокративъ остатокъ $-4tu+2t-4=o$ на 2, имѣемъ уравненіе

$$-2tu+t-2=o,$$

которое даетъ

$$(a)\qquad u=\frac{t-2}{2t}.$$

Внеся это значеніе u въ уравненіе $\Phi(t,u)=o$, находимъ уравненіе по t:

$$(b)\qquad 4t^4+t^2-2t-4=o.$$

Оно должно дать только два дѣйствительныя значенія для t, которыя, будучи внесены въ равенство (a), даютъ два дѣйствительныя значенія u.

Примѣръ III.

Пусть будетъ еще уравненіе

$$(1+2i)x^3-(2-i)x+(1-3i)=o$$

или

$$(x^3-2x+1)+(2x^3+x-3)i=o.$$

Функціи $\varphi(x)=x^3-2x+1$ и $\psi(x)=2x^3+x-3$ не имѣютъ общаго дѣлителя; вставивши въ нихъ $t+ui$ вмѣсто x, имѣемъ

$$[(t+ui)^3-2(t+ui)+1]+[2(t+ui)^3+(t+ui)-3].i$$

$$=(t^3-6t^2u-3tu^2+2u^3-2t-u+1)$$

$$+(2t^3+3t^2u-6tu^2-u^3+t-2u-3)i=o,$$

откуда выводимъ уравненія

$$F(t,u)=t^3-6t^2u-3tu^2+2u^3-2t-u+1=o$$

$$\Phi(t,u)=2t^3+3t^2u-6tu^2-u^3+t-2u-3=o,$$

которыя должны дать по три дѣйствительныхъ значенія t и u.

О преобразованіи даннаго уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ въ другое, котораго корни выражались бы одною и тою же раціональною функціею корней даннаго уравненія.

§ 64. Пусть дано уравненіе

$$f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=o.$$

Означимъ его корни чрезъ $x_1, x_2, \ldots x_m$, и положимъ, что требуется составить уравненіе, котораго каждый корень выражался бы одною и тою же раціональною функціею какихъ нибудь n изъ корней $x_1, x_2, \ldots x_m$. Изобразивъ эту функцію чрезъ

$$y=F(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

станемъ переставливать мѣста $x_1, x_2, \ldots x_n$, и замѣнять ихъ какими нибудь другими n буквами $x_1, x_2, \ldots x_m$. Сдѣлавши это всѣми возможными образами, мы получимъ $m(m-1)\ldots(m-n+1)$ значеній y. Нѣкоторыя изъ этихъ значеній могутъ быть тожественны; на прим. если $y=x_1+x_2$, то значенія x_1+x_2 и x_2+x_1, x_1+x_3 и $x_3+x_1, \ldots x_2+x_3$ и x_3+x_2, и т. д. будутъ тожественны. Возмемъ только одни нетожественныя значенія y, которыя означимъ чрезъ

$$y_1, y_2, y_3, \ldots y_\mu; \tag{1}$$

искомое преобразованное уравненіе будетъ

$$(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)\ldots(y-y_\mu)$$

$$=y^\mu+A_1y^{\mu-1}+A_2y^{\mu-2}+\ldots+A_{\mu-1}y+A_\mu=o, \tag{2}$$

гдѣ

$$A_1=-(y_1+y_2+y_3+\ldots+y_\mu)$$

$$A_2=+(y_1y_2+y_1y_3+\ldots+y_1y_\mu+y_2y_3+\ldots+y_2y_\mu+\ldots+y_{\mu-1}y_\mu)$$

$$A_3=-(y_1y_2y_3+y_1y_2y_4+\ldots+y_1y_2y_m+y_2y_3y_4+\ldots+y_2y_3y_\mu+\ldots+y_{\mu-2}y_{\mu-1}y_\mu)$$

и т. д.

$$A_{\mu-1}=(-1)^{\mu-1}(y_1y_2y_3\ldots y_{\mu-1}+y_1y_2\ldots y_{\mu-2}y_\mu+\ldots+y_2y_3\ldots y_{\mu-1}y_\mu)$$

$$A_\mu=(-1)^\mu y_1y_2y_3\ldots y_\mu.$$

Отъ перестановки x_1, x_2,...x_m всѣми возможными образами, одно изъ значеній (1) переходитъ въ другое, что ни мало не измѣняетъ значеній A_1, A_2,...A_μ; слѣдовательно эти коеффиціенты симметричны относительно $x_1, x_2,...x_m$, и по правиламъ 3-й главы, они могутъ быть выражены раціональными функціями коеффиціентовъ: a_1, a_2,...a_m.

И такъ, какая бы ни была раціональная функція y, мы всегда въ состояніи будемъ составить уравненіе (2).

§ **65.** Пусть требуется составить уравненіе, котораго бы корни были разности корней даннаго уравненія.

Въ этомъ случаѣ значенія y будутъ:

$$x_1-x_2,\ x_1-x_3,\dots x_1-x_m,\ x_2-x_3,\dots x_2-x_m,\dots x_{m-1}-x_m$$

$$x_2-x_1,\ x_3-x_1,\dots x_m-x_1,\ x_3-x_2,\dots x_m-x_2,\dots x_m-x_{m-1};$$

отсюда видно, что каждый членъ верхней строки равенъ соотвѣтственному нижнему, взятому съ знакомъ противнымъ.

Число членовъ въ каждой строкѣ есть $\frac{m(m-1)}{2}$. Означивъ верхніе чрезъ

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\dots\beta_n,$$

полагая $\frac{m(m-1)}{2}=n$, нижніе будутъ

$$-\beta_1, -\beta_2, -\beta_3, \dots -\beta_n.$$

А потому искомое уравненіе будетъ

$$(y-\beta_1)(y+\beta_1)(y-\beta_2)(y+\beta_2)(y-\beta_3)(y+\beta_3)\dots(y-\beta_n)(y+\beta_n)$$
$$=(y^2-\beta_1^2)(y^2-\beta_2^2)(y^2-\beta_3^2)\dots(y^2-\beta_n^2)$$

$$(3)\quad =y^{m(m-1)}+A_1y^{m(m-1)-1}+A_2y^{m(m-1)-2}+\dots+A_{m(m-1)-1}y+A_{m(m-1)}=0.$$

Такъ какъ произведеніе

$$(y^2-\beta_1^2)(y^2-\beta_2^2)(y^2-\beta_3^2)\dots(y^2-\beta_n^2)$$

не можетъ содержать нечетныхъ степеней y; то

$$A_1=0,\ A_3=0,\dots A_{m(m-1)-1}=0$$

и уравненіе (3) обратится въ слѣдующее

$$y^{m(m-1)}+A_2 y^{m(m-1)-2}+A_4 y^{m(m-1)-4}+\ldots A_{m(m-1)-2}y^2+A_{m(m-1)}=0.$$

Положивъ $y^2=z$, $A_2=B_1$, $A_4=B_2,\ldots A_{m(m-1)}=B_n$, будемъ имѣть уравненіе

$$z^n+B_1 z^{n-1}+B_2 z^{n-2}+\ldots+B_{n-1}z+B_n=0,$$

котораго корни суть β_1^2, β_2^2, $\beta_3^2,\ldots\beta_n^2$, т. е. квадраты разностей корней x_1, $x_2,\ldots x_m$, и потому ему даютъ названіе *уравненія съ квадратами разностей корней*.

Уравненія (20) и (22) § 37 дадутъ намъ формулы для опредѣленія коеффиціентовъ B_1, B_2, $B_3,\ldots B_{n-1}$, B_n помощію простыхъ симметричныхъ функцій квадратовъ разностей корней x_1, $x_2,\ldots x_m$. А эти симметричныя функціи могутъ быть опредѣлены помощію простыхъ симметричныхъ функцій корней $x_1, x_2,\ldots x_m$.

Составимъ общее выраженіе для вычисленія функціи

$$f_p=(\beta_1^2)^p+(\beta_2^2)^p+(\beta_3^2)^p+\ldots+(\beta_n^2)^p,$$

или

$$(x_1-x_2)^{2p}+(x_1-x_3)^{2p}+\ldots+(x_1-x_m)^{2p}+(x_2-x_3)^{2p}+\ldots+(x_2-x_m)^{2p}+\ldots\\ \ldots+(x_{m-1}-x_m)^{2p}.$$

Для этого разсмотримъ выраженіе

(4) $$\Phi(x)=(x-x_1)^{2p}+(x-x_2)^{2p}+(x-x_3)^{2p}+\ldots+(x-x_m)^{2p}.$$

Разложивъ каждый его членъ по Ньютоновой строкѣ, имѣемъ

$$\Phi(x)=\left\{\begin{array}{l} x^{2p}-2px_1x^{2p-1}+\dfrac{2p(2p-1)}{1.\ 2}x_1^2x^{2p-2}-\ldots+x_1^{2p} \\[2ex] x^{2p}-2px_2x^{2p-1}+\dfrac{2p(2p-1)}{1.\ 2}x_2^2x^{2p-2}-\ldots+x_2^{2p} \\[2ex] \qquad\qquad \text{и т. д.} \\[2ex] x^{2p}-2px_mx^{2p-1}+\dfrac{2p(2p-1)}{1.\ 2}x_m^2x^{2p-2}-\ldots+x_m^{2p} \end{array}\right.$$

Сдѣлавъ приведеніе, получаемъ

$$(5)\quad \varphi(x)=mx^{2p}-2pS_1x^{2p-1}+\frac{2p(2p-1)}{1.\ 2}S_2x^{2p-2}-\ldots S_{2p},$$

гдѣ S_1, S_2, S_3,...., какъ и прежде, означаютъ простыя симметричныя функціи корней: x_1, x_2,....x_m.

Выраженіе (5) тожественно съ выраженіемъ (4), а потому они равны между собою для всякаго значенія x. Положивъ послѣдовательно $x=x_1$, x_2, x_3,...x_m, и сложивши выводы, находимъ

$$(x_1-x_2)^{2p}+(x_1-x_3)^{2p}+\ldots+(x_2-x_1)^{2p}+(x_2-x_3)^{2p}+\ldots(x_3-x_1)$$

$$+(x_3-x_2)^{2p}+(x_3-x_4)^{2p}+\ldots(x_m-x_1)^{2p}+(x_m-x_2)^{2p}\ldots(x_m-x_{m-1})^{2p}$$

$$=2f_p=mS_{2p}-2p\ S_1S_{2p-1}+\frac{2p(p-1)}{1.\ 2}S_2.S_{2p-2}-\ldots$$

$$(-1)^p.\frac{2p(2p-1)(2p-2)\ldots[2p-(p-1)]}{1.\ 2.\ 3\ldots p}S_p.S_{2p-p}+\ldots+mS_{2p}.$$

Число членовъ въ послѣднемъ разложеніи есть $2p+1$, которое всегда нечетное, а по тому разложеніе имѣетъ средній членъ не приводимый. Члены на одинакомъ разстояніи отъ концовъ равны; отъ соединенія ихъ въ одинъ, наше разложеніе приведется къ слѣдующему

$$2f_p=2mS_{2p}-2.\ 2p\ S_1S_{2p-1}+2.\frac{2p(2p-1)}{1.\ 2}S_2S_{2p-2}-\ldots$$

$$(-1)^p\frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1.2.3\ldots p}S_p^2.$$

Откуда имѣемъ

$$(6)\qquad f_p=mS_{2p}-2pS_1S_{2p-1}+\frac{2p(2p-1)}{1.\ 2}S_2S_{2p-2}-\ldots$$

$$\frac{(-1)^p}{2}.\frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1.2.3\ldots p}S_p^2.$$

Полагая послѣдовательно $p=1,\ 2,\ 3,\ldots\frac{m(m-1)}{2}$, получаемъ формулы для опредѣленія простыхъ симметричныхъ функцій: $f_1, f_2, f_3,\ldots f_{\frac{m(m-1)}{2}}$, а именно:

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \int_1 = mS_2 - S_1^2 \\ \int_2 = mS_4 - 4S_1S_3 + 3S_2^2 \\ \int_3 = mS_6 - 6S_1S_5 + 15S_2S_4 - 10S_3^2 \\ \quad\quad \text{и пр.} \end{array}\right.$$

Замѣнивъ въ уравненіяхъ (20) и (22) S буквою $\int$, а a буквою B, мы выведемъ изъ нихъ формулы для опредѣленія коеффиціентовъ уравненія съ квадрашами разносшей корней. Онѣ сушь:

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} B_1 = -\int_1 \\ B_2 = -\frac{1}{2}(\int_2 + B_1\int_1) \\ B_3 = -\frac{1}{3}(\int_3 + B_1\int_2 + B_2\int_1) \\ B_4 = -\frac{1}{4}(\int_4 + B_1\int_3 + B_2\int_2 + B_3\int_1) \\ \quad\quad \text{и ш. д.} \end{array}\right.$$

Для поясненія сказаннаго въ эшомъ §, возьмемъ нѣсколько численныхъ примѣровъ.

Примѣръ I.

Для уравненія $x^3 - 2x - 5 = o$ мы нашли въ § 40, Пр. II:

$$S_1 = o,\ S_2 = 4,\ S_3 = 15;\ S_4 = 8,\ S_5 = 50,\ S_6 = 91;$$

внеся эши выраженія въ формулы: (7) и (8), получаемъ:

$$\int_1 = 3.4 = 12$$

$$\int_2 = 3.8 + 3.(4)^2 = 72$$

$$\int_3 = 3.91 + 15.8.4 - 10.(15)^2 = -1497$$

$$B_1 = -\int = -12$$

$$B_2 = -\tfrac{1}{2}(72 - 12.12) = 36$$

$$B_3 = -\tfrac{1}{3}(-1497 - 12.72 + 36.12) = 643.$$

И шакъ уравненіе съ квадрашами разносшей корней даннаго уравненія будешъ

$$z^3 - 12z^2 + 36z + 643 = o.$$

Примѣръ II.

Пусть дано $x^4-4x^2+4x-1=o$. Положивъ въ формулахъ (20) (22), § 37

$a_1=o, a_2=-4, a_3=+4, a_4=-1$, находимъ:

$S_2=8,\ S_3=-12, S_4=32+4=36$

$S_5=-a_2S_3-a_3S_2=+4.-12-4.8=-80$

$S_6=-a_2S_4-a_3S_3-a_4S_2=4.36-4.-12+8=200$

$S_7=-a_2S_5-a_3S_4-a_4S_3=4.-80-4.36+1.-12=-476$

$S_8=-a_2S_6-a_3S_5-a_4S_4=+4.200-4.-80+1.36=1156$

$S_9=-a_2S_7-a_3S_6-a_4S_5=4.-476-4.200+1.-80=-2784$

$S_{16}=-a_2S_8-a_3S_7-a_4S_6=4.1156-4.-476+1.200=6728$

$S_{11}=-a_2S_9-a_3S_8-a_4S_3=+4.2784-4.-1156+1.-476=-16236$

$S_{12}=-a_2S_{10}-a_3S_9-a_4S_8=4.-6728-4.2784+1.1156=39204.$

Послѣ чего по формуламъ (7) имѣемъ:

$\int_1=4.8=32$

$\int_2=4.36+3.8^2=336$

$\int_3=4.200+15.8.36-10(-12)^2=3680$

$$\int_4=4.S_8+\frac{8.7}{1.2}.S_2S_6-\frac{8.7.6}{1.2.3}S_3.S_5+\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}.\ \tfrac{1}{2}\ S_4^2=$$

$$=4.1156+28.200.8-56.-80.-12+35.(36)^2=41024$$

$$\int_5=4.S_{10}+\frac{10.9}{1.2}S_8S_2-\frac{10.9.8}{1.2.3}S_7.S_3+\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}S_6.S_4-\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}.\tfrac{1}{2}(S_5)^2$$

$$=4.6728+45.1156.8-120.-476.-12+210.200.36-126.(-80)^2=463232$$

$$\int_6=4.S_{12}+\frac{12.11}{1.\ 2}S_{10}S_2-\frac{12.11.10}{1.\ 2.\ 3}S_9S_3+\frac{12.11.10.9}{1.\ 2.\ 3.4}S_8S_4-\frac{12.11.10.9.8}{1.\ 2.\ 3.4.5}S_7.S_5$$
$$+\frac{12.11.10.9.8.7}{1.\ 2.\ 3.4.5.6}\tfrac{1}{2}(S_6)^2$$

$$=4.39204+66.6728.8-220.-2784.-12+495.1156\ 36-792.-476.-80$$
$$+462.(200)^2=528000\ 0$$

Наконецъ по формуламъ (8), получаемъ коеффиціенты

$$B_1 = -32$$

$$B_2 = -\tfrac{1}{2}(336 - 32.32) = 344$$

$$B_3 = -\tfrac{1}{3}(3680 - 32.336 + 344.32) = -1312$$

$$B_4 = -\tfrac{1}{4}(\int_4 + B_1\int_3 + B_2\int_2 + B_3\int_1)$$

$$= -\tfrac{1}{4}(41024 - 32.3680 + 344.336 - 1312.32) = 784$$

$$B_5 = -\tfrac{1}{5}(\int_5 + B_1\int_4 + B_2\int_3 + B_3\int_2 + B_4\int_1)$$

$$= -\tfrac{1}{5}(463232 - 32.41024 + 344.3680 - 1312.336 + 784.32) = -128$$

$$B_6 = -\tfrac{1}{6}(\int_6 + B_1\int_5 + B_2\int_4 + B_3\int_3 + B_4\int_2 + B_5\int_1) =$$

$$-\tfrac{1}{6}(5280000 - 32.463232 + 344.41024 - 1312.3680 + 784.336 - 128.32) = o.$$

И такъ уравненіе съ квадратами разностей корней будетъ

$$z^6 - 32z^5 + 344z^4 - 1312z^3 + 784z^2 - 128z = o.$$

Это уравненіе дѣлится на z, и потому имѣетъ одинъ корень $= o$, т. е. одна изъ разностей корней даннаго уравненія есть нуль ; слѣдовательно данное уравненіе имѣетъ два равныхъ корня. Въ самомъ дѣлѣ $f(x)$ имѣетъ производителя $(x-1)^2$.

Примѣръ III.

Въ уравненіи $x^3 + Qx + R = o$ коеффиціенты суть: $a_1 = o$, $a_2 = Q$, $a_3 = R$. Формулы (7) (8) даютъ

$$S_1 = o,\ S_2 = -2Q,\ S_3 = -3R,\ S_4 = +2Q^2,$$

$$S_5 = -QS_3 - RS_2 = 3QR + 2QR = 5QR$$

$$S_6 = -QS_4 - RS_3 = -2Q^3 + 3R^2;$$

$$\int_1 = -6Q,\ \int_2 = 6Q^2 + 3(-2Q)^2 = 18Q^2$$

$$\int_3 = 3(-2Q^3 + 3R^2) + 15(-4Q^3) - 10(-3R)^2$$

$$= -(66Q^3 + 81R^2),$$

$$B_1 = 6Q$$

$$B_2 = -\tfrac{1}{2}(18Q^2 - 36Q^2) = 9Q^2$$

$$B_3 = -\tfrac{1}{3}(-66Q^3-81R^2+108Q^3-54Q^3)$$
$$-\tfrac{1}{3}(-12Q^3-81R^2)=4Q^3+27R^2.$$

Слѣд. уравненіе съ квадратами разностей корней будетъ

$$z^3+6Q^2z^2+9Qz^2+4Q^3+27R^2=o$$

§ **66.** Ежели въ $y=F(x_1, x_2,...x_n)$ входитъ только одинъ корень, то число значеній y или степень преобразованнаго уравненія будетъ m. Для примѣра положимъ $y=x^n$, (гдѣ n цѣлое число), т. е. составимъ уравненіе, котораго корни были бы:

$$(10) \qquad x_1^n,\ x_2^n,\ x_3^n,...x_m^n.$$

Формулы (20) и (22) § 37, даютъ простыя симметричныя функціи S_n, S_{2n}, S_{3n},...$S_{(m-1)n}$, 1-й, 2-й, 3-й, и т. д. степени относительно корней (10). Внеся ихъ соотвѣтственно вмѣсто S_1, S_2, S_3...S_{m-1}, S_m, въ уравненія (20) и въ первое изъ уравненій (22), и замѣнивъ въ этихъ уравненіяхъ a_1, a_2,...a_m соотвѣтственно коеффиціентами искомаго уравненія, которыхъ мы означили чрезъ B_1, B_2,...B_m, мы получимъ уравненія:

$$(11)\quad\left\{\begin{array}{l} S_n+B_1=o \\ S_{2n}+B_1S_n+2B_2=o \\ S_{3n}+B_1S_{2n}+B_2S_n+3B_3=o \\ \qquad\qquad\text{и т. д.} \\ S_{(m-1)n}+B_1S_{(m-2)n}+B_2S_{(m-3)n}+...+B_{m-2}S_n+(m-1)B_{m-1}=o \\ S_{mn}+B_1S_{(m-1)n}+B_2S_{(m-2)n}+...+B_{m-1}S_n+mB_m=o, \end{array}\right.$$

изъ которыхъ опредѣлимъ B_1, B_2,...B_m, а потомъ составимъ уравненіе

$$y^m+B_1y^{m-1}+B_2y^{m-2}+...+B_{m-1}y+B_m=o.$$

§ **67.** Замѣтимъ, что когда $y=F(x_1)$, тогда преобразованное уравненіе

$$[y-F(x_1)]\,[y-F(x_2)]\,[y-F(x_3)]...[y-F(x_m)]=o$$

есть не что иное (§ 44) какъ конечное уравненіе отъ исключенія x изъ $y=F(x)$ и даннаго уравненія $f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m=o$.

Этимъ замѣчаніемъ можно воспользоваться, когда уравненіе $y=F(x)$ первой степени относительно x. Въ такомъ случаѣ стоитъ только вывести изъ этого уравненія значеніе x, и внести его въ уравненіе $f(x)=o$; чрезъ то получимъ уравненіе по y, которое и будетъ искомое преобразованное уравненіе. Разсмотримъ подробнѣе этотъ родъ преобразованія.

I. Пусть во-первыхъ $y=kx+h$, гдѣ k и h извѣстныя количества. Отсюда выводимъ $x=\frac{y-h}{k}$, а потому искомое преобразованное уравненіе будетъ

$$(12)\qquad \left(\frac{y-h}{k}\right)^m+a_1\left(\frac{y-h}{k}\right)^{m-1}+a_2\left(\frac{y-h}{k}\right)^{m-2}+\ldots+a_{m-1}\left(\frac{y-h}{k}\right)+a_m=o,$$

котораго корни суть

$$(13)\qquad kx_1+h,\ kx_2+h,\ kx_3+h,\ldots kx_m+h.$$

Станемъ давать различныя значенія k и h.

1) Положивъ $k=1$, корни (13) будутъ

$$x_1+h,\ x_2+h,\ x_3+h,\ldots x_m+h,$$

которые соотвѣтственно болѣе или менѣе корней даннаго уравненія количествомъ h, смотря по тому, будетъ ли h положительное или отрицательное. Уравненіе (12) приводится къ

$$(14)\qquad (y-h)^m+a_1(y-h)^{m-1}+a_2(y-h)^{m-2}+\ldots+a_{m-1}(y-h)+a_m=o.$$

Разложивъ $(y-h)^m, (y-h)^{m-1}$, и пр. по Нютоновой строкѣ, и расположивъ все по по уменьшающимся степенямъ y, уравненіе (14) принимаетъ видъ

$$\left.\begin{array}{l|l|l} y^m+m(-h) & y^{m-1}+\frac{m(m-1)(-h)^2}{2} & y^{m-2}+\ldots+(-h)^m \\ +\ a_1 & \quad (m-1)\,a_1(-h) & \quad +a_1\ (-h)^{m-1} \\ & \quad +a_2 & \quad +a_2\ (-h)^{m-2} \\ & & \quad +\ \ldots \\ & & \quad +a_{m-1}\ (-h) \\ & & \quad +a_m \end{array}\right\}=o.$$

Разсматривая коеффиціенты степеней y, видимъ:

1-е Послѣдній членъ преобразованнаго уравненія получится, когда въ данную $f(x)$ вставимъ $-h$ вмѣсто x.

2-е Коеффиціентъ при y получится, когда въ производную перваго порядка $f'(x)$, вставимъ $-h$ вмѣсто x.

3-е Коеффиціентъ при y^2 есть $\frac{f''(-h)}{1.\ 2}$.

и т. д.

4-е Коеффиціентъ при y^n есть $\frac{f^n(-h)}{1.\ 2.\ 3..n}$

5-е Наконецъ коеффиціентъ при y^{m-1} есть $\frac{f^{m-1}(-h)}{1.\ 2.3..(m-1)}$.

И такъ преобразованное уравненіе можетъ быть представлено въ такомъ видѣ

$$(15)\qquad f(-h)+f'(-h)\,y+\frac{f''(-h)}{1.\ 2.}y^2+\ldots+\frac{f^{m-1}(-h)}{1.2..(m-1)}y^{m-1}+y^m=o.$$

2) Положивъ въ послѣднемъ уравненіи

$$\frac{f^{m-1}(-h)}{1.\ 2\ldots(m-1)}=m(-h)+a_1=o,$$

выводимъ

$$h=\frac{a_1}{m},$$

и уравненіе (15) обратится въ слѣдующее

$$f\left(-\frac{a_1}{m}\right)+f'\left(-\frac{a_1}{m}\right)y+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots(m-2)}f^{m-2}\left(-\frac{a_1}{m}\right)y^{m-2}+y^m=o,$$

уравненіе, не содержащее члена съ y^{m-1}. Корни его суть

$$x_1+\frac{a_1}{m},\ x_2+\frac{a_1}{m},\ x_3+\frac{a_1}{m},\ldots x_m+\frac{a_1}{m},$$

а сумма ихъ есть

$$x_1+x_2+x_3+\ldots x_m+\frac{ma_1}{m}=-a_1+a_1=o;$$

потому что $x_1+x_2+\ldots x_m=-a_1$.

И такъ, *чтобы преобразовать данное уравненіе $f(x)=o$ степени m въ другое, не содержащее степени m—1 неизвѣстнаго, должно каждый корень этого уравненія увеличить количествомъ $\frac{a_1}{m}$; для чего должно положить $y=x+\frac{a_1}{m}$ или $x=y-\frac{a_1}{m}$, и внести это значеніе x въ данное уравненіе $f(x)=o$; искомое уравненіе будетъ $f\left(y-\frac{a_1}{m}\right)=o$, или (16).*

Вотъ новое опрощеніе уравненія $f(x)=o$, и потому всякое опредѣленное алгебраическое уравненіе можно представлять въ видѣ

$$(17)\qquad x^m+a_2x^{m-2}+a_3x^{m-3}+\ldots a_{m-1}x+a_m=o.$$

Чтобы уничтожить въ уравненіи (15) членъ съ y^{m-2}, должно положить

$$\frac{f^{m-2}(-h)}{1.2\ldots(m-2)}=\frac{m(m-1)}{2}(-h)^2+(m-1)a_1(-h)+a_2=o.$$

Отсюда выводятся два значенія для h; слѣдовательно мы можемъ двоякимъ образомъ произвести преобразованіе.

Чтобы уничтожить четвертый членъ ур. (15), должно опредѣлить h изъ уравненія 3 й степени

$$\frac{f^{m-3}(-h)}{1.2\ldots(m-2)}=o,$$

а потому мы можемъ произвести преобразованіе трояким̃ъ образомъ.

Вообще, чтобы уничтожить въ уравненіи (15) членъ съ y^{m-n}, должно рѣшить уравненіе степени n

$$\frac{f^{m-n}(-h)}{1.2\ldots(m-n)}=o,$$

изъ котораго получится n значеній для h; а потому преобразованіе можетъ быть произведено n образами.

Для уничтоженія послѣдняго члена должно рѣшить уравненіе

$$f(-h)=(-h)^m+a_1(-h)^{m-1}+\ldots+a_{m-1}(-h)+a_m=o,$$

которое показываетъ, что $-h$ долженъ быть одинъ изъ корней даннаго уравненія.

Замѣтимъ, что не всегда можно въ уравненіи (15) уничтожить заразъ два члена; для этого коэффиціенты даннаго уравненія должны удовлетворять извѣстному условію. На пр., чтобы уничтожить вмѣстѣ второй и третій членъ ур. (15), должно положить вмѣстѣ

$$m(-h)+a_1=o,$$

$$\frac{m(m-1)}{2}(-h)^2+(m-1)a_1(-h)+a_2=o;$$

откуда, по исключеніи h, получимъ

(17) $$a_2-\frac{(m-1)}{2m}a_1^2=o,$$

условіе, которому должны удовлетворять коэффиціенты a_1 и a_2. Оно не всегда исполнимо, а потому не всегда можно уничтожить заразъ второй и третій членъ.

Опредѣливъ a_2 изъ уравненія (17), и внеся его значеніе въ данное, получимъ уравненіе

$$x^m+a_1x^{m-1}+\frac{m-1}{2m}a_1^2x^{m-2}+\ldots+a_m=o,$$

служащее общимъ видомъ всѣхъ уравненій, которыя могутъ быть преобразованы въ уравненія безъ 2-го и 3-го члена.

3) Положивъ въ уравненіи (12) $h=o$, оно обратится въ слѣдующее

$$\left(\frac{y}{k}\right)^m+a_1\left(\frac{y}{k}\right)^{m-1}+a_2\left(\frac{y}{k}\right)^{m-2}+\ldots+a_{m-1}\left(\frac{y}{k}\right)+a_m=o,$$

или въ слѣдующее

$$y^m+a_1ky^{m-1}+a_2k^2y^{m-2}+\ldots+a_{m-1}k^{m-1}y+a_mk^m=o,$$

котораго корни будутъ:

$$kx_1,\ kx_2,\ kx_3,\ldots kx_m.$$

Они больше или меньше корней даннаго уравненія, смотря по тому, будетъ ли $k>$ или <1.

И такъ, чтобы умножить корни даннаго уравненія на k, стоитъ только перемѣнить x на y, и умножить члены

$$a_1 y^{m-1},\ a_2 y^{m-2},\ a_3 y^{m-3}, \ldots a_{m-1} y,\ a_m$$

соотвѣтственно на

(18) $$k,\ k^2,\ k^3, \ldots k^{m-1},\ k^m$$

Это преобразованіе заключаетъ два замѣчательныхъ случая:

a) Когда $k=-1$, тогда степени (18) будутъ

$$k=-1,\ k^2=+1,\ k^3=-1, \ldots k^{m-1}=(-1)^{m-1},\ k^m=(-1)^m,$$

и данное уравненіе преобразуется въ слѣдующее

(19) $$y^m - a_1 y^{m-1} + a_2 y^{m-2} - a_3 y^{m-3} + \ldots (-1)^{m-1} a_{m-1} y + (-1)^m a_m = o,$$

котораго корни суть: $-x_1, -x_2, \ldots -x_m$, т. е. корни даннаго уравненія, взятые съ противными знаками. Слѣдовательно, *чтобы перемѣнить знаки корней даннаго уравненія, должно перемѣнить знаки членовъ, занимающихъ четныя мѣста*. Когда данное уравненіе четной степени, то послѣдній членъ будетъ занимать нечетное мѣсто, и потому сохранитъ свой знакъ. Но въ уравненіи нечетной степени онъ будетъ занимать четное мѣсто; слѣдовательно перемѣнитъ свой знакъ.

b) Если данное уравненіе содержитъ дробные коеффиціенты, то, приведя ихъ къ одному знаменателю, оно приметъ видъ

$$x^m + \frac{a_1}{a_0} x^{m-1} + \frac{a_2}{a_0} x^{m-2} + \ldots + \frac{a_{m-1}}{a_0} x + \frac{a_m}{a_0} = o.$$

Умноживъ корни этого уравненія на a_0, преобразованное уравненіе будетъ

$$y^m + \frac{a_1}{a_0} a_0 y^{m-1} + \frac{a_2}{a_0} a_0^2 y^{m-2} + \ldots \frac{a_{m-1}}{a_0} a_0^{m-1} y + \frac{a_m}{a_0} a_0^m = o,$$

и по сокращеніи всѣхъ членовъ на a_0, обратится въ слѣдующее

$$y^m + a_1 y^{m-1} + a_2 a_0 y^{m-2} + \ldots a_{m-1} a_0{}^{m-2} y + a_m a_0{}^{m-1} = o,$$

котораго всѣ коеффиціенты суть цѣлыя числа. Изъ этого и изъ § 63 слѣдуетъ, что всякое опредѣленное алгебраическое уравненіе можетъ быть замѣнено уравненіями, которыхъ коеффиціенты будутъ дѣйствительныя и цѣлыя числа.

II. Положивъ $y=\frac{kx+h}{px+q}$, и опредѣливъ отсюда x, имѣемъ $x=\frac{h-qy}{py-k}$. Внеся это значеніе x въ данное уравненіе, оно преобразуется въ слѣдующее:

$$\left(\frac{h-qy}{py-k}\right)^m+a_1\left(\frac{h-qy}{py-k}\right)^{m-1}+a_2\left(\frac{h-qy}{py-k}\right)^{m-2}+\ldots+a_{m-1}\left(\frac{h-qy}{py-k}\right)+a_m=o,$$

которое, будучи помножено на $(py-k)^m$, даетъ уравненіе

$$(20)\quad (h-qy)^m+a_1(h-qy)^{m-1}(py-k)+\ldots+a_{m-1}(h-qy)(py-k)^{m-1}+a_m=o.$$

Корни этого уравненія будутъ

$$(21)\qquad \frac{kx_1+h}{px_1+q},\ \frac{kx_2+h}{px_2+q},\ldots\frac{kx_m+h}{px_m+q}.$$

Замѣчательнѣйшій случай такого преобразованія есть слѣдующій:

Сдѣлавъ $k=o$, $h=1$, $p=1$, $q=o$, или $y=\frac{1}{x}$, уравненіе (20) приведется къ

$$(22)\qquad 1+a_1y+a_2y^2+\ldots+a_{m-1}y^{m-1}+a_my^m=o,$$

а корни его (24) будутъ: $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\ldots\frac{1}{x_m}$; они называются обратными корнями даннаго уравненія.

И такъ, ***чтобы получить уравненіе, котораго бы корни были обратные корни даннаго уравненія, стоитъ только перемѣнить коеффиціенты*** $1, a_1, a_2, \ldots a_m$, ***соотвѣтственно на*** $a_m, a_{m-1}, \ldots 1$.

Замѣч. Простыя симметричныя функціи корней уравненія (22) суть:

$$\left(\frac{1}{x_1}\right)+\left(\frac{1}{x_2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{x_m}\right)=S_{-1}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{x_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{x_m}\right)^2=S_{-2}$$

. . . .

$$\left(\frac{1}{x_1}\right)^n+\left(\frac{1}{x_2}\right)^n+\ldots+\left(\frac{1}{x_m}\right)^n=S_{-n}$$

т. е. простыя дробныя симметричныя функціи корней даннаго уравненія, и потому опредѣлятся изъ уравненій (25) § 38.

§ 68. Преобразованіе пред. §, имѣющее цѣлью уничтожить членъ съ x^{m-1}, вводитъ дробные коеффиціенты, которые уничтожатся преобразованіемъ ( ). Слѣдующее замѣчаніе облегчаетъ совокупность этихъ двухъ преобразованій.

Пусть дано уравненіе

$$x^m+\frac{a_1}{a_0}x^{m-1}+\frac{a_2}{a_0}x^{m-2}+\ldots+\frac{a_{m-1}}{a_0}x+\frac{a_m}{a_0}=o.$$

Чтобы уничтожить членъ съ x^{m-1}, положимъ

$$(a)\qquad x=y-\frac{a_1}{ma_0}=\frac{my-a_1}{ma_0};$$

отъ того имѣемъ уравненіе

$$\frac{(ma_0y-a_1)^m}{m^ma_0^m}+\frac{a_1}{a_0}.\frac{(ma_0y-a_1)^{m-1}}{m^{m-1}a_0^{m-1}}+\ldots+\frac{a^{m-1}}{a_0}.\frac{(ma_0y-a_1)}{ma_0}+\frac{a_m}{a_0}=o,$$

которое, будучи помножено на $m^ma_0^m$, приводится къ слѣдующему

$$(ma_0y-a_1)^m+ma_1(ma_0y-a_1)^{m-1}+\ldots+m^ma_0^{m-1}a_m=o.$$

Въ этомъ уравненіи членъ съ y^{m-1} исчезаетъ, а первый членъ будетъ ma_0y^m; поэтому оно имѣетъ видъ

$$ma_0y^m+gy^{m-2}+\ldots+ky+l=o$$

или

$$y^m+\frac{g}{ma_0}y^{m-1}+\ldots+\frac{k}{ma_0}y+\frac{l}{ma_0}=o,$$

гдѣ ma_0, $g,\ldots k$, l, суть цѣлыя числа. Для уничтоженія знаменателя ma_0, должно положить

$$(b)\qquad y=\frac{z}{ma_0};$$

отъ того будемъ имѣть уравненіе

$$z^m+gma_0z^{m-2}+\ldots+km^{m-2}a_0^{m-2}z+lm^{m-1}a_0^{m-1}=o.$$

Уравненія (a) и (b) показывают, что для преобразованія даннаго уравненія въ другое, котораго коеффиціенты были бы цѣлыя числа, а коеффиціентъ втораго члена равнялся бы нулю, должно положить прямо $x=\frac{z-a_1}{ma_0}$. Замѣтимъ еще, что вмѣсто a_0 — наименьшаго кратнаго числа знаменателей всѣхъ дробей, можно иногда взять число меньшее.

Сказанное въ этомъ § пояснится слѣдующими примѣрами :

Примѣръ I.

Чтобы уничтожить въ уравненіи

$$f(y)=y^3-8y^2+20y-16=o \text{(смотр. § 50, Прим. III)}$$

членъ съ y^2, положимъ $y=\frac{z+8}{3}$; преобразованное уравненіе будетъ

$$f\left(\frac{z+8}{3}\right)=f\left(\frac{8}{3}\right)+f'\left(\frac{8}{3}\right).\frac{z}{3}+\tfrac{1}{2}f''\left(\frac{8}{3}\right)\frac{z^2}{3^2}+\frac{z^3}{3^3}=-\frac{8}{3^3}-\frac{4}{3}.\frac{z}{3}+\frac{z^3}{3^3}=o$$

или

$$z^3-12z-8=o.$$

Примѣръ II.

Уравненіе

$$u^4+\frac{8}{4}u^3+\frac{9}{4}u^2+\frac{5}{4}u-\frac{3}{4}=o \text{ (смотр. § 63 Прим. I)}$$

отъ положенія $u=y-\frac{8}{4\cdot4}=y-\frac{1}{2}$, преобразуется въ слѣдующее

$$y^4+\frac{3}{4}y^2-1=o.$$

Чтобы освободить это уравненіе отъ знаменателя 4, достаточно положить $y=\frac{z}{2}$, отъ того получимъ уравненіе

$$z^4+3z^2-16=o.$$

Это уравненіе легко рѣшается относительно z^2, и даетъ

$$z^2=\frac{-3\pm\sqrt{73}}{2}.$$

Такъ какъ t, y, z должны быть количества дѣйствительныя, то z^2 положительное, а потому должно взять $\sqrt{73}$ съ $+$. И такъ $z = \pm\sqrt{\frac{-3+\sqrt{73}}{2}}$ или приближенно: $z = \pm\, 1,6649392$; поэтому находимъ для $u = \frac{z-1}{2}$ два значенія:

$$u_1 = 0,3324696,\ u_2 = -1,3324695;$$

потомъ для $t = \frac{1-2u}{1+2u}$ два значенія

$$t_1 = 0,2012450,\ t_2 = -2,2012450,$$

и наконецъ получаемъ корни уравненія $\mathfrak{F}(x) = o$:

$$x_1 = 0,2012450 + 0,3324696.\sqrt{-1}$$

$$x_2 = -2,2012450 - 1,3324696.\sqrt{-1}.$$

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Объ изысканіи равныхъ и мнимыхъ корней.

Равные корни.

§ **69.** Мы уже замѣтили въ § 29, что нѣкоторые изъ линейныхъ множителей, составляющихъ первую часть даннаго уравненія, могутъ быть равны между собою, отъ чего число различныхъ корней этого уравненія меньше показателя его степени. Посмотримъ теперь, какимъ образомъ можно открыть присутствіе равныхъ корней, и отдѣлить ихъ отъ уравненія.

Пусть будетъ дано уравненіе

$$(1)\quad f(x)=(x-x_1)^p(x-x_2)^q(x-x_3)^r\ldots..(x-x_n)^t(x-x_{n+1})\ldots(x-x_\mu)=o,$$

гдѣ показатели p, q, r, t больше 1, а сумма ихъ меньше m — показателя степени этого уравненія. Множители $x-x_1$, $x-x_2$,....$x-x_n$ называются *кратными*, и различаются на *двойные*, *тройные*, и т. д., смотря по тому, будетъ ли показатель число 2, 3, и т. д. Тоже самое говорится и о корняхъ x_1, x_2,...x_n. Возмемъ одинъ изъ нихъ на пр. x_1, и положимъ $x-x_1=h$; отъ того имѣемъ

$$f(x)=f(x_1+h)=h^p(x-x_2)^q(x-x_3)^r\ldots(x-x_n)^t(x-x_{n+1})\ldots(x-x_\mu).$$

Разложивъ $f(x_1+h)$ по степенямъ h, находимъ (§ 18 ур. 37)

$$f(x_1+h)=f(x_1)+h.f'(x_1)+\frac{h^2}{1.2}f''(x_1)+\ldots+\frac{h^{p-1}}{1.2\ldots p-1}f^{p-1}(x_1)$$

$$+\frac{h^p}{1.2\ldots p}f^p(x_1)+\ldots+f^{m-1}(x_1)+h^m.$$

Такъ какъ $f(x)$ дѣлится безъ остатка на $(x-x_1)^p$ или h^p; то разложеніе $f(x_1+h)$ должно имѣть h^p общимъ множителемъ, а это можетъ быть только тогда, когда

$$f(x_1)=o,\ f'(x_1)=o,\ f''(x_1)=o,\ldots.f^{p-1}(x_1)=o.$$

И такъ *если* x_1 *есть* p- *кратный корень* f(x); *то онъ долженъ уничтожать первыя* p—1 *производныя*: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$.....$f^{p-1}(x)$. Обратное заключеніе также справедливо. Въ самомъ дѣлѣ, когда $f'(x_1)=o$, $f''(x_1)=o,\ldots f^{p-1}(x_1)=o$, тогда разложеніе $f(x_1+h)$ имѣетъ $h^p=(x-x_1)^p$ множителемъ; слѣдовательно уравненіе $f(x_1+h)=f(x)=o$ имѣетъ p корней равныхъ x_1.

Основываясь на сказанномъ въ § 18, имѣемъ

$$f^{p-2}(x)=\frac{h^2}{1.2}f^p(x_1)+\ldots+h^{m-p+2}$$

$$f^{p-3}(x)=\frac{h^3}{1.2.3.}f^p(x_1)+\ldots+h^{m-p+3}$$

. . . .

$$f'(x)=\frac{h^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)}f^p(x_1)+\ldots+h^{m-1}.$$

Отсюда видимъ, что $f^{p-2}(x)$ имѣетъ множителемъ h^2 или $(x-x_1)^2$, $f^{p-3}(x)$ имѣетъ множителемъ $(x-x_1)^3$, и т. д., $f'(x)$ имѣетъ множителя $(x-x_1)^{p-1}$.

Точно такимъ же образомъ найдемъ, что $f'(x)$ имѣетъ множителей: $(x-x_2)^{q-1}$, $(x-x_3)^{r-1},\ldots(x-x_n)^{t-1}$, а потому она должна дѣлиться безъ остатка на

$$(2)\qquad D=(x-x_1)^{p-1}(x-x_2)^{q-1}(x-x_3)^{r-1}\ldots(x-x_n)^{t-1}.$$

Чтобы обнаружить этого дѣлителя, возмемъ въ самомъ дѣлѣ производную отъ

$$f(x)=(x-x_1)^p(x-x_2)^q(x-x_3)^r\ldots(x-x_n)^t.\varphi(x),$$

означая чрезъ $\varphi(x)$ произведеніе однократныхъ множителей $x-x_{n+1}$,..... ...$x-x_\mu$. Эта производная будетъ

$$f'(x)=(x-x_1)^p(x-x_2)^q(x-x_3)^r\ldots(x-x_n)^t.\varphi'(x)$$

$$+\varphi(x)\times\textit{производн.}\ (x-x_1)^p(x-x_2)^q(x-x_3)^r\ldots(x-x_n)^t,$$

гдѣ *производн.* $(x-x_1)^p(x-x_2)^q(x-x_3)^r\ldots(x-x_n)^t=$

$$(x-x_2)^r\ldots(x-x_n)^t\times\textit{производн.}\ (x-x_1)^p$$

$$+(x-x_1)^p(x-x_3)^r\ldots(x-x_n)^t\times \textit{производн.}\ (x-x_2)^q+\ldots$$

$$(x-x_1)^p(x-x_2)^q\ldots\times \textit{производн.}\ (x-x_1)^t.$$

Чтобы опредѣлить производныя отъ $(x-x_1)^p, (x-x_2)^q, \ldots (x-x_n)^t$, опредѣлимъ вообще производную отъ $(x-a)^m$. Она получится, изъ выраженія (18) § 14, если мы въ немъ сдѣлаемъ $a_1=a_2=\ldots a_m=a$; тогда всѣ члены этого выраженія обратятся въ $(x-a)^{m-1}$, а какъ число ихъ есть m, то

$$\textit{производн.}\ (x-a)^m=m(x-a)^{m-1}.$$

Слѣдовательно производныя отъ $(x-x_1)^p, (x-x_2)^q, (x-x_1)^r \ldots (x-x_n)^t$ будутъ соотвѣтственно:

$$p(x-x_1)^{p-1}_,\ q(x-x_1)^{q-1}_,\ r(x-x_1)^{r-1},\ldots t(x-x_n)^{t-1}.$$

А потому

$$\textit{производ.}\ (x-x_1)^p(x-x_2)^q(x-x_3)^r\ldots(x-x_n)^t$$

$$=p(x-x_1)^{p-1}(x-x_2)^q\ldots(x-x_n)^t+q(x-x_1)^p(x-x_2)^{q-1}(x-x_1)^r\ldots(x-x_n)^t+\ldots$$

$$\ldots+t(x-x_1)^p(x-x_2)^q(x-x_3)^r\ldots(x-x_n)^{t-1}.$$

и

$$f'(x)=(x-x_1)^p(x-x_2)^q(x-x_3)^r\ldots(x-x_n)^t.\Phi'(x)$$

$$+(x-x_1)^{p-1}(x-x_1)^{q-1}.(x-x_n)^{t-1}\Phi(x)[p(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)$$

$$+q(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)+\ldots+t(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})]$$

$$=(x-x_1)^{p-1}(x-x_2)^{q-1}\ldots(x-x_n)^{t-1}\{\Phi'(x).(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

$$+\Phi(x)[p(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)+q(x-x_1)(x-x_3)+\ldots+t(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})]\}.$$

Такъ какъ выраженіе, заключенное въ скобкахъ $\{\ \}$, не дѣлится ни на одного изъ множителей: $x-x_1$, $x-x_2,\ldots x-x_n$, то выраженіе(2) служитъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ функцій $f(x)$ и $f'(x)$.

Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ: *когда функція* f(x) *и ея производная* f'(x) *имѣютъ общимъ большимъ дѣлителемъ* D_1 *цѣлую функцію* x; *тогда уравненіе* f(x)=o *имѣетъ равные корни.* И на оборотъ, *когда* f(x)=o *имѣетъ равные корни*; *тогда* f(x) и f'(x) *имѣютъ общаго большаго дѣлителя, который есть произведеніе всѣхъ кратныхъ множителей* f(x), *возвышенныхъ въ степени соотвѣтственно единицею ниже степеней ихъ въ* f(x).

§ 70. Найдя общаго большаго **дѣлителя (2) функцій** $f(x)$ и $f'(x)$, возмемъ частное;

$$(3) \qquad \frac{f(x)}{D}=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)\varphi(x),$$

которое есть не что иное, какъ произведеніе всѣхъ множителей функціи $f(x)$, взятыхъ по одному, а потому степень этого частнаго будетъ $(p-1)+(q-1)+\ldots+(t-1)$ единицами ниже степени даннаго уравненія.

Взявши D'—производную отъ D, сыщемъ ихъ общаго большаго дѣлителя, котораго означимъ чрезъ D_1: онъ будетъ произведеніе производителей $x-x_1$, $x-x_2$,...$x-x_n$ соотвѣтственно въ степеняхъ $p-2$, $q-2$, $r-2$,....$t-2$, а потому онъ не будетъ содержать *двукратныхъ* множителей $f(x)$.

Пусть D'_2 будетъ производная отъ D_2, а D_2 ихъ общій большій дѣлитель: онъ будетъ произведеніе кратныхъ множителей $f(x)$, исключая двукратныхъ, въ степеняхъ $p-3$, $q-3$,....$t-3$; слѣдовательно онъ не будетъ содержать также и 3-*кратныхъ* множителей $f(x)$.

Продолжая такимъ образомъ далѣе, мы дойдемъ наконецъ до D_k— общаго большаго дѣлителя функціи D_{k-1} и ея производной D'_{k-1}, который будетъ произведеніе только тѣхъ кратныхъ множителей $f(x)$, которыхъ степень наибольшая въ $f(x)$.

Означивъ чрезъ X_2, X_3, X_4,.....X_k соотвѣтственно произведенія 2-кратныхъ, 3-кратныхъ, и т. д. k-кратныхъ множителей $f(x)$, имѣемъ:

$$f(x)=X_k^k.\ X_{k-1}^{k-1}\ldots\ X_4^4.\ X_3^3\ X_2^2.\ \varphi(x)$$

$$D=X_k^{k-1}.\ X_{k-1}^{k-2}\ldots\ X_4^3.\ X_3^2.\ X_2$$

$$D_1=X_k^{k-2}.\ X_{k-1}^{k-3}\ldots\ X_4^2.\ X_3$$

$$D_2=X_k^{k-3}.\ X_{k-1}^{k-4}\ldots X_4$$

. . . .

$$D_{k-1}=X_k^2.\ X_{k-1}$$

$$D_k=X_k$$

$$D_{k+1}=1.$$

Раздѣливши каждую строку на ту, которая за ней непосредственно слѣдуетъ, находимъ:

$$\frac{f(x)}{D}=X_k X_{k-1}\ldots X_4 X_3 X_2.\varphi(x)$$

$$\frac{D_1}{D_2}=X_k X_{k-1}\ldots X_4 X_3$$

$$\frac{D_2}{D_3}=X_k X_{k-1}\ldots X_4$$

$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$\frac{D_{k-2}}{D_{k-1}}=X_k.X_{k-1}.X_{k-2}$$

$$\frac{D_{k-1}}{D_k}=X_k.\ X_{k-1}$$

$$\frac{D_k}{D_{k+1}}=D_k=X_k.$$

Поступивъ съ этими строками такъ же, какъ и съ предъидущими, получимъ:

$$\frac{f(x)}{D}:\frac{D}{D_1}=\varphi(x),\frac{D}{D_1}:\frac{D_1}{D_2}=X_2,\frac{D_1}{D_2}:\frac{D_2}{D_3}=X_3,\ldots\frac{D_{k-1}}{D_k}:D_k=X_{k-1},D_k=X_k.$$

Положивъ

$$\varphi(x)=o,\ X_2=o,\ X_3=o,\ X_4=o,\ldots X_{k-1}=o, X_k=o,$$

имѣемъ k уравненій, которыя содержатъ всѣ корни даннаго уравненія; первому удовлетворяютъ только однократные корни даннаго уравненія, второму — двукратные, третьему — трикратные, и т. д., наконецъ послѣднему X_k удовлетворяютъ k- кратные корни.

Если одна изъ функцій $X_1, X_2, \ldots X_k$, на пр. X_n, будетъ равна постоянному количеству, то это знакъ, что $f(x)$ не имѣетъ n- кратныхъ корней.

Такимъ образомъ всякое уравненіе съ равными корнями можетъ быть всегда замѣнено нѣсколькими уравненіями степеней нисшихъ, съ корнями неравными.

Приложимъ это отдѣленіе равныхъ корней къ примѣрамъ.

Примѣръ I.

Пусть будетъ дано уравненіе

$$f(x)=x^{14}-3x^{13}+5x^{12}+2x^{10}+10x^{9}-36x^{8}+16x^{7}+6x^{6}-32x^{5}+29x^{4}-x^{3}$$
$$-13x^{2}+9x-2=o.$$

Взявши производную функцію

$$f'(x)=14x^{13}-39x^{12}+60x^{11}+20x^{9}+90x^{8}-288x^{7}+112x^{6}+36x^{5}$$
$$-150x^{4}+116x^{3}-3x^{2}-26x+9,$$

ищемъ общаго большаго дѣлителя функцій $f(x)$ и $f'(x)$: онъ будетъ

$$D=x^{7}-2x^{6}+3x^{4}-3x^{3}-2x-1.$$

Послѣ того ищемъ общаго большаго дѣлителя D_1 функціи D и ея производной $D'=7x^{7}-12x^{5}+12x^{3}-9x^{2}-2$, и находимъ, что

$$D_1=x^{3}-x^{2}-x+1.$$

Общій большой дѣлитель функціи D и ея производной $D'_1=3x^{2}-2x-1$ будетъ

$$D_2=x-1.$$

Раздѣливши $f(x)$ на D, D на D_1 и D_1 на D_2, находимъ:

$$\frac{f(x)}{D}=x^{7}-x^{6}+3x^{5}-4x^{4}+x^{3}+3x^{2}-5x+2$$

$$\frac{D}{D_1}=x^{4}-x^{3}+x-1$$

$$\frac{D_1}{D_2}=x^{2}-1$$

$$\frac{D_2}{1}=x-1.$$

Наконецъ, по раздѣленіи каждой изъ этихъ строкъ на ту, которая за ней непосредственно слѣдуетъ, мы получимъ

$$\frac{f(x)}{D}:\frac{D}{D_1}=\varphi(x)=x^3+3x-2$$

$$\frac{D}{D_1}:\frac{D_1}{D_2}=X_2=x^2-x+1$$

$$\frac{D_1}{D_2}:D_2=X_3=x+1$$

$$D_2=X_4=x-1.$$

Слѣдовательно

$$f(x)=(x-1)^4(x+1)^3(x^2-x+1)^2(x^3+3x-2),$$

и уравненіе $f(x)=o$ замѣняется слѣдующими:

$$x-1=o,\ x+1=o,\ x^2-x+1=o,\ x^3+3x-2=o$$

Первыя три уравненія даютъ кратные корни, которые легко получить; они суть

$$1,-1,\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}.$$

Слѣдовательно данное уравненіе имѣетъ четыре корня равныхъ 1, три корня равныхъ -1, два корня равныхъ $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, и два корня равныхъ $\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$, сопряженныхъ съ предъидущими.

Примѣръ II.

Возмемъ уравненіе

$$f(x)=x^9+2x^8-4x^7-3x^6-4x^5-5x^4+8x^3+7x^2+7x+7=o.$$

Общій большой дѣлитель функціи $f(x)$ и производной $f'(x)=9x^8+16x^7-28x^6-18x^5-20x^4-20x^3+24x^2+14x+7$ есть

$$D=x^3+x^2+x+1$$

Общій большой дѣлитель функцій D и D' есть 1; слѣдовательно данное уравненіе имѣетъ только двукратные корни, которые получатся изъ рѣшенія уравненія $D=o$.

Чтобы получить $\varPhi(x)$, — произведеніе однократныхъ множителей, раздѣлимъ $f(x)$ на D, частное будетъ произведеніе всѣхъ множителей, какъ кратныхъ, такъ и однократныхъ, взятыхъ по одному, а потому, если мы его раздѣлимъ на D— произведеніе кратныхъ множителей, то въ частномъ получимъ $\varPhi(x)$, которая $=x^3-7x+7$. И такъ данное уравненіе замѣняется двумя слѣдующими:

$$x^3+x^2+x+1=o,\quad x^3-7x+7=o.$$

Примѣръ III.

Пусть еще будетъ уравненіе

$$f'(x)=x^{12}+16x^{11}+36x^{10}+86x^9+121x^8+132x^7+48x^6-144x^5-3x^4$$
$$-72x^3+324x^2+81x+243=o.$$

Взявши производную

$$f'(x)=12x^{11}+176x^{10}+360x^9+801x^8+968x^7+924x^6+288x^5-720x^4-12x^3$$
$$-146x^2+648x+81,$$

ищемъ общаго большаго дѣлителя D функцій $f(x)$ и $f'(x)$; находимъ

$$D=x^6+6x^5+21x^4+38x^3+51x^2+36x+27.$$

Общій большой дѣлитель D и производной D' будетъ

$$D_1=x^4+4x^3+10x^2+6x+9.$$

Общій большой дѣлитель D_1 и производной D'_1 будетъ

$$D_2=x^2+2x+3.$$

Наконецъ общій большой дѣлитель D_2 и производной D'_2 есть единица. А потому данная $f(x)$ можетъ имѣть только 2- кратные, 3- кратные и 4- кратные равные корни.

Раздѣливши $f(x)$ на D, D на D_1, D_1 на D_2, имѣемъ

$$\frac{f(x)}{D}=x^6+2x^5+3x^4+3x^3-3x^2-3x+9$$

$$\frac{D}{D_1}=x^2+2x+3$$

$$\frac{D_1}{D_2}=x^2+2x+3$$

$$D_2=x^2+2x+3.$$

Послѣ того находимъ

$$\frac{f(x)}{D}:\frac{D}{D_1}=x^4-3x+3,\quad \frac{D}{D_1}:\frac{D_1}{D_2}=1,\quad \frac{D_1}{D_2}:\frac{D_2}{1}=1.$$

Слѣдовательно $f(x)=(x^4-3x+3)(x^2+2x+3)^4$, и рѣшеніе даннаго уравненія приводится къ рѣшенію уравненій:

$$x^4-3x+3=o,\quad x^2+2x+3=o.$$

Второе даетъ два 4-кратныхъ корня:

$$-\frac{1+11\sqrt{-1}}{2},\ -\frac{1-11\sqrt{-1}}{2}.$$

§ **71.** Когда данное уравненіе имѣетъ равные корни, тогда разности и квадраты разностей этихъ корней будутъ равны нулю; слѣдовательно въ уравненіи съ квадратами разностей корней послѣдній членъ будетъ нуль, а потому первая часть этого уравненія должна имѣть множителемъ z. Ежели наибольшій показатель кратныхъ множителей въ $f(x)$ есть k; то въ уравненіи квадратовъ разностей корней послѣдніе n членовъ будутъ нулями; отъ чего первая его часть будетъ имѣть множителемъ z^{κ}. Такъ въ примѣрѣ II § 65 уравненіе квадратовъ разностей дѣлится на z, и данное уравненіе имѣетъ два корня равныхъ 1. Изъ этого вытекаетъ способъ узнавать, имѣетъ ли данное уравненіе равные корни; но продолжительность вычисленія коеффиціентовъ уравненія съ квадратами разностей корней дѣлаетъ этотъ способъ затруднительнымъ.

Приравнявъ нулю послѣдній членъ уравненія

$$z^3+6Q^2z^2+9Q^2z+4Q^3+27R^2=o,$$

имѣемъ

$$4Q^3+97R^2=o,$$

условіе, которому должны удовлетворять коеффиціенты уравненія 3-й степени, не имѣющаго члена съ x^2.

О разысканіи мнимыхъ корней.

§ **72.** Ежели данное уравненіе съ дѣйствительными коеффиціентами имѣетъ мнимые корни вида $t+u\sqrt{-1}$; то эти корни опредѣлятся когда опредѣлимъ дѣйствительныя значенія t и u. И такъ посмотримъ, какимъ образомъ можно получить уравненія, которыхъ дѣйствительные корни были бы значенія t и u. Для этого мы воспользуемся способомъ, предложеннымъ Лагранжемъ въ *Traité de la résolution des équations numériques.*

Изъ § 30 извѣстно, что въ уравненіи съ дѣйствительными коеффиціентами мнимые корни всегда бываютъ парные; такъ, что если $t+ui$ есть одинъ корень уравненія $f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+\ldots=o$, то $t-ui$ будетъ также удовлетворять этому уравненію. Разность этихъ корней есть $-2u.i$, а квадратъ ея отрицательное количество $-4u^2$; поэтому уравненіе съ квадратами разностей корней должно имѣть покрайней мѣрѣ столько дѣйствительныхъ корней, сколько данное уравненіе имѣетъ паръ мнимыхъ корней. Пусть

$$z^n+B_1z^{n-1}+B_2z^{n-2}+\ldots+B_{n-1}z+B_n=o \qquad (1)$$

будетъ уравненіе съ квадратами разностей корней уравненія $f(x)=o$ (*). Перемѣнивъ въ немъ z на $-v$, получимъ уравненіе

$$v^n-B_1v^{n-1}+B_2v^{n-2}-B^3v^{n-3}+\ldots\pm B_{n-1}v\pm B_n=o, \qquad (2)$$

котораго положительные корни равны по числовому значенію отрицательнымъ корнямъ ур. (1), а потому число ихъ должно быть не менѣе числа паръ мнимыхъ корней даннаго уравненія. Означимъ чрезъ v_1, v_2, v_3,... положительные корни уравненія (2), соотвѣтствующіе мнимымъ корнямъ, т. е. различныя значенія квадрата $4u^2$; то $\frac{\sqrt{v_1}}{2}, \frac{\sqrt{v_2}}{2}, \frac{\sqrt{v_3}}{2},\ldots$ будутъ значенія u.

Вставивъ $t+u.i$ въ $f(x)$ вмѣсто x, отдѣливъ дѣйствительную часть отъ мнимой, приравнявъ каждую нулю и сократимъ на u, мы получимъ два уравненія:

$$\left.\begin{aligned}\xi(t,u)&=t^m+U_1t^{m-1}+U_2t^{m-2}+\ldots=o\\ \psi(t,u)&=mt^{m-1}+U't^{m-2}+U''t^{m-3}+\ldots=o,\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

въ которыхъ U_1, U_2,...U', U'',... означаютъ раціональныя функціи количества u и коеффиціентовъ a_1, a_2,...a_m даннаго уравненія. Если

(*) Можно предположить, что уравненіе $f(x)=o$ не имѣетъ равныхъ корней.

внесемъ въ эти уравненія одно изъ значеній $u = \frac{\sqrt{v_1}}{2}, \frac{\sqrt{v_2}}{3}, \ldots$; то они должны существовать вмѣстѣ; слѣдовательно ихъ первыя части: $\xi(t,u)$ и $\psi(t,u)$ должны имѣть общаго дѣлителя. Найдя его, и приравнявъ нулю, будемъ имѣть уравненіе по t и u, изъ котораго опредѣлимъ t по u. Когда всѣ значенія u, выведенныя изъ уравненія (2), не равны между собою; то каждому изъ нихъ будетъ соотвѣтствовать только одно значеніе t, а потому общій большой дѣлитель $\xi(t,u)$ и $\psi(t,u)$ долженъ быть первой степени. И такъ, увѣрившись, что всѣ положительные корни уравненія (2) неравные, должно продолжить нахожденіе общаго большаго дѣлителя до остатка первой степени относительно t; приравнявъ его нулю, t выразится раціональною функціею u. Когда же u имѣетъ нѣсколько значеній равныхъ, на пр. μ; тогда каждому изъ нихъ будутъ соотвѣтствовать различныя значенія t (*). Вставивъ это кратное значеніе u въ уравненія (3), они должны существовать вмѣстѣ при μ различныхъ значеній t, а потому первыя ихъ части будутъ имѣть общаго большаго дѣлителя степени μ относительно t. Слѣдовательно нахожденіе общаго большаго дѣлителя функцій $\xi(t,u)$ и $\psi(t,u)$ должно продолжать до остатка степени μ, и приравнять этотъ остатокъ нулю; чрезъ то мы будемъ имѣть уравненіе для опредѣленія μ значеній t, соотвѣтствующихъ $\mu =$ кратному значенію u.

Если всѣ значенія t неравныя и не равны дѣйствительнымъ корнямъ; то ясно, что уравненіе съ квадратами разностей корней не будетъ имѣть никакихъ другихъ отрицательныхъ корней, кромѣ $-4u_1^2, -4u_2^2 \ldots$; такъ, что число этихъ корней будетъ равно числу паръ мнимыхъ корней даннаго уравненія. Но когда нѣкоторыя изъ количествъ t равны дѣйствительнымъ корнямъ или равны между собою; то число отрицательныхъ квадратовъ разностей, будетъ болѣе числа паръ мнимыхъ корней въ данномъ уравненіи. Въ самомъ дѣлѣ, если на пр. $t = \alpha_1$, означая чрезъ α_1 дѣйствительный корень даннаго уравненія; то квадраты разностей $t_1 - \alpha_1 + u_1 i$ и $t_1 - \alpha_1 - u_1 i$ будутъ $-u_1^2, -u_1^2$. Слѣдовательно, когда данное уравненіе имѣетъ только два мнимыхъ корня: $t_1 + u_1\sqrt{-1}$, $t_1 - u_1\sqrt{-1}$, и притомъ $t_1 = \alpha_1$; тогда уравненіе съ квадратами разностей будетъ имѣть три отрицательныхъ корня: $-4u_1^2$, $-u_1^2$, $-u_1^2$, изъ которыхъ два равны между собою, а третій вчетверо больше ихъ.

И такъ, когда уравненіе съ квадратами разностей корней имѣетъ три отрицательныхъ корня, изъ которыхъ два равны между собою; то данное уравненіе имѣетъ либо три пары мнимыхъ корней, либо одну.

(*) Если бы нѣкоторыя изъ значеній t были равны между собою; тогда уравненіе $f(x) = o$ имѣло бы равные мнимые корни.

Если данное уравненіе имѣетъ четыре мнимыхъ корня $t_1+u_1i, t_1-u_1i, t_2+u_2i, t_2-u_2i$, то уравненіе квадратовъ разностей имѣетъ два отрицательныхъ корня $-4u_1^2, -4u_2^2$, и если $t_1=a_1$, то, кромѣ этихъ двухъ корней, оно еще имѣетъ два слѣдующихъ: $-u_1^2, -u_1^2$. Къ этимъ корнямъ присоединяются еще два другіе: $-u_2^2, -u_2^2$, въ случаѣ $t_2=a_2$. Наконецъ если, кромѣ того, еще $t_1=t_2$, то четыре квадрата разностей:

$$[t_1-t_2+(u_1-u_2)i]^2, [t_1-t_2-(u_1-u_2)i]^2, [t_1-t_2+(u_1+u_2).i]^2, [t_1-t_2-(u_1+u_2)i]^2$$

приводятся къ четыремъ дѣйствительнымъ отрицательнымъ количествамъ:

$$-(u_1-u_2)^2, -(u_1-u_2)^2, -(u_1+u_2)^2, -(u_2+u_1)^2.$$

Изъ сказаннаго заключаемъ:

1) Въ случаѣ неравныхъ отрицательныхъ корней уравненія съ квадратами разностей, число этихъ корней равно числу паръ мнимыхъ корней даннаго уравненія.

2) Когда нѣкоторые изъ отрицательныхъ квадратовъ разностей равны между собою; тогда каждому изъ неравныхъ квадратовъ разностей соотвѣтствуетъ пара мнимыхъ корней даннаго уравненія, а каждой парѣ равныхъ квадратовъ разностей соотвѣтствуетъ или также одна пара мнимыхъ корней, или ни одной. И такъ два равныхъ отрицат. квадр. разн. даютъ или четыре мнимыхъ корня, или ни одного; три равныхъ отриц. квадр. разн. соотвѣтствуютъ или шести мнимымъ корнямъ, или двумъ. Четыре равныхъ отрицательныхъ квадрата разностей даютъ или 8, или 4 мнимыхъ корня, и т. д.

Пусть на пр. $-v$ и $-v$ будутъ два равныхъ отрицательныхъ корня уравненія съ квадратами разностей; тогда ищемъ общаго большаго дѣлителя функцій $\xi(t,u)$ $\psi(t,u)$, и продолжаемъ дѣйствіе до остатка второй степени; приравнявъ его потомъ нулю, получимъ уравненіе для опредѣленія значеній t. Эти значенія могутъ быть или дѣйствительныя или мнимыя; пусть въ первомъ случаю они будутъ t_1 и t_2, то мы получимъ четыре мнимыхъ корня:

$$t_1+u_1i,\ t_1-u_1i,\ t_2+u_2i,\ t_2-u_2i.$$

Во второмъ случаѣ два равныя значенія $-v$ не будутъ соотвѣтствовать ни одной парѣ мнимыхъ корней.

Когда уравненіе съ квадратами разностей имѣетъ три равныхъ отрицательныхъ корня: $-v, -v, -v$; тогда нахожденіе общаго большаго дѣлителя продолжаемъ до остатка 3-й степени, вносимъ въ него $\frac{\sqrt{v}}{2}$

вмѣсто u, и приравниваемъ его нулю; чрезъ то будемъ имѣть уравненіе 3-й степени, изъ котораго опредѣлимъ три значенія t. Если они всѣ дѣйствительныя, то $-v$ соотвѣтствуетъ шести мнимымъ корнямъ; если же только одно значеніе t дѣйствительное, то будемъ имѣть только одну пару мнимыхъ корней.

Разсуждая такимъ образомъ, мы всегда будемъ въ состояніи опредѣлить число мнимыхъ корней и значенія ихъ, когда мы будемъ умѣть вычислять дѣйствительные корни.

§ 73. Этотъ способъ по трудности составленія уравненія съ квадратами разностей тяжелъ въ приложеніи къ уравненіямъ высокихъ степеней, а потому въ нѣкоторыхъ случаяхъ выгоднѣе пользоваться слѣдующимъ:

Исключивъ, по § 50, изъ уравненій $\xi(t,u)=o$ и $\psi(t,u)=o$ одно изъ количествъ: t или u, на пр. t, мы получимъ два уравненія $R_{n-1}=o$ и $R_n=o$; одно по t и u, а другое только по u. Такъ какъ для t и u должно брать только дѣйствительныя значенія, то должно отъискать только дѣйствительные корни уравненія $R_n=o$, и внести ихъ потомъ въ уравненіе $R_{n-1}=o$; чрезъ то получимъ уравненія, которыхъ дѣйствительные корни будутъ дѣйствительныя значенія t.

§ 74. Въ этой Главѣ я имѣлъ цѣлью показать, что изъисканіе какихъ бы то ни было корней всегда приводится къ изъисканію дѣйствительныхъ неравныхъ корней.

И такъ, чтобы умѣть рѣшить данное уравненіе, остается только узнать, какимъ образомъ вычисляются дѣйствительные корни; мы это узнаемъ въ слѣдующей главѣ.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

О вычисленіи дѣйствительныхъ корней.

Предѣлы корней.

§ 75. Прежде, нежели приступимъ къ изъисканію дѣйствительныхъ корней, займемся изъисканіемъ ихъ предѣловъ, т. е. такихъ двухъ количествъ, изъ которыхъ одно болѣе нѣкоторыхъ корней, а другое менѣе ихъ. Предѣлы раздѣляются на *общіе* и *частные*; къ первымъ относятся: 1) тѣ, между которыми содержатся всѣ дѣйствительные корни; 2) тѣ, между которыми содержатся одни положительные корни и 3) тѣ, между которыми содержатся одни отрицательные корни. Втораго рода предѣлы суть тѣ, которые содержатъ по одному только дѣйствительному корню. Займемся сперва общими предѣлами.

§ 76. Пусть l и $-l'$ будутъ предѣлы всѣхъ дѣйствительныхъ корней уравненія

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\mu)[(x-t_1)^2+u_1^2][(x-t_2)^2+u_2^2]\dots[(x-t_\nu)^2+u_\nu^2]=0$$

гдѣ a_1, $a_2,\dots a_\mu$ означаютъ дѣйствительные корни, а t_1, $t_2,\dots t_\nu$, u_1, $u_2,\dots u_\nu$ дѣйствительныя количества, входящія въ составъ мнимыхъ корней: t_1+u_1i, $t_2+u_2i,\dots t_\nu+u_\nu i$.

Внеся l вмѣсто x въ $f(x)$, имѣемъ

$$f(l)=(l-a_1)(l-a_2)\dots(l-a_\mu)[(l-t_1)^2+u_1^2][(l-t_2)^2+u_2^2]\dots[(l-t_\nu)^2+u_\nu^2].$$

Такъ какъ, по положенію, l болѣе всѣхъ дѣйствительныхъ корней; то разности $l-a_1$, $l-a_2,\dots l-a_\mu$ всѣ положительныя. Множители $(x-t_1)^2+u_1^2$, $(x-t_2)^2+u_2^2,\dots(x-t_\nu)^2+u_\nu^2$ остаются положительными для всякаго дѣйствительнаго значенія x. И такъ результатъ $f(l)$ есть произведеніе только положительныхъ количествъ, а потому онъ самъ положительное количество.

Ясно, что всякое количество $L>l$ имѣетъ то же свойство, что и l.

Вставивъ l' въ $f(x)$ вмѣсто x, имѣемъ

$$f(-l')=(-l'-a_1)(-l'-a_2)\dots(-l'-a_\mu)[(-l'-t_1)^2+u_1^2]\dots[(-l'-t_\nu)^2+u_\nu^2].$$

Разности $-l'-a_1$, $-l'-a_2$, $-l'-a_3,\ldots-l'-a_\mu$ всѣ отрицательныя: это ясно для разностей, соотвѣтствующихъ положительнымъ корнямъ; но какъ, по положенію, числовое значеніе l' болѣе числовыхъ значеній всѣхъ отрицательныхъ корней, то разности, соотвѣтствующія этимъ корнямъ, также отрицательныя. И такъ произведенія.

$$(1)\qquad (-l'-a_1)\,(-l'-a_2)\ldots(-l'-a_\mu)$$

состоитъ только изъ отрицательныхъ множителей. Произведеніе $[(-l'-t_1)^2+u_1^2]\,[(-l'-t_2)^2+u_2^2]\ldots[(-l'-t_\nu)^2+u_\nu^2]$ всегда положительное; слѣдовательно знакъ результата $f'(-l')$ будетъ зависѣть отъ знака произведенія (1), которое бываетъ положительное, когда число дѣйствительныхъ корней четное, а отрицательное въ противномъ случаѣ. Но число дѣйствительныхъ корней бываетъ четное или нечетное, смотря по тому, будетъ ли степень даннаго уравненія четная или нечетная; слѣдовательно результатъ $f'(-l')$ будетъ положительный, когда степень $f(x)$ четная, а отрицательный въ противномъ случаѣ.

Ясно, что то же свойство принадлежитъ всякому количеству $-L'<-l'$.

На оборотъ, если положительное количество l и всякое количество большее, будучи вставлены вмѣсто x въ $f(x)$, даютъ результаты положительные, отличные отъ нуля; то l будетъ высшій предѣлъ всѣхъ дѣйствительныхъ корней. Въ самомъ дѣлѣ: по положенію никакое количество $L>l$ не можетъ дать $f(L)=o$, а потому между l и $+\infty$ нѣтъ дѣйствительныхъ корней; они всѣ меньше l. Равнымъ образомъ, если $-l'$ и всякое количество $-L'<-l$, будучи вставлены вмѣсто x, обращаютъ $f(x)$ въ положительное число; то $-l'$ есть низшій предѣлъ всѣхъ дѣйствительныхъ корней.

§ 77. Данное уравненіе отъ перемѣны x на $y+l$ преобразуется въ слѣдующее

$$f(y+l)=(y+l-a_1)(y+l-a_2)..(y+l-a_\mu)[(y+l-t_1)^2+u_1^2]..[(y+l-t_\nu)^2+u_\nu]=o,$$

котораго дѣйствительные корни

$$-(l-a_1),\ -(l-a_2)\ldots..-(l-a_\mu)$$

будутъ всѣ отрицательные, когда $l>a_1$, $a_2,\ldots.a_\mu$. Если притомъ l болѣе всѣхъ дѣйствительныхъ количествъ t_1, $t_2,\ldots.t_\nu$; то разности:

$$l-t_1,\ l-t_2,\ldots.l-t_\nu$$

будутъ положительныя; слѣдов. $f(y+l)$ будетъ произведеніе только положительныхъ количествъ, и не должно имѣть членовъ съ $(-)$, т. е. коэффиціенты его

$$f(l),\quad f'(l),\quad \frac{1}{1.2}f''(l)\ldots\frac{1}{1.2\ldots(m-1)}f^{m-1}(l)$$

должны быть всѣ положительные.

Обратно, если l, будучи вставлено вмѣсто x въ рядъ функцій

$$f(x),\ f'(x),\ldots f^m(x)$$

даетъ для нихъ результаты положительные; тогда l есть высшій предѣлъ всѣхъ дѣйствительныхъ корней ур. $f(x)=o$. Въ самомъ дѣлѣ: тогда функція $f(y+l)$ будетъ имѣть только положительные члены, а потому не можетъ обращаться въ нуль ни для какого положительнаго значенія y; слѣд. всѣ дѣйствительные ея корни

$$-(l-a_1),\ -(l-a_2),\ldots\ldots-(l-a_\mu)$$

должны быть отрицательные; для чего l должно быть болѣе всѣхъ корней даннаго уравненія. Изъ этой теоремы вытекаетъ *Нютоновъ* способъ нахожденія высшаго предѣла всѣхъ дѣйствительныхъ корней. Онъ состоитъ въ томъ, чтобы вставлять послѣдовательно положительныя числа 1, 2, 3..... въ функціи $f(x)$, $f'(x)\ldots.f^{m-1}(x)$, начиная съ послѣдней, до тѣхъ поръ, какъ найдемъ число, которое для всѣхъ этихъ функцій даетъ результаты съ $+$. Для примѣра возьмемъ уравненіе, помѣщенное въ *Универсальной Ариѳметикѣ Нютона*

$$f(x)=x^5-2x^4-10x^3+30x^2+63x-120=o.$$

Производныя этого уравненія будутъ:

$$f'(x)=5x^4-8x^3-30x^2+60x+63$$

$$f''(x)=20x^3-24x^2-60x+60$$

$$f'''(x)=60x^2-48x-60$$

$$f^{IV}(x)=120x-48$$

$$f^{V}(x)=120.$$

Вставивъ 1 въ $f^{IV}(x)$ и $f'''(x)$, находимъ, что $f'''(x)$ отрицательная, а потому данн. уравн. имѣетъ положительные корни, превышающіе единицу.

Положивъ $x=2$, имѣемъ:

$$f^{IV}(x)=120.2-48=192$$

$$f'''(x)=60.2^2-48.2-60=84$$

$$f''(x)=20.2^3-24.2^2-60.2+60=4$$

$$f'(x)=5.2^4-8.2^3-30.2^2+60.2+63=79$$

$$f(x)=2^5-2.2^4-10.2^3+30.2^2+63.2-120=46,$$

результаты всѣ положительные; слѣдовательно 2 есть высшій предѣлъ всѣхъ дѣйствительныхъ корней даннаго уравненія.

§ **78**. Этотъ способъ даетъ предѣлъ весьма близкій къ корнямъ; но онъ не удобенъ по своей продолжительности. Поэтому въ нѣкоторыхъ случаяхъ предпочитаютъ слѣдующіе способы:

1) Неравенство $f(l)>o$ или

$$(2) \qquad l^m>-a_1l^{m-1}-a_2l^{m-2}-a_3l^{m-3}-\ldots-a_m$$

будетъ удовлетворено, когда удовлетворено неравенство

$$(3) \qquad l^m>-a_nl^{m-1}-a_nl^{m-2}-a_nl^{m-3}-\ldots-a_n,$$

гдѣ a_n есть отрицательный коеффиціентъ, имѣющій наибольшее числовое значеніе. Въ самомъ дѣлѣ: во второй части неравенства (2) имѣются положительные и отрицательные члены, а вторая часть неравенства (3) содержитъ только положительные члены, которые всѣ болѣе пожительныхъ членовъ въ (2); отъ того

$$-a_1l^{m-1}-a_2l^{m-2}-\ldots-a_m<-a_nl^{m-1}-a_nl^{m-2}-\ldots-a_n,$$

и неравенство (2) всегда существуетъ вмѣстѣ съ (3).

Вторая часть неравенства (3) есть не что иное, какъ

$$-a_n(l^{m-1}+l^{m-2}+\ldots+1)=-a_n\left(\frac{l^m-1}{l-1}\right)=\frac{-a_nl^m}{l-1}-\frac{-a_n}{l-1},$$

а потому

$$l^m>\frac{-a_nl^m}{l-1}-\frac{-a_n}{l-1}.$$

Когда $l>1$, тогда $\frac{-a_nl^m}{l-1}>\frac{-a_nl^m}{l-1}-\frac{-a_n}{l-1}$, и можно положить

$l^m = \frac{-a_n l^m}{l-1}$ или $1 = \frac{-a_n}{l-1}$; откуда $l = 1 - a_n$. Слѣд. $f(1-a_n) > o$.

Посмотримъ, выведенное значеніе для l будетъ ли удовлетворять неравенствамъ:

$$f'(l) > o,\ f''(l) > o,\ f'''(l) > o, \ldots f^{m-1}(l) > o.$$

Первое изъ нихъ приводится къ

$$ml^{m-1} > -\{(m-1)a_1 l^{m-2} + (m-2)a_2\ l^{m-3} + \ldots + a_{m-1}\},$$

гдѣ вторая часть, какъ легко видѣть, меньше суммы

$$-a_n\{(m-1)l^{m-2} + (m-2)l^{m-3} + \ldots + 1\},$$

которая меньше

$$-a_n(m-1)\{l^{m-2} + l^{m-3} + \ldots + 1\} = -a_n(m-1)\left(\frac{l^{m-1}-1}{l-1}\right).$$

Слѣд. неравенство $f(l) > o$ будетъ удовлетворено, когда удовлетворено неравенство

$$ml^{m-1} > -a_n(m-1)\left(\frac{l^{m-1}-1}{l-1}\right)$$

или

$$l^{m-1} > \frac{-a_n(m-1)l^{m-1}}{m(l-1)} - \frac{-a_n(m-1)}{m(l-1)};$$

но послѣднее удовлетворяется, когда возьмемъ

$$l > 1 \text{ и } l^{m-1} = -a_n\left(\frac{m-1}{m}\right)\frac{l^{m-1}}{l-1},$$

а тѣмъ болѣе, когда сдѣлаемъ

$$l^{m-1} = -a_n\left(\frac{m}{m}\right)\cdot\frac{l^{m-1}}{l-1} = -a_n\frac{l^{m-1}}{l-1}$$

или

$$1 = \frac{-a_n}{l-1},\ \text{т. е. } l = 1 - a_n.$$

Докажемъ вообще, что

$$f^{\kappa}(l)=m(m-1)\ldots(m-k+1)l^{m-\kappa}+(m-1)\ldots(m-k)a_1 l^{m-\kappa+1}+$$
$$(m-2)\ldots(m-k-1)a_2 l^{m-\kappa-2}+\ldots+k(k-1)\ldots 2.1.\ a_{m-\kappa}$$

будетъ положительная для $l=1-a_n$.

Это будетъ тогда, когда $l=1-a_n$ удовлетворяетъ неравенству

$$m(m-1)\ldots(m-k+1)l^{m-\kappa}>-\{(m-1)..(m-k)l^{m-\kappa-1}+$$
$$(m-2)..(m-k-1)a_2 l^{m-\kappa-2}\ldots k(k-1)\ldots 2.a_{m-\kappa}$$

Но вторая часть меньше суммы

$$-a_n\{(m-1)..\ (m-k)l^{m-\kappa-1}+(m-2)\ldots(m-k-1)l^{m-\kappa-2}+\ldots k\ldots 2\},$$

которая меньше

$$-a_n\{(m-1)(m-1)\ldots(m-k)\left(\frac{l^{m-\kappa}-1}{l-1}\right);$$

поэтому $f^{\kappa}(l)>o$ удовлетворится, когда будетъ удовлетворено неравенство

$$m(m-1)\ldots(m-k+1)\ l^{m-\kappa}>-a_n(m-1)(m-2)\ldots(m-k)\left(\frac{l^{m-\kappa}-1}{l-1}\right)$$

или

$$l^{m-\kappa}>-a_n\frac{m-k}{m}.\frac{l^{m-\kappa}}{l-1}-\frac{m-k}{m}.\frac{-a_n}{l-1},$$

а для того можно положить

$$l^{m-\kappa}=-a_n\frac{l^{m-\kappa}}{l-1},\ \text{т. е. } l=1-a_n.$$

И такъ $x=1-a_n$ для каждой изъ производныхъ функцій даетъ результатъ положительный, а потому количество $1-a_n$ (§ 77) болѣе всѣхъ дѣйствительныхъ корней. Это выраженіе высшаго предѣла дано *Маклореномъ*. Оно, хотя получается съ перваго взгляда на уравненіе; но имѣетъ ту невыгоду, что не такъ близко къ корнямъ, какъ *Нютоново*.

2) Подобнымъ путемъ можно вывести *Роллево* выраженіе для l, зависящее отъ мѣста перваго отрицательнаго коэффиціента.

Означимъ чрезъ a_r первый отрицательный коэффиціентъ, т. е. тотъ, который множитъ x^{m-r}, а чрезъ a_n отрицательный коэффиціентъ, имѣющій наибольшее числовое значеніе; тогда количество l, удовлетворяющее неравенству

(4) $$l^m > -a_n(l^{m-r}+l^{m-r-1}+\ldots+l+1)$$

удовлетворитъ неравенству

$$l^m > -a_r l^{m-r} - a_{r+1} l^{m-r-1} - \ldots - a_n l^{m-n} - \ldots - a_m,$$

а тѣмъ болѣе слѣдующему

$$l^m > -a_1 l^{m-1} - a_2 l^{m-2} - a_3 l^{m-3} - \ldots a_{m-1} l - a_m;$$

т. е. $f(l) > o$;

потому что

$$-a_1 l^{m-1} - a_2 l^{m-2} - \ldots - a_m < -a_r l^{m-r} - a_{r+1} l^{m-r-1} - \ldots - a_m$$
$$< -a_n(l^{m-r}+l^{m-r-1}+\ldots+l+1).$$

Неравенство (4) приводится къ

$$l^m > -a_n\left(\frac{l^{m-r+1}-1}{l-1}\right)$$

или

$$l^m > \frac{-a_n l^{m-r+1}}{l-1} - \frac{-a_n}{l-1};$$

откуда видно, что для l можно взять значеніе >1, удовлетворяющее условію

$$l^m > \frac{-a_n l^{m-r+1}}{l-1},$$

которое по сокращеніи на l^{m-r+1} даетъ

(5) $$l^{r-1} > \frac{-a_n}{l-1} \text{ или } (l-1)\, l^{r-1} > -a_n,$$

а потому можно положить

$$(l-1)(l-1)^{r-1} = -a_n \text{ или } (l-1)^r = -a_n;$$

откуда $l = 1 + \sqrt[r]{-a_n}$

Ясно, что всякое количество$>1+\sqrt[r]{-a_n}$ будетъ имѣть свойство удовлетворять неравенствамъ (4) (5), а потому и неравенству $f(l)>o$; слѣд. $l=1+\sqrt[r]{-a_n}$ есть высшій предѣлъ всѣхъ дѣйствительныхъ корней. Можно въ этомъ еще увѣриться, доказавъ, что найденное значеніе l удовлетворяетъ неравенствамъ: $f'(l)>o$, $f''(l)>o, \ldots f^{m-1}(l)>o$.

Для уравненія

$$x^5+x^4-4x^2-700+800=o,$$

по *Нютонову* способу высшій предѣлъ есть 7
— *Маклореневу* 701
— *Роллеву* . . . . $1+\sqrt[2]{700}$ или 84.

Послѣдній ближе къ корнямъ, нежели 701.

Когда коеффиціентъ втораго члена даннаго уравненія отрицательный, тогда *Роллевъ* предѣлъ совпадаетъ съ *Маклореневымъ*.

3) Вотъ еще два способа находить высшій предѣлъ корней, имѣющіе въ нѣкоторыхъ случаяхъ преимущество предъ предъидущими. Они принадлежатъ Г-ну *Вену* (*).

a) Первый изъ нихъ состоитъ въ слѣдующемъ: если a_n будетъ отрицательный коеффиціентъ, имѣющій наибольшее числовое значеніе, а a_p наибольшій положительный коеффиціентъ, изъ коеффиціентовъ, предшествующихъ первому отрицательному члену $a_r x^{m-r}$; то можно взять

$$l=1+\frac{-a_n}{a_p}.$$

Чтобы l и всякое количество большее было высшимъ предѣломъ корней, должно, чтобы $f(l)>o$ или

$$(6)\quad l^m+a_1 l^{m-1}+\ldots+a_p l^{m-p}+\ldots+a_r l^{m-r+1}>-a_r l^{m-r}-\ldots-a_n l^{m-n}-\ldots-a_m;$$

но это неравенство будетъ удовлетворено, когда

$$a_p l^{m-p}>-a^r l^{m-r}-\ldots-a_n l^{m-n}-\ldots-a_m,$$

а тѣмъ болѣе, когда

$$a_p l^{m-r+1}>-a_r l^{m-r}-\ldots-a_n l^{m-n}-\ldots-a_n.$$

(*) Bullétin des sciences Mathématiques, Physiques et Chimique. 1825 № 10.

Такъ какъ $-\frac{a_r}{a_p}l^{m-r}-\ldots-\frac{a_n}{a_p}l^{m-n}-\ldots-\frac{a_m}{a_p}<-\frac{a_n}{a_p}(l^{m-r}+l^{m-r-1}+..+1)$, то

$$l^{m-r+1}>-\frac{a_n}{a_p}(l^{m-r}+l^{n-r-1}+..+1)$$

или

$$l^{m-r+1}>-\frac{a_n}{a_p}\left(\frac{l^{m-r+1}-1}{l-1}\right),$$

т. е.

$$l^{m-r+1}>-\frac{a_n}{a_p}\left(\frac{l^{m-r+1}}{l-1}\right)-\frac{-a_n}{l-1}.$$

Для чего позволительно допустить

$$l^{m-r+1}=\frac{-a_n}{a_p}\cdot\frac{l^{m-r+1}}{l-1};$$

откуда

$$l=1+\frac{-a_n}{a_p}.$$

b) **Второе выраженіе предѣла гораздо ближе къ корнямъ; оно сходно съ *Роллевымъ*.**

Неравенство (6) удовлетворится, когда будетъ удовлетворено слѣдующее:

$$a_p l^{m-p}>-a_n\left(\frac{l^{m-r+1}-1}{l-1}\right).$$

Раздѣливъ обѣ части этого неравенства на $a_p.\ l^{m-p}$, имѣемъ

$$1>\frac{-a_n}{a_p l^{m-p}}\cdot\frac{l^{m-r+1}-1}{l-1}.$$

но послѣднее удовлетворится, если

(7) $$1>\frac{-a_n}{a_p l^{m-p}}\cdot\frac{l^{m-r+1}}{l-1};$$

сдѣлавъ

(8) $$\left(\frac{-a_n}{a_p}\right)^{\frac{1}{r-p}}=l-1$$

и положивъ для сокращенія $\frac{-a_n}{a_p}=Q$, вторая часть неравенства (7) обратится въ

$$\frac{Q}{Q^{\frac{1}{r-p}}\left(1+Q^{\frac{1}{r-p}}\right)^{r-p-1}}=\frac{Q}{Q^{\frac{1}{r-p}}+\ldots+Q.}$$

Ясно, что это количество меньше единицы, а потому положеніе (8) удовлетворяетъ неравенству (8); слѣдовательно также и неравенству (6).

И такъ выраженіе $l=1+\left(\frac{-a_n}{a_p}\right)^{\frac{1}{r-p}}$ можетъ служить высшимъ предѣломъ корней.

Для уравненія

$$x^5+5x^4+x^3-16x^2-20x-16=o$$

по *Нютонову* способу высшій предѣлъ есть 3,
— *Маклореневу* . . . . $1+20=21$
— *Роллеву*. . . . . $1+\sqrt[3]{20}$ или 4
— *Венову* { 1-му. . . . . $1+4=5$
— *Венову* { 2-му. . . . . $1-\sqrt[2]{\frac{25}{5}}=3.$

Изъ сравненія этихъ способовъ мы видимъ, что послѣдній удобнѣе всѣхъ прочихъ. Встрѣчаются случаи, въ которыхъ оба *Веновы* способа совпадаютъ, такъ на пр. для уравненія

$$x^4+50x^3+60x^2-90x-60=o,$$

по *Нютонову* способу высшій предѣлъ есть 2
— *Маклореневу*. . . . . $1+90=91$
— *Роллеву*. . . . . $1+\sqrt[3]{90}$ или 6
— *Венову* { 1-му. . . . . $1+\frac{90}{60}=\frac{5}{2}$
— *Венову* { 2-му. . . . . $1+\sqrt[1]{\frac{90}{60}}=\frac{5}{2}$

§ **79.** Въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ бываетъ удобенъ слѣдующій оборотъ для отъисканія высшаго предѣла корней:

Положимъ сперва, что послѣ перваго отрицательнаго члена, всѣ прочіе также отрицательные; означивъ сумму положительныхъ членовъ чрезъ X, а сумму отрицательныхъ чрезъ Y, имѣемъ

$$f(x)=X-Y$$

Пусть последній членъ въ X будетъ $a_{m-r}x^r$; сдѣлавъ x^r общимъ множителемъ, получаемъ

$$f(x)=x^r\left(\frac{X}{x^r}-\frac{Y}{x^r}\right).$$

Частное $\frac{X}{x^r}$ содержитъ только положительныя степени x; напротивъ того $\frac{Y}{x^r}$ содержитъ только отрицательныя; слѣдовательно когда x возрастаетъ положительно, тогда $\frac{X}{x^r}$ увеличивается, а $\frac{Y}{x^r}$ уменьшается, или $\frac{X}{x^r}$ остается постояннымъ (когда $r=m$), а $\frac{Y}{x^r}$ уменьшается, или наконецъ $\frac{Y}{x^r}$ остается постояннымъ (когда $r=1$), а $\frac{X}{x^r}$ увеличивается. Во всѣхъ этихъ случаяхъ, вставляя въ $\frac{X}{x^r}-\frac{Y}{x^r}$ вмѣсто x положительныя числа 0, 1, 2..., можно дойти до числа $x=l$, которое даетъ $\frac{X}{x^r}>\frac{Y}{x^r}$, и ясно, что всякое количество, которое больше его, будетъ имѣть то же свойство; слѣд. между l и ∞ не будетъ ни одного количества, которое бы давало $\frac{X}{x^r}-\frac{Y}{x^r}=o$, а потому l будетъ высшій предѣлъ всѣхъ корней ур. $f(x)=o$.

Когда въ $f(x)$ положительные и отрицательные члены въ какомъ нибудь порядкѣ; такъ, что послѣ положительныхъ членовъ, слѣдуютъ отрицательные, а послѣ отрицательныхъ положительные; то, означивъ сумму положительныхъ членовъ до перваго отриц. опять чрезъ X, а сумму всѣхъ отриц. чрезъ Y, мы имѣемъ выраженіе

$$X-Y,$$

которое по раздѣленіи на x^r, низшую степень неизвѣстнаго въ X, приводится къ слѣдующему

$$x^r\left(\frac{X}{x^r}-\frac{Y}{x^r}\right)=X-Y,$$

гдѣ $\frac{X}{x^r}$ будетъ только заключать положительныя степени x, а $\frac{Y}{x^r}$ отрицательныя. Ясно, что

$$\frac{Y}{x^r} < -a_{r+1}x^{-1} - a_{r+2}x^{-2} - \ldots\ldots - a_{m-1}x^{-(r-1)} - a_m x^{-r},$$

а потому число $x=l$, удовлетворяющее неравенству $\frac{X}{x^r} > \frac{Y}{x^r}$ или $X-Y>o$, тѣмъ болѣе должно удовлетворить неравенству

$$\frac{X}{x_r} > -a_{r+1}x^{-1} - a_{r+2}x^{-2} - \ldots - a_{m-1}x^{-(r-1)} - a_m x^{-r}$$

т. е. $f(x)>o$. Притомъ всякое число $x>l$ также даетъ $\frac{X}{x^r} - \frac{Y}{x^r} > o$. Слѣд. не только l, но и всякое число $>l$ даетъ для $f(x)$ результатъ положительный, а потому l есть высшій предѣлъ.

Такимъ образомъ въ уравненіи

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x - 8 = o,$$

взявши выраженіе $X-Y=x^4-3x^3-3x-8$, которое гораздо проще нежели $f(x)$, вставляемъ въ него послѣдовательно: 0, 1, 2..... вмѣсто x, и находимъ, что оно отъ $x=4$, получаетъ положительное значеніе; слѣдовательно 4 можетъ служить высшимъ предѣломъ положительныхъ корней.

Можно иногда съ выгодою употреблять слѣдующій оборотъ: первую часть уравненія раздѣлимъ на нѣсколько положительныхъ частей, помѣщая въ каждую одинъ или нѣсколько положительныхъ членовъ и нѣсколько отрицательныхъ, въ которыхъ степени x были бы ниже, нежели въ первыхъ. Ясно, что если положительное число $x=l$, дѣлаетъ всѣ эти части отдѣльно положительными, а потому и самую $f(x)$; то всякое число $>l$ будетъ имѣть то же свойство; слѣдовательно l можно принять за высшій предѣлъ. Въ предъидущемъ примѣрѣ первая часть уравненія раздѣляется на двѣ части: x^4-3x^3 и $2x^2-3x-8$; первая изъ нихъ при $x=3$ будетъ нулемъ, а вторая $+1$, а потому 3 есть высшій предѣлъ.

§ 80. Если въ уравненіи $f(x)=o$ перемѣнимъ x на $-x$; то положительные корни преобразованнаго уравненія $f(-x)=o$ будутъ равны по величинѣ отрицательнымъ корнямъ даннаго уравненія (§ 34), а потому отрицательный корень, имѣющій наибольшее числовое значеніе въ ур. $f(x)=o$, будетъ наибольшій положительный корень въ уравненіи $f(-x)=o$. Найдя высшій предѣлъ l' положительныхъ корней послѣдняго уравненія, и взявши его отрицательно, получимъ количество $-l'$, которое меньше всѣхъ корней даннаго уравненія, т. е. низшій ихъ предѣлъ. Перемѣнивъ въ уравненіи

$$f(x)=x^4-3x^3+2x^2-3x-8=o$$

знаки членовъ четныхъ мѣстъ, мы получимъ уравненіе

$$f(-x)=x^4+3x^3+2x^2+3x-8=o,$$

для котораго высшимъ предѣломъ всѣхъ корней можетъ служить $+1$; слѣд. -1 есть низшій предѣлъ всѣхъ корней ур. $f(x)=o$. И такъ всѣ корни даннаго уравненія заключаются между 4 и -1.

Такъ какъ l' и всякое количество большее, будучи вставлено вмѣсто x въ рядъ функцій:

$$f^m(-x),\ f^{m-1}(-x),\ f^{m-2}(-x).....f'(-x),\ f(-x),$$

даетъ результаты положительные, то это количество служитъ высшимъ предѣломъ корней каждой изъ этихъ функцій, а потому $-l'$, будетъ низшій предѣлъ корней каждой изъ функцій:

$$f^m(x),\ f^{m-1}(x),\ f^{m-2}(x).....f'(x),\ f(x),$$

и будучи вставлено вмѣсто x въ эти функціи, долженъ дать (§ 76) результаты, поперемѣнно положительные и отрицательные, а именно:

$$+\ -\ +\ -....\ (\pm),$$

(смотря потому степень $f(x)$ будетъ ли четная или нечетная). Наоборотъ всякое число $-l'$, которое, будучи вставлено вмѣсто x въ рядъ функцій

$$f^m(x),\ f^{m-1}(x),....f'(x),\ f(x),$$

даетъ для нихъ результаты поперемѣнно то съ $+$ то съ $-$, должно быть менѣе всѣхъ корней. Въ самомъ дѣлѣ: перемѣнивъ x на $y-l'$, $f(x)=o$ преобразуется въ уравненіе

$$(9)\qquad \frac{f^m(-l')}{1.2.3..m}y^m+\frac{f^{m-1}(-l')}{1.2.3(m-1)}y^{m-1}+...+f'(-l')y+f(-l')=o,$$

котораго коэффиціенты поперемѣнно положительные и отрицательные. Такое уравненіе не можетъ имѣть отрицательныхъ корней; потому что для отрицательныхъ значенiй y первая часть будетъ сумма количествъ съ одинаковыми знаками; слѣдовательно не будетъ нулемъ. Означивъ опять чрезъ

$$a_1,\ a_2,\ a_3\ldots a_\mu,\ t_1+u_1\sqrt{-1},\ t_2+u_2\sqrt{-1},\ldots t_\nu+u_\nu\sqrt{-1},$$

всѣ корни даннаго уравненiя, уравненiе (9) приметъ видъ

$$[y-(l'+a_1)][y-(l'+a_2)][y-(l'+a_3)]\ldots[\{y-(l'+t_1)\}^2+u_1^2]\ldots[y+(l'+t_\nu)^2+u_\nu^2]=o,$$

и дѣйствительные корни его:

$$l'+a_1,\ l'+a_2,\ l'+a_3,\ldots\ldots l'+a_\mu$$

должны быть всѣ положительные, а для того l' должно быть болѣе числовыхъ значенiй всѣхъ отрицательныхъ корней даннаго уравненiя; слѣд. $-l'$ будетъ менѣе всѣхъ корней, т. е. будетъ низшимъ ихъ предѣломъ.

§ **81**. Чтобы опредѣлить низшiй предѣлъ положительныхъ корней, т. е. положительное число, которое меньше всѣхъ положительныхъ корней, положимъ $x=\frac{1}{y}$; отъ того получимъ уравненiе

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=y^m+\frac{a_{m-1}}{a_m}\ y^{m-1}+\frac{a_{m-2}}{a_m}y^{m-2}+\ldots+\frac{a_1}{a_m}y+\frac{1}{a_m}=o.$$

Означивъ чрезъ $a_1,\ a_2,\ldots a_\mu$ дѣйствительные корни даннаго уравненiя, корни преобразованнаго будутъ $\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_2},\ldots\ldots\frac{1}{a_m}$. Наибольшiй изъ нихъ соотвѣтствуетъ наименьшему положительному изъ предъидущихъ. Пусть γ будетъ высшiй предѣлъ корней ур. $f\left(\frac{1}{y}\right)=o$; то ясно, что $\frac{1}{\gamma}$ меньше наименьшаго изъ положительныхъ корней даннаго ур., а потому онъ есть низшiй предѣлъ положительныхъ корней.

§ **82**. Высшiй предѣлъ отрицательныхъ корней получится, когда ур. $f(x)=o$ преобразуемъ въ $f(-x)=o$, и низшiй предѣлъ положительныхъ корней послѣдняго ур. возьмемъ отрицательно. Это легко объяснить: наименьшiй положительный корень ур. $f(-x)=o$ соотвѣтствуетъ наибольшему отрицательному корню ур. $f(x)=o$, и низшiй предѣлъ положительныхъ корней предъидущаго уравненiя будетъ болѣе всѣхъ отрицательныхъ корней даннаго уравненiя. Такимъ образомъ найдемъ, что для уравненiя

$$x^5+2x^4-10x^3+30x^2+63x-120=o,$$

низшій предѣлъ положительныхъ корней (употребляя способъ Ролля) есть $\frac{2}{3}$, а высшій предѣлъ отриц. корней есть $-\frac{40}{61}$.

§ 83. Свойства предѣловъ ведутъ къ весьма важнымъ заключеніямъ. Прежде нежели мы ихъ изложимъ, докажемъ слѣдующую теорему:

Если по вставкѣ вмѣсто x *въ первую часть даннаго уравненія двухъ количествъ* a *и* b, *мы получимъ результаты съ противными знаками; то уравненіе необходимо должно имѣть по крайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный корень, заключающійся между* a *и* b. Лагранжъ доказываетъ это слѣдующимъ образомъ (*):

Означимъ чрезъ P сумму всѣхъ положительныхъ членовъ, а чрезъ N сумму всѣхъ отрицательныхъ, положимъ для перваго случая, что a и b суть два положительныя количества, изъ которыхъ a меньшее, и что, по вставкѣ a вмѣсто x въ $P-N=f(x)$, мы получили результатъ $f(a)=P-N<o$, а по вставкѣ b вмѣсто x, результатъ $f(b)=P-N>o$; такъ, что въ первомъ случаѣ $P<N$, а во второмъ $P>N$. Такъ какъ P и N содержатъ только положительные члены, то каждое изъ этихъ количествъ будетъ непрерывно возрастать съ непрерывнымъ возрастаніемъ x отъ a до b; но, чтобы P, будучи меньше N, сдѣлалось больше N, оно должно возрастать быстрѣе нежели N, и при частномъ значеніи x, заключающемся между a и b, должно сдѣлаться равнымъ N. Это неравномѣрное возрастаніе количествъ P и N Лагранжъ сравниваетъ съ движеніемъ двухъ тѣлъ, выражаясь слѣдующими словами: «deux mobiles, « qu'on suppose parcourir une même ligne dans le même sens, et qui, « partant à la fois de deux points différents, arrivent en même temps à deux « autres points, mais de manière, que celui qui était d'abord en arrière se « trouve ensuite plus avancé que l'autre, doivent necessairement se rencontrer « dans leur chemin.» Частное значеніе x, при которомъ $P=N$, есть слѣдовательно корень ур. $f(x)=o$, содержащійся между a и b. То же самое должно быть, если по вставкѣ a вмѣсто x, найдемъ $P-N>o$, а по вставкѣ b вмѣсто x, найдемъ $P-N<o$: тогда въ первомъ случаѣ $P>N$, а во второмъ $P<N$; слѣдовательно съ возрастаніемъ x отъ a до b, количество N должно возрастать быстрѣе нежели P, и для нѣкотораго значенія x, средняго между a и b, оно должно достигнуть равенства съ P, т. е. должно быть $f(x)=P-N=o$.

Если одно изъ количествъ a и b или оба отрицательныя; то, взявши положительное количество h, такое, чтобы числовое его значеніе было болѣе a и b, мы будемъ имѣть два положительныя количества $h+a$ и $h+b$.

(*) Traité de la résolution des équations numériques. Note premiere, page 98.

Преобразовавши данное уравненіе $f(x)=o$ въ $f(y-h)=o$, и вставивши въ послѣднее $h+a$ и $h+b$ вмѣсто y, получимъ результаты $f(h+a-h)$ и $(h+b-h)$, тѣ же, что и отъ непосредственной вставки a и b вмѣсто x въ $f(x)$; но какъ, по положенію, эти результаты должны имѣть противные знаки, то ур. $f(y-h)=o$ должно имѣть по крайней мѣрѣ одинъ корень между $h+a$ и $h+b$. Означивъ этотъ корень чрезъ $h+\alpha$, имѣемъ $f(h+\alpha-h)=f(\alpha)=o$; слѣд. данное уравненіе $f(x)=o$, имѣетъ корень α между a и b.

И такъ вышесказанная теорема доказана, какія бы ни были количества a и b. Изъ этой теоремы и изъ свойствъ предѣловъ, вытекаютъ слѣдствія:

1) Если ур. $f(x)=o$ **нечетной степени, то вставивши вмѣсто** x **высшій и низшій предѣлы всѣхъ корней по § 76 получимъ результаты съ противными знаками; слѣд.** ур. *нечетной степени имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный корень.* Это согласно съ § 10.

2) *Уравненіе нечетной степени имѣетъ покрайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный корень съ противнымъ знакомъ послѣднему члену* a_m. Въ самомъ дѣлѣ: 1) когда послѣдній членъ a_m *положительный;* тогда, сдѣлавъ $x=o$ и $x=-l'$, получимъ результаты a_m и $f(-l')$ съ противными знаками, а потому уравн. имѣетъ одинъ корень между o и $-l'$, т. е. отрицательный. 2) Если a_m *отрицательный*; то, по вставкѣ o и l вмѣсто x, получимъ опять результаты съ противными знаками, а потому уравн. имѣетъ корень между o и l, т. е. положительный.

3) ***Уравненіе четной степени, котораго послѣдній членъ отрицательный, имѣетъ покрайней мѣрѣ два корня: одинъ положительный, а другой отрицательный.*** **Чтобы это доказать, положимъ** $x=l$ и $x=-l'$; **результаты** $f(l)$ и $f(-l')$ **будутъ положительные,** а $f(o)=a_m$ отрицательный; слѣдовательно уравненіе имѣетъ одинъ корень между o и l, а другой между o и $-l'$, т. е. одинъ отрицательный, а другой положительный.

§ **84**. Результаты $f(a)$ и $f(b)$ будутъ съ одинакими или съ противными знаками, смотря по тому, будетъ ли между a и b заключаться четное или нечетное число корней. Положимъ, что между a и b заключается нечетное число корней: α_1, α_2, α_3,...α_μ, то

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)\ldots(x-\alpha_\mu)\Phi(x).$$

Вставивъ a **и** b **вмѣсто** x**, имѣемъ**

$$f(a)=(a-\alpha_1)(a-\alpha_2)(a-\alpha_3)\ldots(a-\alpha_\mu)\Phi(a)$$

$$f(b)=(b-\alpha_1)(b-\alpha_2)(b-\alpha_3)\ldots(b-\alpha)_\mu\Phi(b).$$

Знаки $\Phi(a)$ и $\Phi(b)$ должны быть одинакіе, потому что въ противномъ случаѣ $\Phi(x)$ и $f(x)$ имѣли бы еще корень между a и b; знаки же каждыхъ двухъ соотвѣтственныхъ множителей $(a-\alpha_1)$ и $(b-\alpha_1)$,$(a-\alpha_2)$ и $(b-\alpha_2)$ и пр. противны. Такъ какъ число множителей $(a-\alpha_1)$,$(a-\alpha_2)$... нечетное, то произведенія $(a-\alpha_1)(a-\alpha_2)$... и $(b-\alpha_1)(b-\alpha_2)$... имѣютъ противные знаки. Слѣд. знаки результатовъ $f(a)$, $f(b)$ будутъ также противные. Отсюда также видно, что если между a и b нѣтъ ни одного корня, или число ихъ четное; то $f(a)$ и (b) имѣютъ одинакіе знаки.

Сказанное въ двухъ послѣднихъ §§ приводитъ насъ къ заключеніямъ:

1) *Уравненіе нечетной степени имѣетъ нечетное число дѣйствительныхъ корней. Если послѣдній членъ такого уравненія отрицательный, то оно имѣетъ нечетное число положительныхъ корней. Если же послѣдній членъ положительный, то число отрицательныхъ корней будетъ нечетное.*

2) *Въ уравненіи четной степени, число дѣйствительныхъ корней можетъ быть только четное. Если послѣдній членъ такого уравненія отрицательный, то число положительныхъ и число отрицательныхъ корней суть числа нечетныя. Если же послѣдній членъ положительный; тогда число положительныхъ и число отрицательныхъ корней суть либо нули, либо числа четныя.*

Соизмѣримые корни.

§ 85. Пусть дано уравненіе съ дѣйствительными соизмѣримыми коеффиціентами; ежели они дробные, то приведя ихъ къ одному знаменателю, и помноживъ все уравненіе на этого знаменателя, оно приметъ видъ

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=0,$$

гдѣ a_0, a_1, a_2,...a_{m-1}, a_m означаютъ цѣлыя числа.

Соизмѣримые корни этого уравненія могутъ быть или *цѣлые*, или *дробные*. Займемся сперва цѣлыми. Пусть α будетъ одинъ изъ нихъ, то

$$a_0\alpha^m+a_1\alpha^{m-1}+a_2\alpha^{m-2}+\ldots+a_{m-1}\alpha+a_m=0;$$

отсюда

$$a_m=-a_0\alpha^m-a_1\alpha^{m-1}-a_2\alpha^{m-2}\ldots-a_{m-1}\alpha$$

и

$$\frac{a_m}{a}=-a_0a^{m-1}-a_1a^{m-2}-a_2a^{m-3}-\ldots-a_{m-1};$$

слѣдовательно частное $\frac{a_m}{a}$ должно быть цѣлое число.

Положивъ $\frac{a_m}{a}=E_1$, имѣемъ

$$E_1=-a_0a^{m-1}-a_1a^{m-2}-a_2a^{m-3}-\ldots-a_{m-1};$$

откуда

$$E_1+a_{m-1}=-a_0a^{m-1}-a_1a^{m-2}-a_2a^{m-3}-\ldots-a_{m-2}a$$

и

$$\frac{E_1+a_{m-1}}{a}=-a_0a^{m-2}-a_1a^{m-3}-a_2a^{m-4}-\ldots-a_{m-2};$$

поэтому $\frac{E_1+a_{m-1}}{a}$ есть цѣлое число. Означивъ его чрезъ E_2, имѣемъ

$$E_2=-a_0a^{m-2}-a_1a^{m-3}-a_2a^{m-4}-\ldots-a_{m-2},$$

откуда

$$\frac{E_2+a_{m-2}}{a}=-a_0a^{m-3}-a_1a^{m-4}-a_2a^{m-5}-\ldots-a_{m-3},$$

т. е. $\frac{E_2+a_{m-2}}{a}$ должно быть цѣлое число. Продолжая такимъ образомъ далѣе, доходимъ до цѣлаго числа

$$E_{m-1}=-a_0a-a_1;$$

откуда наконецъ имѣемъ $\frac{E_{m-1}+a_1}{a}=-a_0$.

И такъ, чтобы цѣлое число a было корнемъ даннаго уравненія, оно должно удовлетворять условіямъ:

$$\frac{a_m}{a}=E_1,\quad \frac{E_1+a_{m-1}}{a}=E_2,\ldots\ldots\frac{E_{m-1}+a_1}{a}=-a_0,$$

гдѣ E_1, E_2, $E_3\ldots E_{m-1}$ суть цѣлыя числа. Эти условія можно выразить слѣдующими словами:

Чтобы цѣлое число а было корнемъ даннаго уравненія, должно: 1) чтобы оно дѣлило безъ остатка послѣдній членъ; 2) частное этого дѣленіе, сложенное съ коеффиціентомъ при х, должно также дѣлиться безъ остатка на а; 3) это новое частное, сложенное съ коеффиціентомъ при x^2, *опять должно дѣлиться безъ остатка на а, и т. д.; 4) наконецъ мы должны дойдти до частнаго, которое, будучи сложено съ коеффиціентомъ при* x^{m-1}, *и потомъ раздѣлено на а, даетъ въ частномъ коеффиціентъ перваго члена съ знакомъ противнымъ.*

Это даетъ способъ для отъисканія цѣлыхъ соизмѣримыхъ корней даннаго уравненія. Вотъ въ чемъ онъ состоитъ:

Отъискавши всѣхъ цѣльныхъ дѣлителей послѣдняго члена, должно ихъ написать съ + и съ —, и взять только тѣ, которые содержатся между общими предѣлами положительныхъ и отрицательныхъ корней; потомъ испытать: которые изъ этихъ дѣлителей будутъ удовлетворять вышесказаннымъ условіямъ? Тѣ, которые удовлетворяютъ нашимъ условіямъ, суть цѣлые соизмѣримые корни даннаго уравненія.

Дѣлителей +1 и —1 можно испытать, вставляя ихъ вмѣсто x въ данное уравненіе.

Для примѣра возьмемъ уравненіе

$$3x^4+5x^3-23x^2+14x-24=o.$$

Высшій предѣлъ положительныхъ корней по Венову способу есть +3, а низшій предѣлъ отрицательныхъ корней есть —9. Числовое значеніе низшаго предѣла положительныхъ корней и высшаго предѣла отрицательныхъ корней менѣе 1. И такъ должно испытать всѣхъ дѣлителей числа 24, заключающихся между +3 и —9; они суть: +2, +1, —1, —2, —3, —4, —6, —8. Внеся +1, а потомъ —1 вмѣсто x въ данное уравненіе, находимъ, что они ему не удовлетворяютъ. Остается испытать дѣлителей:

$$+2,\ -2,\ -3,\ -4,\ -6,\ -8.$$

Внеся ихъ въ $E_1=\frac{a_m}{a}=\frac{-24}{a}$ вмѣсто a, находимъ соотвѣтственно частныя:

$$E_1=-12,\ +12,\ +8,\ +6,\ +4,\ +3.$$

Придавши къ каждому изъ этихъ чиселъ коеффиціентъ $a_{m-1}=a_3=14$, получаемъ

$$E_1+a_3=+2,\ +26,\ +22,\ +20,\ +18,\ +17.$$

Условію $\frac{E_1+a_3}{a}$=*цѣлому числу*$=E_2$ дѣлишели—3 и —8 не удовлешворяюшъ, а прочіе даюшъ:

$$E_2=\frac{E_1+a_3}{a}=+1,\ -13,\qquad -5,\ -3,$$

Придавши къ каждому изъ эшихъ чиселъ коеффиціеншъ $a_2=-23$, находимъ:

$$E_2+a_2=-22,\ -36,\qquad -28,\ -26$$

Условію $\frac{E_2+a_2}{a}=E_3$ дѣлишель —6 не удовлешворяешъ, а осшальные: 2, —2, и —4 даюшъ:

$$E_3=\frac{E_2+a_2}{a}=-11,+18,\qquad -7.$$

Придавши къ эшимъ числамъ коеффиціеншъ $a_1=5$, имѣемъ

$$E_3+a_1=-6,\ +23,\qquad +12.$$

Наконецъ находимъ, чшо условію $\frac{E_3+a_1}{a}=-a_0=-3$ удовлешворяюшъ шолько дѣлишели: +2 и —4. И шакъ данное уравненіе имѣешъ два цѣлыхъ соизмѣримыхъ корня: +2 и —4. Раздѣливши первую его часшь на $(x-2)(x+4)$, и приравнявши часшное нулю, получимъ уравненіе

$$3x^2-x+3=o,$$

кошорое даешъ $x=\frac{1\pm\sqrt{-35}}{6}$, два осшальные корня даннаго уравненія.

§ 86. Если a есшь корень даннаго уравненія; шо, какъ извѣсшно, $f(x)$ дѣлишся на $x-a$ безъ осшашка, и даешъ въ часшномъ

$$a_0x^{m-1}+(a_0a+a_1)x^{m-2}+(a_0a^2+a_1a+a_2)x^{m-3}+\ldots$$

$$\ldots+(a_0a^{m-2}+a_1a^{m-3}+\ldots a_{m-2})x+a_0a^{m-1}+a_1a^{m-2}+\ldots+a_{m-1}=o.$$

Ежели a есшь дѣйсшвишельное цѣлое соизмѣримое число; шо коеффиціеншы эшого часшнаго должны быть шакже дѣйсшвишельныя цѣлыя соизмѣримыя числа. Найдя a по правилу, изложенному въ предъидущемъ §, мы будемъ знать цѣлыя числа E_1, E_2, $E_3, \ldots E_{m-1}$, $-a_0$, которыя, какъ легко видѣть, суть коеффиціенты частнаго $\frac{f(x)}{x-a}$, взятые съ знакомъ противнымъ; и такъ

$$(1) \qquad \frac{f(x)}{x-a}=a_0x^{m-1}-E_{m-1}x^{m-2}-\ldots-E_3x^2-E_2x-E_1=o.$$

Чтобы a былъ кратный корень даннаго уравненія, онъ долженъ удовлетворять уравненію (1), а для того должны быть удовлетворены условія:

$$(2) \qquad -\frac{E_1}{a}=e_1, \frac{e_1-E_2}{a}=e_2, \frac{e_2-E_3}{a}=e_3, \ldots \frac{e_{m-2}-E_{m-1}}{a}=-a_0,$$

гдѣ e_1, e_2, $e_3, \ldots e_{m-2}$ суть цѣлыя числа.

Чтобы a былъ 3-кратный корень даннаго уравненія, или 2-кратный корень уравненія (2), онъ долженъ удовлетворять условіямъ:

$$(3) \qquad -\frac{e_1}{a}=\varepsilon_1, \frac{\varepsilon_1-e_2}{a}=\varepsilon_2, \frac{\varepsilon_2-e_3}{a}=\varepsilon_3, \ldots \frac{\varepsilon^{m-3}-e^{m-2}}{a}=-a_0.$$

И т. д. Для примѣра пусть будетъ уравненіе

$$4x^5+24x^4+37x^3+5x^2+3x-9=o.$$

Дѣлители послѣдняго члена -9, суть $+9$, $+3$, $+1$, -1, -3, -9. Высшій предѣлъ положительныхъ корней (по Роллю) есть $1+\sqrt{\frac{9}{4}}<3$. Низшій предѣлъ отрицательныхъ корней есть $1+\frac{24}{4}=7$. Дѣлители $+1$ и -1 не удовлетворяютъ данному уравненію, а потому остается испытать только дѣлителя -3, для котораго находимъ:

$$E_1=\frac{-9}{-3}=+3, E_2=\frac{+3+3}{-3}=-2, E_3=\frac{-2+5}{-3}=-1, E_4=\frac{-1+37}{-3}=-12,$$

$\frac{-12+24}{-3}=-4=-a_0$. Слѣд. -3 есть корень даннаго уравненіе. Вводя значенія E_1, E_2, E_3, E_4 и a въ условія (2), получаемъ:

$$e_1=-\frac{+3}{-3}=+1, \ e_2=\frac{+1+2}{-3}=-1, \ e_3=\frac{-1+1}{3}=0, \ \frac{0+12}{-3}=-4=-a_0.$$

Первое изъ условій (3) не удовлетворено. И такъ —3 есть 2-кратный корень даннаго уравненія. Частное отъ раздѣленія $f(x)$ на $(x+3)^2$ будетъ

$$a_0x^3-e_2x-e_1=o,$$

т. е. $4x^3+x-1=o$.

§ 87. Изъисканіе дробныхъ соизмѣримыхъ корней основывается на слѣдующей теоремѣ:

Если въ уравненіи съ цѣлыми соизмѣримыми коеффиціентами, коеффиціентъ перваго члена есть единица; то оно не можетъ имѣть дробныхъ соизмѣримыхъ корней. Это доказывается слѣдующимъ образомъ:

Положимъ, что несокрашимая дробь $\frac{\alpha}{\beta}$ есть корень уравненія

$$x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=o, \tag{4}$$

въ которомъ $a_1, a_2, \ldots a_{m-1}, a_m$ суть цѣлыя числа; то будетъ

$$\frac{\alpha^m}{\beta^m}+a_1\frac{\alpha^{m-1}}{\beta^{m-1}}+a_2\frac{\alpha^{m-2}}{\beta^{m-2}}+\ldots+a_{m-1}\frac{\alpha}{\beta}+a_m=o;$$

отсюда выводимъ

$$\frac{\alpha^m}{\beta^m}=-a_1\frac{\alpha^{m-1}}{\beta^{m-1}}-a_2\frac{\alpha}{\beta^{m-2}}-\ldots-a_{m-1}\frac{\alpha}{\beta}-a_m.$$

Помноживъ обѣ части этого равенства на β^{m-1}, имѣемъ

$$\frac{\alpha^m}{\beta}=-a_1\alpha^{m-1}-a_2\alpha^{m-2}\beta-\ldots-a_{m-1}\alpha\;\beta^{m-2}-a_m\beta^{m-1}.$$

Ясно, что это равенство не возможно; потому что первая часть $\frac{\alpha^m}{\beta}$ есть несокрашимая дробь, а вторая цѣлое число. Слѣдовательно $\frac{\alpha}{\beta}$ не можетъ быть корнемъ уравненія (4)

Всякое уравненіе съ соизмѣримыми цѣлыми коеффиціентами имѣетъ видъ

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=o.$$

Ежели a_0 не$=1$; то положивъ $x=\frac{y}{a_0}$, преобразуемъ (§ 67, 3, *b*) данн. ур. въ слѣдующее

$$y^m+a_1y^{m-1}+a_2a_0y^{m-2}+a_3a_0^2y^{m-3}+\ldots+a_ma_0^{m-1}=o,$$

котораго соизмѣримые корни должны быть всѣ цѣлые, и потому найдутся по способу предъидущаго §. Означимъ ихъ чрезъ r_1, r_2,....r_n; то въ слѣдствіе $x=\frac{y}{a_0}$, корни даннаго уравненія будутъ: $\frac{r_1}{a_0}$, $\frac{r_2}{a_0}$,.......$\frac{r_n}{a_0}$. Изъ этого выводимъ правило для отъисканія дробныхъ соизмѣримыхъ корней даннаго уравненія:

Найдя цѣлые соизмѣримые его корни, освобождаемъ его отъ нихъ; если въ новомъ уравненіи коеффиціентъ перваго члена a_0 не есть единица, то оно можетъ имѣть дробные соизмѣримые корни. Для отъисканія этихъ корней, полагаемъ $x=\frac{y}{a_0}$, и ищемъ по правилу предъидущ. § цѣлые соизмѣримые корни преобразованнаго уравненія, которые, будучи раздѣлены на a_0, даютъ дробные соизмѣримые корни даннаго уравненія. Нѣкоторые изъ послѣдн[illegible] могутъ быть кратные, и это можетъ быть только тогда, когда корни уравненія по y суть кратныя. Чтобы это узнать, должно приложить къ уравненію по y правило предъидущаго §.

Отъищемъ всѣ соизмѣримые корни уравненія

$$2x^5-x^4-4x^3+x^2-7x-6=o.$$

Высшій предѣлъ положительныхъ корней есть $1+\frac{7}{2}<5$, а низшій предѣлъ отрицательныхъ $=1+\sqrt[2]{\frac{7}{2}}>3$. Дѣлители послѣдняго члена -6, заключающіеся между этими предѣлами, суть: $+3,+3,+1,-1,-2$; данное уравненіе не удовлетворяется положеніемъ $x=+1,-1$, а потому остается только испытать дѣлителей: $+3,+2,-2$. Для нихъ находимъ результаты:

Дѣлит.	E_1,	E_1-7,	E_2,	E_2+1,	E_3,	E_3-4,	E_4,	E_4-1,	$-a_0$
$+3$,	-2,	-9,	-3,	-2,	*	*	*	*	*
$+2$,	-3,	-10,	-5,	-4,	-2,	-6,	-3,	-4,	-2
-2,	$+3$,	-4,	$+2$,	$+3$,	*	*	*	*	*.

И такъ данное уравненіе имѣетъ только одинъ цѣлый соизмѣримый корень $+2$, который не можетъ быть кратнымъ, потому что $\frac{E_1}{2}=-\frac{3}{2}$ не есть цѣлое число.

Освободивши данное уравненіе отъ корня $+2$, получаемъ уравненіе

(5) $$2x^4+3x^3+2x^2+5x+3=o,$$

которое можетъ имѣть дробные соизмѣримые корни. Чтобы ихъ отъискать, полагаемъ $x = \frac{y}{2}$, отъ того уравн. (5) преобразовывается въ слѣдующее

$$(6) \qquad y^4+3y^3+4y^2+20y+24=o.$$

Это уравненіе не можетъ имѣть положительныхъ корней: всѣ его члены положительные, а потому они ни отъ какого положительнаго количества не могутъ взаимно уничтожаться. Чтобы найти низшій предѣлъ отрицательныхъ корней, перемѣнимъ въ ур. (6) y на $-y'$, имѣемъ

$$(7) \qquad y'^4-3y'^3+4y'^2-20y'+24=o$$

или

$$y'^3(y'-3)+4y'(y'-5)+24=o.$$

Отъ положенія $y'=$или>5, первая часть этого уравненія обращается въ положительное количество; поэтому 5 (§ 79) есть высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія (7), а -5 низшій предѣлъ отрицательныхъ корней уравн. (6). И такъ для отъисканія цѣлыхъ соизмѣримыхъ корней уравненія (6) должно испытать только тѣ дѣлители послѣдняго члена 24, которые содержатся между 0 и -5; они суть: -1, -2, -3, -4. $y=-1$ не удовлетворяетъ уравн. (6), прочіе же дѣлители даютъ результаты:

Дѣлит.	E_1,	E_1+20,	E_2,	E_2+4,	E_3,	E_3+3,	$-a_0$
-2,	-12,	$+8$,	-4,	0	0,	$+2$,	*
-3,	-8,	$+12$,	-4,	0	0	$+3$,	-1
-4,	-6,	$+14$	*	*	*	*	*;

отсюда видимъ, что уравненіе (6) имѣетъ только одинъ цѣлый соизмѣримый корень -3; слѣдовательно данное уравненіе имѣетъ одинъ дробный соизмѣримый корень $-\frac{3}{2}$.

Отдѣленіе корней.

(Способъ Лагранжа).

§ 88. Найдя по изложеннымъ правиламъ соизмѣримые корни, всегда можно освободить отъ нихъ данное уравненіе, а потому впослѣдствіи мы будемъ полагать, что всѣ дѣйствительные корни даннаго уравненія несоизмѣримые. Если мы знаемъ *частные* предѣлы одного изъ этихъ корней; то, сближая ихъ, мы болѣе и болѣе будемъ приближаться къ точному значенію корня. На этомъ основано приближенное вычисленіе несоизмѣримыхъ корней; оно, какъ мы замѣтили, требуетъ, чтобы извѣстны были частные предѣлы искомаго корня. И такъ займемся теперь отъисканіемъ частныхъ предѣловъ всѣхъ дѣйствительныхъ корней, или *отдѣленіемъ* (séparation) этихъ корней.

§ 89. *Варингъ* (*) первый показалъ возможность отдѣленія корней помощію низшаго предѣла положительныхъ корней уравненія съ квадратами разностей. Этотъ способъ усовершенствованъ *Лагранжемъ*, и потому получилъ названіе отъ имени знаменитаго Геометра. Вотъ въ чемъ онъ состоитъ:

Означимъ чрезъ

(1) $$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots a_\mu$$

всѣ дѣйствительные корни уравненія $f(x)=0$; ихъ можно принять за несоизмѣримые и неравные; потому что всегда данное уравненіе можно освободить отъ соимѣримыхъ и равныхъ корней. Пусть a и b будутъ два числа, которыхъ разность Δ меньше наименьшей разности двухъ послѣдовательныхъ корней (1); то a и b не могутъ содержать болѣе одного изъ этихъ корней. Въ самомъ дѣлѣ, нельзя допустить, чтобы два корня a_n и a_{n+1} заключались между a и b; потому, что тогда разность этихъ корней была бы меньше разности предѣловъ ихъ a и b, т. е. меньше Δ; но это не возможно, по предположенію, Δ меньше всѣхъ разностей корней.

И такъ a и b могутъ быть предѣлами только одного корня; въ такомъ случаѣ, вставивши ихъ вмѣсто x въ $f(x)$, результаты $f(a)$ и $f(b)$ должны быть, по § 83, съ противными знаками.

Пусть $a=p\Delta$, $b=(p+1)\Delta$; то результаты $f(p\Delta)$ и $f[(p+1)\Delta]$ будутъ съ противными или одинакими знаками, смотря по тому, содержится ли между $n\Delta$ и $(n+1)\Delta$ одинъ изъ корней (1), или нѣтъ. Ежели $n\Delta$ болѣе высшаго предѣла положительныхъ корней; то, вставивши въ $f(x)$ вмѣсто x члены ариѳметической прогрессіи:

$$0,\ \Delta,\ 2\Delta,\ 3\Delta, \ldots n\Delta,$$

(*) *Miscellanea analytica.* 1762.

и написавши послѣдовательно знаки результатовъ:

$$f(0),\ f(\Delta),\ f(2\Delta),\ f(3\Delta),\dots f(n\Delta),$$

въ этомъ ряду знаковъ непремѣнно будетъ столько *перемѣнъ* (*), сколько данное уравненіе имѣетъ дѣйствительныхъ корней.

Вставляя вмѣсто x въ $f(x)$, члены: $0, -\Delta, -2\Delta, -\dots$, до тѣхъ поръ, какъ дойдетъ до $-n'\Delta$, числа меньшаго низшаго предѣла корней; то рядъ знаковъ результатовъ

$$f(0),\ f(-2\Delta),\ f(-3\Delta),\dots f(-n'\Delta)$$

будетъ имѣть столько перемѣнъ, сколько данное уравненіе имѣетъ ототрицательныхъ корней. Такимъ образомъ, когда будемъ знать Δ, мы узнаемъ число дѣйствительныхъ корней даннаго уравненія и *частные* ихъ предѣлы.

§ 90. Составивъ по правиламъ § 65 уравненіе съ квадратами разностей корней, освободивъ его отъ корней $=o$, т. е. тѣхъ, которые соотвѣтствуютъ равнымъ корнямъ даннаго уравненія, и раздѣливъ потомъ на послѣдній членъ, мы будемъ имѣть уравненіе вида

$$C_r z^r + C_{r-1} z^{r-1} + \dots + C_2 z^2 + C_1 z + 1 = o,$$

гдѣ $r =$ или $< \dfrac{m(m-1)}{2}$. Положивъ $z = \dfrac{1}{y}$, получимъ уравненіе

$$y^r + C_1 y^{r-1} + C_2 y^{r-2} + \dots + C_r = o.$$

Сыщемъ высшій прѣдѣлъ l положительныхъ корней этого уравненія, частное $\dfrac{1}{l}$ будетъ меньше всѣхъ положительныхъ значеній $\dfrac{1}{y} = z$, т. е. меньше квадрата наименьшей разности; слѣдовательно $\dfrac{1}{\sqrt{l}}$ будетъ меньше наименьшей разности положительныхъ корней.

Когда $+\sqrt{l} < 1$, тогда $\dfrac{1}{\sqrt{l}} > 1$, и смѣло можно положить $\Delta = 1$. Если же $\sqrt{l} =$ или > 1, то $\dfrac{1}{\sqrt{l}} =$ или < 1, и въ такомъ случаѣ наименьшая

(*) *Перемѣною* называется пара знаковъ разныхъ, такъ $+-$, $-+$, а *повтореніемъ* пара знаковъ одинакихъ, а именно: $++$, $--$.

разность корней ур. $f(x)=o$ можетъ быть <1; но какъ она всегда больше $\frac{1}{\sqrt{l}}$, то для Δ можно взять всякое число равное или $<\frac{1}{\sqrt{l}}$. Пусть k будетъ цѣлое положительное число непосредственно $>\sqrt{l}$, то можно положить $\Delta=\frac{1}{k}$.

И такъ, вставляя въ $f(x)$ числа

$$(2) \qquad o,\ \frac{1}{k},\ \frac{2}{k},\ \frac{3}{k},\ldots\ldots\frac{n}{k},$$

результаты дадутъ рядъ знаковъ, въ которомъ будетъ столько перемѣнъ, сколько ур. $f(x)=o$ имѣетъ дѣйствительныхъ положительныхъ корней. Члены прогрессіи (2), соотвѣтствующіе перемѣнамъ знаковъ, и будутъ искомые частные предѣлы этихъ корней.

Чтобы отдѣлить отрицательные корни, вставимъ

$$(3) \qquad o,\ -\frac{1}{k},\ -\frac{2}{k},\ -\frac{3}{k},\ldots-\frac{n'}{k}$$

вмѣсто x въ $f(x)$, знаки результатовъ дадутъ столько перемѣнъ, сколько, въ уравненіи $f(x)=o$ отрицательныхъ корней. Здѣсь для удобства, производятъ вставку слѣдующимъ образомъ:

Перемѣнивъ x на $-x$ въ $f(x)$, вставляютъ вмѣсто x, члены ряда (2) до $\frac{n'}{k}$ ясно, что результаты будутъ тѣ самые, которые должны получиться отъ вставки членовъ (3) въ $f(x)$.

Когда $k>1$, тогда вмѣсто того, чтобы вставлять въ $f(x)$ вмѣсто x дроби $\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \frac{3}{k}, \ldots$, вставляютъ сперва $\frac{y}{k}$ вмѣсто x, т. е. преобразовываютъ, по § 67, уравненіе $f(x)=o$ въ уравненіе $f\left(\frac{y}{k}\right)=o$, а потомъ вставляютъ 0, 1, 2, 3,.... вмѣсто y.

Вотъ въ чемъ состоитъ *Лагранжевъ* способъ отдѣленія корней; онъ вполнѣ удовлетворяетъ теоріи; но трудность вычисленія уравненія съ квадратами разностей дѣлаетъ его почти не исполнимымъ для уравненій высокихъ степеней. *Лагранжъ* его облегчилъ нѣкоторыми замѣчаніями, объ которыхъ я умалчиваю; потому что при нынѣшнихъ способахъ отдѣленія корней, Лагранжевъ вовсе безполезенъ.

§ **91.** Приложимъ этотъ способъ отдѣленія корней къ уравненію

$$x^3-2x-5=o.$$

Въ § 65, прим. 1, мы нашли уравненіе съ квадратами разностей его корней, а именно:

$$(a) \qquad z^3-12z^2+36z+643=o.$$

Положивъ $z=\frac{1}{y}$, оно преобразуется въ слѣдующее

$$(b) \qquad y^3+\frac{36}{643}y^2-\frac{12}{643}y+1=o;$$

отсюда видно, что $y=\frac{1}{3}$ и всякое число большее даетъ для первой части ур. (b) результатъ положительный; слѣд. $\frac{1}{3}$ есть высшій предѣлъ положительныхъ корней этого уравненія, а 3 есть низшій предѣлъ положительныхъ корней ур. (a), т. е. число меньшее наименьшаго квадрата разностей корней даннаго уравненія. И такъ $\Delta=$ или $<\sqrt{3}$.

Положивъ $\Delta=1$, и замѣтивъ, что высшій предѣлъ корней даннаго уравненія есть 3, достаточно будетъ вставлять вмѣсто x въ $f(x)$ числа: 0, 1, 2, 3. Результаты этихъ вставокъ будутъ соотвѣтственно

$$f(0),\quad f(1),\quad f(2),\quad f(3)$$
$$-5,\quad -6,\quad -1,\quad -16;$$

отсюда видимъ, что данное уравненіе имѣетъ только одинъ дѣйствительный корень, который содержится между 2 и 3.

Низшій предѣлъ отрицательныхъ корней даннаго уравненія есть $1+\sqrt[2]{5}$ или 4 (по Роллю), а потому для отдѣленія этихъ корней достаточно вставлять вмѣсто x въ $f(x)$ числа: 0,—1,—2,—4. Произведя эти вставки, находимъ результаты:

$$f(0),\quad f(-1),\quad f(-2),\quad f(-3),\quad f(-4)$$
$$-5\quad -4\quad -9,\quad -26,\quad -16,$$

которые показываютъ, что данное уравненіе не имѣетъ отрицательныхъ корней.

И такъ ур. $x^3-2x-5=o$ имѣетъ только одинъ дѣйствительный корень, котораго частные предѣлы суть 2 и 3, прочіе же два корня мнимые.

§ 92. *Лагранжъ*, а потомъ **Коши** дали способы находить Δ, не вычисляя уравненіе съ квадратами разностей корней; но значеніе Δ, выведенное по одному изъ этихъ способовъ, меньше нежели то, которое выводится по предъидущему; такъ, что число вставокъ $0, \Delta, 2\Delta, 3\Delta, \ldots$ въ $f(x)$ вмѣсто x должно быть больше.

(Способъ Штурма).

§ 93. Въ 1829-мъ году ***Г-нъ Штурмъ*** обнародовалъ способъ отдѣленія корней, основанный на изъисканіи общаго наибольшаго дѣлителя функціи, выражающей первую часть даннаго уравненія, и ея производной. Но это изъисканіе предвѣщаетъ, что онъ долженъ быть затруднителенъ для уравненій высокихъ степеней.

Пусть будетъ уравненіе $f(x)=o$, не имѣющее равныхъ корней, то, по § 79, функція $f(x)$ не будетъ имѣть общаго большаго дѣлителя съ производной $f'(x)$. Чтобы въ этомъ увѣриться, станемъ его отъискивать. Ясно, что дѣйствіе нимало не измѣнится, если мы будемъ мѣнять знаки послѣдовательныхъ дѣлителей; отъ этого можетъ только перемѣниться знакъ общаго большаго дѣлителя. И такъ дѣлимъ $f(x)$ на $f'(x)$; пусть остатокъ дѣленія будетъ $-R_1$, его степень по крайней мѣрѣ единицею ниже степени $f'(x)$. Перемѣнивъ знаки всѣхъ членовъ $-R_1$ въ противные, получаемъ полиномъ R_1, на который дѣлимъ $f'(x)$; пусть новый остатокъ будетъ $-R_2$. Поступивъ съ нимъ такъ же, какъ и съ R_1, дѣлимъ R_1 на R_2. Продолжая такимъ образомъ далѣе, дойдемъ наконецъ до численнаго остатка $-R_n$, который не можетъ быть нулемъ. Для избѣжанія дробей, здѣсь можно поступать такъ же, какъ и при обыкновенномъ способѣ нахожденія общаго большаго дѣлителя; т. е. при каждомъ дѣленіи, коеффиціентъ высшаго члена дѣлимаго дѣлаемъ кратнымъ числомъ коеффиціента высшаго члена дѣлителя, и сокращаемъ коеффиціенты каждаго остатка, если они имѣютъ общихъ множителей.

Означивъ чрезъ $-R_1, -R_2, -R_3, \ldots -R_n$ послѣдовательные остатки, а чрезъ $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q_n$ частные, мы будемъ имѣть слѣдующія равенства:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} f(x)=Q_1 . f'(x)-R_1 \\ f'(x)=Q_2 . R_1-R_2 \\ R_1 \;=Q_3 . R_2-R_3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ R_{n-2}=Q_n . R_{n-1}-R_n \end{array}\right.$$

24*

Разсматривая рядъ знаковъ результатовъ, получаемыхъ отъ вставки вмѣсто x различныхъ дѣйствительныхъ количествъ въ рядъ функцій

$$(2) \qquad R_n, R_{n-1}, R_{n-2}, \ldots R_3, R_2, R_1, f'(x), f(x),$$

мы открываемъ весьма замѣчательныя свойства.

§ 94. Такъ какъ между $-\infty$ и $+\infty$ заключаются всѣ дѣйствительные корни всѣхъ функцій (2); то, вставивши въ нихъ вмѣсто x какое нибудь количество, и измѣняя потомъ его, увеличивая или уменьшая, нѣкоторыя изъ функцій (2) будутъ уничтожаться. Посмотримъ, что отъ того будетъ съ рядомъ знаковъ результатовъ:

1) Вопервыхъ положимъ, что количество a, вставленное вмѣсто x въ функціи (2), **уничтожаетъ только одну изъ среднихъ, не уничтожая** $f(x)$. **Пусть эта функція будетъ** R_p; **то смежныя функціи** R_{p-1} **и** R_{p+1} **отъ** $x=a$, **не могутъ уничтожаться. Въ самомъ дѣлѣ: нельзя положить въ одно время** $R_{p-1}=o$ и $R_p=o$; потому равенство

$$(3) \qquad R_{p-1} = Q_p R_p - R_{p+1}$$

дало бы $R_{p+1}=o$; потомъ изъ равенства $R_p = Q_{p+1}.R_{p+1} + R_{p+2}$, нашли бы, что $R_{p+2}=o$; низходя такимъ образомъ, нашли бы, что $R_n=o$. Но это по положенію не возможно.

И такъ, если R_p уничтожается отъ вставки a вмѣсто x; то результаты той же вставки въ функціи R_{p-1} и R_{p+1} не будутъ нулями. Равенство (3) даетъ

$$(4) \qquad R_{p-1} = -R_{p+1},$$

т. е., что эти результаты съ противными знаками.

Представимъ теперь себѣ безконечно-малое количество h, такое, что всѣ функціи (2), исключая R_p, не имѣютъ дѣйствительныхъ корней между $a-h$ и $a+h$, т. е. не мѣняютъ своихъ знаковъ ни для какого значенія x средняго между $a-h$ и $a+h$. Вставимъ послѣдовательно вмѣсто x въ рядъ функцій (2) три безконечно-близкія количества: $a-h$, a, $a+h$, и напишемъ для каждаго только знаки результатовъ; такимъ образомъ мы будемъ имѣть три ряда знаковъ, которыхъ означимъ чрезъ $[a-h]$, $[a]$, $[a+h]$. Разсмотримъ въ особенности знаки функцій: R_{p-1}, R_p, R_{p+1}. Здѣсь могутъ быть четыре случая :

a) **Когда** R_{p-1} **и** R_p **имѣютъ знакъ** $+$ **въ ряду** $[a-h]$; **то въ томъ же ряду, по равенству (4), знакъ функціи** R_{p+1} **будетъ** $-$. **Слѣдователь-**

но положенiе знаковъ въ ряду $[a-h]$, для разсматриваемыхъ нами трехъ функцiй, будетъ такое:

		R_{p+1}	R_p	R_{p-1}	
$[a-h]$	. . . .	$-$	$+$	$+$	. . . .

При $x=a$, R_p уничтожается, а знаки R_{p-1} и R_{p+1} остаются тѣже, что и для $x=a-h$, и потому въ ряду знаковъ, $[a]$, знаки предъидущихъ трехъ функцiй будутъ

$[a]$	. . . .	$-$	0	$+$	. . . .

Наконецъ, когда x безконечно-мало превзойдетъ a, и сдѣлается равнымъ $a+h$; тогда R_p сдѣлается отрицательною или положительною; знаки же смежныхъ функцiй опять будутъ тѣ же; такъ что въ ряду $(a+h)$ знаки трехъ функцiй будутъ

$[a+h]$	. . . .	$-$	$\mp$	$+$	. . . .

b) Когда R_{p-1} и R_p отрицательныя при $x=a-h$; тогда R_{p+1} будетъ положительная, и разсуждая по предъидущему, найдемъ, что знаки трехъ функцiй, отъ вставки въ нихъ вмѣсто x количествъ безконечно-близкихъ $a-h$, a, $a-h$, будутъ:

$[a-h]$	. . . .	$+$	$-$	$-$	. . . .
$[a]$	. . . .	$+$	0	$-$	. . . .
$[a+h]$	. . . .	$+$	$\pm$	$-$	. . . .

c) Ежели при $x=a-h$, функцiя R_{p-1} положительная, а R_p отрицательная; то знаки трехъ функцiй въ трехъ рядахъ $[a-h]$, $[a]$, $[a+h]$, будутъ:

$[a-h]$	. . . .	$-$	$-$	$+$	. . . .
$[a]$	. . . .	$-$	0	$+$	. . . .
$[a+h]$	. . . .	$-$	$\pm$	$+$	. . . .

d) Наконецъ, когда R_{p-1} при $x=a-h$ отрицательная, а R_p положительная; тогда R_{p+1} также положительная, и знаки трехъ функцiй будутъ:

$[a-h]$	. . . . + + — . . . . .
$[a]$	. . . . + 0 — . . . .
$[a+h]$	. . . . + $\mp$ — . . . .

Изъ разбора этихъ четырехъ случаевъ видимъ, что какіе бы ни были знаки функцій R_{p-1} и R_p для $x=a-h$, знаки трехъ функцій: R^{p-1}, R_p, R_{p+1} заключаютъ перемѣну въ ряду $[a-h]$, которая остается въ ряду $[a+h]$. Слѣдовательно число перемѣнъ знаковъ въ обоихъ рядахъ будетъ одинакое. Оно также равно числу перемѣнъ въ ряду $[a]$, замѣняя 0 какимъ угодно знакомъ.

2) Ежели отъ $x=a$ уничтожаются нѣсколько среднихъ функцій; то и въ такомъ случаѣ ряды знаковъ $[a-h]$ и $[a+h]$ будутъ имѣть одинакое число перемѣнъ. Въ самомъ дѣлѣ: каждая изъ уничтожающихся функцій заключается между двумя не уничтожающимися функціями, имѣющими противные знаки, какъ для $x=a$, такъ для $x=a-h$ и $x=a+h$, а потому въ ряду $[a-h]$ эти три функціи составляютъ перемѣну, которая сохраняется въ ряду $[a+h]$; слѣдовательно число всѣхъ перемѣнъ не измѣнится при переходѣ x отъ $a-h$ къ $a+h$.

3) Посмотримъ теперь, какая разница будетъ въ числѣ перемѣнъ рядовъ $[a-h]$ и $[a+h]$, когда a уничтожаетъ крайнюю функцію въ ряду (2), т. е. когда a есть дѣйствительный корень даннаго уравненія $f(x)=o$. Вставивши въ $f(x)$ вмѣсто x, три безконечно-близкія количества $a-h$, a, $a-h$, имѣемъ

$$(4)\qquad \begin{aligned} &f(a-h)=-h.f'(a-\phi h)\\ &f(a)=o\\ &f(a+h)=+hf'(a+\theta h). \end{aligned}$$

Такъ какъ, по малости h, знаки $f'(a-h)$, $f'(a-\phi h)$ $f'(a+\theta h)$ и $f'(a+h)$ одинакіе; то $f(a-h)$ и $f(a+h)$ съ противными знаками. Равенство (4) показываетъ, что знакъ $f(a-h)$ противенъ знаку $f'(a-\phi h)$, а потому и знаку $f'(a-h)$; знаки же $f(a+h)$, $f(a+\theta h)$ и $f(a+h)$ одинакіе. Слѣдовательно знаки функцій $f(x)$ и $f'(x)$ составляютъ перемѣну въ ряду $[a-h]$, которая замѣняется повтореніемъ въ ряду $[a+h]$, а потому число перемѣнъ въ первомъ ряду больше числа перемѣнъ во второмъ.

Сказанное въ этомъ § приводитъ насъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

I. Если a *и* b *суть два количества, не заключающія ни одного дѣйствительнаго корня даннаго уравненія; то число перемѣнъ въ ряду знаковъ* *результатовъ, получаемыхъ отъ вставки меньшаго изъ нихъ* a *въ рядъ функцій* (2), *должно быть равно числу перемѣнъ въ ряду знаковъ результатовъ, получаемыхъ отъ вставки бо́льшаго количества* b *въ тотъ же рядъ функцій*. Противнаго нельзя допустить. Въ самомъ дѣлѣ: если допустимъ вопервыхъ, что число перемѣнъ въ ряду [b] меньше числа перемѣнъ въ ряду [a]; то при переходѣ x отъ a до b, рядъ знаковъ результатовъ (2) терялъ бы перемѣны, а это можетъ быть только тогда, когда x сдѣлается равнымъ одному изъ дѣйствительныхъ корней ур. $f(x)=o$, и потому a и b заключали бы такіе корни, что противно положенію. Допустивши, что число перемѣнъ ряда [a] меньше числа перемѣнъ ряда [b], выходило бы, что при переходѣ x отъ a до b, рядъ знаковъ результатовъ (2) приобрѣтаетъ перемѣны, что также не возможно.

II. Если a *и* b *заключаютъ только одинъ дѣйствительный корень уравненія* f(x)=o; *то число перемѣнъ ряда знаковъ результатовъ, получаемыхъ отъ вставки меньшаго изъ нихъ* a *въ рядъ функцій* (2), *должно быть единицею больше числа перемѣнъ ряда знаковъ результатовъ, получаемыхъ отъ вставки* b *въ тотъ же рядъ функцій*. Потому, что при переходѣ x отъ a до b, число перемѣнъ ряда знаковъ результатовъ (2) остается то же, пока еще x не перешелъ чрезъ дѣйствительный корень $f(x)$, а когда это случится, тогда въ ряду знаковъ теряется только одна перемѣна, которая не можетъ опять возстановиться.

И такъ, *если по вставкѣ двухъ количествъ* a *и* b *въ рядъ функцій* (2) *вмѣсто* x, *найдемъ, что въ ряду* [a] H *перемѣнъ знаковъ, а въ ряду* [b] K *то* H *не меньше* K: потому что съ возрастаніемъ x отъ a до b число перемѣнъ ряда знаковъ результатовъ ни въ какомъ случаѣ не можетъ уменьшаться. *Разность* H—K *равна числу дѣйствительныхъ корней даннаго уравненія, заключающихся между предѣлами* a *и* b. Это слѣдуетъ изъ того, что рядъ знаковъ результатовъ при переходѣ x отъ a до b, не можетъ заразъ потерять нѣсколько перемѣнъ, и каждый разъ какъ онъ теряетъ перемѣну, x переходитъ чрезъ дѣйствительный корень $f(x)$, а потому, чтобы потерялось $H—K$ перемѣнъ x долженъ $H—K$ разъ уничтожить $f(x)$.

§ 95. Эти заключенія ведутъ къ вѣрному способу отдѣленія корней. Пусть дано уравненіе $f(x)=o$, не имѣющее равныхъ корней; составимъ по правилу § 93 рядъ функцій

$$(2) \qquad R_n,\ R_{n-1},\ R_{n-2},\ldots\ldots R_1,\ f'(x),\ f(x);$$

вставимъ въ него безконечно-великое количество $+\infty$; знакъ каждой функціи будетъ одинаковъ съ знакомъ коеффиціента перваго члена (см. § 11), а потому для ряда знаковъ [$+\infty$] можно взять знаки первыхъ членовъ всѣхъ функцій. Напротивъ того, чтобы составить рядъ [0], происходящій отъ вставки 0 вмѣсто x въ рядъ функцій (2), стоитъ только взять знаки послѣднихъ членовъ этихъ функцій. Составивъ такимъ образомъ ряды [$+\infty$] и [0], и вычтя число перемѣнъ перваго ряда изъ числа перемѣнъ втораго, разность будетъ равна числу дѣйствительныхъ корней, содержащихся между $+\infty$ и 0, т. е. числу всѣхъ положительныхъ корней.

Составимъ теперь рядъ [$-\infty$]. Для этого перемѣнимъ во всѣхъ функціяхъ (2) x на $-x$, и возьмемъ знаки первыхъ членовъ преобразованныхъ функцій; этотъ рядъ знаковъ есть рядъ знаковъ результатовъ, получаемыхъ отъ вставки $+\infty$ вмѣсто x въ преобраз. функціи, или $-\infty$ въ функціи (2), а потому онъ есть искомый рядъ [$-\infty$]. Вычтя число перемѣнъ въ ряду [0] изъ числа перемѣнъ въ ряду [$-\infty$], разность будетъ равна числу дѣйствительныхъ корней между 0 и $-\infty$, т. е. числу всѣхъ отрицательныхъ корней даннаго уравненія.

Такимъ образомъ узнаемъ число всѣхъ дѣйствительныхъ корней даннаго уравненія. Чтобы ихъ отдѣлить, вставляемъ въ функціи (2) возрастающія числа, начиная отъ 0 къ $-\infty$ и отъ 0 къ $+\infty$. Для удобства начинаютъ вставку съ чиселъ десятичныхъ:

$$0, -10, -100, -1000, \ldots\ldots$$

$$0, +10, +100, +1000, \ldots\ldots,$$

и продолжаютъ до тѣхъ поръ, какъ дойдемъ до двухъ чиселъ -10^p и $+10^q$, между которыми заключаются всѣ дѣйствительные корни даннаго уравненія. Мы ихъ узнаемъ по тому, что рядъ [-10^p] имѣетъ одинакое число перемѣнъ съ рядомъ [$-\infty$], а рядъ [$+10^q$] имѣетъ одинакое число перемѣнъ съ рядомъ [$+\infty$].

Пусть a и b будутъ два послѣдовательныя десятичныя числа, и меньшее изъ нихъ есть a; ежели разность чиселъ перемѣнъ рядовъ знаковъ [a] и [b] больше единицы, то a и b заключаютъ нѣсколько корней. Чтобы ихъ отдѣлить, вставляемъ въ функціи (2) вмѣсто x числа среднія между a и b; постепенное исчезаніе перемѣнъ при переходѣ x отъ a до b, покажетъ намъ частные предѣлы каждаго корня. Такъ какъ данное уравненіе не имѣетъ равныхъ корней, то это отдѣленіе всегда возможно. Хотя оно бываетъ продолжительно, но продолжительность вознаграждается большою степенью приближенія къ корнямъ.

§ **96**. Когда одна изъ среднихъ функцій (2), на пр. R_p, постоянно сохраняетъ свой знакъ для всѣхъ дѣйствительныхъ значеній x; тогда рядъ знаковъ функцій

$$R_p,\ R_{p-1},\dots R_2,\ R_1,\ f'(x),\ f(x)$$

имѣетъ совершенно то же свойство, что и рядъ (2), т. е. теряетъ одну перемѣну каждый разъ, какъ уничтожится $f(x)$, и сохраняетъ то же число перемѣнъ при уничтоженіи одной изъ функцій среднихъ между R_p и $f(x)$. А потому, производя дѣйствіе § 93, и дойдя до остатка второй степени $R_{n-2}=Ax^2+Bx+C$, должно посмотрѣть, будетъ ли $B^2-4AC<o$: когда это случится, тогда уравненіе $R_{n-2}=o$ имѣетъ мнимые корни, и функція R_{n-2} сохраняетъ знакъ количества A для всѣхъ дѣйствительныхъ значеній x.

Когда уравненіе $R_p=o$ имѣетъ дѣйствительные корни, но которые не заключаются въ предѣлахъ a и b; тогда вмѣсто рядовъ знаковъ

[a] $$R_n,\ R_{n-1},\dots f'(a),\ f(a)$$

[b] $$R_n,\ R_{n-1},\dots f'(b),\ f(b),$$

можно взять ряды знаковъ

[a] $$R_p,\ R_{p-1},\dots f'(a),\ f(a)$$

[b] $$R_p,\ R_{p-1},\dots f'(b),\ f(b):$$

потому что тогда функція R_p для всякаго дѣйствительнаго значенія x между a и b имѣетъ одинъ и тотъ же знакъ; слѣдовательно для этихъ предѣловъ она имѣетъ то же свойство, что и R_n. Ежели въ функціи R_{n-2} коеффиціенты удовлетворяютъ условію $B^2-4AC>o$; то корни уравненія $R_{n-1}=o$ дѣйствительные. Означимъ ихъ чрезъ γ_1 и γ_2, и пусть $\gamma_1<\gamma_2$; тогда функція R_{n-2} имѣетъ одинъ и тотъ же знакъ для значеній x, среднихъ между $-\infty$ и γ_1; при $x=\gamma_1$, она мѣняетъ свой знакъ, который остается тотъ же для $x>\gamma_1$ и $<\gamma_2$; при $x=\gamma_2$ знакъ R_{n-2} опять мѣняется на предъидущій, который сохраняется для всѣхъ значеній x, начиная отъ γ_2 до $+\infty$. И такъ ряды $[-\infty]$ и $[\gamma_1]$ покажутъ, сколько корней между $-\infty$ и γ_1; ряды $[\gamma_1]$ и $[\gamma_2]$ покажутъ сколько корней между γ_1 и γ_2; наконецъ ряды $[\gamma_2]$ и $[+\infty]$ покажутъ сколько корней между γ_2 и $+\infty$. Сравнивая ряды $[\gamma_1]$ и $[-\infty]$, $[\gamma_2]$ и $[+\infty]$, должно $R_{n-2}=Ax_2+Bx+C$ приписать знакъ коеффиціента A, а при сравненіи рядовъ $[\gamma_1]$ и $[\gamma_2]$, должно ей приписать знакъ противный.

Наконецъ, когда $B^2-4AC=o$; тогда R_{n-2} имѣетъ равные корни. Пусть они будутъ $=\gamma$; то R_{n-2} сохранитъ постоянно одинъ и тотъ же знакъ для всѣхъ значеній x, начиная отъ $-\infty$ до γ; при $x=\gamma$ она уничтожится, а для $x>\gamma$ она опять возвратится къ прежнему знаку. И такъ этотъ случай одинаковъ съ $B^2-4AC<o$.

Слѣдовательно во всякомъ случаѣ можно остановить дѣйствіе § 93 на остаткѣ второй степени. Это иногда облегчаетъ отдѣленіе корней, особливо когда степень даннаго уравненія довольно высока; чрезъ то мы иногда избѣгаемъ огромныхъ численныхъ коэффиціентовъ въ остаткахъ R_{n-1} и R_n. Но когда корни уравненія $R_{n-2}=o$ многосложны или несоизмѣримы; тогда лучше продолжать вычисленіе до конца.

§ **97**. Производную $f'(x)$ можно замѣнить другою функціею $F(x)$; но съ слѣдующими условіями: 1) чтобы $F(x)$ и $f(x)$ не имѣли общихъ корней, т. е. не имѣли общимъ дѣлителемъ функцію x; 2) если a есть корень $f(x)$, а $a-h$ и $a+h$ его безконечноблизкіе предѣлы; то $F(a-h)$, $F(a)$, $F(a+h)$ и $f(a+h)$ должны имѣть одинакіе знаки. Употребляя $F(x)$ такъ же какъ и $f'(x)$, мы составимъ, по § 93, рядъ функцій, которыя будутъ имѣть то же свойство, что и рядъ (2).

§ **98**. Когда данное уравненіе имѣетъ равные корни; тогда, производя дѣйствіе § 93, мы найдемъ, что послѣдній остатокъ R_n есть нуль, а потому R_{n-1} будетъ общій большой дѣлитель функцій $f(x)$ и $f'(x)$, и частныя $\dfrac{f(x)}{R_{n-1}}=\Phi(x)$ и $\dfrac{f'(x)}{R_{n-1}}=F(x)$ не будутъ имѣть общихъ корней. Пусть a будетъ дѣйствительный корень даннаго уравненія, а $a-h$ и $a+h$ безконечноблизкіе его предѣлы, такіе, что $f'(x)$ сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ для всѣхъ значеній x, начиная отъ $a-h$ до $a+h$. Такъ какъ $f(a-h)$ и $f'(a-h)$ съ противными знаками, а $f(a+h)$ и $f'(a+h)$ съ одинакими; то $\Phi(a-h)$ и $F(a-h)$ будутъ также имѣть противные знаки, а $\Phi(a+h)$ и $F(a+h)$ одинакіе. Слѣд. $\Phi(x)$ и $F(x)$ имѣютъ то же свойство, что $f(x)$ и $f'(x)$ въ случаѣ неравныхъ корней уравненія $f(x)=o$. Прилагая къ нимъ правило § 93, составимъ новый рядъ функцій, которыя, какъ легко видѣть, будутъ

$$(6)\qquad \frac{R_{n-1}}{R_{n-1}},\ \frac{R_{n-2}}{R_{n-1}},\ldots\frac{R_3}{R_{n-1}},\ \frac{R_2}{R_{n-1}},\ \frac{R_1}{R_{n-1}},\ F(x),\ \Phi(x),$$

и имѣютъ то же свойство, что и функціи (2) въ случаѣ неравныхъ корней. А потому можно къ нимъ приложить правило § 95, по которому мы отдѣлимъ корни уравненія $\Phi(x)=o$, принадлежащіе и уравненію $F(x)=o$.

Основываясь на этомъ замѣчаніи, можно прилагать способъ Штурма къ уравненію съ равными корнями, не отдѣливъ ихъ предварительно.

Мы въ правѣ замѣнить каждую изъ функцій (2) или (6) другою простѣйшею, имѣющею съ ней одинакій знакъ для всякаго дѣйствительнаго значенія x; это нимало не имѣетъ вліянія на правило отдѣленія корней.

§ 99. Приложимъ теперь все сказанное къ примѣрамъ:

Примѣръ I.

Пусть дано уравненіе

$$x^3-7x+7=o.$$

Производная первой его части есть $3x^2-7$; раздѣливши $3x^3-21x+21$ на $3x^2-7$, получаемъ остатокъ $-14x+21$, который по сокращеніи на 7, обращается въ $-2x+3$, а потому $R_1=+2x-3$. Дѣлимъ на R_1 производную $f'(x)=3x^2-7$, помноживъ ее сперва на 2^2. Совершивъ это дѣленіе, имѣемъ въ остаткѣ -1; слѣд. $R_2=+1$.

И такъ рядъ функцій будетъ:

$$f(x)=x^3-7x+7$$
$$f'(x)=3x^2-7$$
$$R_1=2x-3$$
$$R_2=+1.$$

Для $x=-\infty$ и $+\infty$ ряды знаковъ результатовъ будутъ

	R_2,	R_1,	$f'(x)$,	$f(x)$
[$-\infty$]	+	—	+	—
[$+\infty$]	+	+	+	+;

откуда видимъ, что всѣ корни даннаго уравненія дѣйствитвительные. Чтобы ихъ отдѣлить, вставляемъ въ рядъ функцій вмѣсто

x числа: $\left\{0, \begin{matrix}-1,-10\ldots\ldots \\ +1,+10\ldots\ldots\end{matrix}\right\}$; отъ того имѣемъ ряды знаковъ:

	R_2,	R_1,	$f'(x)$,	$f(x)$
[-10]	+	—	+	—
[-1]	+	—	—	+
[0]	+	—	—	+
[$+1$]	+	—	—	+
[$+10$]	+	+	+	+,

которые показываетъ, что одинъ корень отрицательный, а остальные два положительные; первый заключается между —10 и —1, а вторые между +1 и 10.

Для $x=2$, рядъ знаковъ результатовъ будетъ

$$[+2] \qquad + \quad + \quad + \quad +;$$

слѣдовательно положительные корни содержатся между 1 и 2. Сдѣлавъ $x=\frac{3}{2}$, находимъ, что $f(\frac{3}{2})$ отрицательная, а потому одинъ корень содержится между +1 и $\frac{3}{2}$; а другой между $\frac{3}{2}$ и 2.

Примѣръ II.

Возьмемъ уравненіе

$$x^4-4x^3-3x+23=o.$$

Для него находимъ по § 93, рядъ функцій:

$$f(x)=x^4-4x^3-3x+23$$

$$f'(x)=4x^3-12x^2-3$$

$$R_1=12x^2+9x-89$$

$$R_2=-491x+1371$$

$$R_3=-7157932$$

Положивъ $x=-\infty, +\infty$, имѣемъ ряды знаковъ:

$$[-\infty] \qquad - \quad + \quad + \quad - \quad +$$

$$[+\infty] \qquad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

Такъ какъ въ верхнемъ 3 перемѣны, а въ нижнемъ одна; то данное уравненіе имѣетъ только два дѣйствительныхъ корня. Для $x=0$ рядъ знаковъ будетъ

$$[0]. \qquad - \quad + \quad - \quad - \quad +,$$

гдѣ столько же перемѣнъ, сколько и въ ряду $[-\infty]$, а потому данное уравненіе не имѣетъ отрицательныхъ корней.

Вставивъ +1 и +10 вмѣсто x въ рядъ функцій, имѣемъ ряды:

$$[0] \qquad - \quad + \quad - \quad - \quad +$$

$$[+1] \qquad - \quad + \quad - \quad - \quad +$$

$$[+10] \qquad - \quad - \quad + \quad + \quad +,$$

которые показываютъ, что оба корня содержатся между +1 и +10. Чтобы ихъ отдѣлить, вставляемъ 2 и 3 вмѣсто x; отъ того получаемъ ряды :

[+1]	—	+	—	—	+
[+2]	—	+	—	—	+
[+3]	—	—	+	—	—
[+10]	—	—	+	+	+.

И такъ одинъ корень содержится между 2 и 3; а другой между 3 и 10

Примѣръ III.

Для уравненія

$$f(x)=x^4-x^3+4x^2+x-4=0\ .$$

функціи (2) будутъ:

$$f(x)=x^4-x^3+4x^2+x-4$$
$$f'(x)=4x^3-3x^2+4x+1$$
$$R_1=-45x^2-16x+53$$
$$R_2=-3319x+1152$$
$$R_3=-194852571\,;$$

по вставкѣ въ нихъ вмѣсто x количествъ

$$\begin{matrix}-\infty & & -1,\ldots\ldots \\ & 0, & \\ +\infty & & +1,\ldots\ldots,\end{matrix}$$

получаемъ ряды знаковъ

	R_3,	R_2,	R_1,	$f'(x)$	$f(x)$	
[$-\infty$]	—	+	—	—	+	два дѣйствит. корня
[$+\infty$]	—	—	—	+	+	
[—1]	—	+	+	—	+	одинъ корень
[0]	—	+	+	+	—	
[1]	—	—	+	+	+	другой корень

Примѣръ IV.

Отдѣлимъ корни уравненія

$$f(\theta)=\theta^4-6\theta^3+16\theta^2-26\theta-1=o,$$

найденнаго въ § 60.

Для него имѣемъ

$$f(x)=x^4-6x^3+16x^2-26x-1$$

$$\tfrac{1}{2}f'(x)=2x^3-9x^2+16x-13$$

$$R_1=-5x^2+30x+43$$

$$R_2=-4x+1$$

$$R_3=-47.$$

Положивъ $x=-\infty$, $+\infty$, получаемъ

	R_3,	R_2,	R_1,	f',	f
$[-\infty]$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
$[+\infty]$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$;

откуда видимъ, что уравненіе $f(\theta)=o$ имѣетъ только два дѣйствительныхъ корня. Разсматривая ряды:

$[-1]$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
$[0]$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
$[+1]$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
$[+10]$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$,

находимъ, что одинъ корень заключается между -1 и 0, а другой между $+1$ и $+10$.

Примѣръ V.

Возьмемъ уравненіе

$$f(x)=x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101=o.$$

Для него по § 93, составляемъ функціи

$$f(x)=x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101$$

$$f'(x)=5x^4-12x^3-72x^2+190x-46$$

$$R_1=276x^3-1279x^2+350x+2663$$

$$R_2=35513x^2-13122x+143761$$

$$R_3=462274915121x-1081022103762$$

$$R^4=28281434251103609123214962721.$$

Такъ какъ уравненіе $R_2=o$ **имѣетъ мнимые ко́рни; то можно отбросить функціи R_2 и R_4. Разсматривая знаки результатовъ остальныхъ, находимъ:**

	R_2,	R_1,	f',	f	
[— ∞]	+	—	+	—	три дѣйствит. корня.
[+ ∞]	+	+	+	+	
[—10]	+	—	+	—	**одинъ дѣйствит. отриц. корень.**
[— 1]	+	+	—	+	**одинъ дѣйствит. отриц. корень.**
[0]	+	+	—	—	
[+1]	+	+	+	—	**одинъ дѣйствит. полож. корень.**
[+10]	+	+	+	+	

Примѣръ VI.

Прилагая правило § 93 къ уравненію

$$f(x)=x^6+2x^5+x^4-2x^3-5x^2-4x-2=o,$$

находимъ, что послѣдній остатокъ R_4 есть нуль, а потому предъидущій **остатокъ** $R_3=-x^2-x-1$ **есть общій большой дѣлитель** $f(x)$ **и** $f'(x)$. **Поступивъ здѣсь по § 98, находимъ рядъ функцій:**

$$\frac{f(x)}{R^3}=-x^4-x^3+x^2+2x+2$$

$$\frac{f'(x)}{2R_3}=-3x^3-2x^2+3x+1$$

$$\frac{R_1}{R}=-2x^2-9x-16$$

$$\frac{R_2}{R_3}=+11x+40,\ \frac{R_3}{R_3}=+1.$$

Вставляя въ нихъ $-\infty$, $+\infty$, 0, $\left\{\begin{matrix} -1,-10,\ldots\ldots \\ +1,+10,\ldots\ldots \end{matrix}\right\}$, получаемъ ряды:

	$\frac{R_3}{R_3}$,	$\frac{R_2}{R_3}$,	$\frac{R_1}{R_3}$,	$\frac{f'(x)}{2R_3}$,	$\frac{f(x)}{R_3}$	
$[-\infty]$	+	—	—	+	—	два дѣйствит. корня.
$[+\infty]$	+	+	—	—	—	
$[-10]$	+	+	—	+	—	одинъ отриц. кор.
$[-1]$	+	+	—	—	+	
$[0]$	+	+	—	+	+	
$[+1]$	+	+	—	—	+	одинъ полож. кор.
$[+10]$	+	+	—	—	—	

Примѣръ VII.

Пусть будетъ еще уравненіе

$$f(x)=x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^3+x^2+x+1=o,$$

въ которомъ всѣ коеффиціенты$=1$. Для него получаемъ:

$$f(x)=x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^3+x^2+x+1$$

$$f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+\ldots3x^2+2x+1$$

$$R_1=-x^{n-2}-2x^{n-3}-3x^{n-4}-\ldots-(n-3)x^2-(n-2)x-(n-1)$$

$$R_2=-n^2.$$

Положимъ, что n есть число четное; то $n-1$ будетъ нечетное, а $n-2$ четное. Ряды:

	R_2	R_1,	f'	f
$[-\infty]$	—	—	—	+
$[+\infty]$	—	—	+	+

показываютъ, что данное уравненіе не имѣетъ дѣйствительныхъ корнёй.

Изъ этого примѣра заключаемъ, что корни уравненія (6) (см. § 57) всѣ мнимые, когда $n>2$.

§ **100**. Теорема *Штурма* даетъ средство опредѣлять условія дѣйствительности всѣхъ корней. Возьмемъ сперва общее уравненіе 2-й степени

$$Ax^2+Bx+C=o.$$

Для него по § 93, составляемъ функціи

$$f(x)=Ax^2+Bx+C,\ f'(x)=2Ax+B,\ R_1=B^2-4AC.$$

Положивъ $x=-\infty, +\infty$, имѣемъ

$[-\infty]$ $\qquad + \quad - \ (+$ или 0, или $-)$

$[-\infty]$ $\qquad + \quad + \ (+$ или 0, или $-)$;

отсюда видимъ, что данное уравненіе тогда только будетъ имѣть дѣйствительные неравные корни, когда $B^2-4AC>o$.

Для уравненія

$$f(x)=x^3+px+q=o$$

имѣемъ:

$$f(x)=x^3+px+q,\ f'(x)=3x^2+p,\ R_1=-2px-3q,\ R_2=-4p^3-27q^2.$$

Чтобы всѣ корни даннаго уравненія были дѣйствительные, необходимо, чтобы въ ряду $[-\infty]$ не было повтореній знаковъ, а для того коэффиціентъ перваго члена въ каждой функціи и постоянный остатокъ R_2 должны быть положительные. И такъ условія дѣйствительности всѣхъ корней уравненія 3-й степени будутъ:

$-p>0$ и $-4p^3-27q^2>0$ или $=0$,

т. е. $p<0$ и $4p^3+27q^2<0$ или $=0$.

Точно такимъ же образомъ можно вывести условія дѣйствительности всѣхъ корней уравненій 4-й и 5-й и пр. степени.

(Способъ Фурье).

§ **101**. **Мы видѣли все преимущество *Штурмова* способа предъ *Лагранжевымъ*; не смотря на то, онъ бываетъ иногда очень затруднителенъ, а именно, когда коэффиціенты послѣдовательныхъ остатковъ болѣе и болѣе возрастаютъ и не сокращаются. Такъ въ 5-мъ примѣрѣ, послѣдній остатокъ имѣетъ 29 цифръ; если бы корни функціи R_2 не были мнимые, то *Штурмовъ* способъ едва ли былъ бы легче *Лагранжева*. По этому *Штурмовъ* способъ для уравненій высокихъ степеней замѣняется способомъ *Фурье*.**

Теорема, служащая основаніемъ способу *Фурье*, въ первый разъ была обнародована *Бюданомъ* въ 1807-мъ году въ его сочиненіи: *Nouvelle méthode pour la résolution des équations*. Но письма *Поассона* къ *Фурье* и *Коранцеза* къ *Навье*, помѣщенныя послѣднимъ въ его предъувѣдомленіи въ началѣ *Analyse des équations déterminées*, несомнѣнно доказываютъ, что эта теорема была извѣстна въ Политехнической Школѣ въ 1797-мъ году, и принадлежитъ *Фурье*, который впослѣдствіи основалъ на ней вѣрный и удобный способъ отдѣленія корней. Этотъ способъ явился въ свѣтъ вмѣстѣ съ *Analyse des équations déterminées*, рукописью, найденною по смерти *Фурье* и изданною *Навье*. Я употреблю все стараніе изложить его съ тою же ясностью, съ какою онъ изложенъ самимъ авторомъ.

§ **102.** Пусть дано уравненіе

$$f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=0,$$

котораго коеффиціенты a_1, a_2,...a_m суть извѣстныя дѣйствительныя числа. Положимъ, что мы освободили его отъ всѣхъ соизмѣримыхъ корней; но не *отдѣляли* еще равныхъ несоизмѣримыхъ дѣйствительныхъ и мнимыхъ корней.

Взявши всѣ m производныя отъ $f(x)$, имѣемъ рядъ функцій

$$(1) \qquad f^m(x),\ f^{m-1}(x),\ f^{m-2}(x),\ldots f'''(x),\ f''(x),\ f'(x),\ f(x),$$

которыхъ степени, начиная справа влѣво, идутъ уменьшаясь единицею, и послѣдняя $f^m(x)$ есть постоянное количество $m(m-1)(m-2)\ldots3.2.1$. Означимъ чрезъ l и $-l'$ общіе предѣлы всѣхъ дѣйствительныхъ корней, вставимъ ихъ вмѣсто x въ функціи (1), и изобразимъ, такъ же какъ и въ способѣ Штурма, чрезъ $[+l]$ и $[-l']$ ряды знаковъ результатовъ. Въ § 77 и § 80 мы видѣли, что рядъ $[+l]$ имѣетъ только повторенія знаковъ, а $[-l']$ только перемѣны. Представимъ себѣ, что x непрерывно измѣняется отъ $-l'$ до l; то рядъ знаковъ $[x]$, переходя отъ $[-l']$ къ $[l]$, долженъ потерять перемѣны, а для того нѣкоторыя изъ функцій (1) должны мѣнять свои знаки, т. е. должны уничтожаться для нѣкоторыхъ значеній x. Здѣсь можетъ быть нѣсколько случаевъ, которые мы разсмотримъ отдѣльно.

1) Во-первыхъ посмотримъ, что будетъ съ рядомъ $[x]$, когда x пройдетъ чрезъ одинъ изъ дѣйствительныхъ неравныхъ корней даннаго уравненія. Означимъ этотъ корень чрезъ a; то $f(a)=0$, а $f'(a)$ имѣетъ какое-либо значеніе отличное отъ нуля, положительное или отрицательное. Разсмотримъ результаты функцій (1) для трехъ безконечно-близкихъ количествъ $x=a-h$, $x=a$ и $x=a+h$. Для функціи $f(x)$ имѣемъ (см. § 18) результаты

$$f(a-h)=-h.f'(a-\phi h)$$

$$f(a)=o$$

$$f(a+h)=+h.f'(a+\theta h).$$

Положимъ, что $x=a$ не уничтожаетъ ни одной изъ среднихъ функцій (1); то для h можно взять значеніе такъ малое, что знакъ каждой будетъ тотъ же для всякаго значенія x, начиная отъ $a-h$ до $a+h$. А потому результаты: $f'(a-h)$, $f'(a-\phi h)$, $f'(a)$, $f'(a+\theta h)$, $f'(a+h)$ имѣютъ одинакіе знаки. Слѣдовательно, когда $f'(a)$ съ $+$, тогда

$f(a-h)=-h.f'(a-\phi h)$ *отрицательная*,

$f(a+h)=+h.\ f'(a+\theta h)$ *положительная.*

И крайніе знаки трехъ рядовъ $[a-h]$, $[a]$, $[a+h]$ будутъ соотвѣтственно:

$[a-h]$	. . . . .	$+$	$-$
$[a]$	. . . . .	$+$	0
$[a+h]$	. . . . .	$+$	$+$.

Изъ этого видно, что въ ряду $[a-h]$ одной перемѣной больше ряда $[a+h]$.

Ежели $f'(a)$ отрицательная; то

$f(a-h)=-h.\ f'(a-\phi h)$ *положительная*,

$f(a+h)=+h.\ f'(a+\theta h)$ *отрицательная*,

а потому крайніе знаки трехъ рядовъ будутъ соотвѣтственно:

$[a-h]$	. . . . .	$-$	$+$
$[a]$	. . . . .	$-$	0
$[a+h]$	. . . . .	$-$	$-$;

откуда видимъ, что опять въ ряду $[a-h]$ одной перемѣной больше ряда $[a+h]$. И такъ какой бы ни былъ знакъ $f'(a)$, число перемѣнъ ряда $[a-h]$ единицею больше числа перемѣнъ ряда $[a+h]$. Слѣдовательно рядъ знаковъ результатовъ $[x]$ теряетъ одну перемѣну каждый разъ, какъ x достигнетъ и превзойдетъ безконечно-мало одинъ изъ дѣйствительныхъ неравныхъ корней даннаго уравненія.

2) Положимъ теперь, что количество a, вставленное вмѣсто x въ функціи (1), уничтожаетъ только одну изъ среднихъ, не уничтожая $f(x)$. Пусть эта уничтожающаяся функція будетъ $f^n(x)$, то $f^n(a)=o$. Взявши

h такъ малымъ, чтобы знаки всѣхъ прочихъ функцій были тѣ же для всякаго значенія x, начиная отъ $a-h$ до $a+h$, разсмотримъ результаты $f^n(a-h)$, $f^n(a)$ и $f^n(a+h)$. Они (см. § 18) будутъ соотвѣтственно: $-h.\,f^{n+1}(a-\phi h)$, 0, $+h.\,f^{n+1}(a+\theta h)$. Знаки $f^{n+1}(a)$ и $f^{n-1}(a)$ могутъ быть, или $+$ или $-$; отъ чего происходитъ четыре случая:

a) Когда $f^{n+1}(a)$ положительная; тогда $f^{n+1}(a-\phi h)$ и $f^{n+1}(a+\theta h)$ также положительныя, а потому

$$f^n(a-h)=-h.\,f^{n+1}(a-\phi h) \text{ отрицательная,}$$

$$f^n(a+h)=+h.\,f^{n+1}(a+\theta h) \text{ положительная.}$$

Если притомъ $f^{n-1}(a)$ положительная; то знаки трехъ функцій $f^{n+1}(x)$, $f^n(x)$, $f^{n-1}(x)$ въ трехъ рядахъ $[a-h]$, $[a]$, $[a+h]$ соотвѣтственно будутъ:

$[a-h]$	. . . . .	$+$	$-$	$+$	. . . . .
$[a]$	. . . . .	$+$	0	$+$	. . . . .
$[a+h]$	. . . . .	$+$	$+$	$+$	. . . . .

b) Когда $f^{n+1}(a)$ отрицательная, а $f^{n-1}(a)$ положительная; тогда предъидущее положеніе знаковъ замѣнится слѣдующимъ

$[a-h]$	. . . . .	$-$	$+$	$+$	. . . . .
$[a]$	. . . . .	$-$	0	$+$	. . . . .
$[a+h]$	. . . . .	$-$	$-$	$+$	. . . . .

c) Ежели $f^{n+1}(a)>o$, а $f^{n-1}(a)<o$; то положеніе знаковъ будетъ такое:

$[a-h]$	. . . . .	$+$	$-$	$-$	. . . . .
$[a]$	. . . . .	$+$	0	$-$	. . . . .
$[a+h]$	. . . . .	$+$	$+$	$-$	. . . . .

d) Наконецъ когда $f^{n+1}(a)$ и $f^{n-1}(a)$ обѣ отрицательныя; тогда имѣемъ слѣдующее положеніе знаковъ

$[a-h]$	. . . . .	$-$	$+$	$-$	. . . . .
$[a]$	. . . . .	$-$	0	$-$	. . . . .
$[a+h]$	. . . . .	$-$	$-$	$-$	. . . . .

Разсматривая эти различныя положенія знаковъ, находимъ: 1) когда $f^{n+1}(a)$ и $f^{n-1}(a)$ имѣютъ одинакіе знаки, тогда въ ряду $[a-h]$ двумя перемѣнами больше ряда $[a+h]$; 2) когда же знаки этихъ функцій разные, тогда число перемѣнъ въ ряду $[a-h]$ равно числу перемѣнъ въ ряду $[a+h]$.

И такъ если x достигнетъ и превзойдетъ безконечно-мало дѣйствительный корень только одной изъ среднихъ функцій (1); то рядъ знаковъ $[x]$ потеряетъ или двѣ перемѣны, или ни одной.

3) Посмотримъ, что будетъ съ рядомъ $[x]$, когда количество a, вставленное вмѣсто x въ рядъ функцій (1), уничтожаетъ нѣсколько функцій сряду.

Положимъ сперва, что уничтожаются нѣсколько среднихъ функцій, рядомъ стоящихъ. Пусть число ихъ есть i, а $f^n(x)$ первая изъ нихъ слѣва; то

$$f^n(a)=o,\ f^{n-1}(a)=o,\ f^{n-2}(a)=o, \ldots\ f^{n-i+1}(a)=o.$$

Что же касается до $f^{n+1}(a)$ и $f^{n-i}(a)$, то онѣ будутъ или $>$, или $<o$. Измѣнимъ по предъидущему a безконечно-мало въ $a-h$ и $a+h$, и посмотримъ каковы будутъ знаки результатовъ:

$$f^n(a-h),\ f^{n-1}(a-h),\ f^{n-2}(a-h), \ldots\ f^{n-i+1}(a-h)$$

$$f^n(a+h),\ f^{n-1}(a+h),\ f^{n-2}(a+h), \ldots\ f^{n-i+1}(a+h).$$

По § 18, имѣемъ:

$$f^n(a-h)=-h.\ f^{n+1}(a-\varphi_1 h), \qquad f^n(a+h)=+h.\ f^{n+1}(a+\theta_1 h)$$

$$f^{n-1}(a-h)=+\frac{h^2}{2}.\ f^{n+1}(a-\varphi_2 h), \qquad f^{n-1}(a+h)=+\frac{h^2}{2}.\ f^{n+1}(a+\theta_2 h)$$

$$f^{n-2}(a-h)=-\frac{h^3}{2.3}.f^{n+1}(a-\varphi_3 h), \qquad f^{n-2}(a+h)=+\frac{h^3}{2.3}.f^{n+1}(a+\theta_3 h)$$

. . . . , ...

$$f^{n-i+1}(a-h)=(-1)^i\frac{h^i}{2.3\ldots i}f^{n+1}(a+\varphi_i h), f^{n-i+1}(a+h)=\frac{h^i}{2.3\ldots i}f^{n+1}(a+\theta_i h).$$

Здѣсь h полагается такъ малымъ, что знаки функцій, предшествующихъ $f^n(x)$ и слѣдующихъ послѣ $f^{n-i+1}(x)$, остаются тѣ же для всякого значенія x, начиная отъ $a-h$ до $a+h$. Слѣдовательно:

a) Когда $f^{n+1}(a)>o$, $f^{n-i}(a)>o$, тогда $f^{n+1}(a-h)$, $f^{n+1}(a+h)$ и

$$(2)\quad \begin{cases} f^{n+1}(a-\varphi_1 h),\ f^{n+1}(a-\varphi_2 h),\ f^{n+1}(a-\varphi_3 h), \ldots\ f^{n+1}(a-\varphi_i h) \\ f^{n+1}(a-\theta_1 h),\ f^{n+1}(a+\theta_2 h),\ f^{n+1}(a+\theta_3 h), \ldots\ f^{n-1}(a+\theta_i h) \end{cases}$$

будутъ также $>o$; отъ того результаты:

$$(3)\quad f^n(a-h),\ f^{n-1}(a-h),\ f^{n-2}(a-h),\ f^{n-3}(a-h), \ldots\ f^{n-i+1}(a-h)$$

будутъ поперемѣнно то съ —, то съ +, а результаты

(4) $\quad f^n(a+h),\ f^{n-1}(a+h),\ f^{n-2}(a+h),\ f^{n-3}(a+h), \ldots\ f^{n-i+1}(a+h)$

всѣ съ +. И такъ три ряда $[a-h]$, $[a]$, $[a+h]$, соотвѣтственно будутъ

		f^{n+1},	f^n,	f^{n-1},	f^{n-2},		f^{n-i+1},	f^{n-i}
$[a-h]$	. . .	+	—	+	—	. .	± (*)	+ . . .
$[a]$	. . .	+	0	0	0	. .	0	+ . . .
$[a+h]$	. . .	+	+	+	+	. .	+	+ . . .

Означивъ чрезъ H число перемѣнъ въ ряду $[a-h]$, а чрезъ K число перемѣнъ въ ряду $[a+h]$, разность $H-K$ будетъ всегда равна числу перемѣнъ въ $[a-h]$, заключающихся между f^{n+1} и f^{n-i}. Но это число перемѣнъ, когда i четное, будетъ i, а когда i нечетное, тогда оно будетъ $i+1$; слѣдовательно разность $H-K$ въ обоихъ случаяхъ четная.

б) Ежели $f^{n+1}(a)>o$, $f^{n-i}(a)<o$; то знаки выраженій (2), (3) и (4) останутся тѣ же; но предъидущіе ряды замѣнятся слѣдующими:

		f^{n+1}					f^{n-i+1}	f^{n-i}
$[a-h]$	. . .	+	—	+	—	. .	±	— . . .
$[a]$	. . .	+	0	0	0	. .	0	— . . .
$[a+h]$	. . .	+	+	+	+	. .	+	— . . .

Пусть опять H будетъ число перемѣнъ въ ряду $[a-h]$, а K въ ряду $[a-h]$; то разность $H-K$ будетъ равна числу перемѣнъ между f^{n+1} и f^{n-i+1}. Она будетъ i, когда i четное, а $i-1$, когда i нечетное; и такъ она въ обоихъ случаяхъ четная.

c) Когда $f^{n+1}(a)<o$, $f^{n-i}(a)<o$; тогда выраженія (2) и (4) также $<o$, результаты (3) будутъ поперемѣнно положительные и отрицательные, и наши три ряда будутъ

		f^{n+1}					f^{n-i+1}	f^{n-i}
$[a-h]$	. . .	—	+	—	+	. .	∓ (**)	— . . .
$[a]$	. . .	—	0	0	0	. .	0	— . . .
$[a+h]$	. . .	—	—	—	—	. .	—	— . . .

Разность $H-K$ равна числу перемѣнъ въ ряду $[a-h]$ между f^{n+1} и f^{n-i}; это число будетъ i, когда i четное, а $i+1$, когда i нечетное; слѣдовательно въ обоихъ случаяхъ $H-K$ есть число четное.

(*) Знакъ + относится къ i четному, а — къ i нечетному.

(**) Здѣсь — относится къ i четному, а + къ i нечетному.

d) Наконецъ если $f^{n+1}(a)<o$, а $f^{n-i}(a)>o$; то знаки выраженій (3) и (4) будутъ тѣ же, что и въ предъидущемъ случаѣ, и ряды знаковъ будутъ:

				f^{n+1}						f^{n-i+1}	f^{n-i}				
$[a-h]$	.	.	.	—	+	—	+	.	.	$\mp$	+	.	.	.
$[a]$	.	.	.	—	0	0	0	.	.	0	+	.	.	.
$[a+h]$	.	.	.	—	—	—	—	.	.	—	+	.	.	.

Разность $H-K$ равна числу перемѣнъ ряда $[a-h]$ между f^{n-i+1} и f^{n-i+1}, и будетъ i или $i-1$, смотря по тому, будетъ ли i число четное или нечетное.

Изъ этихъ изслѣдованій заключаемъ, что $H-K$, когда i четное число, будетъ i, а когда i нечетное, тогда она будетъ $i+1$ или $i-1$, смотря по тому будутъ ли f^{n+1} и f^{n-i} съ одинакими или разными знаками. Слѣдовательно разность $H-K$ всегда положительная и четная. Когда $i=1$, разность $H-K$ будетъ или 2 или 0: это случай, который мы уже разсматривали, полагая, что a уничтожаетъ только одну изъ среднихъ функцій.

Ежели a уничтожаетъ нѣсколько крайнихъ функцій справа, на пр. j, т. е.

$$f^{j-1}(a)=o,\ f^{j-1}(x)=o, \ldots,\ f''(a)=o,\ f'(a)=o,\ f(a)=o;$$

то, по § 69, это показываетъ, что a есть j-кратный корень даннаго уравненія $f(x)=o$. Разсуждая такъ же, какъ и въ предъидущемъ случаѣ, найдемъ, что рядъ $[x]$, при переходѣ x чрезъ a, теряетъ j перемѣнъ. Здѣсь заключается первый изъ разсмотрѣнныхъ нами случаевъ, а именно, когда $j=1$. И такъ рядъ $[x]$, при переходѣ x отъ $-l'$ къ $+l$, теряетъ столько перемѣнъ, сколько между этими предѣлами заключается равныхъ и неравныхъ дѣйствительныхъ корней даннаго уравненія.

4) Наконецъ можетъ случиться, что количество a, вставленное вмѣсто x въ рядъ (1), уничтожаетъ i функцій въ одной части ряда, i'— въ другой, i''— въ третьей, и т. д. и j съ конца; тогда, прилагая предъидущія сужденія къ каждой части ряда отдѣльно, мы въ состояніи будемъ опредѣлить число теряемыхъ перемѣнъ рядомъ $[x]$, когда x достигнетъ и превзойдетъ безконечно-мало количество a.

Разсмотрѣнные нами случаи объясняютъ, какимъ образомъ рядъ $[x]$ теряетъ m перемѣнъ, при переходѣ x отъ $-l'$ къ $+l$, и приводятъ насъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

1-е. ***Съ непрерывнымъ возрастаніемъ* x, *число перемѣнъ въ ряду знаковъ* [x] *не можетъ возрастать.***

2-е. *Когда количество* a, *вставленное вмѣсто* x *въ рядъ* (1), *уничтожаетъ крайнюю функцію* f(x); *то рядъ знаковъ* [x] *теряетъ столько перемѣнъ, сколько уравненіе* f(x)=o *имѣетъ корней равныхъ* a.

3-е. *Когда количество, вставленное вмѣсто* x, *уничтожаетъ одну или нѣсколько среднихъ функцій, не уничтожая крайней* f(x); *то число перемѣнъ въ* [x], *или останется то же, или уменьшится четнымъ числомъ.*

И такъ, если всѣ корни даннаго уравненія дѣйствительные; то рядъ $[x]$ теряетъ всѣ m перемѣнъ когда x перейдетъ чрезъ всѣ эти корни. А потому онъ не можетъ терять перемѣнъ, когда x перейдетъ чрезъ количество, уничтожающее одну или нѣсколько среднихъ функцій, но неравное одному изъ корней даннаго уравненія.

Если уравненіе $f(x)=o$ имѣетъ $m-2$ дѣйствительныхъ корней, а прочіе два мнимые; то рядъ $[x]$, одинъ разъ только долженъ потерять вдругъ двѣ перемѣны, отъ вставки вмѣсто x количества, уничтожающаго одну изъ среднихъ функцій, но неравнаго одному изъ корней $f(x)$; остальныя же $m-2$ перемѣнъ исчезаютъ по мѣрѣ того, какъ x переходитъ чрезъ каждый изъ $m-2$ дѣйствительныхъ корней.

Во всякомъ случаѣ каждому изъ дѣйствительныхъ корней, равныхъ или неравныхъ, соотвѣтствуетъ одна исчезающая перемѣна, а потому число перемѣнъ, теряемыхъ при уничтоженіи только среднихъ функцій, всегда равно числу мнимыхъ корней даннаго уравненія.

§ **103.** Изъ этого вытекаетъ знаменитая теорема *Фурье*, составляющая одно изъ важнѣйшихъ свойствъ уравненій:

Пусть дано численное уравненіе $f(x)=o$ степени m, съ дѣйствительными коеффиціентами. Взявши рядъ функцій $f^m(x)$, $f^{m-1}(x)$,.. $f'(x)$, $f(x)$, изъ которыхъ каждая есть производная предъидущей, направо стоящей, дадимъ x частное значеніе, напишемъ знаки результатовъ, и назовемъ этотъ рядъ знаковъ чрезъ $[x]$; число перемѣнъ въ этомъ ряду съ измѣненіемъ x будетъ измѣняться по слѣдующимъ законамъ:

1) Ежели $-l'$ и l суть два числа, изъ которыхъ первое, будучи вставлено вмѣсто x въ рядъ функцій, даетъ только перемѣны, а второе только повторенія; то съ возрастаніемъ x, начиная отъ $-l'$ до l, рядъ знаковъ $[x]$ потерять m перемѣнъ. Это число перемѣнъ не можетъ возрастать съ возрастаніемъ x.

2) Рядъ теряетъ перемѣну, каждый разъ какъ x достигнетъ и превзойдетъ безконечно-мало одинъ изъ дѣйствительныхъ кореній даннаго уравненія.

3) Сколько уравненіе $f(x)=o$ имѣетъ паръ мнимыхъ корней, столько разъ рядъ $[x]$ теряетъ вдругъ двѣ перемѣны.

§ **104.** Основываясь на этомъ предложеніи, мы въ состояніи узнать, сколько данное уравненіе можетъ имѣть дѣйствительныхъ корней между двумя числами a и b. Въ самомъ дѣлѣ: вставивши меньшее изъ нихъ a въ рядъ функцій (1), сочтемъ число перемѣнъ въ $[a]$ ряду знаковъ результатовъ, пусть это число будетъ H; потомъ вставимъ b въ рядъ функцій, и сочтемъ число перемѣнъ въ ряду $[b]$, которое пусть будетъ K. Разность $H—K$, всегда положительная, покажетъ, сколько можно искать дѣйствительныхъ корней между a и b.

Ежели разность $H—K=o$; то a и b не заключаютъ ни одного корня даннаго уравненія. Въ самомъ дѣлѣ: допустивши, что $a<\alpha<b$ и $f(\alpha)=o$, рядъ знаковъ $[x]$, при переходѣ x отъ a къ b чрезъ α, потерялъ бы перемѣну, а какъ она не можетъ опять возстановиться, то въ ряду $[b]$ было бы меньше перемѣнъ, нежели въ ряду $[a]$; слѣдовательно $H—K$ не была бы равна нулю.

Когда $H—K=1$; тогда a и b заключаютъ одинъ дѣйствительный корень уравненія $f(x)=o$; потому что, при переходѣ x отъ a къ b, рядъ $[x]$ теряетъ одну перемѣну только тогда, когда уничтожается $f(x)$. Болѣе одного корня предѣлы a и b заключать не могутъ; потому что, въ противномъ случаѣ, разность $H—K$ была бы больше единицы.

Если $H—K=2$, то уравненіе $f(x)=o$ можетъ имѣть между предѣлами a и b, или 2 дѣйствительныхъ корня, или ни одного. Послѣдній случай встрѣчается, когда существуетъ количество $>a$ и $<b$, которое, будучи вставлено вмѣсто x въ рядъ (1), уничтожаетъ одну изъ среднихъ функцій и уноситъ заразъ двѣ перемѣны въ ряду $[x]$. Предѣлы a и b не могутъ содержать болѣе двухъ корней; потому что, въ противномъ случаѣ, рядъ $[x]$ терялъ бы болѣе двухъ перемѣнъ, при переходѣ x отъ a до b; такъ что разность $H—K$ была бы больше 2-хъ, а это по положенію не возможно.

Во всякомъ случаѣ число дѣйствительныхъ корней уравненія $f(x)=o$, содержащихся между a и b, не можетъ быть болѣе разности $H—K$. Если эта разность нечетная, то a и b заключаютъ по крайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный корень; когда же она четная, тогда случается, что между a и b нѣтъ ни одного дѣйствительнаго корня. Вообще, если число дѣйствительныхъ корней меньше разности $H—K$ числомъ δ; то это число назначаетъ для $f(x)=o$ столько мнимыхъ корней, сколько въ немъ единицъ.

§ **105**. Изъ этихъ заключеній вытекаетъ, какъ слѣдствіе, извѣстная теорема *Декарта*. Пусть уравненіе $f(x)=o$ будетъ полное, т. е. которое заключаетъ члены со всѣми степенями x, начиная отъ m до o. Возьмемъ для предѣловъ a и b значенія 0 и $-\infty$; вставивши первое изъ нихъ въ рядъ функцій (1), получаемъ результаты

$$f^{m}(0),\ f^{m-1}(0), \ldots\ f''(0),\ f'(0),\ f(0),$$

которыхъ знаки, по § 18 ур. (38), одинаковы съ знаками коеффиціентовъ даннаго уравненія: $1,\ a_1,\ a_2, \ldots a_m$. Разность числа перемѣнъ ряда $[-\infty]$ и числа перемѣнъ ряда $[0]$, какъ легко понять, равна числу повтореній въ ряду знаковъ коеффиціентовъ, и по § 103, *она не можетъ быть меньше числа дѣйствительныхъ отрицательныхъ корней даннаго уравненія*. Давши a и b значенія 0 и $+\infty$, разность числа перемѣнъ ряда $[0]$ и ряда $[+\infty]$ будетъ равна числу перемѣнъ въ ряду знаковъ коеффиціентовъ, и по § 103, *она не меньше числа положительныхъ корней даннаго уравненія*.

§ **106**. Общая теорема § 103 показываетъ, между какими предѣлами должно искать дѣйствительные корни даннаго уравненія. Ежели предѣлы a и b даютъ ряды знаковъ $[a]$ и $[b]$, имѣющіе одинакое число перемѣнъ; то они не могутъ содержать ни одного корня. А потому при отдѣленіи корней такіе предѣлы оставляются безъ вниманія, и разсматриваются только тѣ, которые даютъ разное число перемѣнъ въ рядахъ знаковъ результатовъ.

Можетъ случиться, что одинъ изъ предѣловъ a или b уничтожаетъ одну или нѣсколько функцій; тогда мы въ недоумѣніи, какіе знаки должно приписать этимъ функціямъ въ ряду знаковъ, соотвѣтствующемъ этому предѣлу, и какъ считать число перемѣнъ. Для этого *Фурье* предложилъ очень легкій способъ, не требующій никакихъ вычисленій.

§ **107**. Пусть предѣлъ a, будучи вставленъ вмѣсто x въ рядъ функцій (1), уничтожаетъ одну или нѣсколько среднихъ функцій; то рядъ знаковъ $[a]$ можно замѣнить двумя рядами $[<a]$ и $[>a]$, соотвѣтствующими двумъ предѣламъ, $a-h$ и $a+h$, безконечноблизкимъ къ a. Для составленія этихъ рядовъ, основываясь на § 102 мы выводимъ слѣдующія правила:

1) Чтобы составить рядъ $[>a]$: напишемъ сперва рядъ $[a]$, потомъ, начиная слѣва, каждый знакъ, который не 0, повторяемъ *внизу*; встрѣтивши 0, ставимъ *подъ нимъ* предъидущій знакъ, и повторяемъ его до тѣхъ поръ, какъ встрѣтимъ опять знакъ не 0; послѣ того поступаемъ по предъидущему.

2) Для составленія ряда $[<a]$, начиная слѣва, каждый знакъ ряда $[a]$, если онъ не 0, пишемъ *вверху*, а встрѣтивши 0, ставимъ *надъ нимъ* знакъ, противный предъидущему. Такимъ образомъ продолжаемъ далѣе.

Такъ на пр., если отъ вставки a въ рядъ функцій найдемъ рядъ знаковъ

$[a]$ + + 0000 — 000 + — 0 — 00000+;

то его замѣняемъ рядами:

$[<a]$	$+\ +\ -\ +\ -\ +\ -\ +\ -\ +\ +\ -\ +\ -\ +\ -\ +\ -\ +\ +$
$[a]$	$+\ +\ 0\ 0\ 0\ 0\ -\ 0\ 0\ 0\ +\ -\ 0\ -\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ +$
$[>a]$	$+\ +\ +\ +\ +\ -\ -\ -\ -\ -\ +\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ +.$

Составивъ такимъ образомъ два ряда $[<a]$ и $[>a]$, первый беремъ для сравненія a съ предѣломъ b', меньшимъ a, а второй для сравненія a съ предѣломъ b, большимъ a. Это правило *Фурье* называетъ *правиломъ двойнаго знака*; его должно употреблять каждый разъ какъ количество, вставленное вмѣсто x въ рядъ функцій (1), уничтожаетъ нѣкоторыя изъ нихъ. А потому при сравненіи рядовъ, соотвѣтствующихъ двумъ какимъ нибудь предѣламъ, мы никогда не встрѣтимъ знаковъ 0.

Не должно забывать сравненіе рядовъ $[<a]$ и $[>a]$ между собою; они очень часто открываютъ присутствіе мнимыхъ корней въ данномъ уравненіи. Въ самомъ дѣлѣ: H, число перемѣнъ въ ряду $[<a]$, не можетъ быть меньше K, числа перемѣнъ въ ряду $[>a]$, и если $H>K$ (что бываетъ, когда a уничтожаетъ нѣсколько функцій сряду), то разность $H-K=\delta$ есть число четное; въ такомъ случаѣ уравненіе $f(x)=o$ имѣетъ δ мнимыхъ корней, кромѣ тѣхъ, которые открываются другими предѣлами. Въ предъидущемъ примѣрѣ разность $H-K$ есть $16-4=12$ и показываетъ, что данное уравненіе имѣетъ покрайней мѣрѣ 12 корней мнимыхъ.

§ 108. Пояснимъ изложенныя нами теоремы примѣрами:

Примѣръ I.

Возьмемъ вопервыхъ уравненіе

$$f(x)=x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101=o,$$

къ которому мы уже прилагали способъ *Штурма*. Для него имѣемъ рядъ функцій:

$$f(x)=x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101$$

$$f'(x)=5x^4-12x^3-72x^2+190x-46$$

$$f''(x)=20x^3-36x^2-144x+190$$

$$f'''(x)=60x^2-72x-144$$

$$f^{IV}(x)=120x-72$$

$$f^{V}(x)=120$$

Вставивши сюда вмѣсто x числа $0, \begin{matrix}-1,-10,\ldots \\ +1,+10,\ldots\end{matrix}$, и написавши соотвѣтственно знаки результатовъ, получаемъ ряды:

	f^{v}	f^{iv}	f'''	f''	f'	f
[—10]	+	—	+	—	+	—
[—1]	+	—	—	+	—	+
[0]	+	—	—	+	—	—
[1]	+	+	—	+	+	—
[10]	+	+	+	+	+	+

Въ ряду [—10] только перемѣны, а въ ряду [+10] только повторенія; слѣдовательно —10 и +10 суть общіе предѣлы всѣхъ корней. Разсматривая ряды [—10] и [—1], находимъ, что въ первомъ одной перемѣной больше втораго, а потому —1 и —10 суть частные предѣлы одного изъ дѣйствительныхъ отрицательныхъ корней даннаго уравненія. Предѣлы 0 и —1 также заключаютъ одинъ дѣйствительный корень; потому что въ ряду [—1] 4 перемѣны, а въ ряду [0] только 3. Ряды [0] и [1] не открываютъ ни одного корня; потому что въ нихъ число перемѣнъ одинакое. Наконецъ, сличая рядъ [1] съ рядомъ [10], находимъ, что въ первомъ 3 перемѣны, а во второмъ ни одной: это предполагаетъ въ уравненіи 3 корня, изъ которыхъ одинъ необходимо, дѣйствительный, а прочіе два остаются въ неизвѣстности.

Примѣръ II.

Возьмемъ уравненіе

$$x^4-4x^3-3x+23=o.$$

Рядъ функцій (1) будетъ:

$$f(x)=x^4-4x^3-3x+23$$

$$f'(x)=4x^3-12x^2-3$$

$$f''(x)=12x^2-24x$$

$$f'''(x)=24x-24$$

$$f^{iv}(x)=24.$$

Вставляя 0, +1, +10 вмѣсто x, замѣчаемъ, что $f''(0)=0$ $f'''(1)=0$, а потому составляемъ ряды: $[<0]$, $[>0]$ и $[<1]$ и $[>1]$.

И такъ имѣемъ:

	f^{IV}	f'''	f''	f'	f
$[<0]$	+	—	+	—	+
$[0]$	+	—	0	—	+
$[>0]$	+	—	—	—	+
$[<1]$	+	—	—	—	+
$[1]$	+	0	—	—	+
$[>1]$	+	+	—	—	+
$[10]$	+	+	+	+	+.

Сличая ряды $[<0]$ и $[>0]$, находимъ, что въ первомъ 4 перемѣны, а во второмъ 2, разность этихъ чиселъ есть 2; слѣдовательно два корня даннаго уравненія мнимые. Ряды $[>0]$ и $[<1]$ имѣютъ одинакое число перемѣнъ, а потому предѣлы 0 и 1 не открываютъ ни одного корня въ данномъ уравненіи. Ряды $[<1]$ и $[>1]$ также не открываютъ ни одного корня. Наконецъ ряды $[>1]$ и $[10]$ показываютъ два корня, которые могутъ быть или дѣйствительные, или мнимые.

Замѣч. Въ этомъ примѣрѣ данное уравненіе неимѣетъ члена съ x^2, а потому производная $f''(x)$ не имѣетъ постояннаго члена, и уничтожается при $x=0$. Вообще, если данное уравненіе неполное; то отъ $x=0$ уничтожается столько производныхъ, сколько въ уравненіи не достаетъ членовъ, и въ такомъ случаѣ должно пользоваться правиломъ двойнаго знака. Руководствуясь этимъ замѣчаніемъ, можно часто прямо узнать имѣетъ ли уравненіе мнимые корни, и сколько ихъ.

Такъ для уравненія

$$x^m+a_m=o,$$

положивъ $x=0$, имѣемъ ряды:

	f^m,	f^{m-1},	f^{m-2},	f^{m-3},	. . .	f'	f
$[<0]$	+	—	+	—	. . . .		$+a_m$
$[0]$	+	0	0	0	. . .	0	$+a_m$
$[>0]$	+	+	+	+	. . . .		$+a_m$,

которые показываютъ:

1) Когда m четное и a_m дѣйствительное положительное число; тогда въ ряду $[<0]$ только перемѣны, а въ ряду $[>0]$ только повтореніе, и

потому всѣ m корней мнимые. Но когда m четное, а a_m дѣйствительное отрицательное число; тогда ряды $[<0]$ и $[>0]$ открываютъ въ данномъ уравненіи $m-2$ мнимыхъ корней; остальные два корня дѣйствительные: одинъ положительный, а другой отрицательный.

2) Если же m нечетное, то данное уравненіе имѣетъ $m-1$ мнимыхъ корней; остальной корень дѣйствительный и съ знакомъ, противнымъ коеффиціенту a_m.

Разсматривая уравненіе

$$x^{2n}+a_n x^n+a_{2n}=o,$$

находимъ:

1) Когда n четное,	$a_n>0$ и $a_{2n}>0$,	тогда данное ур. имѣетъ:	0 *дѣйст.*, $2n$ *мн. к.*
. . . . . .	$a_n>0$, $a_{2n}<0$,	. . . .	: 2 — — $2n-2$. .
. . . . . .	$a_n<0$, $a_{2n}>0$,	. . . .	: 4 *неизв.*, $2n-4$. .
. . . . . .	$a_n<0$ $a_{2n}>0$,	. . . .	: 1 *дѣйст.*, $2n-2$. .
2) Когда n нечетное,	$a_n>0$ и $a_{2n}>0$,	. . . .	: 2 *неизв.*, $2n-2$. .
. . . . . .	$a_n>0$, $a_{2n}<0$	. . . .	: 2 *дѣйст.* $2n-2$. .
. . . . . .	$a_n<0$, $a_{2n}>0$	. . . .	: 2 *неизв.* $2a-2$. .
. . . . . .	$a_n<0$, $a_{2n}<0$	. . . .	: 2 *дѣйст.* $2n-2$. .

Примѣръ IV.

Для уравненія

$$x^7-2x^5-3x^3+4x^2-5x+6=o.$$

находимъ слѣдующую таблицу:

	f^{VII},	f^{VI},	f^{V},	f^{IV},	f''',	f'',	f',	f	
$[-10]$	+	—	+	—	+	—	+	—	} одинъ дѣйст. к.
$[-1]$	+	—	+	—	+	+	—	+	
$[<0]$	+	—	—	+	—	+	—	+	} 2 мнимыхъ к.
$[0]$	+	0	—	0	—	+	—	+	
$[>0]$	+	+	—	—	—	+	—	+	
$[+1]$	+	+	+	+	+	—	—	+	} 2 корня неизв.
$[+10]$	+	+	+	+	+	+	+	+	} 2 корня неизв.

§ **109**. Вставляя въ рядъ функцій (1) вмѣсто x десятичныя числа $0, \begin{cases} -1, -10, -100, \ldots \\ +1, +10, +100, \ldots \end{cases}$ до тѣхъ поръ, какъ дойдемъ до двухъ чиселъ -10^p и $+10^q$, изъ которыхъ первое дастъ только перемѣны знаковъ, а второе только повторенія, мы узнаемъ всѣ десятичные предѣлы, между которыми могутъ существовать корни. Но впрочемъ мы не всегда откроемъ свойство этихъ корней; такъ напр., если найдемъ, что разность числа перемѣнъ двухъ рядовъ $[-10^i]$ и $[+10^{i+1}]$ четная; то мы не знаемъ корни, открытые этими рядами, будутъ ли дѣйствительные или мнимые.

§ **110**. Представимъ себѣ, что разность предѣловъ $+10^p$ и -10^q раздѣлена на множество элементовъ; то каждый элементъ будетъ имѣть два предѣла a и b. Этихъ предѣловъ два рода: 1) тѣ, которые открываютъ въ уравненіи корни, и 2) тѣ, которые не открываютъ ни одного корня. Первые узнаются по тому, что, будучи вставлены вмѣсто x въ рядъ функцій (1), даютъ два ряда знаковъ, для которыхъ разность чиселъ перемѣнъ >0; вторые же узнаются по тому, что, будучи вставлены въ тотъ же рядъ функцій, даютъ два ряда знаковъ, имѣющихъ одинакое число перемѣнъ. Послѣдніе, какъ мы уже сказали, могутъ быть оставлены безъ вниманія. Перваго рода предѣлы открываютъ или дѣйствительные корни, или мнимые; остается теперь узнать, какимъ образомъ различить эти два случая.

Здѣсь можно воспользоваться способами *Лагранжа* и *Коши* для вычисленія Δ, числа меньшаго наименьшей разности корней; зная это число, мы всегда можемъ отдѣлить корни, назначаемые двумя какими-нибудь предѣлами a и b, а именно: вставляя въ $f(x)$ вмѣсто x числа

$$a+\Delta,\quad a+2\Delta,\quad a+3\Delta,\ldots,$$

и разсматривая знаки результатовъ. Но по трудности вычисленія Δ и излишнимъ вставкамъ, этотъ способъ остается безъ употребленія.

Фурье, давно уже рѣшилъ предложенный вопросъ о распознаніи дѣйствительныхъ отъ мнимыхъ корней, и способы, которые онъ для этого предлагаетъ, требуютъ очень малыхъ вычисленій. Мы сперва изложимъ простѣйшій.

§ **111**. Разсмотримъ во-первыхъ случай: когда, по вставкѣ вмѣсто x въ рядъ функцій (1) двухъ количествъ a и b, мы получимъ два ряда $[a]$ и $[b]$, для которыхъ разность чиселъ перемѣнъ есть 2, и знаки крайнихъ трехъ функцій суть:

		$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$		
$[a]$	. . . .	$+$	$-$	$+$	}	(5)
$[b]$	. . . .	$+$	$+$	$+$		

или

$[a]$	. . . .	$-$	$+$	$-$	}	(6)
$[b]$	. . . .	$-$	$-$	$-$		

Положимъ еще, что предѣлы a и b такъ близки, что функціи $f^{m-1}(x)$, $f^{m-2}(x)$,... $f''(x)$ сохраняютъ свои знаки для всякаго значенія $x>a$ и $<b$. И такъ въ ряду $[a]$ двумя перемѣнами больше противъ ряда $[b]$, а потому предѣлы a и b открываютъ въ уравненіи $f(x)=o$ два корня. Остается узнать, будутъ ли эти корни дѣйствительные или мнимые.

Опустивши въ рядахъ $[a]$ и $[b]$ крайніе знаки (справа), въ первомъ ряду будетъ только одной перемѣной больше противъ втораго; слѣдовательно уравненіе $f'(x)=o$ имѣетъ одинъ дѣйствительный корень между a и b, который назовемъ чрезъ γ. Опустивши въ каждомъ ряду два крайніе знака, оставшіеся ряды будутъ имѣть одинакое число перемѣнъ, а потому предѣлы a и b не открываютъ въ уравненіи $f''(x)=o$ ни одного корня, и $f''(x)$ сохраняетъ свой знакъ для всякаго значенія x, отъ a до b.

Разсматривая ряды (5), видимъ, что $f'(x)$ возрастаетъ съ возрастаніемъ x отъ a до b; потому что $f''(x)$ положительная при всякомъ значеніи $x>a$ и $<b$. Такъ какъ $a<\gamma<b$; то $f'(x)$ отрицательная при всякомъ значеніи $x>a$ и $<\gamma$, а положительная при $x>\gamma$ и $<b$. Слѣдовательно $f(x)$ съ возрастаніемъ x отъ γ до b увеличивается, и потому (§ 17) при $x=\gamma$ она имѣетъ значеніе *minimum*. Если это *minimum* $f(\gamma)$ — отрицательное количество, то это знакъ, что $f(x)=o$ имѣетъ два дѣйствительныхъ корня между a и b: одинъ заключается между a и γ, а другой между γ и b. Если же $f(\gamma)$ — положительная; то $f(x)$ положительная при всякомъ значеніи $x>a$ и $<b$, а потому она не можетъ имѣть дѣйствительныхъ корней между a и b.

Въ случаѣ (6) функція $f'(x)$ положительная и остается такою для $x>\gamma$ и $<b$. По этому, съ возрастаніемъ x отъ a до γ, $f(x)$ возрастаетъ, а съ возрастаніемъ x отъ γ до b, она уменьшается; слѣдовательно при $x=\gamma$, она имѣетъ значеніе *maximum*. Ежели это *maximum* $f(\gamma)$ — положительное, то уравненіе $f(x)=o$ имѣетъ два дѣйствительныхъ корня между a и b: одинъ заключается между a и γ, а другой между γ и b. Но когда $f(\gamma)$ — отрицательная; тогда $f(x)$ не

можетъ обратиться въ нуль ни для какого значенія $x>a$ и $<b$, и въ такомъ случаѣ, корни уравненія $f(x)=o$, назначаемые предѣлами a и b, мнимые.

Наконецъ, если въ томъ или въ другомъ изъ случаевъ (5), (6) найдемъ, что $f(\gamma)=o$; то это знакъ, что уравненіе имѣетъ два дѣйствительныхъ корня между a и b, равныхъ γ.

И такъ, зная γ, мы можемъ всегда судить, будутъ ли корни уравненія $f(x)=o$, назначаемые предѣлами a и b, дѣйствительные или мнимые. Примѣромъ можетъ служить уравненіе

$$x^3+4x^2-3x+5=o,$$

для котораго находимъ таблицу знаковъ:

	f'''	f''	f'	f
[—10]	+	—	+	—
[—1]	+	+	—	+
[0]	+	+	—	+
[1]	+	+	+	+

Предѣлы 0 и 1 открываютъ въ этомъ уравненіи два корня, и удовлетворяютъ условію, принятому въ началѣ этого §. Функціи:

$$f(x)=x^3+4x^2-3x+5 \text{ и } f'(x)=3x^2+8x-3$$

не имѣютъ общаго дѣлителя, а потому искомые корни не могутъ быть равные.

Уравненіе

$$f'(x)=3x^2+8x-3=o$$

имѣетъ два дѣйствительныхъ корня, а именно: $\frac{1}{3}$ и 3; слѣдовательно $\gamma=\frac{1}{3}$, и $(f(\gamma)=f(\frac{1}{3}))>0$ показываетъ, что корни, назначаемые предѣлами 0 и 1, мнимые. И такъ данное уравненіе имѣетъ одинъ только дѣйствительный корень, который заключается между —1 и—10.

Но такое изъисканіе бываетъ неисполнимо, когда корни $f'(x)$ несоизмѣримые, и когда степень даннаго уравненія выше 3-й. А потому изъ сдѣланнаго нами замѣчанія о знакѣ $f(x)$, мы не можемъ вывести общаго способа отличать дѣйствительные корни отъ мнимыхъ. Вотъ другой способъ.

Пусть корни уравненія $f(x)=o$, назначаемые предѣлами a и b, дѣйсотвительные и неравные; означимъ большій изъ нихъ чрезъ α, а меньшій чрезъ β, и положимъ

$$\alpha = a + z;$$

тогда будетъ $f(\alpha) = f(a+z) = o$, или

$$f(a) + z . f'(a + \theta z) = o;$$

откуда

$$(7) \qquad z = -\frac{f(a)}{f'(a+\theta z)} \text{ и}$$

$$\alpha = a + \left(-\frac{f(a)}{f'(a+\theta z)}\right).$$

Такъ какъ $a+\theta z < (a+z = \alpha)$ и $\alpha < \gamma$; то $a+\theta z < \gamma$, а потому знакъ $f'(a+\theta z)$ одинаковъ съ знакомъ $f'(a)$. Но $f(a)$ и $f'(a)$ съ противными знаками; слѣдовательно $f(a)$ и $f'(a+\theta z)$ будутъ также съ противными знаками, и отношеніе (7), въ томъ и въ другомъ изъ случаевъ (5) (6), положительное. Числовое значеніе $f'(a+\theta z)$ всегда меньше $f'(a)$; потому что $f'(x)$ приближается къ нулю съ возрастаніемъ x отъ a до γ. Слѣдовательно

$$-\frac{f(a)}{f'(a)} < -\frac{f(a)}{f'(a+\theta z)} \quad \text{и}$$

$$(8) \qquad \alpha > a + \left(-\frac{f(a)}{f'(a)}\right).$$

Положивъ $\beta = b - u$, имѣемъ $f(\beta) = f(b-u) = o$, или

$$f(b) - u . f'(b - \theta u) = o;$$

отсюда

$$u = \frac{f(b)}{f'(b-\theta u)} \text{ и } \beta = b - \frac{f(b)}{f'(b-\theta u)}.$$

Такъ какъ $\beta < b - \theta u$ и $\gamma > \beta$, то $\gamma < b - \theta u$; поэтому $f'(b)$ и $f'(b-\theta u)$ съ одинакими знаками, и числовое значеніе $f'(b-\theta u)$ меньше числоваго значенія $f'(b)$. Слѣдовательно отношеніе $\frac{f(b)}{f'(b-\theta u)}$ всегда положительное и больше отношенія $\frac{f(b)}{f'(b)}$; отъ того

$$(9) \qquad \beta < b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

По положенію $\alpha<\beta$, и потому, обративъ вниманіе на неравенства (8) и (9), имѣемъ

$$a + \left(-\frac{f(a)}{f'(a)}\right) < b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

или

$$(10) \qquad -\frac{f(a)}{f'(a)} + \frac{f(b)}{f'(b)} < b - a$$

Это неравенство должно существовать, какъ бы ни были близки предѣлы a и b къ корнямъ α и β.

Посмотримъ теперь, будетъ ли удовлетворено неравенство (10) въ случаѣ мнимыхъ корней. Въ этомъ случаѣ, какъ мы уже сказали, $f(x)$ сохраняетъ знакъ $f(a)$ и $f(b)$ для всѣхъ значеній x, начиная отъ a до b, и при $x=\gamma$ числовое ея значеніе будетъ наименьшее для каждой изъ системъ знаковъ: (5) (6). Поэтому

$$-\frac{f(a)}{f'(a)} > -\frac{f(\gamma)}{f'(a)} \text{ и } \frac{f(b)}{f'(b)} > \frac{f(\gamma)}{f'(b)}.$$

Сложивши эти неравенства, имѣемъ

$$-\frac{f(a)}{f'(a)} + \frac{f(b)}{f'(b)} > f(\gamma).\left(\frac{1}{-f'(a)} + \frac{1}{f'(b)}\right).$$

Вторая часть послѣдняго неравенства положительная, и увеличивается съ приближеніемъ a и b къ γ; потому что тогда числовыя значенія $f'(a)$ и $f'(b)$ приближаются къ $f'(\gamma)=o$. Разность $b-a$ также приближается къ нулю. А потому, сближая предѣлы a и b, но такъ, чтобы всегда было $a<\gamma<b$, мы доймемъ до того, что

$$f(\gamma)\left(\frac{1}{-f'(a)} + \frac{1}{f'(b)}\right) = \text{ или } > b - a,$$

и тогда будетъ

$$-\frac{f(a)}{f'(a)}+\frac{f(b)}{f'(b)}>b-a.$$

И такъ, если, по вставкѣ двухъ количествъ a и b въ рядъ функцій (1), мы найдемъ, что, въ ряду $[a]$ двумя перемѣнами больше противъ ряда $[b]$, и что, по опущеніи крайнихъ двухъ знаковъ, оставшіеся ряды имѣютъ одинакое число перемѣнъ; тогда, чтобы судить о свойствѣ корней, назначаемыхъ предѣлами a и b для ур. $f(x)=o$, мы беремъ результаты $f(a)$, $f'(a)$, $f(b)$ и $f'(b)$, составляемъ частныя $-\frac{f(a)}{f'(a)}$ и $\frac{f(b)}{f'(b)}$; если одно изъ нихъ или сумма ихъ больше или равна разности предѣловъ $b-a$; то это знакъ, что корни мнимые. Но когда

$$-\frac{f(a)}{f'(a)}+\frac{f(b)}{f'(b)}<b-a;$$

тогда мы не въ правѣ еще сказать, что корни дѣйствительные: это неравенство можетъ существовать и въ случаѣ мнимыхъ корней, если предѣлы a и b еще не довольно тѣсны. Въ такомъ случаѣ мы смотримъ, не имѣютъ ли $f(x)$ и $f'(x)$ общимъ дѣлителемъ функцію x; если этотъ дѣлитель существуетъ, и одинъ изъ его корней γ заключается между a и b, то корни, назначаемые этими предѣлами для уравненія $f(x)=o$, дѣйствительные и равны γ. Если же общій большой дѣлитель $f(x)$ и $f'(x)$ не имѣетъ дѣйствительнаго корня между a и b, или онъ вовсе не существуетъ, то должно стѣснить предѣлы a и b. Пусть $c>a$ и $<b$. Когда результатъ $f(c)$ имѣетъ знакъ, противный знакамъ результатовъ $f(a)$ и $f(b)$; тогда корни дѣйствительные: одинъ изъ нихъ заключается между a и c, а другой между c и b. Но когда $f(c)$, $f(a)$ и $f(b)$ имѣютъ одинакіе знаки, то это признакъ, что предѣлы a и b не довольно близки, чтобы съ перваго раза можно было открыть свойство корней. Результатъ $f'(c)$ всегда имѣетъ знакъ, противный одному изъ результатовъ $f'(a)$ и $f'(b)$, Пусть d будетъ тотъ изъ предѣловъ a и b, который даетъ $f'(d)$ съ знакомъ противнымъ знаку $f'(c)$; то ряды $[c]$ и $[d]$ будутъ тожественны съ рядами $[a]$ и $[b]$, и потому съ предѣлами c и d поступаемъ такъ же, какъ и съ a и b. Продолжая такимъ образомъ далѣе, мы, необходимо, или дойдемъ до такого количества $>a$ и $<b$, которое отдѣлитъ корни, если они дѣйствительные, или дойдемъ до такихъ двухъ предѣловъ a' и b', которые удовлетворяютъ неравенству

$$-\frac{f(a')}{f'(a')}+\frac{f(b')}{f'(b')}>b'-a',$$

если корни мнимые.

§ **112.** Чтобы пояснить это правило и показать его простоту, возьмемъ слѣдующіе примѣры:

Примѣръ V.

Уравненіе

$$x^3+2x^2-3x+2=o$$

даетъ слѣдующую таблицу знаковъ:

	f'''	f''	f'	f	
[—10]	+	—	+	—	
[—1]	+	—	—	+	
[0]	+	+	—	+	
			3	2	(*)
[1]	+	+	+	+	
			4	2	

Предѣлы —10 и —1 заключаютъ одинъ дѣйствительный корень, а предѣлы 0 и 1 открываютъ два корня, которыхъ свойство можно узнать по изложенному способу; потому что ряды [0] и [1] удовлетворяютъ условіямъ, принятымъ въ началѣ § 111. Изъ результатовъ $f(0), f'(0), f(1), f'(1)$, составляемъ частныя: $-\frac{f(0)}{f'(0)}=\frac{2}{3}$ и $\frac{f(1)}{f'(1)}=\frac{2}{4}$, и видимъ, что сумма ихъ $\frac{2}{3}+\frac{2}{4}$ больше разности предѣловъ 1—0, а потому искомые корни мнимые.

Примѣръ VI.

Для уравненія

$$x^5+x^4+x^2-25x-36=o$$

находимъ таблицу

(*) Числа, стоящія внизу знаковъ, суть результаты, соотвѣтствующіе этимъ знакамъ.

	f^{V}	f^{IV}	f'''	f''	f'	f	
[—10]	+	—	+	—	+	—	
					45955	89686	два корня неизв.
[—1]	+	—	+	—	—	—	
					26	10	
[0]	+	+	∓ 0	+	—	—	два мним. корня
[1]	+	+	+	+	—	—	одинъ дѣйств. корень.
[10]	+	+	+	+	+	+	

Чтобы открыть свойство корней, назначаемыхъ предѣлами —10 и —1, беремъ частныя

$$-\frac{f(-10)}{f'(-10)}=\frac{89686}{45955}\ \text{ и }\ \frac{f(-1)}{f'(-1)}=\frac{10}{26},$$

и находимъ, что сумма ихъ $\frac{89686}{45955}+\frac{10}{26}$ меньше разности предѣловъ $-1-(-10)=9$. Изъ этого заключаемъ, что предѣлы —10 и —1 еще не довольно близки, чтобы судить о свойствѣ корней. Прежде, нежели станемъ ихъ стѣснять, посмотримъ, не будутъ ли корни равные, т. е. поищемъ общаго большаго дѣлителя $f(x)$ и $f'(x)$. Этотъ дѣлитель не существуетъ, а потому вставляемъ вмѣсто x число среднее между —10 и —1; взявши для него значенiе —2, имѣемъ $f(-2)=+2$. Знакъ этого результата противенъ знакамъ $f(-10)$ и $f(-1)$, а потому искомые корни дѣйствительные; одинъ заключается между —10 и —2, другой между —2 и —1. И такъ всѣ корни даннаго уравненiя отдѣлены.

§ 113. Посмотримъ теперь, какимъ образомъ правило, выведенное для распознанiя дѣйствительныхъ отъ мнимыхъ корней, распространяется, на всякой случай.

Пусть a и b будетъ два предѣла, которые, будучи вставлены въ рядъ функцiй (2), даютъ два какихъ нибудь ряда знаковъ: $[a]$ и $[b]$. Станемъ считать въ первомъ ряду перемѣны съ лѣвой руки къ правой, начиная отъ f^m до f^{m-1}, до f^{m-2}, до f^{m-3}, и т. д., и надъ каждымъ знакомъ напишемъ число перемѣнъ, въ ряду, предшествующихъ ему знаковъ; такъ, подъ знакомъ f^{m-i} ставимъ h, число перемѣнъ вряду знаковъ функцiй, начиная отъ f^m до f^{m-i} включительно. Сдѣлаемъ потомъ то же самое и въ ряду $[b]$. Пусть k будетъ число, стоящее подъ f^{m-i} въ ряду $[b]$; разность $h-k=\delta_i$ напишемъ между знаками f^{m-i} въ обоихъ рядахъ. Поступивъ такимъ образомъ для каждой изъ функцiй f^m, f^{m-1}, f^{m-2}, ... f', f, мы получимъ рядъ чиселъ

(11) $$\delta_0,\ \delta_1,\ \delta_2, \ldots \delta_{m-i},\ \delta_{m-1},\ \delta_m$$

которыя *Фурье* называетъ ***указателями*** (*indices*).

Для примѣра возьмемъ ряды:

	f^m	f^{m-1}	f^{m-2}	...	...	...	f'''	f''	f'	f
	0	1	2	2	3	3	4	5	6	7
[a]	+	—	+	+	—	—	+	—	+	—
	0	**0**	**1**	**1**	**2**	**1**	**2**	**3**	**3**	**4**
[b]	+	—	—	—	—	+	+	+	—	—.
	0	1	1	1	1	2	2	2	3	3

Поступивъ по изложенному правилу, получаемъ рядъ указателей

0 0 1 1 2 1 2 3 3 4.

Каждый изъ членовъ ряда (11) показываетъ, сколько для соотвѣтству-ющей ему функціи можно искать корней между предѣлами a и b. Такъ въ нашемъ примѣрѣ: $\delta_m=4$ есть число корней, назначаемыхъ предѣлами a и b для $f(x)$; $\delta_{m-1}=3$ открываетъ въ $f'(x)$ три корня, изъ которыхъ одинъ дѣйствительный; $\delta_{m-2}=3$ указываетъ на три корня $f''(x)$; и т. д.

Изъ происхожденія указателей (11) легко замѣтить, что каждый изъ нихъ разнится отъ смежныхъ или 0, или $+1$, или -1; т. е. если δ_i есть одинъ изъ членовъ ряда (11), то членъ, за нимъ слѣдующій, будетъ или δ_i, или δ_i+1, или δ_i-1. Это объясняется слѣдующимъ образомъ:

Пусть будетъ h число перемѣнъ въ ряду [a] до f^{m-i}, а k—число перемѣнъ въ ряду [b] до той же функціи; то $h-k=\delta_i$. Знакъ f^{m-i-1} съ знакомъ f^{m-i} въ ряду [a] могутъ составлять, или повтореніе, или перемѣну; въ первомъ случаѣ число перемѣнъ до f^{m-i-1} будетъ h, то же, что и до f^{m-i}, а во второмъ случаѣ оно будетъ $h+1$. По той же причинѣ, число перемѣнъ въ ряду [b] до f^{m-i-1} будетъ или k или $k+1$. Слѣдовательно, δ_{i+1}, указатель f^{m-i-1} будетъ, или $h-k=\delta_i$, или $h-(k+1)=\delta_i-1$, или $h+1-k=\delta_i+1$, или наконецъ $(h+1)-(k+1)=\delta_i$.

§ **114.** **Когда послѣдній указатель δ_m есть 0, тогда предѣлы a и b не открываютъ ни одного корня въ уравненіи $f(x)=o$. Но если $\delta_m=1$,** то уравненіе $f(x)=o$ имѣетъ одинъ дѣйствительный корень между a и b, и не болѣе одного. Въ этомъ случаѣ указатель δ_{m-1} можетъ быть, или 0, или 1, или 2; ежели онъ $=1$, то $f'(x)$ имѣетъ также одинъ дѣйствительный корень между a и b. Этотъ корень не уничтожаетъ $f(x)$; потому что тогда ур. $f(x)=o$ имѣло бы два равныхъ корня между предѣлами a и b, и указатель δ_m былъ бы по крайней мѣрѣ 2; но по положенію онъ $=1$. И такъ корень, назначаемый предѣлами a и b для $f(x)$

не равенъ корню, назначаемому тѣми же предѣлами для $f'(x)$. А потому, стѣсняя предѣлы a и b такъ, чтобы между ими всегда заключался корень $f(x)=o$, мы необходимо дойдемъ до такихъ a' и b', которые не будутъ заключать корня $f'(x)$, т. е. для которыхъ указатель δ_{m-1} будетъ $=0$.

Когда $\delta_m=1$, а $\delta_{m-1}=2$, тогда уравненіе $f'(x)=o$ имѣетъ, или два дѣйствительныхъ корня между a и b, или два мнимыхъ корня; если корни дѣйствительные, то ни одинъ изъ нихъ не можетъ удовлетворять ур. $f(x)=o$; потому, что тогда это уравненіе имѣло бы между предѣлами a и b по крайней мѣрѣ два равныхъ корня, а потому δ_m не былъ бы $=1$.

И такъ если $\delta_m=1$, а $\delta_{m-1}=1$ или 2; то, стѣсняя предѣлы a и b, можно всегда дойти до такихъ двухъ предѣловъ a' и b', что для нихъ $\delta_{m-1}=0$.

§ **115.** **Положимъ** теперь, что δ_m есть 2 или >2; въ такомъ только случаѣ нужно правило для распознанія дѣйствительныхъ отъ мнимыхъ корней.

Составивши рядъ указателей (11), станемъ ихъ пробѣгать справа налѣво, и остановимся на первомъ указателѣ$=1$. Пусть этотъ указатель будетъ δ_{m-n}; онъ показываетъ, что $f^n(x)$ имѣетъ одинъ дѣйствительный корень между a и b. Указатель δ_{m-n+1}, стоящій по правую сторону δ_{m-n}, по сказанному выше, будутъ или δ_{m-n}, или $\delta_{m-n}-1$, или $\delta_{m-n}+1$, т. е. или 1, или 0, или 2. Онъ не можетъ быть$=1$; потому что, тогда δ_{m-n} не былъ бы первый указатель, равный единицѣ. Нельзя также положить, что $\delta_{m-n+1}=o$; потому что тогда указатель δ_{m-n+1}, переходя отъ 0 до $\delta_m=$ или >2, и, измѣняясь постепенно единицею, необходимо сдѣлается$=1$; слѣдовательно между δ_{m-n+1} и δ_m будетъ указатель$=1$. И такъ δ_{m-n+1} необходимо есть 2, т. е., (идя справа влѣво) *указатель, предшествующій первому указателю, равному единицѣ, есть* 2. Указатель δ_{m-n-1} можетъ быть или 0, или 1, или 2. Если онъ не есть 0; то, по предъид. §, стѣсняя предѣлы a и b, мы всегда можемъ его сдѣлать$=0$. Пусть предѣлы a' и b' заключаются въ предѣлахъ a и b, и положимъ, что для нихъ указатели δ_{m-n-1} и δ_{m-n} суть 0 и 1. Промежутокъ предѣловъ a и b раздѣлится на три слѣдующіе: отъ a до a', отъ a' до b' и отъ b' до b. Такъ какъ корень $f^n(x)$, назначаемый указателемъ δ_{m-n}, находится между предѣлами a' и b'; то промежутки (a, a') и (b', b) не открываютъ ни одного корня въ $f^n(x)$, а потому указатель δ_{m-n} для этихъ промежутковъ будетъ 0; слѣдовательно первый указатель, равный единицѣ, въ промежуткахъ (a, a') и (b', b), будетъ правѣе, нежели δ_{m-n}.

Для промежутка (a', b'), первый указатель справа равный 1, можетъ или опять стоять подъ f^n, или быть ближе къ f; въ первомъ случаѣ онъ будетъ находиться между указателями 0 и 2; такъ, что указатели, стоящіе подъ функціями

$$f^{n+1} \quad f^n \quad f^{n-1}$$

будутъ

$$0 \quad 1 \quad 2.$$

Съ промежутками (a, a'), (a', b') и (b', b) поступаемъ такъ же, какъ и съ (a, b), и т. д. Ясно, что мы наконецъ будемъ имѣть только два рода промежутковъ: 1) тѣ, для которыхъ первый указатель, справа равный единицѣ, стоитъ подъ f, и 2) тѣ, для которыхъ первый указатель справа, равный единицѣ стоитъ между 0 и 2. Перваго рода промежутки отдѣляютъ корни уравненія $f(x)=o$, а вторые назначаютъ для этого уравненія болѣе одного корня, и потому требуютъ правила для распознанія дѣйствительныхъ корней отъ мнимыхъ.

Пусть промежутокъ предѣловъ a и b такого рода, что въ ряду указателей, ему соотвѣтствующемъ, первый указатель справа, равный единицѣ, стоитъ подъ f^n между указателями 0 и 2; такъ, что тремъ функціямъ

$$f^{n+1} \quad f^n \quad f^{n-1}$$

соотвѣтствуютъ указатели

$$0 \quad 1 \quad 2,$$

т. е. предѣлы a и b не открываютъ ни одного корня въ $f^{n+1}(x)$, заключаютъ одинъ дѣйствительный корень $f^n(x)$, и назначаютъ два корня для $f^{n-1}(x)$, которые могутъ быть или дѣйствительные или мнимые. Ясно, что знаки трехъ разсматриваемыхъ нами функцій въ рядахъ $[a]$ и $[b]$ будутъ

		f^{n+1}	f^n	f^{n-1}		f^{n+1}	f^n	f^{n-1}
$[a]$	или	$+$	$-$	$+$	или	$-$	$+$	$-$
$[b]$		$+$	$+$	$+$		$-$	$-$	$-$.

Слѣдовательно къ тремъ функціямъ $f^{n+1}(x)\, f^n(x)\, f^{n-1}(x)$ и къ предѣламъ a и b можно приложить правило § 111, по которому узнаемъ будутъ ли два корня уравн. $f^{n-1}(x)=o$ дѣйствительные или мнимые. Если они дѣйствительные; то они будутъ отдѣлены, и промежутокъ предѣловъ

a и b раздѣлится на два другихъ, для которыхъ первый указатель, справа равный единицѣ, будетъ правѣе нежели f^n.

Но если корни $f^{n-1}(x)$, въ промежуткѣ предѣловъ a и b, мнимые; то каждая изъ функцій

$$f^{n-2}(x),\ f^{n-3}(x), \ldots\ f'(x),\ f(x),$$

въ томъ же промежуткѣ, будетъ имѣть также два мнимыхъ корня. Въ самомъ дѣлѣ: корни $f^{n-1}(x)$ отъ того мнимые, что между a и b существуетъ такое количество γ, которое уничтожаетъ $f^n(x)$, и даетъ для $f^{n+1}(x)$ и $f^{n-1}(x)$ результаты съ одинакими знаками; составивши, по § 107, ряды $[<\gamma]$ и $[>\gamma]$, въ первомъ ряду будетъ двумя перемѣнами больше противъ втораго; слѣдовательно рядъ $[x]$, при переходѣ x чрезъ величины безконечно-близкія къ γ, теряетъ двѣ перемѣны; то же самое для рядовъ, происходящихъ отъ послѣдовательнаго опущенія знаковъ, соотвѣтствующихъ $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x), \ldots f^{n-2}(x)$. А потому всѣ эти функціи для безконечно-малаго промежутка $\gamma-h$ и $\gamma+h$, и для предѣловъ a и b, имѣютъ по два мнимыхъ корня. И такъ каждый изъ указателей функцій

$$f^{n-1}(x),\ f^{n-2}(x), \ldots\ f''(x),\ f'(x),\ f(x)$$

заключаетъ въ себѣ число 2, указатель мнимыхъ корней въ уравненіяхъ:

$$f^{n-1}(x)=o,\ f^{n-2}(x)=o, \ldots\ f''(x)=o,\ f'(x)=o,\ f(x)=o.$$

Отнявши 2 отъ каждаго изъ указателей, стоящихъ по правую сторону f^n, остатки будутъ показывать (не зависимо отъ 2-хъ мнимыхъ корней), сколько можно еще искать корней для соотвѣтствующихъ имъ функцій. Показатель f^{n-1} будетъ тогда уже 0, а потому первый указатель справа, равный единицѣ, будетъ ближе къ f, нежели прежде.

Изъ сказаннаго въ этомъ § и въ предъидущемъ заключаемъ, что во всякомъ случаѣ, будутъ ли корни, назначаемые предѣлами a и b для $f^{n-1}(x)$, дѣйствительные или мнимые, можно рядъ указателей промежутка (a, b) замѣнить другими рядами указателей, въ которыхъ первый указатель справа, равный единицѣ, будетъ ближе къ f. Прилагая это къ каждому изъ рядовъ указателей, вновь получаемыхъ, мы необходимо дойдемъ до такихъ рядовъ, въ которыхъ послѣдній указатель δ_m будетъ или 0 или 1. И потому корни даннаго уравненія $f(x)$ будутъ совершенно отдѣлены.

§ 116. Приложимъ это правило вопервыхъ къ уравненію

$$x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101=o.$$

Въ § 108 прим. 1-й мы видѣли, что предѣлы 1 и 10 открываютъ 3 корня, изъ которыхъ одинъ необходимо дѣйствительный. Чтобы судить о свойствѣ остальныхъ двухъ корней, беремъ ряды:

	f^{V},	f^{IV},	f''',	f'',	f',	f
[1]	+	+	—	+	+	—
	120	48	156	30	65	78
	0	0	1	2	2	3
[10]	+	+	+	+	+	+
	120	1128	5136	15150	32654	54939,

для которыхъ рядъ указателей есть 0 0 1 2 2 3, и подъ каждымъ знакомъ стоитъ результатъ, ему соотвѣтствующій.

Первый указатель съ правой руки равный единицѣ, соотвѣтствуетъ $f'''(x)$; онъ стоитъ между указателями 0 и 2, а потому къ функціямъ $f^{IV}(x)$, $f'''(x)$ и $f''(x)$ должно приложить правило § 111. Взявши частныя $\frac{30}{156}$ и $\frac{15150}{5136}$, находимъ, что ихъ сумма меньше разности предѣловъ $10-1=9$; слѣд. предѣлы 1 и 10 недовольно близки, чтобы открыть свойство корней. Прежде, нежели станемъ сближать предѣлы, посмотримъ, не имѣютъ ли функціи $f'''(x)$ и $f''(x)$ общаго дѣлителя? Этотъ дѣлитель не существуетъ, а потому вставляемъ въ рядъ функцій $f^{V}(x)$..... $f(x)$ вмѣсто x число среднее между 1 и 10; взявши для того 2, получаемъ рядъ знаковъ

	$f^{V}(x)$,	$f^{IV}(x)$,	$f'''(x)$,	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$
[2]	+	+	—	—	+	—
	120	168	48	82	30	21,

въ которомъ столько же перемѣнъ, сколько и въ ряду [1], а потому ур. $f(x)=o$ не имѣетъ ни одного корня между [1] и [2]; и такъ можно искать 3 корня въ промежуткѣ (2, 10). Составивши рядъ указателей для этого промежутка, имѣемъ

	$f^{V}(x)$,	$f^{IV}(x)$,	$f'''(x)$,	$f''(x)$,	$f'(x)$	$f(x)$
[2]	+	+	—	—	+	—
	0	0	1	1	2	3
[10]	+	+	+	+	+	+,

гдѣ первый указатель, справа равный единицѣ, находится уже подъ $f''(x)$ а не подъ $f'''(x)$. Указатель послѣдней функціи есть 1; чтобы его сдѣлать нулемъ, мы стѣсняемъ предѣлы 2 и 10; для того вставляемъ 3 вмѣсто x, и получаемъ рядъ знаковъ

	$f^{v}(x)$,	$f^{iv}(x)$,	$f'''(x)$,	$f''(x)$,	$f'(x)$	$f(x)$
[3]	+	+	+	—	—	—
	120	288	180	26	43	32,

въ которомъ двумя перемѣнами меньше противъ ряда [2], а одной перемѣной больше противъ ряда [10]. Слѣд. изъ трехъ корней, назначаемыхъ предѣлами a и b, одинъ корень дѣйствительный и заключается между 3 и 10; прочіе же два должно искать 2 и 3. Составивши для этихъ предѣловъ рядъ указателей, находимъ

	$f^{v}(x)$,	$f^{iv}(x)$,	$f'''(x)$,	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$
[2]	+	+	—	—	+	—
	120	168	48	82	30	21
	0	0	1	0	1	2
[3]	+	+	+	—	—	—
	120	188	180	26	43	32.

Откуда видимъ, что первый указатель, справа равный единицѣ, соотвѣтствуетъ $f'(x)$ и стоитъ между 0 и 2, а потому къ функціямъ $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$ должно приложить правило § 111. Взявши частныя

$$-\frac{f(2)}{f'(2)}=\frac{21}{30},\quad \frac{f(3)}{f'(3)}=\frac{32}{43},$$

находимъ, что сумма ихъ $\frac{21}{30}+\frac{32}{43}$ больше $3-2=1$; слѣд. корни ур. $f(x)=o$, назначаемые предѣлами 2 и 3, мнимые.

Такимъ образомъ корни уравненія, предложеннаго въ 1-мъ примѣрѣ, совершенно отдѣлены.

1) Въ промежуткѣ [—10] и [—1] заключается одинъ дѣйствительный корень.

2) Другой находится между предѣлами —1 и 0.

3) Предѣлы 0 и 1, 1 и 2 не открываютъ въ ур. ни одного корня.

4) Предѣлы 2 и 3 открываютъ два мнимыхъ корня.

5) Наконецъ пятый корень дѣйствительный заключается между 3 и 10.

§ 117. Откроемъ свойство 2-хъ корней, назначаемыхъ предѣлами 1 и 10 для уравненія

$$x^4-4x^3-3x+23=o \text{ (прим. 2-й.)}$$

Рядъ указателей для этихъ предѣловъ будетъ

	$f^{\text{IV}}(x)$,	$f'''(x)$,	$f''(x)$,	$f'(x)$	$f(x)$
[>1]	+	+	—	—	+
	0	0	1	1	2
[10]	+	+	+	+	+;

первый указатель съ правой руки, равный единицѣ, стоитъ между указателями 1 и 2, соотвѣтствующими функціямъ $f''(x)$, $f(x)$. Чтобы сдѣлать нулемъ указатель подъ $f''(x)$, вставимъ въ рядъ функцій вмѣсто x число среднее между 1 и 10; взявши для того 2, имѣемъ рядъ

	$f^{\text{IV}}(x)$,	$f'''(x)$,	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$
[2]	+	+		—	+
	24	24	0	19	1,

въ которомъ $f''(2)=0$, а потому составляемъ, по § 107, ряды [<2] и [>2]. Ряды [<2] и [>1] имѣютъ одинакое число перемѣнъ; слѣд. искомые два корня должно искать въ промежуткѣ предѣловъ (>2, 10). Ряды, соотвѣтствующіе этимъ предѣламъ, суть

	$f^{\text{IV}}(x)$,	$f'''(x)$,	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$
[>2]	+	+	+	—	+
	24	24	0	19	1
	0	0	0	1	2
[10]	+	+	+	+	+
	24	216	960	2797	5993;

рядъ указателей

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2$$

показываетъ, что къ функціямъ $f''(x)$, $f'(x)$ и $f(x)$ должно приложить правило § 111. Сумма $-\frac{f(2)}{f'(2)} + \frac{f(10)}{f'(10)} = \frac{1}{19} + \frac{5993}{2797}$ меньше разности 10—2, а потому предѣлы 2 и 10 еще не довольно близки. Такъ какъ $f(x)$ и $f'(x)$ не имѣютъ общаго дѣлителя; то вставляемъ въ $f(x)$ число среднее между 2 и 10, а именно: 3; результатъ $f(3)=-13$, отрицательный, между тѣмъ какъ $f(2)$ и $f(10)$ — положительные, а потому ур. $f(x)=o$ имѣетъ два дѣйствительныхъ корня между 1 и 10: одинъ между 2 и 3, другой между 3 и 10. Слѣд. ур. $x^4-4x^3-3x+23=o$ имѣемъ два корня мнимыхъ и два корня дѣйствительныхъ.

§ **118**. И такъ способъ *Фурье* для отдѣленія дѣйствительныхъ корней состоитъ изъ слѣдующаго правила:

По данному уравненію $f(x)=o$ составляемъ извѣстнымъ образомъ $m-1$ производныхъ функцій отъ $f(x)$; отъ того мы будемъ имѣть рядъ функцій

$$(1)\qquad f^m(x),\ f^{m-1}(x),\ f^{m-2}(x),\ldots f''(x),\ f'(x),\ f(x),$$

куда вмѣсто x вставляемъ десятичныя числа

$$0, \begin{matrix} -1,-10,-100,-1000,\ldots \\ +1,+10,+100,+1000,\ldots, \end{matrix}$$

начиная съ нуля до тѣхъ поръ, какъ дойдемъ до двухъ чиселъ $-l'$ и l, изъ которыхъ первое даетъ въ ряду знаковъ результатовъ только перемѣны, а второе только повторенія. Такимъ образомъ мы узнаемъ десятичные предѣлы дѣйствительныхъ корней, или число цыфръ, выражающихъ цѣлыя части этихъ корней.

Сравнивая ряды знаковъ $[a]$ и $[b]$, соотвѣтствующіе каждымъ двумъ послѣдовательнымъ десятичнымъ предѣламъ a и b, считаемъ въ каждомъ число перемѣнъ, начиная съ f^m до f, и, по правилу § 113, составляемъ рядъ указателей

$$0,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ldots,\delta_m.$$

Когда послѣдній указатель δ_m равенъ *нулю*, тогда предѣлы a и b не открываютъ ни одного корня въ уравненіи $f(x)=o$. Если $\delta_m=1$, то между a и b заключается одинъ дѣйствительный корень. Остальные корни даннаго уравненія открываются предѣлами, для которыхъ δ_m есть 2 или >2.

Когда a или b уничтожаютъ одну или нѣсколько изъ функцій (1); тогда пользуемся правиломъ *двойнаго знака*, (см. § 117).

Взявши предѣлы a и b, для которыхъ δ_m есть 2 или >2, пробѣгаемъ рядъ указателей справа налѣво, и останавливаемся на первомъ указателѣ, равнымъ единицѣ. По правую его сторону будетъ стоять 2, а по лѣвую или 0, или 1, или 2; въ послѣднихъ двухъ случаяхъ должно стѣснять предѣлы a и b, вставляя числа среднія между ними; такимъ образомъ мы достигнемъ новыхъ предѣловъ, для которыхъ δ_m будетъ 0 или 1, либо первый указатель справа, равный единицѣ, будетъ стоять между 0 и 2.

Ежели первый указатель справа, равный единицѣ, стоитъ между 0 и 2; то должно пользоваться правиломъ для распознанія мнимыхъ корней.

Пусть тремъ функціямъ

$$f^{n+1}(x),\ f^n(x),\ f^{n-1}(x)$$

соотвѣтствуютъ указатели

$$0 \qquad 1 \qquad 2;$$

то, взявши результаты

$$f^{n+1}(a),\ f^{n}(a),\ f^{n-1}(a),$$
$$f^{n+1}(b),\ f^{n}(b),\ f^{n-1}(b),$$

составляемъ частныя

$$-\frac{f^{n-1}(a)}{f^{n}(a)},\ \frac{f^{n-1}(b)}{f^{n}(b)},$$

и сравниваемъ ихъ съ разностію $b-a$, при чемъ пользуемся правиломъ § 111, по которому узнаемъ, будутъ ли корни уравненія $f^{n-1}(x)$, назначаемые предѣлами a и b, или дѣйствительные неравные, или дѣйствительные равные, или мнимые.

Когда корни дѣйствительные; тогда они будутъ отдѣлены. Послѣ того переходимъ къ другимъ предѣламъ, для которыхъ δ_m не есть 0 или 1.

Но если два корня $f^{n-1}(x)$ мнимые, то въ ряду указателей, начиная съ δ_{m-n+1} до δ_m, отнимаемъ отъ каждаго указателя по двѣ единицы; чрезъ то будемъ имѣть для тѣхъ же предѣловъ новый рядъ указателей, въ которомъ первый указатель справа, равный единицѣ, будетъ ближе къ δ_m.

Наконецъ если корни ур. $f^{n-1}(x)=o$ равные; то по извѣстному способу смотримъ, будетъ ли этотъ кратный корень удовлетворять всѣмъ уравненіямъ

$$f^{n-2}(x)=o,\ f^{n-3}(x)=o, \ldots.\ f''(x)=o,\ f'(x)=o,\ f(x)=o.$$

Когда это случится, тогда $f(x)$ имѣетъ равные корни между a и b. Въ противномъ случаѣ, обстоятельства будутъ тѣ же, что и для мнимыхъ корней ур. $f^{n-1}(x)=o$: тогда должно отъ каждаго изъ указателей

$$\delta_{m-n+1},\ \delta_{m-n+2}, \ldots . \delta_{m-1},\ \delta_m$$

отнять по двѣ единицѣ, и къ новому ряду указателей, если нужно, прилагать предъидущее правило.

Эти дѣйствія всегда насъ приведутъ къ предѣламъ, для которыхъ δ_m будетъ или 0 или 1. А потому всѣ дѣйствительные корни даннаго уравненія будутъ совершенно отдѣлены.

Слѣдующіе примѣры пояснятъ это общеѐ правило.

Примѣръ I.

Возьмемъ уравненіе

$$x^5+x^4+x^3-2x^2+2x-1=o;$$

составивши функціи

$$f\,(x)=x^5+x^4+x^3-2x^2+2x-1$$
$$f'(x)=5x^4+4x^3+3x^2-2x+2$$
$$f''(x)=20x^3+12x^2+3x-2$$
$$f'''(x)=60x^2+24x+3$$
$$f^{\text{IV}}(x)=120x+24$$
$$f^{\text{V}}(x)=120,$$

вставляемъ въ нихъ вмѣсто x числа 0, $\begin{Bmatrix}-1,-10,\ldots\\+1,\ +10,\ldots\end{Bmatrix}$; отъ того получаемъ таблицу знаковъ

	f^{V}	f^{IV}	f'''	f''	f'	f
[—1]	+	—	+	—	+	—
		96	42	18	10	2
	0	1	2	2	2	2
[0]	+	+	+	—	+	—
		24	6	4	2	1
	0	0	0	1	2	3
[1]	+	+	+	+	+	+,
		144	90	36	10	2

въ которой результаты написаны подъ знаками, имъ соотвѣтствующими, и для каждыхъ двухъ рядовъ составленъ по § 113 рядъ указателей. Эта таблица показываетъ:

1) Что всѣ корни должно искать въ промежуткѣ отъ —1 до +1; потому что въ ряду [—1] только перемѣны, а въ ряду [+1] только повторенія.

2) Предѣлы —1 и 0 открываютъ два корня; потому что для нихъ послѣдній указатель есть 2. Пробѣгая рядъ указателей справа на лѣво, находимъ, что первый указатель 1 стоитъ подъ f^{V}, а потому къ функціямъ f^{V} f^{IV} и f''' должно прилагать правило § 111. Взяв-

ти частныя $\frac{-f'''(-1)}{f^{IV}(-1)}=\frac{42}{96}$ и $\frac{f'''(0)}{f^{IV}(0)}=\frac{6}{24}$, сравниваемъ ихъ съ разностью $0-(-1)=+1$. Такъ какъ

$$\frac{42}{96}+\frac{6}{24}<1,$$

то предѣлы -1 и 0 не довольно близки, чтобы съ перваго раза узнать, будутъ ли искомые два корня дѣйствительные или мнимые, а потому должно стѣснять предѣлы. Но прежде, нежели станемъ вставлять вмѣсто x число среднее между -1 и 0, посмотримъ, не имѣетъ ли $f'''(x)=o$ равныхъ корней между этими предѣлами. Такъ какъ

$$f'''(x)=60x^2+24x+6 \text{ и } f''=120x+24$$

не имѣютъ общимъ дѣлителемъ функцію x; то $f'''(x)$ не можетъ имѣть равныхъ корней.

Вставивши въ рядъ функцій число среднее между -1 и 0, а именно $-0,5$, имѣемъ таблицу

[—1]	+	—	+	—	+	—
[—0,5]	+	—	+	—	+	—
		56	9	$\frac{52}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{81}{32}$
	0	1	2	2	2	2
[0]	+	+	+	+	+	+.

Промежутокъ предѣловъ -1 и $-0,5$ не открываетъ ни одного корня; потому что ряды $[-1]$ и $[-0,5]$ имѣютъ одинакое число перемѣнъ. Для другаго промежутка предѣловъ рядъ указателей есть 012222, и первый указатель справа, равный единицѣ, стоитъ между 0 и 2, а потому прилагаемъ сюда правило § 111. Такъ какъ

$$\frac{f(-0,5)}{-f'(-0,5)}+\frac{f(0)}{f'(0)}=\frac{9}{36}+\frac{6}{24}=\frac{1}{2}=0,5;$$

то корни, назначаемые предѣлами $-\frac{1}{2}$ и 0, мнимые.

Остается теперь разсмотрѣть промежутокъ предѣловъ 0 и $+1$. Въ ряду указателей, ему соотвѣтствующемъ, первый указатель 1 справа стоитъ между 0 и 2, а потому къ функціямъ $f'''(x)$, $f''(x)$, $f'(x)$ прилагаемъ правило § 111.

Сумма частныхъ $\frac{-f'(0)}{f''(0)}=\frac{3}{4}$ и $\frac{f'(1)}{f''(1)}=\frac{10}{36}$

меньше разности $1-0=1$; слѣдовательно предѣлы не довольно близки, чтобы съ перваго раза открыть свойство корней. Функціи

$$f'(x)=5x^4+4x^3+3x^2-4x+2 \text{ и } f\,(x)=20x^3+12x^2+6x+4$$

не имѣютъ общаго дѣлителя, а потому мы можемъ приступить къ сближенію предѣловъ 0 и +1.

Вставивши 0,5 вмѣсто x, имѣемъ слѣдующую таблицу

	f^{V}	f^{IV}	f'''	f''	f'	f
[0]	+	+	+	−	+	−
		24	6	4	2	1
	0	0	0	1	2	2
[0,5]	+	+	+	+	+	−
		84	33	$\frac{9}{2}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{9}{32}$
[1]	+	+	+	+	+	+,

которая показываетъ, что одинъ дѣйствительный корень заключается между предѣлами 0,5 и 1. Другіе два предѣла назначаютъ два корня, и для нихъ первый указатель 1, справа, стоитъ между 0 и 2 подъ f''. Такъ какъ

$$\frac{f'(0)}{f''(0)}+\frac{f'(0,5)}{f''(0,5)}=\tfrac{2}{4}+\tfrac{25}{16}:\tfrac{9}{2}>0,5;$$

то эти корни мнимые. Отнявши 2 отъ каждаго указателя, начиная съ f' до f, имѣемъ новый рядъ указателей 000100. И такъ данное уравненіе имѣетъ одинъ только дѣйствительный корень, который заключается между 0,5 и 1, а остальные четыре корня мнимые.

Примѣръ II.

Отдѣлимъ корни уравненія

$$x^8-12x^7+58x^6-154x^5+244x^4-218x^3+75x^2-x-1=0,$$

найденнаго въ § 59. Для него имѣемъ рядъ функцій

$$f(x)=x^8-12x^7+58x^6-154x^5+244x^4-218x^3+75x^2-x-1$$
$$f'(x)=8x^7-84x^6+348x^5-770x^4+976x^3-654x^2+150x-1$$
$$f''(x)=2(28x^6-252x^5+870x^4-1540x^3+1464x^2-654x+75)$$
$$f'''(x)=12(28x^5-210x^4+580x^3-770x^2+488x-109)$$
$$f^{\text{IV}}(x)=48(35x^4-210x^3+435x^2-385x+122)$$
$$f^{\text{V}}(x)=1680(4x^3-18x^2+25x-11)$$
$$f^{\text{VI}}(x)=1680(12x^2-36x+25)$$
$$f^{\text{VII}}(x)=20160(2x-3)$$
$$f^{\text{VIII}}(x)=20160.2,$$

по которымъ составляемъ таблицу знаковъ

	f^{VIII}	f^{VII}	f^{VI}	f^{V}	f^{IV}	f'''	f''	f'	f
[—1]	+	—	+	—	+	—	+	—	+
	0	0	0	0	0	0	0	0	1
[0]	+	—	+	—	+	—	+	—	—
	0	0	0	0	1	1	1	2	2
[+1]	+	—	+	—	—	+	—	—	—
	0	1	2	3	3	4	5	5	5
[+10]	+	+	+	+	+	+	+	+	+.

Предѣлы —1 и 0 заключаютъ одинъ дѣйствительный корень. Для предѣловъ 0 и +1 рядъ указателей есть 0 0 0 0 1 1 1 2 2; въ немъ крайній указатель 2 показываетъ на 2 корня даннаго уравненія, которыхъ свойство должно открыть; первый указатель 1, справа, не стоитъ между 0 и 2, а потому нельзя еще прилагать сюда правило § 111: мы должны сблизить предѣлы 0 и 1. Положивъ $x=0,5$, функція $f(x)$ обратится въ положительное количество $\frac{5}{2}$; слѣдовательно данное уравненіе имѣетъ два дѣйствительныхъ корня между 0 и 1: одинъ изъ нихъ заключается между 0 и 0,5, а другой между 0,5 и 1.

Остальные 5 корней даннаго уравненія назначаются предѣлами +1 и +10, для которыхъ рядъ указателей есть 0 1 2 3 3 4 5 5 5; здѣсь первый указатель справа, равный единицѣ, стоитъ между 0 и 2 подъ f^{VII}, а потому къ функціямъ $f^{VIII}(x)$, $f^{VII}(x)$ $f^{VI}(x)$ должно приложить правило § 111. Но замѣтимъ, что $f^{VII}(\frac{3}{2})=0$ и $f^{VI}(\frac{3}{2})$ отрицательное количество, слѣдовательно два корня $f^{VI}(x)$, назначаемые предѣлами 0 и 10, дѣйствительные.

Вставивши $\frac{3}{2}$ вмѣсто x во всѣ прочія функціи, имѣемъ рядъ знаковъ

$[\frac{3}{2}]$ + 0 — — — — + — —,

который, по § 107, должно замѣнить рядами $[<\frac{3}{2}]$ и $[>\frac{3}{2}]$. Ряды

[+1]	+	—	+	—	—	+	—	—	—
	0	0	1	2	2	3	3	2	2
$[<\frac{3}{2}]$	+	—	—	—	—	—	+	—	—

открываютъ въ данномъ уравненіи два корни; въ ряду указателей первый указатель, 1, справа, стоитъ между 0 и 2; прилагая сюда правило § 111, находимъ

$$-\frac{f^{V}(1)}{f^{VI}(1)}+\frac{f^{V}(\frac{3}{2})}{f^{VI}(\frac{3}{2})}=\frac{240}{1440}+\frac{1300}{3600}>\frac{1}{2},$$

а потому два корня даннаго уравненія, назначаемые предѣлами 0 и $\frac{1}{2}$, мнимые. Ряды

$[>\frac{3}{2}]$	+	+	—	—	—	—	+	—	—
	0	0	1	1	1	1	2	3	3
[10]	+	+	+	+	+	+	+	+	+

даютъ рядъ указателей, въ которомъ первый указатель справа не стоитъ между 0 и 2, а потому промежутокъ предѣловъ $\frac{3}{2}$ и 10 должно подраздѣлить. Положивъ $x=2$, имѣемъ рядъ знаковъ

[2] + + + — — — — — —,

въ которомъ одной перемѣной больше противъ ряда [10]; слѣдовательно данное уравненіе имѣетъ одинъ дѣйствительный корень между 2 и 10. Остальные 2 корня должно искать между предѣлами $\frac{3}{2}$ и 2, для которыхъ имѣемъ ряды

$[>\frac{3}{2}]$	+	+	—	—	—	—	+	—	—
	0	0	1	0	0	0	1	2	2
[2]	+	+	+	—	—	—	—	—	—.

Здѣсь первый указатель справа, равный единицѣ, стоитъ между 0 и 2 подъ f'', а потому къ функціямъ $f'''(x)$, $f''(x)$, $f'(x)$ должно приложить правило § 111. Такъ какъ

$$-\frac{f'(\frac{3}{2})}{f''(\frac{3}{2})}+\frac{f'(2)}{f''(2)}=\frac{466}{2019}+\frac{45}{132}>\frac{1}{2};$$

то корни даннаго уравненія, назначаемые предѣлами $\frac{3}{2}$ и 2, мнимые.

И такъ данное уравненіе имѣетъ 4 дѣйствительныхъ корня, которыхъ частные предѣлы послѣдовательно суть:

$$(-1,0),\ (0,\tfrac{1}{2}),\ (\tfrac{1}{2},1),\ (2,10);$$

остальные 4 корня мнимые.

Примѣръ III.

Возьмемъ еще уравненіе

$$x^{6}-12x^{5}+60x^{4}+123x^{2}+4567x-89012=0.$$

Вставляя въ функціи

$$f(x)=x^6-12x^5+60x^4+123x^2+4567x-89012$$
$$f'(x)=6x^5-60x^4+240x^3+246x+4567$$
$$f''(x)=30x^4-240x^3+720x^2+246$$
$$f'''(x)=120x^3-720x^2+1440x$$
$$f^{IV}(x)=360x^2-1440x+1440$$
$$f^{V}(x)=720x-1440$$
$$f^{VI}(x)=720$$

вмѣсто x числа 0, $\left\{\begin{matrix}-1,-10,\dots\\+1,+10,\dots\end{matrix}\right\}$, результаты даютъ слѣдующую таблицу знаковъ

	f^{VI}	f^{V}	f^{IV}	f'''	f''	f'	f
[—10]	+	—	+	—	+	—	+
[—1]	+	—	+	—	+	—	—
[0]	+	—	+	— 0 +	+	+	—
[1]	+	— 720	+ 360	+	+	+	—
	0	1	2	2	2	2	3
[10]	+	+ 5760	+ 23040	+	+	+	+

Предѣлы —10 и —1 заключаютъ одинъ дѣйствительный корень даннаго уравненія. Безконечномалый промежутокъ <0 и >0 открываетъ въ данномъ уравненіи два мнимыхъ корня. Ряды [—1] и [<0], [>0] и [1] не открываютъ ни одного корня. Наконецъ для предѣловъ [1] и [10] имѣемъ рядъ указателей

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 3,$$

въ которомъ первый указатель 1, справа, стоитъ между 0 и 2 подъ f^{V}, а потому къ функціямъ $f^{VI}(x)$, $f^{V}(x)$, $f^{IV}(x)$ должно приложить правило § 111. Такъ какъ

$$-\frac{f^{IV}(1)}{f^{V}(1)}+\frac{f^{IV}(10)}{f^{V}(10)}=\frac{360}{720}+\frac{23040}{5760}<9;$$

то предѣлы 1 и 10 не довольно близки, чтобы съ перваго раза открыть свойство корней. Прежде, нежели начнемъ сближеніе предѣловъ, поищемъ общаго большаго дѣлителя функцій

$$f^{IV}(x)=360x^2-1440x+1440 \text{ и } f^{V}(x)=720x-1440.$$

Этотъ дѣлитель существуетъ, онъ $=x-2$ и имѣетъ корнемъ 2, число заключающееся между предѣлами 1 и 10. Такъ какъ функціи $f'''(x), f''(x), f'(x), f(x)$ не дѣлятся на $x-2$; то, по § 111, заключаемъ, что два изъ корней даннаго уравненія, назначаемыхъ предѣлами 1 и 10, мнимые. А потому отъ пяти крайнихъ указателей (справа) отнимаемъ по 2; новый рядъ указателей 0 1 0 0 0 0 1 показываетъ, что данное уравненіе имѣетъ одинъ только дѣйствительный корень между 1 и 10. И такъ отдѣленіе корней даннаго уравненія кончено: данное уравненіе имѣетъ только два дѣйствительныхъ корня, одинъ заключается между —10 и 1, а другой между 1 и 10.

§ **119**. Единственный упрекъ, который можно сдѣлать способу *Фурье* отдѣленія корней, состоитъ въ томъ, что когда два предѣла a и b открываютъ въ $f(x)$ два корня, и не довольно близки чтобы съ разу открыть свойство этихъ корней; тогда сближеніе этихъ предѣловъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ бываетъ продолжительно. А потому *Фурье* не довольствовался правиломъ, даннымъ въ § 111; онъ далъ другіе признаки для распознаніе свойствъ корней. Вотъ одинъ изъ нихъ, который очень часто можно употреблять съ выгодою.

§ **120**. Пусть указатели трехъ функцій

$$f''(x), \quad f'(x), \quad f(x)$$

для двухъ предѣловъ a и b соотвѣтственно будутъ

0 1 2.

Функція $f'(x)$ имѣетъ одинъ дѣйствительный корень между этими предѣлами, который означимъ чрезъ γ. Въ § 111 мы видѣли, что когда γ не есть корень $f(x)$; то $f(x)$ при $x=\gamma$ имѣетъ одинакой или противный знакъ съ $f(a)$ и $f(b)$, смотря по тому, будутъ ли корни $f(x)$, назначаемые предѣлами a и b, мнимые или дѣйствительные. Тоже самое должно сказать и о функціи $\varphi(x)=f(x)+f'(x)$; потому что она при $x=\gamma$ обращается $f(\gamma)+f'(\gamma)=f(\gamma)$. Если $\varphi(x)$ не имѣетъ дѣйствительныхъ корней между a и b; то она постоянно будетъ сохранять свой знакъ для всякаго значенія x, начиная отъ a до b, а потому $\varphi(\gamma)=f(\gamma)$, въ такомъ случаѣ, будетъ имѣть одинакой знакъ съ $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$, и судя по знаку послѣднихъ двухъ результатовъ, мы узнаемъ, будутъ ли корни $f(x)$, назначаемые предѣлами a и b, дѣйствительные или мнимые.

И так должно смотрѣть, будутъ ли предѣлы a и b имѣть такое свойство, что для уравненія $\varphi(x)=o$, ряды знаковъ результатовъ

$$[a]' \qquad \varphi^m(a),\ \varphi^{m-1}(a), \ldots \varphi'''(a),\ \varphi''(a),\ \varphi'(a),\ \varphi(a)$$

$$[b]' \qquad \varphi^m(b),\ \varphi^{m-1}(b), \ldots \varphi'''(b),\ \varphi''(b),\ \varphi'(b),\ \varphi(b)$$

даютъ одинакое число перемѣнъ. Если это условіе не существуетъ, то можно всегда его достигнуть, замѣнивъ предѣлы a и b другими a' и b', болѣе близкими между собою, которые опять будутъ заключать γ. Зная, что ряды (a) и (b) имѣютъ одинакое число перемѣнъ, мы будемъ увѣрены, что знакъ $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ принадлежитъ и $\varphi(\gamma)=f(\gamma)$: если онъ противенъ знаку $f(a)$ и $f(b)$, то корни $f(x)$, назначаемые предѣлами a и b, дѣйствительные; если же $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ имѣютъ одинакой знакъ съ $f(a)$ и $f(b)$, то предѣлы a и b открываютъ въ $f(x)$ два мнимыхъ корня.

Результаты $[a]'$ и $[b]'$ получаются очень просто изъ результатовъ: $f^m(a), f^{m-1}(a), \ldots f(a)$, $f^m(b) f^{m-1}(b), \ldots f(b)$. Въ самомъ дѣлѣ: такъ какъ $\varphi(x)=f(x)+f'(b)$, то

$$\varphi'(x)=f'(x)+f''(x),\ \varphi''(x)=f''(x)+f'''(x), \ldots \varphi^m(x)=f^m(x),$$

а потому

$$\varphi(a)=f(a)+f'(a),\ \varphi'(a)=f'(a)+f''(a),\ \varphi''(a)=f''(a)+f'''(a), \ldots\ldots$$

$$\varphi(b)=f(b)+f'(b),\ \varphi'(b)=f'(b)+f''(b),\ \varphi''(b)=f''(b)+f'''(b), \ldots\ldots$$

И такъ, резсматривая только численные результаты, составленные изъ предѣловъ a и b, мы часто можемъ узнать, будутъ ли искомые корни дѣйствительные или мнимые.

Для уравненія

$$x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101=o$$

мы нашли въ § 116 ряды

	f^{v}	^{iv}	f'''	f''	f'	f
[2]	+ 120	+ 168	— 48	— 82	+ 30	— 21
	0	0	1	0	1	2
[3]	+ 120	+ 288	+ 180	— 26	— 43	— 32.

Изъ ряда [2] составится, соотвѣтствующій ему рядъ $[2]'$, придавая къ каждому члену ряда [2] членъ, стоящій непосредственно по лѣвую его сторону. Такимъ же образомъ составится рядъ $[3]'$, соотвѣтствующій ряду $[3]$. Эти ряды суть

	φ^{V}	φ^{IV}	φ'''	φ''	φ'	φ
$[2]'$	+	+	+	—	—	+
	0	0	0	1	0	1
$[3]'$	+	+	+	+	—	—.

Послѣдній указатель показываетъ, что $\varphi(x)$ имѣетъ одинъ дѣйствительный корень между 2 и 3, а потому эти предѣлы не довольно близки, чтобы открыть свойство корней $f(x)$, ими назначаемыхъ.

Вставивши въ рядъ функцій 2,2 вмѣсто x, мы будемъ имѣть таблицу

	f^{V}	f^{IV}	f'''	f''	f'	f
$[2]$	+ 120	+ 168	— 48	— 82	+ 30	— 21
$[2,2]$	+ 120	+ 192	— 12	— 88,08	+ 12,872	— 16,59248
	0	0	1	0	1	2
$[3]$	+ 120	+ 288	+ 180	— 26	— 45	— 32;

искомые два корня теперь назначаются предѣлами 2, 2 и 3. Составивши по изложенному правилу ряды $[2,2]'$ и $[3]'$, соотвѣтствующіе функціи $\varphi(x)=f(x)+f'(x)$, находимъ

	φ^{V}	φ^{IV}	φ'''	φ''	φ'	φ
$[2,2]'$	+	+	+	—	—	—
	0	0	0	1	0	0
$[3]'$	+	+	+	+	—	—.

Послѣдній указатель есть 0 и показываетъ, что функція $\varphi(x)=f(x)+f'(x)$ не имѣетъ дѣйствительныхъ корней между 2,2 и 3, а потому она сохраняетъ знакъ — для всѣхъ значеній x, начиная отъ 2,2 до 3, и при $x=\gamma$ (полагая, что γ есть корень $f'(x)$ между предѣлами 2,2 и 3), результатъ $\varphi(\gamma)=f(\gamma)$ будетъ также отрицательный; слѣдовательно корни $f(x)$, назначаемые предѣлами 2 и 3, мнимые.

Отдѣленіе корней и приближенное ихъ вычисленіе помощію непрерывныхъ дробей.

§ **121. Пусть будетъ дано уравненіе $f(x)=o$, не имѣющее равныхъ** корней. Положимъ, что по способу *Фурье* отдѣленія корней, мы нашли два положительныхъ десятичныхъ предѣла a и b (*), которые открываютъ въ данномъ уравненіи нѣсколько корней. Если разность этихъ предѣловъ больше единицы; то, вставляя въ рядъ функцій

$$f^m(x),\ f^{m-1}(x), \ldots\ f''(x),\ f'(x),\ f(x)$$

послѣдовательныя цѣлыя числа

$$a,\ a+1,\ a+2\ ,\ a+3, \ldots . b,$$

мы получимъ новые предѣлы, которые будутъ трехъ родовъ: 1) тѣ, которые не открываютъ въ уравненіи $f(x)=o$ ни одного корня, 2) тѣ, которые заключаютъ по одному дѣйствительному корню и 3) тѣ, которые открываютъ по нѣскольку корней. Разсмотримъ предѣлы послѣдняго рода.

Вмѣсто того, чтобы къ нимъ прилагать правило § 115, для распознанія свойства корней, ими назначаемыхъ, можно съ выгодою достигнуть той же цѣли слѣдующимъ образомъ:

Пусть A и $A+1$ будутъ предѣлы, назначающіе для $f(x)$ нѣсколько корней. Положимъ

$$x=A+\frac{1}{y};$$

если A и $A+1$ заключаютъ дѣйствительные корни, то y должно имѣть дѣйствительныя значенія, удовлетворяющія условію

$$A<A+\frac{1}{y}<A+1 \text{ или } 0<\frac{1}{y}<1,$$

а для того y должно быть >1; слѣдовательно уравненіе $f\left(A+\frac{1}{y}\right)=o$ должно имѣть дѣйствительные корни>1.

Это уравненіе, по сказанному въ § 67, будетъ

$$f\left(A+\frac{1}{y}\right)=f(A)+f'(A).\frac{1}{y}+\frac{1}{2}f''(A).\frac{1}{y^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{1.2\ldots m}f^m(A).\frac{1}{y^m};$$

помноживши его на y^m, имѣемъ

$$f(A).y^m+f'(A).y^{m-1}+\frac{1}{2}.f''(A).y^{m-2}+\ldots+\frac{1}{1.2..m}f^m(A)=F(y)=o.$$

(*) Мы будемъ здѣсь говорить только о положительныхъ корняхъ; потому что изъисканіе отрицательныхъ корней уравненія $f(x)=o$ приводится къ изъисканію положительныхъ корней преобразованнаго уравненія $f(-x)=o$.

31

И такъ уравненіе $F(y)=o$ должно имѣть дѣйствительные корни >1. Чтобы въ этомъ увѣриться, возьмемъ рядъ функцій

$$(1)\qquad F^{m}(y),\ F^{m-1}(y),\dots F''(y),\ F'(y),\ F(y),$$

и станемъ въ нихъ вставлять вмѣсто y послѣдовательныя числа

$$(2)\qquad 1,\ \ 2,\ \ 3,\dots$$

Положимъ, что отъ того всѣ дѣйствительные корни $F(y)$, которые >1, отдѣлились. Пусть число ихъ будетъ n, а y_2, $y_3,\dots y_n$ ихъ значенія, расположенныя въ возрастающемъ порядкѣ; то данное уравненіе $f(x)=o$ будетъ имѣть между предѣлами a и b также n дѣйствительныхъ корней:

$$(3)\qquad x_1=A+\frac{1}{y_1},\ x_2=A+\frac{1}{y_2},\dots x_n=A+\frac{1}{y_n}.$$

Взявши вмѣсто y_1, $y_2,\dots y_n$ ихъ низшіе предѣлы, которые означимъ чрезъ B_1, $B_2,\dots B_n$, выраженія

$$A+\frac{1}{B_1},\ A+\frac{1}{B_2},\dots A+\frac{1}{B_n}$$

соотвѣтственно будутъ больше корней (3). А потому: x_1 будетъ заключаться между A и $A+\frac{1}{B_1}$, x_2 между $A+\frac{1}{B_1}$ и $A+\frac{1}{B_2}$, и т. д. Такимъ образомъ всѣ корни даннаго уравненія, назначаемые предѣлами a и b, будутъ отдѣлены.

Если же вставка чиселъ (2) въ функціи (1) вмѣсто y покажетъ, что уравненіе $F(x)=o$ не имѣетъ дѣйствительныхъ корней >1; то это значитъ, что всѣ корни уравненія $f(x)=o$, назначаемые предѣлами a и b, мнимые.

Наконецъ, когда послѣдовательныя два числа B и $B+1$ изъ ряда (2), назначаютъ для $F(y)$ нѣсколько корней; то свойство этихъ корней будетъ неизвѣстно, а потому неизвѣстно также будетъ свойство корней ур. $f(x)=o$, назначаемыхъ предѣлами a и b. Въ такомъ случаѣ поступаемъ съ $F(y)$ такъ же, какъ и $f(x)$; т. е. полагаемъ

$$y=B+\frac{1}{z},$$

и смотримъ, имѣетъ ли преобразованное уравненіе $F\left(B+\frac{1}{z}\right)=o$ дѣйствительные корни >1. Это преобразованное уравненіе будетъ

$$F(B).z^m+F'(B)z^{m-1}+\tfrac{1}{2}F''(B).z^{m-2}+\ldots\ldots+\frac{1}{1.2\ldots m}F^m(B)=\varphi(z)=o.$$

Чтобы узнать, имѣетъ ли оно дѣйствительные корни больше 1, вставляемъ въ рядъ функцій

$$\varphi^m(z).\ \varphi^{m-1}(z),\ldots\varphi''(z),\ \varphi'(z),\ \varphi(z)$$

вмѣсто z числа 1, 2, 3....Здѣсь могутъ встрѣтиться тѣ же случаи, что и для $F(y)$. Если два цѣлыя числа C и $C+1$ открываютъ въ уравненіи $\varphi(z)=o$ нѣсколько корней; то полагаемъ

$$z=C+\frac{1}{u},$$

и съ преобразованнымъ уравненіемъ $\varphi\left(C+\frac{1}{u}\right)=o$ поступаемъ такъ же, какъ и съ предъидущими.

Продолжая такимъ образомъ далѣе, мы необходимо дойдемъ или до такого преобразованнаго уравненія, котораго всѣ дѣйствительные корни >1 отдѣлятся, или до такого, которое не будетъ имѣть дѣйствительныхъ корней >1. Пояснимъ сказанное примѣрами.

Примѣръ I.

Уравненіе

$$x^5-2x^4-10x^3+30x^2+63x-120=o$$

даетъ рядъ функцій

$$f(x)=x^5-2x^4-10x^3+30x^2+63x-120$$

$$f'(x)=5x^4-8x^3-30x^2+60x+63$$

$$f''(x)=20x^3-24x^2-60x+60$$

$$f'''(x)=60x^2-48x-60$$

$$f^{IV}(x)=120x-48$$

$$f^{V}(x)=120$$

и слѣдующую таблицу знаковъ

	f^{v},	f^{iv},	f''',	f'',	f',	f
[—10]	+	—	+	—	+	—
	0	0	0	1	1	2
[—1]	+	—	+	+	—	—
	0	0	1	0	1	0
[0]	+	—	—	+	+	—
	0	1	0	1	0	0
[1]	+	+	—	—	+	—
	0	0	1	1	2	3
[10]	+	+	+	+	+	+.

Предѣлы —10 и —1 открываютъ въ данномъ уравненіи два корня, а предѣлы 1 и 10 остальные три корня.

Въ § 77 мы видѣли, что всѣ результаты $f(2), f'(2), f''(2), \ldots f^{m-1}(2)$, $f^{m}(2)$ положительные, а потому три корня, назначаемые предѣлами 1 и 10, должно искать между 1 и 2. Чтобы открыть свойство этихъ корней, полагаемъ

$$x=1+\frac{1}{y};$$

отъ того имѣемъ уравненіе

$$F(y)=38y^5-90y^4+2y^3+8y^2-3y-1=o.$$

Вставляя въ рядъ функцій

$$\begin{aligned}
&F(y)=38y^5-90y^4+2y^3+8y^2-3y-1\\
&F'(y)=190y^4-360y^3+6y^2+16y-3\\
&F''(y)=760y^3-1080y^2+12y+16\\
&F'''(y)=2280y^2-2160y+12\\
&F^{iv}(y)=4560y-2160\\
&F^{v}(y)=4560
\end{aligned}$$

числа 1, 2, 3,...., находимъ ряды знаковъ

	F^{iv}	F^{v}	F'''	F''	F'	F
[1]	+	+	+	—	—	—
[2]	+	+	+	+	+	+;

откуда видимъ, что y имѣетъ одно только значеніе >1; слѣдовательно данное уравненіе имѣетъ одинъ только дѣйствительный корень между 1 и 10, который также заключается между $1+\frac{1}{1}$ и $1+\frac{1}{2}$. Прочіе два корня, назначаемые предѣлами 1 и 10, мнимые.

Чтобы открыть свойство корней, назначаемыхъ предѣлами —1 и —10, преобразуемъ $f(x)$ въ $f(-x)$, и ищемъ свойство корней уравненія

$$f(-x)=x^5+2x^4-10x^3-30x^2+63x+120=o,$$

заключающихся между 1 и 10. Вставляя вмѣсто x въ рядъ функцій $f^{V}(-x)$, $f^{IV}(-x)$, $f'''(-x)$, $f''(x)$, $f'(-x)$, $f(-x)$, числа 1, 2, 3.., получаемъ ряды

	$f^{V}(-x)$,	$f^{IV}(-x)$,	$f'''(-x)$,	$f''(-x)$,	$f'(-x)$,	$f(-x)$
[1]	+	+	+	—	—	+
[2]	+	+	+	+	—	+
[3]	+	+	+	+	+	+,

которые показываютъ, что два наши корня должно искать между 2 и 3. И такъ полагаемъ $x=2+\frac{1}{y}$, отъ того имѣемъ преобразованное уравненіе

$$F(y)=114y^5-33y^4+38y^3+46y^2+12y+1=o.$$

Первые два члена, а потому и вся первая часть, для $x=$ и >1, даютъ результатъ положительный; слѣдовательно $F(y)$ не имѣетъ дѣйствительныхъ корней >1, и корни уравненія $f(-x)=o$, назначаемые предѣлами 2 и 3, мнимые; поэтому корни даннаго уравненія, назначаемые предѣлами —1 и —10, также мнимые.

Примѣръ II.

Для уравненія

$$x^6+2x^3-7x^2+9x-11=o$$

имѣемъ таблицу

[—10]	+	—	+	—	+	—	+	1 дѣйств. корень
[+1]	+	—	+	—	+	—	—	
[0]	+	$\overset{-}{\underset{+}{0}}$	$\overset{+}{\underset{+}{0}}$	+	—	+	—	2 мнимыхъ к.
[1]	+	+	+	+	+	+	—	1 дѣйств. к.
[10]	+	+	+	+	+	+	+	1 дѣйств. к.

Чтобы открыть свойство двухъ корней, назначаемыхъ предѣлами 0 и 1, полагаемъ $x=0+\frac{1}{y}=\frac{1}{y}$, преобразованное уравненіе $F(y)=o$ будетъ

$$11y^6-9y^5+7y^4-2y^3-1=o.$$

Первая часть этого уравненія, какъ легко видѣть, давши ей видъ

$$(11y-9)y^4+7y^4-2y^3-1=o,$$

для $x=1$ и >1 обращается въ положительное число, а потому уравненіе $F(y)=o$ не имѣетъ дѣйствительныхъ корней >1; слѣдовательно корни даннаго уравненія, назначаемые предѣлами 0 и 1, мнимые.

Примѣръ III.

Уравненіе

$$x^4-5x^3+6x^2+55x-55=o$$

даетъ таблицу

	$f^{IV}(x)$	$f'''(x)$	$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	
[—10]	+	—	+	—	+	1 дѣйств. корень
[—1]	+	—	+	+	—	
[0]	+	—	—	+	—	
[1]	+	—	—	+	—	3 дѣйствит. корня.
[10]	+	+	+	+	+	

Отдѣлимъ корни, назначаемые предѣлами 1 и 10. Полагая $x=1, 2, 3,...$ находимъ ряды

[1]	+	—	—	+	—
[2]	+	+	—	+	+
[3]	+	+	+	—	+
[4]	+	+	+	+	+

Одинъ дѣйствительный корень заключается между 1 и 2, а остальные два корня должно искать въ промежуткѣ предѣловъ 3 и 4. Чтобы открыть ихъ свойство, дѣлаемъ $x=3+\frac{1}{y}$; отъ того имѣемъ уравненіе

$$F(y)=2y^4-8y^3+3y^2+7y+1=o,$$

которое даетъ таблицу

	F^{IV}	F'''	F''	F'	F
[1]	+	$\begin{matrix}-\\0\\+\end{matrix}$	—	—	+
[2]	+	+	+	—	—
[3]	+	+	+	+	—
[4]	+	+	+	+	+.

Отсюда видимъ, что y имѣетъ два дѣйствительныхъ значенія >1: одно заключается между 1 и 2, а другое между 3 и 4. Слѣдовательно значенія x, назначаемыя предѣлами 3 и 4, также дѣйствительныя: одно заключается между $3+\frac{1}{1}$ и $3+\frac{1}{2}$, а другое между $3+\frac{1}{3}$ и $3+\frac{1}{4}$.

§ **122**. Найдя по изложенному способу двѣ непрерывныя дроби, заключающія одинъ какой-либо дѣйствительный корень даннаго уравненія, можно эти предѣлы стѣснить еще болѣе; для этого стоитъ только продолжать дѣйствіе. Въ самомъ дѣлѣ: пусть дроби

$$(4)\qquad A+\cfrac{1}{B+\cfrac{1}{C+\cdots\cfrac{1}{K}}} \qquad\qquad A+\cfrac{1}{B+\cfrac{1}{C+\cdots\cfrac{1}{K+1}}}$$

заключаютъ одинъ только дѣйствительный корень, и положимъ, что послѣднее преобразованное уравненіе есть $\Phi(v)=o$; K и $K+1$ будутъ заключать одинъ только изъ его дѣйствительныхъ корней большихъ 1, а потому, положивъ $v=K+\frac{1}{t}$, неизвѣстное t необходимо должно имѣть только одно дѣйствительное значеніе >1; слѣдовательно уравненіе

$$\psi(t)=\Phi(K)t^m+\Phi'(K).t^{m-1}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots m}\Phi^m(K)=o$$

должно имѣть необходимо одинъ только дѣйствительный корень >1. Отыскавши два цѣлыя числа, его заключающія, которыя назовемъ L и $L+1$, дроби $K+\frac{1}{L}$ и $K+\frac{1}{L+1}$ будутъ заключать v, а потому, внеся ихъ вмѣсто v въ выраженіе

$$x=A+\cfrac{1}{B+\cfrac{1}{C+\cdots\cfrac{1}{v}}},$$

будемъ имѣть новыя дроби

$$A+\cfrac{1}{B+\cfrac{1}{C+\ddots\cfrac{1}{K+\cfrac{1}{L}}}} \qquad A+\cfrac{1}{B+\cfrac{1}{C+\ddots\cfrac{1}{K+\cfrac{1}{L+1}}}},$$

которыя, какъ извѣстно изъ теоріи непрерывныхъ дробей, ближе къ x, нежели дроби (4).

Положивъ $t=L+\frac{1}{w}$, уравненіе по w

$$\xi(w)=\psi(t).w^m+\psi'(t).w^{m-1}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots m}\psi^m(w)=o$$

также будетъ имѣть одинъ только дѣйствительный корень >1. Найдя предѣлы его M и $M+1$, будемъ имѣть новыя дроби

$$A+\cfrac{1}{B+\ddots\cfrac{1}{K+\cfrac{1}{L+\cfrac{1}{M}}}} \quad \text{и} \quad A+\cfrac{1}{B+\ddots\cfrac{1}{K+\cfrac{1}{L+\cfrac{1}{M+1}}}},$$

болѣе близкія къ x, нежели предъидущія. Продолжая такимъ образомъ далѣе, каждое, вновь получаемое уравненіе будетъ имѣть одинъ только дѣйствительный корень >1; найдя послѣдовательныя цѣлыя числа, его заключающія, меньшее изъ нихъ будетъ *послѣднее частное* непрерывной дроби, выражающей искомый корень. Такимъ образомъ мы будемъ болѣе и болѣе приближаться къ точному значенію корня. Этотъ способъ приближеннаго вычисленія корней принадлежитъ *Лагранжу* (*), и былъ обнародованъ имъ въ 1769-мъ году. Приложимъ его къ корню уравненія

$$x^5-2x^4-10x^3+30x^2+63x-120=o,$$

заключающемуся между $1+\frac{1}{2}$ и $1+\frac{1}{3}$.

Положивъ $y=2+\frac{1}{z}$, уравненіе $F(y)$ преобразуется въ слѣдующее

$$\Phi(z)=183z^5-213z^4-900z^3-802z^2-290z-38=o,$$

которое необходимо должно имѣть одинъ только дѣйствительный корень >1. Чтобы его отдѣлить, достаточно вставлять числа 1, 2, 3,... толь-

(*) *Mém. de l'Académie de Berlin, ann.* 1769 ко въ $\Phi(z)$. Эта вставка покажетъ намъ, что искомое значеніе z заключается между 3 и 4; потому что результаты $\Phi(3)=-6210$ и $\Phi(4)=83234$ съ противными знаками. И такъ значеніе $x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{z}}$ заключается между $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}$ и $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}$. Положивъ $z=3+\frac{1}{u}$, имѣемъ уравненіе

$$\psi(u)=6210u^5-21709u^4-29006u^3-13014u^2-2532u-183=o.$$

Это уравненіе имѣетъ дѣйствительный корень между 4 и 5; слѣдовательно z заключается между $3+\frac{1}{4}$ и $3+\frac{1}{5}$, а x между

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}} \quad \text{и} \quad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5}}},$$

или, (приведя эти двѣ дроби въ обыкновенныя) между $\frac{10}{7}$ и $\frac{43}{30}$; первая есть высшій предѣлъ искомаго, корня, а вторая низшій.

Разсмотримъ теперь нѣкоторыя свойства непрерывныхъ дробей, и облегченія, которыя сдѣлалъ *Лагранжъ* въ своемъ способѣ вычисленія корней.

§ **123**. Чтобы не слишкомъ удаляться отъ нашего предмета, я не стану здѣсь излагать всей теоріи непрерывныхъ дробей, а напомню только читателю главныя теоремы, доказательства которыхъ онъ можетъ найти во многихъ элементарныхъ курсахъ (*).

Пусть будетъ непрерывная дробь

$$x=A+\cfrac{1}{B+\cfrac{1}{C+\cfrac{1}{D+\text{ и проч.}}}},$$

гдѣ цѣлыя числа A, B, C, D,....., называемыя *частными* (quotiens), суть цѣлыя части выраженій

$$x=A+\frac{1}{y},\ y=B+\frac{1}{z},\ z=C+\frac{1}{u},\ u=D+\frac{1}{v},.....,$$

называемыхъ *полными частными*.

(*) На отечественномъ языкѣ теорія непрерывныхъ дробей превосходно изложена въ Алгебрахъ: *Г. Бурдона* и *Г. Перевощикова* и въ Лекціяхъ Алгебр. и Трансц. Анализа *Г. Остроградскаго*.

Приведя дроби

$$\frac{A}{1},\ A+\frac{1}{B},\ A+\cfrac{1}{B+\cfrac{1}{C}},\qquad A+\cfrac{1}{B+\cfrac{1}{C+\cfrac{1}{D}}}\ \ldots \text{ и пр.}$$

въ обыкновенныя, мы получимъ рядъ дробей

$$\frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_2}{Q_2},\ \frac{P_3}{Q_3},\ \frac{P_4}{Q_4},\ldots,$$

которыхъ члены связаны слѣдующими условіями:

$$P_1=A,\ P_2=P_1B+1,\ P_3=P_2C+P_1,\ P_4=P_3D+P_2,\ldots$$
$$Q_1=1,\ Q_2=Q_1B,\ \ Q_3=Q_2C+Q_1,\ Q_4=Q_3.D+Q_2,\ldots$$

Эти дроби называются *подходящими* (convergentes); потому что каждая изъ нихъ болѣе и болѣе подходитъ къ точному значенію x. Разность двухъ послѣдовательныхъ дробей $\frac{P_i}{Q_i}$ и $\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}$ есть $\frac{(-1)^i}{Q_iQ_{i-1}}$, и какъ $Q_{i-1}<Q_i$, то она меньше $\frac{1}{Q^2_{i-1}}$. А потому искомый корень x, который заключается между дробями $\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}$ и $\frac{P_i}{Q_i}$, разнится отъ каждой менѣе нежели $\frac{1}{Q^2_{i-1}}$. Такимъ образомъ при каждомъ новомъ частномъ, мы можемъ судить о степени приближенія къ точному значенію искомаго корня.

Пусть M будетъ частное, соотвѣтствующее дроби $\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$; то

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}=\frac{P_iM+P_{i-1}}{Q_iM+Q_{i-1}},$$

и x разнится отъ дроби $\frac{P_i}{Q_i}$ менѣе нежели

$$\frac{1}{(Q_iM+Q_{i-1})Q_i}.$$

Но M всегда не меньше 1, а потому о степени приближенія дроби $\frac{P_i}{Q_i}$ къ искомому корню можно судить по дроби

$$\frac{1}{Q_i(Q_i+Q_{i-1})}.$$

Возрастаніе знаменателей Q_1, Q_2, Q_3,... бываетъ иногда очень медленно, отъ чего замедляется также и приближеніе къ искомому корню. *Лагранжъ* исправилъ этотъ недостатокъ, показавши, что можно продолжать вычисленіе частныхъ A, B, C,... съ извѣстнаго члена, не имѣя нужды въ преобразованныхъ уравненіяхъ. Вотъ въ чемъ состоитъ это усовершенствованіе.

§ **124.** Положимъ, что мы остановились на преобразованномъ уравненіи

$$\Phi(t)=at^m+bt^{m-1}+ct^{n-2}+\ldots.kt+l=o,$$

и означимъ чрезъ $\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}$ и $\frac{P_i}{Q_i}$ двѣ послѣднія подходящія дроби; то будетъ

$$x=\frac{P_i.t+P_{i-1}}{Q_i.t+Q_{i-1}}. \tag{5}$$

Отсюда

$$t=\frac{Q_{i-1}x-P_{i-1}}{P_i-Q_ix}$$

и

$$t+\frac{Q_{i-1}}{Q_i}=\frac{P_iQ_{i-1}P-P_{i-1}\cdot Q_i}{Q_i(P_i-Q_ix)}=\frac{(-1)^i}{Q_i}:\left(\frac{P_i}{Q_i}-x\right) \tag{6}$$

Означивши чрезъ t_1, t_2,....t_m всѣ корни уравненія $\Phi(t)=o$, корни даннаго уравненія будутъ

$$\frac{P_it_1+P_{i-1}}{Q_it_1+Q_{i-1}},\quad \frac{P_it_2+P_{i-1}}{Q_it_2+Q_{i-1}},\ldots.\quad \frac{P_it_m+P_{i-1}}{Q_it_m+Q_{i-1}},$$

которыхъ означимъ соотвѣтственно чрезъ $x_1, x_2,\ldots x_m$. Внося $x_2, x_3, x_4,\ldots$ ...x_m послѣдовательно вмѣсто x въ выраженіе (6), имѣемъ

$$t_2+\frac{Q_{i-1}}{Q_i}=\frac{(-1)^i}{Q_i^2}:\left(\frac{P_i}{Q_i}-x_2\right)$$

$$t_3+\frac{Q_{i-1}}{Q_i}=\frac{(-1)^i}{Q_i}:\left(\frac{P_i}{Q_i}-x_3\right)$$

. . . .

$$t_m+\frac{Q_{i-1}}{Q_i}=\frac{(-1)^i}{Q_i^2}:\left(\frac{P_i}{Q_i}-x_m\right);$$

сложивши эти уравненія, и замѣтивши, что

$$t_2+t_3+\ldots\ldots+t_m=-t_1-\frac{b}{a},$$

находимъ

$$(7)\qquad -t_1-\frac{b}{a}+\frac{(m-1)Q_{i-1}}{Q_i}=\frac{(-1)}{Q_i^2}.\Delta,$$

гдѣ

$$\Delta=\frac{1}{\frac{P_i}{Q_i}-x_2}+\frac{1}{\frac{P_i}{Q_i}-x_3}+\ldots\ldots+\frac{1}{\frac{P_i}{Q_i}-x_m}.$$

По уравненію (7) имѣемъ

$$\frac{P_i}{Q_i}-x_1=\frac{P_i}{Q_i}-\frac{P_it_1+P_{i-1}}{Q_it_1+Q_{i-1}}=\frac{P_it_1Q_{i-1}-P_{i-1}Q}{Q_i(Q_it_1+Q_{i-1})}=\frac{(-1)^i}{Q_i(Q_it_1+Q_{i-1})}$$

или, положивъ для сокращенія $Q_i\ t_1+Q_{i-1}=\psi.Q_i$, будетъ

$$\frac{P_i}{Q_i}-x_1=\frac{1}{\psi Q_i^2};\ \text{отсюда}\ \frac{P_i}{Q_i}=x_1+\frac{(-1)^i}{\psi Q_i^2}$$

Внеся это въ выраженіе Δ, получаемъ

$$\Delta=\left(\frac{1}{Q_i^2(x_1-x_2)+\frac{(-1)^i}{\psi}}+\frac{1}{Q_i^2(x_1-x_3)+\frac{(-1)^i}{\psi}}+\ldots\frac{1}{Q_i^2(x_1-x_m)+\frac{(-1)^i}{\psi}}\right).$$

Разности $x_1-x_2, x_1-x_3\ldots$, постоянныя, знаменатель подходящей дроби Q_i увеличивается, а $\frac{1}{\psi}=\frac{Q_i}{Q_it+Q_{i-1}}$ всегда меньше 1 и съ возрастаніемъ Q_i уменьшается, а потому каждый изъ членовъ Δ будетъ уменьшаться; слѣдовательно Δ также будетъ уменьшаться, и необходимо сдѣлается меньше $\frac{1}{2}$. И такъ мы необходимо дойдемъ до такого преобразованнаго уравненія, котораго корень t_1 будетъ разниться отъ $-\frac{b}{a}+\frac{(m-1)Q_{i-1}}{Q}$ меньше нежели $\frac{1}{2}$, т. е. этотъ корень будетъ заключаться между предѣлами

$$(8)\qquad -\frac{b}{a}+\frac{(m-1)Q_{i-1}}{Q_i}+\frac{1}{2}\ \text{и}\ -\frac{b}{a}+\frac{(m-1)Q_{i-1}}{Q_i}-\frac{1}{2}.$$

А тѣмъ болѣе это будетъ справедливо для всѣхъ слѣдующихъ преобразованныхъ уравненій.

Достигнувши такого преобразованнаго уравненія, должно взять цѣлое число, ближайшее къ $-\frac{b}{a}+\frac{(m-1)Q_{i-1}}{Q_i}$, т. е. то, которое заключается въ предѣлахъ (8): это число и будетъ одно изъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ M и $M+1$, заключающихъ t. Мы покажемъ, какимъ образомъ можно различить эти два числа; но прежде посмотримъ какъ опредѣляется $-\frac{b}{a}$.

§ **125**. Такъ какъ $-\frac{b}{a}=t_1+t_2+t_3+\ldots t_m$; то внеся сюда вмѣсто $t_1,\ t_2,\ldots t_m$ ихъ значенія, выводимыя изъ ур. (6), находимъ

$$-\frac{b}{a}=\frac{(-1)^i}{Q_i^2}\left(\frac{1}{\frac{P_i}{Q_i}-x_1}+\frac{1}{\frac{P_i}{Q_i}-x_1}+\ldots+\frac{1}{\frac{P_i}{Q_i}-x_m}\right)-\frac{mQ_{i-1}}{Q_i}.$$

По § 15 ур. (20) мы имѣемъ

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x-x_1}+\frac{f(x)}{x-x_2}+\ldots+\frac{f(x)}{x-x_m};$$

откуда

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\ldots+\frac{1}{x-x_m}$$

Положивъ $x=\frac{P_i}{Q_i}$, будетъ

$$\frac{f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{f\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}=\frac{1}{\frac{P_i}{Q_i}-x_1}+\frac{1}{\frac{P_i}{Q}-x_1}+\ldots\frac{1}{\frac{P_i}{Q_i}-x_m};$$

слѣдовательно

$$-\frac{b}{a}=\frac{(-1)^i}{Q_i^2}\,\frac{f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{f\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}-\frac{mQ_{i-1}}{Q_i}.$$

Внеся это въ выраженія (8), они будутъ

$$(9)\qquad \frac{1}{Q_i^2}\,\frac{f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{f\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}-\frac{Q_{i-1}}{Q_i}+\tfrac{1}{2}\ \text{и}\ \frac{1}{Q_i^2}\,\frac{f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{f\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}-\frac{Q_{i-1}}{Q_i}-\tfrac{1}{2}.$$

Они совсѣмъ не зависятъ отъ преобразованнаго уравненія по t.

§ **126**. Теперь должно показать, когда можно пользоваться предѣлами (9), которыхъ для сокращенія изобразимъ чрезъ $\lambda+\frac{1}{2}$ и $\lambda-\frac{1}{2}$. Лагранжъ для этого даетъ слѣдующій способъ:

Достигнувши преобразованнаго уравненія $\Phi(t)=o$, отъищемъ, чрезъ послѣдовательную вставку чиселъ 1, 2, 3,... вмѣсто t, два числа M и $M+1$, заключающія дѣйствительное значеніе t; чтобы t заключалось между $\lambda+\frac{1}{2}$ и $\lambda-\frac{1}{2}$, должно, чтобы λ заключалось между M и $M+1$, и было ближе къ тому изъ этихъ чиселъ, къ которому ближе t. И такъ, во-первыхъ смотримъ будетъ ли λ заключаться между M и $M+1$; когда это условіе будетъ удовлетворено, тогда за приближенное значеніе t беремъ то изъ чиселъ M и $M+1$, которое ближе къ λ; назовемъ его чрезъ k. Потомъ, полагаемъ $t=k+\frac{1}{\varphi}$, и смотримъ, имѣетъ ли преобразованное уравненіе $\Phi\left(k+\frac{1}{\varphi}\right)=o$ дѣйствительный корень, котораго числовое значеніе было бы больше 2. Если это условіе удовлетворено; то мы увѣрены, что t заключается между $\lambda+\frac{1}{2}$ и $\lambda-\frac{1}{2}$, и можемъ приступить къ дальнѣйшему вычисленію.

§ **127**. Найдя цѣлое число k, заключенное между $\lambda+\frac{1}{2}$ и $\lambda-\frac{1}{2}$, мы не знаемъ, будетъ ли оно больше или меньше t. Ежели $k < t$; то новая подходящая дробь $\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}=\frac{P_i\,k+P_{i-1}}{Q_i\,k+Q_{i-1}}$ и предъидущая $\frac{P_i}{Q_i}$ будутъ заключать x; отъ того результаты $f\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)$ и $f\left(\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}\right)$ съ противными знаками. Но если $k > t$, то корень x будетъ заключаться между $\frac{P_i(k-1)+Q_{i-1}}{Q_i(k-1)+Q_{i-1}}$ и $\frac{P_i}{Q_i}$ и между $\frac{P_i(k-1)+P_{i-1}}{Q_i(k-1)+Q_{i-1}}$ и $\frac{P_ik+Q_{i-1}}{Q_ik+Q_{i-1}}$, а потому онъ не можетъ заключаться между $\frac{P_i}{Q_i}$ и $\frac{P_ik+P_{i-1}}{Q_ik+Q_{i-1}}$; слѣдовательно въ случаѣ $k>t$ результатъ $f\left(\frac{P_ik+P_{i-1}}{Q_ik+Q_{i-1}}\right)$ будетъ имѣть одинакой знакъ съ $f\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)$. И такъ мы всегда можемъ различить случаи $k<t$ и $k>t$. Когда $k>t$, тогда въ формулы

(9) вставляемъ вмѣсто P_i, Q_i и Q_{i-1}, соотвѣтственно P_ik+P_{i-1}, Q_ik+Q_{i-1} и Q_i; отъ того получимъ предѣлы новаго частнаго, которое опредѣлится по предъидущему. Точно такимъ же образомъ должно поступать и въ случаѣ $k>t$; разница будетъ состоять только въ томъ, что новое частное будетъ отрицательное; потому что, положивъ $t=k+\frac{1}{w}$, дробь $\frac{1}{w}$ должна заключаться между 0 и -1, т. е. w должно быть <-1.

§ **128.** Познакомимся короче съ непрерывными дробями, имѣющими отрицательныя частныя.

Положимъ, что A есть цѣлое число непосредственно $>x$; такъ, что $A>x$ и $A-1<x$; то положивъ $x=A-\frac{1}{y}$, y должно быть положительное и >1; потому что $\frac{1}{y}>0$ и <1. Найдя цѣлое число B непосредственно меньшее или непосредственно большее y, полагаемъ въ первомъ случаѣ $y=B+\frac{1}{z}$, а во второмъ $y=B-\frac{1}{z}$. Продолжая такимъ образомъ далѣе, мы будемъ имѣть

$$x=A\pm\frac{1}{y},\ x=B\pm\frac{1}{z},\ z=C\pm\frac{1}{u},\ldots;$$

отъ того выходитъ непрерывная дробь

$$x=A\pm\cfrac{1}{B\pm\cfrac{1}{C\pm\cfrac{1}{u}}}.$$

Замѣтимъ, что каждое изъ частныхъ A, B, C,..., за которымъ слѣдуетъ знакъ $-$ должно быть не меньше 2. Въ самомъ дѣлѣ: если на пр. $B>y$, то, положивъ $y=B-\frac{1}{z}$, и зная, что $y>1$, мы будемъ имѣть $B-\frac{1}{z}>1$; отъ чего $B>1+\frac{1}{z}$; слѣдовательно B должно быть цѣлое число >1, а потому оно должно быть или 2 и >2.

Имѣя непрерывную дробь, въ которой послѣ нѣкоторыхъ частныхъ слѣдуютъ знаки $-$, можно ее всегда обратить въ обыкновенную непрерывную дробь. Для доказательства положимъ вообще

$$p-\frac{1}{t}=p'+\frac{1}{t'},$$

гдѣ p и p' должны быть цѣлыя положительныя числа, а t и t' количества >1. Изъ этого равенства имѣемъ $p-p'=\frac{1}{t}+\frac{1}{t'}$. Такъ какъ $\frac{1}{t}<1$ и $\frac{1}{t'}<1$; то

$$\left(p-p'=\frac{1}{t}+\frac{1}{t'}\right)<2,$$

а потому можно только допустить $p-p'=1$; слѣдовательно $p-\frac{1}{t}=p-1+\frac{1}{t'}$; откуда $\frac{1}{t'}=1-\frac{1}{t}$ и $t'=1+\frac{1}{t-1}$. Такимъ образомъ мы будемъ имѣть формулу

$$(10) \qquad p-\frac{1}{t}=p-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{t-1}},$$

по которой можно изгнать въ данной непрерывной дроби всѣ знаки —. Для примѣра возьмемъ дробь

$$x=A-\cfrac{1}{B+\cfrac{1}{C-\cfrac{1}{D-\cfrac{1}{E+\text{ и пр.}}}}}$$

Положивъ сперва въ формулѣ (10) $p=A$, $t=B+\cfrac{1}{C-\text{ и пр.}}$, данная дробь обратится въ

$$x=A-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{B-1+\cfrac{1}{C-\cfrac{1}{D-\cfrac{1}{E+\text{ и пр.}}}}}}$$

Сдѣлавъ потомъ $p=C$, $C=D-\cfrac{1}{E+\text{ и пр.}}$, получимъ

$$x=A-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{B-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{C-1+\cfrac{1}{D+\cfrac{1}{D-1-\cfrac{1}{E}}}}}}}$$

наконецъ, положивъ $p=D-1$ и $t=E$, имѣемъ

$$x=A-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{B-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{C-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{D-2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{E-1}}}}}}}}.$$

Въ преобразованной дроби нѣкоторыя изъ частныхъ могутъ быть$=0$; отъ чего дробь сокращается; такъ на пр. дроби

$$A-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{B+\text{ и пр.}}} \quad \text{и} \quad A-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{B+\text{ и пр.}}}$$

обращаются въ слѣдующія

$$A-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{0+\cfrac{1}{B+\text{ и пр.}}}} \quad \text{и} \quad A-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{B-1+\text{ и пр.}}}}}$$

или въ слѣдующія

$$A-1+\cfrac{1}{1+B\text{ и пр.}} \quad \text{и} \quad A-1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{B-1\text{ и пр.}}}$$

По формулѣ (10) можно также ввести знакъ — въ обыкновенную непрерывную дробь; это бываетъ выгодно, когда нѣкоторыя изъ частныхъ данной непрерывной дроби$=1$. Для этого формулѣ (10) даютъ видъ

$$p+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{t}}=p+1-\cfrac{1}{t+1}.$$

Приложивъ ее къ дробямъ

$$A+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{B+\text{ и пр.}}}} \quad \text{и} \quad A+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{B+\text{ и пр.}}}}},$$

онѣ обратятся въ слѣдующія

$$A+1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{B}} \quad \text{и} \quad A+1-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{B+1}}.$$

Всякую непрерывную дробь, въ которой послѣ нѣкоторыхъ частныхъ слѣдуютъ знаки —, можно превратить въ другую непрерывную дробь, въ которой знаки — будутъ стоять предъ частными.

На пр. дробь $A-\cfrac{1}{B+\cfrac{1}{C-\cfrac{1}{D+\text{ и пр.}}}}$ сперва измѣняется

въ $A+\cfrac{1}{-B-\cfrac{1}{C-\cfrac{1}{D+\text{ и пр.}}}}$, а потомъ въ $A+\cfrac{1}{-B+\cfrac{1}{-C+\cfrac{1}{D+\text{ и пр.}}}}$

И такъ всякая непрерывная дробь заключается въ общемъ видѣ

$$A+\cfrac{1}{B+\cfrac{1}{C+\cfrac{1}{D+\text{ и пр.},}}}$$

гдѣ частныя A, B, C, D,.... суть цѣлыя числа, или положительныя, или отрицательныя.

§ **129.** Всѣ свойства обыкновенныхъ непрерывныхъ дробей легко распространяются и на дроби съ отрицательными частными. Вопервыхъ замѣтимъ, что можно ихъ приложить къ вычисленію корней.

Въ самомъ дѣлѣ: пусть x будетъ искомый корень; то, найдя два последовательныя цѣлыя числа, заключающія x, беремъ одно изъ нихъ, которое назовемъ A, и полагаемъ $x=A+\frac{1}{y}$; преобразованное уравненіе будетъ имѣть дѣйствительный корень, котораго числовое значеніе >1. Найдя B одно изъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, заключающихъ y, полагаемъ $y=B+\frac{1}{z}$, и продолжаемъ такимъ образомъ далѣе. Тоже самое можно дѣлать и при отдѣленіи корней.

Пусть A, B, C, D,.... будутъ *частныя* положительныя или отрицательныя; то, сдѣлавъ

(11) $\quad P_1=A,\ P_2=P_1B+1,\ P_3=P_2C+P_1, P_4=P_3D+P_2,....$

(12) $\quad Q_1=1,\ Q_2=Q_1B,\quad Q_3=Q_2C+Q_1, Q_4=Q_3D+Q_2,.....,$

и взявши дроби

(13) $$\frac{1}{0},\ \frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_2}{Q_2},\ \frac{P_3}{Q_3},.....;$$

мы открываемъ въ нихъ слѣдующія свойства:

1) Вопервыхъ находимъ

$$Q_1 \cdot 1 - P_1 \cdot 0 = -1,\ \ P_2 . Q_1 - P_1 Q_2 = +1,\ \ P_3 Q_2 - P_2 Q_3 = -1, \ldots;$$

откуда видимъ, что P_1 и Q_1, P_2 и Q_2, P_3 и Q_3,.... не имѣютъ общихъ дѣлителей, а потому всѣ дроби (13) не сократимы.

2) Числа P_1, P_2, P_3,...Q_1, Q_2, Q_3,..., могутъ быть положительныя или отрицательныя. Два члена каждой изъ дробей (13) будутъ имѣть одинакіе или разные знаки, смотря по тому, будетъ ли значеніе x положительное или отрицательное. Числовыя значенія членовъ P_1, P_2,... и Q_1, Q_2, идутъ возрастая.

5) Такъ какъ $x = A + \frac{1}{y}$, $y = B + \frac{1}{z}$, $z = C + \frac{1}{u}$,...., то

$$x = \frac{P_1 y + 1}{Q_1 y}, = \frac{P_2 z + P_1}{Q_2 z + Q_1} = \frac{P_3 u + P_2}{Q_3 u + Q_2}, \ldots\ldots$$

Вообще: если P_{i-1}, P_i, P_{i+1} суть три послѣдовательные члена ряда (11), а Q_{i-1}, Q_i, Q_{i+1} три послѣдовательные члена ряда (12), такъ, что $\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}$, $\frac{P_i}{Q_i}$ $\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$ суть три послѣдовательныя подходящія дроби; то

$$P_i\, Q_{i-1} - P_{i-1} Q_i = (-1)^i,\ \ P_{i+}\, Q_i - P_i . Q_{i+1} = (-1)^{i+1}.$$

Числовыя значенія количествъ P и Q_i возрастаютъ съ возрастаніемъ i.

Если t есть полное частное послѣ дроби $\frac{P_i}{Q_i}$; то

$$(14) \qquad x = \frac{P_i t + P_{-1}}{Q_i t + Q_{i-1}};$$

означивши чрезъ k цѣлое число, непосредственно большее или меньшее t, имѣемъ

$$P_{i-1} = P_i k + P_{i-1},\ \ Q_{i-1} = Q_i k + Q_{i-1}.$$

Посмотримъ теперь, какъ близко дробь $\frac{P_i}{Q_i}$ подходитъ къ x.

6) По уравненію (14) находимъ

$$(15)\qquad \frac{P_i}{Q_i}-x=\frac{P_i}{Q_i}-\frac{P_it+P_{i-1}}{Q_it+Q_{i-1}}=\frac{P_iQ_{i-1}-P_{i-1}Q_i}{Q_i(Q_it+Q_{i-1})}=\frac{(-1)^i}{Q_i(Q_it+Q_{i-1})};$$

пусть M и $M+1$ будутъ два цѣлыя числа, заключающія t; то Q_it+Q_{i-1} будетъ заключаться между Q_iM+Q_{i-1} и $Q_i(M+1)+Q_{i-1}$, а потому разность (15) будетъ заключаться между

$$\frac{(-1)^i}{Q_i(Q_iM+Q_{i-1})} \quad \text{и} \quad \frac{(-1)^i}{Q_i[Q_i(M+1)+Q_{i-1}]}.$$

Такъ какъ можно взять $k=M$ или $k=M+1$; то знаменатель слѣдующей подходящей дроби Q_{i+1} будетъ или Q_iM+Q_{i-1} или $Q_i(M+1)+Q_{i-1}$. Означивъ эти два числа чрезъ Q_{i+1} и Q_{i+1}, разность (15) будетъ заключаться между $\frac{(-1)^i}{Q_iQ_{i+1}}$ и $\frac{(-1)^i}{Q_iQ'_{i+1}}$. Но числовыя значенія Q_{i+1} и Q'_{i+1} больше числоваго значенія Q_i, а потому дробь $\frac{P_i}{Q_i}$ будетъ разниться отъ x менѣе, нежели $\frac{1}{Q_i^2}$.

Этихъ разсмотрѣній достаточно, чтобы увѣриться, что сказанное въ §§ 124, 125, 126 и 127 справедливо для непрерывныхъ дробей, имѣющихъ отрицательныя частныя. Приложимъ это къ слѣдующему примѣру

Примѣръ IV.

Мы нашли по способу *Штурма* (см. § 99 прим. 1-й), что уравненіе

$$x^3-7x+7=0$$

имѣетъ два дѣйствительныхъ корня между 1 и 2: одинъ между 1 и $\frac{3}{2}$, а другой между $\frac{3}{2}$ и 2; отъищемъ послѣдній.

Положивъ $x=1+\frac{1}{y}$, находимъ преобразованное уравненіе

$$y^3-4y^2+3y+1=0.$$

Вставляя вмѣсто y числа 1, 2, 3, получаемъ результаты +1, —1, +1, а потому значеніе y, для искомаго корня заключается между 1 и 2. Сдѣлавъ $y=1+\frac{1}{z}$, получимъ второе преобразованное уравненіе

$$z^3-2z^2-z+1=0.$$

Вставка чиселъ 1, 2, 3,.... вмѣсто z покажетъ, что $2<z<3$; и такъ искомый корень заключается между дробями

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad 1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}.$$

Положивъ $z=2+\frac{1}{u}$, имѣемъ уравненіе

$$u^3-3u^2-4u-1=o.$$

Вставляя въ первую его часть 1, 2, 3, 4,.... вмѣсто u, найдемъ $4<u<5$. Положивъ еще $u=4+\frac{1}{t}$, составимъ четвертое преобразованное уравненіе

$$t^3-20t^2-9t-1=o.$$

Числа 20 и 21, будучи вставлены вмѣсто t, даютъ результаты съ противными знаками; слѣдовательно $20<t<21$. Посмотримъ, нельзя ли здѣсь начать вычисленіе § 124. Для найденныхъ частныхъ 1, 1, 2, 4, 20 подходящія дроби суть

$$\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{22}{13}, \frac{145}{263}.$$

Положивъ въ выраженіи $\lambda=-\frac{b}{a}+\frac{(n-1)Q_{i-1}}{Q_i}$ (см. ур. (8) $-\frac{b}{a}=20$, $Q_{i-1}=3$, $n=3$, $Q_i=13$, имѣемъ

$$\lambda=20+\frac{6}{13};$$

и такъ λ заключается между 20 и 21; слѣдовательно первое условіе § 126 удовлетворено, и $k=20$. Чтобы узнать, будетъ ли удовлетворено второе условіе, полагаемъ $t=20+\frac{1}{w}$, преобразованное уравненіе будетъ

$$181w^3-391w^2-40w-1=o;$$

оно имѣетъ одинъ дѣйствительный корень между 2 и 3, а потому второе условіе § 126 также удовлетворено. И такъ, сдѣлавъ $w=2+\frac{1}{v}$, можно найти по формуламъ (9) одно изъ цѣлыхъ чиселъ, заключающихъ v.

Послѣдняя подходящая дробь есть $\frac{912}{539}$; вставивши ее въ $f(x)$ и $f'(x)$ вмѣсто x, находимъ:

$$f\left(\frac{912}{539}\right)=\frac{912^3-7.912\ 539^2+7.539^3}{539^3}=\frac{193}{539^3}$$

$$f'\left(\frac{912}{539}\right)=\frac{3.912^2-7.539^2}{539^2}=\frac{461585}{539^2},$$

и потому

$$\lambda=\left(\frac{461585}{196}-263\right).\frac{1}{539}=4\frac{13761}{105644}.$$

и предѣлы (9) будутъ

$$4\frac{13761}{105644}+\tfrac{1}{2}\text{ и }4\frac{13761}{105644}-\tfrac{1}{2}$$

Цѣлое число, *ближайшее* къ λ, т. е. искомое частное есть 4, и подходящая дробь, ему соотвѣтствующая, есть $\frac{4093}{2419}$. Чтобы узнать (см. § 127) будетъ *ли* 4 больше или меньше точнаго значенія v, вставляемъ эту дробь въ $f(x)$ вмѣсто x, и находимъ

$$f\left(\frac{4093}{2419}\right)=\frac{(4093)^3-7.4093.2419^2+7.2419^3}{(2419)^3}=\frac{549}{(2419)^3};$$

такъ какъ $f\left(\frac{612}{539}\right)$ и $f\left(\frac{4093}{2419}\right)$ съ одинакими знаками, то $4>v$.

Положимъ еще $v=4+\frac{1}{s}$, и отъищемъ одно изъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, заключающихъ s; мы впередъ знаемъ, что оно отрицательное. Внеся $\frac{4093}{2416}$ вмѣсто x въ $f'(x)$, получаемъ

$$f'\left(\frac{4093}{2419}\right)=\frac{3.4093^2-7.2419^2}{2419^2}=\frac{9297620}{2419^2};$$

послѣ того находимъ

$$\lambda=\left(\frac{-9297620}{549}-539\right)\frac{1}{2419}=-7\frac{297314}{1328031};$$

слѣдовательно искомое частное есть —7. И такъ мы имѣемъ дробь

$$(16)\qquad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{20+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{-7}}}}}}=\frac{-28079}{-16394},$$

которая разнится отъ точнаго значенія корня менѣе нежели $\frac{1}{2419^2}=\frac{1}{4851561}$. Она можетъ быть преобразована, по § 128, въ слѣдующую

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{20+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}}}}}.$$

Отсюда видимъ выгоду нашего вычисленія и пользу непрерывныхъ дробей съ отрицательными частными: здѣсь отрицательное частное — 7 замѣняетъ два положительныя частныя: 1 и 6.

Лагранжъ и *Лежандръ* сдѣлали еще нѣкоторыя облегченія въ разложеніи корней въ непрерывныя дроби. Но я объ нихъ умалчиваю; потому что они всегда могутъ быть съ выгодою замѣнены *Нютоновымъ* способомъ вычисленія корней.

Нютоновъ способъ вычисленія корней, исправленный Фурье.

§ **130.** Пусть a и b заключаютъ одинъ только дѣйствительный корень даннаго уравненія, и разность $b-a$ количество довольно малое, на пр. $<\frac{1}{10}$. Принявъ $a+h$ за точное значеніе корня, вносимъ его въ мѣсто x въ данное уравненіе $f(x)=o$; отъ того имѣемъ

$$f(a+h)=f(a)+h\,f'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\ldots\frac{h^{m-1}}{1.2..(m-1)}f^{m-1}(a)+\frac{h^m}{1.2..m}f^m(a)=o.$$

Пренебрегая, по малости h, степенями h^2, h^3,.... h^m, мы будемъ имѣть для опредѣленія h уравненіе первой степени

$$f(a)+h.\,f'(a)=o;$$

откуда

$$h=-\frac{f(a)}{f'(a)},$$

Придавши это къ a, количество

$$a-\frac{f(a)}{f'(a)}=a'$$

будетъ новое приближенное значеніе корня. Положивъ $x=a'+h'$, будемъ имѣть приближенно

$$h'=-\frac{f(a')}{f'(a')},$$

и $a'-\frac{f(a')}{f'(a')}=a''$ будетъ третье приближенное значеніе корня. Продолжая такимъ образомъ далѣе, мы получимъ рядъ количествъ: a, a', a'',... болѣе и болѣе приближающихся къ точному значенію корня. То, что мы дѣлали для a, можно сдѣлать и для b. Этотъ способъ приближеннаго вычисленія корней называется *линейнымъ*, и открытъ *Ньютономъ*. Въ томъ видѣ, какъ онъ вышелъ изъ рукъ знаменитаго Геометра, онъ имѣлъ недостатки, по которымъ былъ неисполнимъ, и оставался въ такомъ состояніи до *Фурье*, который наконецъ его исправилъ совершенно и сообщилъ ему чрезвычайную простоту.

§ **131**. Этотъ способъ приближеннаго вычисленія корней требуетъ, чтобы были удовлетворены слѣдующія условія:

1) Первое условіе состоитъ въ томъ, чтобы имѣть первое приближенное значеніе искомаго корня: для этого можно взять одинъ изъ предѣловъ a и b, заключающихъ искомый корень.

2) Предѣлы a и b могутъ быть недовольно близки, чтобы начать приближеніе. Въ такомъ случаѣ стѣсняютъ эти предѣлы, выбирая числа среднія между a и b, дающія для $f(x)$ результаты съ противными знаками.

3) Какъ бы ни были близки между собою предѣлы a и b, только къ одному изъ нихъ можно прилагать *Ньютоновъ* способъ, а потому нужно имѣть признаки для отличія этого предѣла.

4) Главный недостатокъ *Ньютонова* способа состоитъ въ томъ, что послѣдовательныя приближенныя значенія: a, a', a'',... или всѣ больше, или всѣ меньше точнаго значенія корня, а потому мы не знаемъ, сколько цыфръ приближеннаго значенія корня принадлежитъ самому корню. Хотя можно этого достигнуть, опредѣливъ другое приближенное значеніе, измѣняя первое до тѣхъ поръ, какъ, по вставкѣ его вмѣсто x въ $f(x)$, мы получимъ результатъ съ противнымъ знакомъ; но это требуетъ большихъ вычисленій и замедляетъ быстроту приближенія.

Фурье даетъ удобный способъ вычислять другія приближенныя значенія: $b,b',b'',\ldots$, которыя всѣ больше искомаго корня, когда предъидущія $a,a',a'',\ldots$ меньше, и которыя меньше искомаго корня, когда $a,a',a'',\ldots$ больше; цыфры общія двумъ соотвѣтственнымъ предѣламъ принадлежатъ точному значенію корня. Мы увидимъ, что число ихъ увеличивается весьма быстро, а именно: числами, пропорціональными членамъ прогрессіи $2,4,8,16,\ldots$

4) Наконецъ, должно такъ расположить вычисленіе, чтобы не было лишнихъ дѣйствій.

Посмотримъ какъ удовлетворяются эти требованія.

§ **132**. Пусть предѣлы a и b заключаютъ одинъ только дѣйствительный корень даннаго уравненія и не открываютъ мнимыхъ корней, т. е. будучи вставлены вмѣсто x въ рядъ функцій

$$f^m(x), f^{m-1}(x), \ldots f''(x), f'(x), f(x),$$

даютъ два ряда знаковъ $[a]$ и $[b]$, для которыхъ послѣдній указатель есть 1. Въ § 114 было доказано, что, стѣсняя предѣлы a и b, можно всегда дойти до такихъ, для которыхъ указатель подъ f' будетъ 0. Положимъ, что a и b имѣютъ это свойство; тогда указатель подъ $f''(x)$ будетъ или 0 или 1, но не больше (см. § 113). Если онъ$=1$, то $f''(x)$ имѣетъ одинъ дѣйствительный корень между a и b, который можетъ быть, или равенъ или неравенъ искомому корню $f(x)$. Въ первомъ изъ этихъ случаевъ $f(x)$ и $f''(x)$ имѣютъ общаго дѣлителя, котораго назовемъ $\varphi(x)$; отъискавши его, данное уравненіе должно замѣнить уравненіемъ $\varphi(x)=o$; потому что послѣднее гораздо проще. Если же корни $f(x)$ и $f''(x)$, заключенные между предѣлами a и b, не равны между собою; то стѣсняя предѣлы a и b такъ, чтобы между ними всегда заключался корень $f(x)$, мы дойдемъ до такихъ, для которыхъ указатель подъ f'' будетъ 0.

Когда предѣлы a и b, заключающіе одинъ только дѣйствительный корень $f(x)$, найдены по *Штурмову* способу; тогда указатель подъ f въ рядахъ

$$[a] \qquad f^m(a), f^{m-1}(a), \ldots f'(a), f(a)$$

$$[b] \qquad f^m(b), f^{m-1}(b), \ldots f'(b), f(b)$$

можетъ быть больше единицы (онъ всегда нечетный); тогда всѣ корни, назначаемые этимъ указателемъ, исключая одного, мнимые. Стѣсняя предѣлы a и b, мы всегда дойдемъ до такихъ, для которыхъ указатель подъ f будетъ 1; продолжая стѣсненіе предѣловъ, мы наконецъ дойдемъ до такихъ, для которыхъ указатели подъ f' и f'' равны нулю, т. е. которые не открываютъ въ $f'(x)$ и $f''(x)$ ни одного корня.

Итакъ мы имѣемъ право положить, что для предѣловъ a и b, послѣдніе три указателя суть 001; тогда знаки трехъ функцій $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$ въ рядахъ $[a]$ и $[b]$ имѣютъ одно изъ слѣдующихъ положеній:

		$f''(x)$,	$f'(x)$	$f(x)$
(1)	$[a]$	+	+	—
	$[b]$	+	+	+
или				
(2)	$[a]$	—	—	+
	$[b]$	—	—	—
или				
(3)	$[a]$	+	—	+
	$[b]$	+	—	—
или наконецъ				
(4)	$[a]$	—	+	—
	$[b]$	—	+	+.

§ **133**. Означимъ чрезъ α искомый корень, заключенный между предѣлами a и b, и положимъ $\alpha=b-h$, то.

$$f(b-h)=o.$$

или

(5) $$f(b-h)=f(b)-hf'(b-\varphi h)=o,$$

гдѣ $\varphi>o$ и <1; такъ, что $(\alpha=b-h)<b-\varphi h<b$. Изъ уравненія (5) находимъ

$$h=\frac{f(b)}{f'(b-\varphi h)};$$

слѣдовательно

(6) $$\alpha=b-\frac{f(b)}{f'(b-\varphi h)}.$$

Въ случаѣ (1), $f''(x)$ сохраняетъ знакъ + для всѣхъ значеній x, начиная отъ a до b, а потому $f'(x)$ возрастаетъ съ возрастаніемъ x между этими предѣлами, и какъ она сохраняетъ знакъ +, то, при $x=b$, она имѣетъ наибольшее числовое значеніе; слѣдовательно

$$f'(b)>f'(b-\varphi h) \text{ и } \frac{f(b)}{f'(b)}<\frac{f(b)}{f'(b-\varphi h)};$$

отъ чего

$$(7) \qquad b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

больше точнаго значенія корня a. Въ случаѣ (2), $f''(x)$ и $f'(x)$ отрицательныя для всякаго значенія x, начиная отъ a до b, а потому $f'(x)$ уменьшается, и числовое ея значеніе при $x = b$ будетъ наибольшее; и такъ

$$-f'(b) > -f'(b - \Phi h), \quad \frac{-f(b)}{-f'(b)} < \frac{-f(b)}{-f(b)};$$

отъ чего $b' = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$ опять больше точнаго значенія искомаго корня. Такимъ образомъ въ двухъ случаяхъ (1) и (2) помощію высшаго предѣла b, мы находимъ другой высшій предѣлъ (7), который ближе къ точному значенію искомаго корня, нежели предъидущій.

Въ случаѣ (3) $f'(x)$ отрицательная, и возрастаетъ съ возрастаніемъ x отъ a до b; потому что $f''(x)$ остается положительною. Слѣдовательно числовое значеніе $f'(x)$ при $x = b$ будетъ наименьшее, а потому

$$-f'(b) < -f'(b - \Phi h), \quad \frac{-f(b)}{-f'(b)} > \frac{-f(b)}{-f'(b - \Phi h)},$$

и $b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$ меньше точнаго значенія искомаго корня.

Наконецъ въ случаѣ (4), $f'(x)$, съ возрастаніемъ x отъ a до b, пребываетъ положительною, и уменьшается, потому что $f''(x)$ отрицательная, а потому

$$f'(b) < f'(b - \Phi h) \text{ и } \frac{f(b)}{f'(b)} > \frac{f(b)}{f(b - \Phi h)};$$

отъ чего $b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$ опять меньше точнаго значенія искомаго корня.

И такъ въ послѣднихъ двухъ случаяхъ, помощію высшаго предѣла b мы находимъ низшій предѣлъ $b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$; но мы не знаемъ, будетъ ли онъ ближе къ точному значенію корня, нежели предъидущій a.

Такъ какъ въ случаяхъ (3) и (4) числовое значеніе $f'(a)$ больше числоваго значенія $f'(b - \Phi h)$; то $\dfrac{f(b)}{f'(a)} < \dfrac{f(b)}{f'(b - \Phi h)}$, и

$$(8) \qquad b' = b - \frac{f(b)}{f'(a)}$$

больше α, и ближе къ нему, нежели b.

Такимъ же образомъ можно употребить и низшій предѣлъ a для приближенія къ α. Пусть $\alpha = a+k$, т. е. $f(a+k)=o$ или

$$(9) \qquad f(a)+k.\,f'(a+\theta k)=o,$$

гдѣ $a<a+\theta k<\alpha$; отсюда находимъ

$$k = -\frac{f(a)}{f'(a+\theta k)}$$

и

$$\alpha = a + \left(-\frac{f(a)}{f'(a+\theta k)}\right).$$

Во всѣхъ четырехъ случаяхъ: (1), (2), (3), (4) $f(x)$ имѣетъ противный знакъ съ $f'(x)$ для x, начиная отъ a до $a+k$, а какъ $a+\theta k<a+k$, то $f'(a+\theta k)$ и $f(a)$ имѣютъ также противные знаки. Въ первыхъ двухъ случаяхъ числовое значеніе $f'(a+\theta k)$ меньше числоваго значенія $f'(b)$, а потому $-\frac{f(a)}{f'(a+\theta k)} > -\frac{f(a)}{f'(b)}$ и

$$(10) \qquad a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)}$$

меньше точнаго значенія искомаго корня, и ближе къ нему, нежели a.

Для случаевъ (3) и (4) числовое значеніе $f'(a+\theta k)$ больше числоваго значенія $f'(b)$; отъ того $-\frac{f(a)}{f'(a+\theta k)} < -\frac{f(a)}{f'(b)}$, и $a - \frac{f(a)}{f'(b)}$ больше точнаго значенія корня; но мы не знаемъ, будетъ ли оно ближе къ α, нежели b, Такъ какъ числовое значеніе $f'(a)$ больше числоваго значенія $f'(a+\theta k)$; то $-\frac{f(a)}{f'(a+\theta k)} > -\frac{f(a)}{f'(a)}$, а потому

$$(11) \qquad a' = a + \left(-\frac{f(a)}{f'(a)}\right)$$

меньше α.

И такъ въ первыхъ двухъ случаяхъ, отъ предѣловъ a и b мы переходимъ къ двумъ другимъ (10) и (7), болѣе близкимъ къ α, нежели предъидущіе a и b. Въ прочихъ двухъ случаяхъ эпи предѣлы будутъ (11) и (8).

Новый предѣлъ, въ составъ котораго входитъ только одинъ изъ предѣловъ a и b, *Фурье* называетъ *внѣшнимъ*, а другой, въ который входятъ оба предѣла a и b, *внутреннимъ*.

Въ случаяхъ (1) и (2) *внѣшній* предѣлъ есть $b'=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$

. . . . (3) . (4) . . . . $a'=a+\left(-\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right)$.

Замѣтимъ, что въ внѣшній предѣлъ входитъ тотъ изъ предѣловъ a и b, для котораго $f''(x)$ и $f(x)$ имѣютъ одинакіе знаки.

Мы нашли еще другіе предѣлы:

для (1) и (2). . . . . . $a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$ и $b-\dfrac{f(b)}{f'(a)}$

. . (3) . (4). . . . . . $a-\dfrac{f(a)}{f'(b)}$, и $b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$;

но мы не знаемъ, будутъ ли они ближе къ x, нежели предъидущіе a и b, а потому мы не можемъ ихъ употребить для дальнѣйшаго приближенія.

§ **134**. Раскроемъ теперь законъ уменьшенія разности предѣловъ.

Пусть i будетъ разность предѣловъ a и b, а i' разность предѣловъ a' и b'. Для случаевъ (1) и (2) предѣлы a' и b' будутъ (10) и (7); внеся въ нихъ $b-i$ вмѣсто a, имѣемъ:

$$a'=b-i-\frac{f(b-i)}{f'(b)}$$

$$b'=b-\frac{f(b)}{f'(b)};$$

но

$$f(b-i)=f(b)-i\,f'(b)+\frac{i^2}{2}f''(b-\phi i),$$

гдѣ $b-\phi i$ есть количество $>a$ и $<b$; поэтому

$$a'=b-i-\frac{f(b)-i\,f'(b)+\dfrac{i^2}{2}f''(b-\phi i)}{f'(b)}$$

и

$$b'-a'=b-\frac{f(b)}{f'(b)}-b+i+\frac{f(b)}{f'(b)}-i+\frac{i^2}{2}\cdot\frac{f''(b-\Phi i)}{f'(b)},$$

т. е.

(12)
$$i'=\frac{i^2}{2}\cdot\frac{f''(b-\Phi i)}{f'(b)}.$$

Въ случаяхъ (3) и (4) предѣлы a' и b' будутъ (11) и (8), или, по вставкѣ въ нихъ $a+i$ вмѣсто b,

$$b'=a+i-\frac{f(a+i)}{f'(a)}=a+i-\frac{f(a)+i.\,f'(a)+\frac{i^2}{2}\cdot f''(a+\Phi' i)}{f'(a)} \text{ и}$$

$$a'=a-\frac{f(a)}{f'(a)},$$

а потому

$$b'-a'=a+i-\frac{f(a)+i.\,f'(a)+\frac{i^2}{2}\cdot f''(a+\Phi' i)}{f'(a)}-a+\frac{f(a)}{f'(a)}$$

или

(13)
$$i'=\frac{i^2}{2}\cdot\frac{f''(a+\Phi' i)}{f'(a)}.$$

Въ выраженіяхъ (12) (13) количества $f''(b-\Phi i)$ и $f''(a+\Phi' i)$ не извѣстны; то постараемся ихъ замѣнить другими.

Предѣлы a и b, по положенію, такъ близки, что $f'(x)$ и $f''(x)$ не имѣютъ въ ихъ промежуткѣ ни дѣйствительныхъ ни мнимыхъ корней. Положимъ теперь, что это справедливо и для $f'''(x)$; такъ, что указатели трехъ функцій $f'''(x)$, $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$ соотвѣтственно суть 0001. Этого мы всегда достигнемъ, стѣсняя предѣлы a и b, если $f(x)$ и $f'''(x)$ не имѣютъ общаго дѣлителя; въ противномъ случаѣ, должно поступать такъ же, какъ и въ § 132.

Когда это условіе имѣетъ мѣсто; тогда $f'''(x)$ сохраняетъ свой знакъ для всѣхъ значеній x среднихъ между a и b, а потому $f''(x)$ или непрерывно возрастаетъ или непрерывно уменьшается, съ возрастаніемъ x, начиная отъ a до b; слѣдовательно одинъ изъ результатовъ $f''(a)$, $f''(b)$ будетъ больше $f''(a+\Phi' i)$ и $f''(b-\Phi i)$, а другой меньше. Означивши наибольшее изъ количествъ $f''(a)$ и $f''(b)$ чрезъ $f''(B)$, а наименьшее изъ количествъ $f'(a)$ и $f'(b)$ чрезъ $f'(A)$, имѣемъ

$$\frac{f''(B)}{f'(A)} > \frac{f''(b-\phi i)}{f'(b)} \text{ или } \frac{f''(B)}{f'(A)} > \frac{f''(a+\phi' i)}{f'(a)};$$

поэтому

$$\left(i' = \frac{i^2}{2}\cdot\frac{f''(b-\phi i)}{f'(b)}\right) < i^2\cdot\frac{f''(B)}{2f(A)}$$

и

$$\left(i' = \frac{i^2}{2}\cdot\frac{f''(a+\phi' i)}{f'(a)}\right) < i^2\cdot\frac{f''(B)}{2f'(A)}.$$

И такъ разность новыхъ предѣловъ во всякомъ случаѣ меньше количества

$$i^2\cdot\frac{f''(B)}{2f'(A)}.$$

Отъ предѣловъ a' и b' мы переходимъ къ третьимъ предѣламъ a'' и b'', которыхъ разность i'' по предъидущему будетъ меньше

$$i'^2\cdot\frac{f''(B')}{2f'(A')},$$

гдѣ $f''(B')$ означаетъ наибольшій изъ результатовъ $f''(a')$ и $f''(b')$, а $f'(A')$ наименьшій изъ результатовъ $f'(a')$ и $f'(b')$. Но $f''(B) > f''(B')$ и $f'(A) < f'(A')$; то

$$i'^2\,\frac{f''(B')}{2\,f'(A')} < i'^2\,\frac{f''(B)}{2\,f'(B)}$$

и

$$i'' < i'^2\cdot\frac{f''(B)}{2f'(A)}.$$

Вставивъ сюда $\frac{i^2}{2}\cdot\frac{f''(B)}{2f'(B)}$ вмѣсто i', имѣемъ

$$i'' < i^4\left(\frac{f''(B)}{2f'(A)}\right)^3.$$

Поступивъ съ предѣлами a'' и b'', какъ съ предъидущими, найдемъ четвертые предѣлы a''' и b''', которыхъ разность i''' будетъ меньше

$$i^8\cdot\left(\frac{f''(B)}{2f'(A)}\right)^7.$$

Продолжая шакимъ образомъ далѣе, находимъ рядъ предѣловъ искомаго корня:

$$(14)\qquad \begin{matrix} a, & a', & a'', & a''', & a^{IV},\ldots\ldots \\ b, & b', & b'', & b''', & b^{IV},\ldots\ldots \end{matrix}$$

$$i,\ i^2.\frac{f''(B)}{2f(A)},\ i^4.\left(\frac{f''(B)}{2f'(A)}\right)^3,\ \ i^8.\left(\frac{f''(B)}{2f'(A)}\right)^7,\ i^{16}.\left(\frac{f''(B)}{2f'(A)}\right)^{15}\ \text{и пр,}$$

Когда извѣстны только низшіе предѣлы a, a', a'', a''',......; тогда для высшихъ мы возьмемъ

$$a+i,\ a'+i^2.\left(\frac{f''(B)}{2f'(A)}\right),\ a''+i^4.\left(\frac{f''(B)}{2f'(A)}\right)^3,\ a'''+i^8.\left(\frac{f''(B)}{2f'(A)}\right)^7,\ldots\ldots,$$

а когда извѣстны высшіе b, b', b'',.....; то для низшихъ возьмемъ

$$b-i,\ b'-\frac{i^2f''(B)}{2f'(A)},\ b''-i^4.\left(\frac{f''(B)}{2f'(A)}\right)^3,\ b'''-i^8.\left(\frac{f''(B)}{2f'(A)}\right)^7,\ldots\ldots$$

Посмотримъ теперь, какъ расположить вычисленіе, чтобы не было лишней работы.

§ **135**. Здѣсь часто встрѣчается дѣленіе огромныхъ чиселъ, что было бы довольно продолжительно по обыкновенному способу, и потому *Фурье* обратилъ на это вниманіе, и далъ другой способъ дѣленія, который онъ назвалъ *division ordonnée*; мы станемъ его называть *сокращеннымъ дѣленіемъ*.

Вотъ въ чемъ оно состоитъ:

»Подчеркнувъ съ лѣвой руки къ правой нѣсколько цыфръ, назовемъ число, »выраженное этими цыфрами, *подчеркнутымъ дѣлителемъ*« (*Фурье* его называетъ *diviseur désigné*). »Этимъ дѣлителемъ дѣлимъ дѣлимое, съ тою »только разницею, что, снеся къ остатку, произшедшему отъ перваго »частнаго дѣленія слѣдующую цыфру, новое *частное дѣлимое* поправля»емъ, вычитая изъ него нѣкоторое число; остатокъ назовемъ *поправлен»нымъ частнымъ дѣлимымъ*, и смотримъ, сколько разъ въ немъ можетъ »содержаться подчеркнутый дѣлитель: это число разъ будетъ слѣдующая »цыфра частнаго; ею умножаютъ подчеркнутаго дѣлителя, и произве»деніе вычитаютъ изъ поправленнаго частнаго дѣлимаго; къ остатку »сносятъ слѣдующую цыфру даннаго дѣлимаго, и продолжаютъ по предъ»идущему.

»Поправка частнаго дѣлимаго производится слѣдующимъ образомъ: »взявши m найденныхъ уже цыфръ частнаго, пишутъ ихъ въ обратномъ »порядкѣ; потомъ ставятъ подъ ними m цыфръ, слѣдующихъ послѣ »подчеркнутаго дѣлителя, и помножаютъ соотвѣтственно каждую верх-

»нюю цыфру на нижнюю; отъ того получаемъ m произведенiй, кото»рыхъ сумма будетъ искомая поправка.

»Прежде нежели станемъ сносить новую цыфру къ остатку, полу»ченному отъ какого-либо частнаго дѣленiя, мы должны смотрѣть, »будетъ ли этотъ остатокъ болѣе или по крайней мѣрѣ равенъ суммѣ »найденныхъ цыфръ частнаго. Если это условiе удовлетворено, то это »признакъ, что послѣдняя цыфра найденнаго частнаго есть истинная; въ »противномъ случаѣ она остается въ неизвѣстности и это признакъ, что »мы мало взяли цыфръ для подчеркнутаго дѣлителя. Въ послѣднемъ слу»чаѣ продолжаемъ употребленiе предъидущаго правила: сносимъ къ остат»ку слѣдующую цыфру дѣлимаго, и производимъ надлежащую поправку. »Если эта поправка не возможна; то заключаемъ, что послѣдняя цыфра »найденнаго частнаго слишкомъ велика: ее должно убавить единицею. Но »если поправка возможна; то совершивъ ее, сносимъ къ остатку новую »цыфру дѣлимаго; отъ того получимъ новое частное дѣлимое; потомъ »прибавляемъ одну цыфру къ дѣлителю, и будемъ имѣть новый под»черкнутый дѣлитель. Послѣ того, по изложенному правилу, дѣлаемъ »поправку, соотвѣтствующую новому дѣлителю, т. е. полученныя уже цыф»ры частнаго сравниваемъ со столькими же цыфрами, слѣдующими послѣ »новаго подчеркнутаго дѣлителя. Сдѣлавши эту поправку, получаемъ »новое поправленное дѣлимое, съ которымъ поступаемъ по предъ»идущему, пользуясь новымъ подчеркнутымъ дѣлителемъ. Можно также »воротиться къ прежнему дѣлителю. Вообще, можно въ продолженiе дѣй»ствiя убавлять и прибавлять число цыфръ подчеркнутаго дѣлителя, съ »тѣмъ, чтобы въ то же время увеличить или уменьшить число поправокъ.«

На это правило Г-нъ *Дробишъ* (*) далъ слѣдующее доказательство:

Пусть дано перемножить два числа десятичной системы

$$a.10^4+b.10^3+c.10^2+d.10+e,\quad \alpha.10^3+\beta.10^2+\gamma.10+\delta;$$

произведенiе ихъ будетъ

$$\begin{array}{ll}
(15) & a\alpha.10^7+b\alpha.10^6+c\alpha.10^5+d\alpha.10^4+e\alpha 10^3 \\
(16) & \quad +a\beta.10^6+b\beta.10^5+c\beta.10^4+d\beta 10^3+e\beta.10^2 \\
(17) & \quad\quad +a\gamma.10^5+b\gamma.10^4+c\gamma.10^3+d\gamma.10^2+e\gamma.10 \\
(18) & \quad\quad\quad +a\delta.10^4+b\delta.10^3+c\delta\ 10^2+d\delta.10+e\delta,
\end{array}$$

которое изобразимъ чрезъ

$$(19)\qquad A.10^7+B.10^6+C.10^5+D.10^4+E.10^3+F.10^2+G.10+H.$$

(*) Grundzüge der Lehre von den höheren numerischen Gleichungen. Von M. W. Drobisch. Leipzig, 1834.

Раздѣлимъ теперь это произведеніе на одинъ изъ его производителей, на пр. на

$$a.10^4+b.10^3+c.10^2+d.10+e.$$

Возьмемъ для подчеркнутаго дѣлителя нѣсколько первыхъ членовъ, на пр. два, $a.10^4+b.10^3$. Цыфры дѣлимаго $A10+B$ содержатъ сумму $a\alpha 10+b\alpha+a\beta$ и цыфры 6-го порядка отъ членовъ 5-го порядка въ частныхъ произведеніяхъ (15), (16) и (17). Вычтя изъ $A10+B$ произведеніе $(a.10+b)\alpha$, остатокъ $R.10^6$ долженъ быть неменьше $c\alpha.10^5$, т. е. $R10^6 \geqq c\alpha.10^5$, или $R10 \geqq c\alpha$. А какъ $c<10$, то послѣднее условіе будетъ удовлетворено когда $R10 \geqq 10.\alpha$ или $R \geqq \alpha$. И такъ *если первый остатокъ больше или равенъ полученной цыфрѣ частнаго; то мы увѣрены, что эта цыфра есть истинная*. Остатокъ R съ слѣдующею цыфрою дѣлимаго, т. е. $D_1=R10+C$ содержитъ сумму $a\beta.10+b\beta+c\alpha+a\gamma$ и цыфры 5-го порядка, происходящія отъ суммы членовъ 4-го порядка. Вычтя изъ D_1 произведеніе $c\alpha$ (поправка), $D_1-c\alpha$(поправленное частное дѣлимое) будетъ содержать $a\beta.10+b\beta+a\gamma$; раздѣливши его на $a10+b$, вычитаемъ изъ него произведеніе *подчеркнутаго* дѣлителя на новую цыфру частнаго. Если эта цыфра есть β, то остатокъ $R'=D_1-c\alpha-(a10+b)\beta$ будетъ сумма: $a\gamma$ съ цыфрами 5-го порядка, произшедшими отъ членовъ 4-го порядка, а потому $R'10^5$ должно быть неменьше $(d\alpha+c\beta).10^4$, или $R'10 \geqq d\alpha+c\beta$.....$(a)$: это условіе будетъ удовлетворено, когда $R' \geqq \alpha+\beta$, т. е. *когда новый остатокъ будетъ больше или равенъ суммѣ найденныхъ цыфръ частнаго*. Если же $R'<\alpha+\beta$; то это еще не есть признакъ, что вторая цыфра частнаго не есть истинная: условіе (a) можетъ быть удовлетворено. Снеся къ R' новую цыфру дѣлимаго имѣемъ $R'10+D$: это количество по условію (a) необходимо должно быть больше второй поправки $d\alpha+c\beta$. Слѣдовательно, если $R'10+D<d\alpha+c\beta$; то вторая цыфра частнаго не есть истинная; тогда ее уменьшаютъ единицею и производятъ новую поправку. Если же $R'10+D>d\alpha+c\beta$; то вторая цыфра есть истинная; совершивъ поправку, съ новымъ частнымъ дѣлимымъ $D_2=R'10+D-(d\alpha+c\beta)$ поступаемъ по предъидущему, или, сносимъ къ нему новую цыфру E, и $D_2 10+E$ дѣлимъ на $a10$[illegible]$10+c$, прилагая сюда предъидущія сужденія. Этого достаточно [illegible]ясненія изложеннаго правила.

§ **136.** Сокращенное дѣленіе имѣетъ большія выгоды предъ обыкновеннымъ дѣленіемъ: въ немъ только тѣ цыфры дѣлителя вводятся въ вычисленіе, которыя имѣютъ вліяніе на частное. Слѣдующіе примѣры покажутъ достоинство этого дѣленія.

Примѣръ I.

939599285 | 44123 подчеркнутыя цыфры принимаются за дѣлитель.
88 | 21295

59 ($5>2$, цыфра 2 годится)
2 $=2.1$ (первая поправка)

57 (2-е частное поправленное дѣлимое)
44

135 ($13>2+1$, цыфра 1 годится)
$5=1.1+2.2$ (2-я поправка)

130 (3-е поправленное частное дѣлимое)
88

429 ($42>2+1+2$, цыфра 2 годится)
10 $=2.1+1.2+2.3$ (3-я поправка)

419 (4-е поправленное частное дѣлимое)
396

239 ($23>2+1+2+9$, цыфра 9 годится)
16 $=9.1+2.2+1.3+2.0$ (4-я поправка).

223 (5-е поправленное частное дѣлимое)
220

32 ($3<2+1+2+9$, признакъ, что въ дѣлителѣ мало подчеркнутыхъ цыфръ. Такъ какъ поправка $5.1+9.2+2.3=29$ меньше 32; то цыфра 5 есть истинная.

32
29 5-я поправка)

38 | 44123 новый подчеркнутый дѣлитель есть 441.
37 $=5.2+9.3$ (поправка, соотвѣтствующая новому дѣлителю)

15
0 $=441.0$

$15<2+1+2+9+5+0$)
$15=0.2+5.3$ (вторая поправка, соотвѣтств. нов. дѣлит.)

0

Примѣръ II.

123456789873647 | 234567898765

1170 | 52631589

645 (64<5, цыфра 5 годится)

25 = 5.5

620 . . . 2-е частн. попр. дѣлим.

468

2526 (152>5+2, цыфра 2 годится)

40 = 5.6+2.5

1486 . . . 3-е частн. попр. дѣлим.

1404

827 (82>5+2+6, цыфра 6 годится)

77 = 5.7+2.6+6.5

750 . . . 4-е попр. частн. дѣлим.

702

488 (48>5+2+6+3, цыфра 3 годится)

105 = 5.8+2.7+6.6+3.5

383 . . . 5-е попр. частн. дѣлим.

234

1499 (149>5+2+6+3+1, цыфра 1 годится)

126 = 5.9+2.8+6.7+3.6+1.5

1373 . . . 6-е частн. попр. дѣлим.

1170

2038 (203>5+2+6+3+1+5, цыфр. 5 годится)

158 = 5.8+2.9+6.8+3.7+1.6+5.5

1880 . . . 7-е частн. попр. дѣлим.

1872

87 (8<5+2+6+3+1+5+8, цыфра 8 въ неизв.)

206 (поправка не возможна, а потому вмѣсто 8 должно взять 7).

1880

1638 = 234.7

2427 (242>5+2+6+3+1+5+7, цыфра 7 годится)

201 = 5.7+2.8+6.9+3.8+1.7+5.6+7.5

2226 . . . . 8-е частн. попр. дѣлим.

2106

120 (120>5+2+6+3+1+5+7+9, цыфра 9 годится)

Такимъ образомъ можно продолжать какъ угодно далеко.

§ 137. Мы часто должны будемъ дѣлать вставку огромныхъ чиселъ вмѣсто x въ рядъ функцій

$$f^m(x),\ f^{m-1}(x), \ldots f'(x),\ f(x),$$

что кажется весьма затруднительнымъ. Но *Фурье* облегчилъ это слѣдующимъ образомъ:

Положимъ, что a есть первое приближенное значеніе x, и что мы уже имѣемъ результаты

$$f(b),\ f'(b),\ f''(b), \ldots f^{m-1}(b),\ f^m(b);$$

пусть h будетъ новая часть корня, и положимъ, что требуется вставить $b+h$ вмѣсто x. Извѣстно, что

$$f(b+h) = f(b) + f'(b).h + f''(b).\frac{h^2}{2} + \ldots + f^{m-1}(b).\frac{h^{m-1}}{1.2..(m-1)} + f^m(b)\frac{h^m}{1.2..m},$$

$$f'(b+h) = f'(b) + f''(b).h + f'''(b).\frac{h^2}{2} + \ldots + f^m(b)\frac{h^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}$$

$$f''(b+h) = f''(b) + f'''(b).h + f^{IV}(b).\frac{h^2}{2.} + \ldots$$

. . . .

$$f^{m-1}(b+h) = f^{m-1}(b) + f^m(b).h$$

$$f^m(b+h) = f^m(b).$$

Разсматривая эти выраженія, можно вывести слѣдующее правило для полученія результатовъ:

$$f(b+h),\ f'(b+h),\ f''(b+h), \ldots f^{m-1}(b+h),\ f^m(b+h).$$

Написавъ въ строку извѣстные уже результаты

1-ая $\quad f(b),\ f'(b),\ f''(b), \ldots f^{m-2}(b),\ f^{m-1}(b),\ f^m(b),$

подпишемъ подъ каждымъ, исключая перваго, множителя h, и произведемъ умноженіе; отъ того получимъ новую строки

2-ая $\quad f'(b).h,\ f''(b).h, \ldots f^{m-2}(b).h,\ f^{m-1}(b).h,\ f^m(b).h.$

Помноживъ на h каждый членъ этой строки, исключая перваго, и, раздѣливъ произведенія на 2, мы получимъ третью строку

3-ая $\quad f''(b).\frac{h^2}{2},\ f'''(b).\frac{h^2}{2}, \ldots f^{m-2}(b).\frac{h^2}{2},\ f^{m-1}(b).\frac{h^2}{2},\ f^m(b).\frac{h^2}{2}.$

Помноживши опять на h каждый членъ этой строки, исключая перваго, **дѣлимъ** произведенія на 3; отъ того найдемъ строку

4-ая $\quad f''(b).\frac{h}{2.3}, \ldots f^{m-2}(b).\frac{h^2}{2.3}, \quad f^{m-1}(b).\frac{h^2}{2.3}, \quad f^{m}(b).\frac{h^2}{2.3}.$

Продолжая такимъ образомъ помножать на h каждый членъ новой строки, исключая перваго, и произведеніе дѣлить на число, показывающее порядокъ строки, мы получимъ наконецъ строки:

(m)-ая $\quad f^{m-1}(b).\frac{h^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}, f^{m}(b).\frac{h^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}$

$(m+1)$-ая $\quad f^{m}(b)\frac{h^{m}}{1.2.3,..m}.$

Послѣ того складываемъ одни первые члены всѣхъ строкъ, сумма **ихъ** будетъ $f(b+h)$; сумма вторыхъ членовъ всѣхъ строкъ будетъ $f'(b+h)$; сумма третьихъ членовъ будетъ $f''(b+h)$; вообще сумма $(n+1)=$ ныхъ членовъ всѣхъ строкъ составитъ $f^{n}(b+h)$. Такимъ простымъ дѣйствіемъ найдутся всѣ результаты:

$$f(b+h),\ f'(b+h),\ f''(b+h)\ldots f^{m-1}(b+h)..f^{m}(b+h).$$

Этимъ правиломъ можно пользоваться при отдѣленіи корней и при вычисленіи корней по способу *Лагранжа*.

§ **138. Вычисливъ по § 133 помощію предѣловъ a и b новый предѣлъ искомаго корня, необходимо вычислить и другой, чтобы опредѣлить цыфры, принадлежащія точному значенію корня.** Но произведя вычисленіе втораго предѣла независимо отъ перваго, мы сдѣлаемъ много лишней работы. Можно вычислить вторый предѣлъ, гораздо проще, какъ мы уже показали въ § 134, а именно: придавши къ вычисленному уже предѣлу, или отнявши отъ него, разность $i^2\frac{f''(B)}{2f'(A)}$, гдѣ i есть разность предъидущихъ предѣловъ, $f''(B)$ наибольшій изъ результатовъ $f''(a)$, $f''(b)$, а $f'(A)$ наименьшій изъ результатовъ $f'(a)$ и $f'(b)$, принимая эти результаты независимо отъ своихъ знаковъ. Отношеніе $\frac{f''(B)}{2f'(A)}$ можетъ быть или больше или меньше единицы. Означивъ чрезъ $\left(\frac{1}{10}\right)^{k}$ единицу непосредственно высшаго порядка этого отношенія, показатель k будетъ положительный, когда

$\frac{f''(B)}{2f'(A)}<1$, а отрицательный въ противномъ случаѣ. На пр. когда первыя цыфры частнаго $\frac{f''(B)}{2f'(A)}$ суть 0,003; тогда $\left(\frac{1}{10}\right)^{\kappa} = 0{,}01 = \left(\frac{1}{10}\right)^{2}$, и $k=2$. Если первыя цыфры $\frac{f''(B)}{2f'(A)}$ суть напр. 4752; то $\left(\frac{1}{10}\right)^{\kappa}=10000 = \left(\frac{1}{10}\right)^{-4}$, и $k=-4$. Положимъ, что единица высшаго порядка разности $i=b-a$ есть $\left(\frac{1}{10}\right)^{n}$; то имѣемъ: $i^2<\left(\frac{1}{10}\right)^{2n}$ и $\frac{f''(B)}{2f'(A)}<\left(\frac{1}{10}\right)^{\kappa}$, а потому $i^2.\frac{f''(B)}{2f'(A)}<\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+\kappa}$. Зная одинъ изъ предѣловъ a' и b', на пр. a', вмѣсто втораго можно взять $a'+\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+\kappa}$.

§ 139. Въ вычисленіе новаго предѣла по Ньютонову способу входитъ только одинъ изъ предѣлъ a и b, и въ § 133 мы видѣли, что для того должно взять внѣшній предѣлъ, т. е. тотъ, для котораго $f(x)$ и $f''(x)$ имѣютъ одинакіе знаки; онъ будетъ высшій въ случаяхъ (1) и (2), а низшій въ случаяхъ (3) и (4). Означивъ его чрезъ β, новый внѣшній предѣлъ будетъ $\beta'=\beta-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$; онъ, по сказанному выше, разнится отъ другаго предѣла, исправленнаго по *Фурье*, менѣе нежели $\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+\kappa}$, а потому β' имѣетъ только $2n+k$ цыфръ, принадлежащихъ точному значенію корня; слѣдовательно частное $\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ также будетъ имѣть $2n+k$ общихъ цыфръ съ корнемъ; такъ, что дѣленіе $f(\beta)$ на $f'(\beta)$ достаточно продолжить до цыфры порядка $2n+k$ включительно. Но остальными цыфрами не должно пренебрегать, а надобно ихъ замѣнить единицею порядка $2n+k$; потому что, пренебрегая ими, мы можемъ удалиться отъ точнаго значенія болѣе нежели на $\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+\kappa}$. Въ самомъ дѣлѣ: въ случаяхъ (1) и (2) $\beta'=\beta-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ больше точнаго значенія корня, и разнится отъ него менѣе нежели $\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+\kappa}$; взявши вмѣсто точнаго значеніе $\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ количество меньшее, предѣлъ β' увеличится, и разность его отъ корня можетъ сдѣлаться болѣе $\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+k}$. То же самое и въ случаяхъ (3) и (4), $\beta'=\beta-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ меньше точнаго значенія корня, а потому, взявши вмѣсто $\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ количество меньшее, предѣлъ β' уменьшится, и разность его отъ точнаго значенія корня можетъ сдѣлаться больше $\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+k}$.

И такъ, вычисливши частное $\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ до цыфры порядка $2n+k$ включительно, должно ее увеличить единицею; придавши это приближенное значеніе частнаго $\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ къ β, получимъ приближенное значеніе новаго предѣла β', которое навѣрное разнится отъ корня менѣе нежели $\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+k}$. Но мы не знаемъ, будетъ ли оно служить высшимъ или низшимъ предѣломъ; потому что точное значеніе β', будучи уменьшено въ случаяхъ (1) и (2), а увеличено въ случаяхъ (3) и (4), можетъ перейти за корень. Чтобы это узнать, должно вставить полученное значеніе β' вмѣсто x въ $f(x)$, и, судя по знаку результата мы узнаемъ, будетъ ли оно больше или меньше корня; въ первомъ случаѣ, чтобы получить низшій предѣлъ отнимаемъ $\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+k}$ отъ β', а во второмъ, чтобы получить высшій предѣлъ, придаемъ $\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+k}$ къ β'. Такимъ образомъ мы опредѣлимъ новые предѣлы a' и b'. Желая продолжить вычисленіе, поступаемъ съ a', и b' точно такъ же, какъ и съ a и b. Пусть β_1, будетъ новый внѣшній предѣлъ, а n' порядокъ послѣдней десятичной цыфры этого предѣла; то частное $\frac{f(\beta_1)}{f'(\beta_1)}$ вычисляемъ до цыфры порядка $2n'+k$ включительно, потомъ увеличиваемъ эту цыфру единицей, и продолжаемъ дѣйствіе по предъидущему. Такимъ образомъ число десятичныхъ цыфръ при каждомъ дѣйствіи будетъ увеличиваться болѣе и болѣе.

Такъ какъ данные предѣлы a и b разнятся менѣе, нежели $\left(\frac{1}{10}\right)^{n}$; то они имѣютъ n цыфръ общихъ, которыя принадлежатъ и корню. Перейдя отъ этихъ предѣловъ къ другимъ a' и b', число точныхъ цыфръ корня будетъ $2n+k$. Потомъ переходимъ къ третьимъ предѣламъ, для которыхъ число точныхъ цыфръ корня будетъ $2n'+k=(2n+k).2+k=4n+3k$. Перейдя къ четвертымъ предѣламъ, будемъ имѣть $8n+7k$ точныхъ цыфръ кореня, и т. д.

Чтобы отъ перваго дѣйствія приблизиться къ корню, необходимо, чтобы было $2n+k>n$ или $n>-k$, что не всегда случается, если одинъ изъ показателей k и n отрицательный. А потому, опредѣливъ k, показатель порядка десятичной цыфры, непосредственно превышающей порядокъ первой цыфры частнаго $\frac{f''(B)}{2f'(A)}$, должно смотрѣть, будетъ ли удовлетворено условіе $n>-k$. Если оно не удовлетворено; то начальные предѣлы a и b должно стѣснять, вставляя въ $f(x)$ вмѣсто x числа $>a$ и $<b$ до тѣхъ поръ, какъ разность новыхъ предѣловъ сдѣлается меньше $\left(\frac{1}{10}\right)^n$, гдѣ $n=1-k$.

§ **140**. Изъ сказаннаго въ послѣднихъ §§ выводимъ слѣдующее правило: »Чтобы отъ двухъ предѣловъ a и b, содержащихъ одинъ только дѣйствительный корень уравненія $f(x)=o$, и не открывающихъ ни одного »корня въ уравненіяхъ: $f'(x)=o$, $f''(x)=o$, $f'''(x)=o$, перейти къ двумъ »другимъ, заключающимъ тотъ же корень, и столь близкимъ между »собою какъ угодно, должно поступать слѣдующимъ образомъ:

»Взявши наибольшій изъ результатовъ $f''(a)$ и $f''(b)$, дѣлимъ его на »наименьшее изъ двухъ произведеній $2f'(a)$ и $2f'(b)$, (здѣсь не обращается »вниманіе на знаки результатовъ); ограничившись только познаніемъ »порядка первой цыфры частнаго, замѣчаемъ единицу непосредственно »высшаго порядка. Пусть эта единица будетъ $\left(\frac{1}{10}\right)^k$; то узнаемъ, будетъ »ли k положительное или отрицательное. Опредѣливши потомъ $\left(\frac{1}{10}\right)^n$, »единицу непосредственно высшаго порядка разности данныхъ предѣловъ $b-a$, смотримъ, удовлетворено ли условіе $n>-k$: когда оно не удовлетво»рено; тогда должно сближать предѣлы a и b до тѣхъ поръ, какъ будетъ »$n=1-k$ или $n>1-k$. Послѣ того смотримъ, для котораго изъ »предѣловъ a и b функціи $f(x)$ и $f''(x)$ имѣютъ одинакіе знаки; »этотъ предѣлъ будетъ *внѣшній*. Означая его чрезъ β, беремъ результаты »$f(\beta)$ и $f'(\beta)$, и, по правилу сокращеннаго дѣленія, дѣлимъ первый »результатъ на второй; это дѣленіе продолжаемъ до цыфры порядка

»$2n+k$, увеличиваемъ ее единицею, и полученное такимъ образомъ
»приближенное значеніе частнаго $\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ придаемъ къ предѣлу β, или
»вычитаемъ изъ него, смотря по тому, будутъ ли результаты $f(\beta)$
»и $f'(\beta)$ имѣть разные или одинакіе знаки. Полученный новый предѣлъ
»β' будетъ разниться отъ корня менѣе, нежели $\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+k}$; но мы не зна-
»емъ, будетъ ли онъ высшій или низшій предѣлъ. Чтобы различить это,
»вставляемъ его въ $f(x)$ вмѣсто x: когда β' есть высшій предѣлъ; тогда,
»уменьшивъ послѣднюю его цыфру единицею, получимъ низшій предѣлъ;
»если же β' есть низшій предѣлъ, то, увеличивъ послѣднюю его цыфру
»единицею, получимъ высшій предѣлъ.

»Съ новыми предѣлами поступаемъ такъ же, какъ съ a и b, и продол-
»жаемъ такимъ образомъ произвольно далеко. Отъ каждыхъ новыхъ
»предѣловъ получаются новыя точныя цыфры корня, и число десятичныхъ
»цыфръ, считая съ запятой, по концѣ перваго дѣйствія будетъ $2n+k$,
»по концѣ втораго $4n+3k$, по концѣ третьяго $8n+7k$, и т. д.

Вотъ какой вѣрный и правильный ходъ сообщилъ *Фурье* Нютонову способу вычисленія корней, остававшемуся столько времени съ недостатками, которые ускользнули отъ умовъ *Ейлера* и *Лагранжа*.

§ **141**. Слѣдующіе примѣры покажутъ простоту изложеннаго правила.

Примѣръ 1.

Фурье **вычисляетъ корень уравненія**

$$x^3-2x-5=o,$$

которое рѣшали *Нютонъ*, *Лагранжъ* и *Коши*. Чтобы отдѣлить его корни, беремъ функціи

$$f(x)=x^3-2x-5$$

$$f'(x)=3x^2-2$$

$$f''(x)=6x$$

$$f'''(x)=6$$

и составляемъ ряды знаковъ

	f''',	f'',	f',	f;
[—1]	+	—	+	—
			1	4
[<0]	+	—	—	—
			2	5.
[0]	+	0	—	—
[>0]	+	+	—	—
[+1]	+	+	+	—
[+10]	+	+	+	+

Предѣлы —1 и 0 открываютъ два корня; но эти корни мнимые; потому что $\frac{4}{1}+\frac{5}{2}$. И такъ данное уравненіе имѣетъ только одинъ дѣйствительный корень, который заключается между 1 и 10. Чтобы опредѣлить цѣлую часть этого корня, стѣсняемъ его предѣлы, и находимъ ряды

[2]	+	+	+	—
		12	10	1
	0	0	0	1
[3]	+	+	+	+;
		18	25	16

откуда видимъ, что искомый корень больше 2 и меньше 3. Такъ какъ рядъ указателей есть 0001; то, по § 132, можно бы было приступить къ приближенію. Но прежде должно опредѣлить k: наибольшее значеніе $f''(x)$ есть 18, а наименьшее значеніе $2.f'(x)$ есть 2.10; частное $\frac{f''(B)}{2.f'(A)}$ есть $\frac{18}{20}=0{,}9$; единица непосредственно высшаго порядка есть $\left(\frac{1}{10}\right)^{k}=1$; слѣдовательно $k=o$. Разность предѣловъ 2 и 3 есть 1, а потому $n=o$, и условіе $n>=1-k$ не удовлетворено. И такъ предѣлы 2 и 3 не довольно близки, чтобы начать приближеніе. Вставивши вмѣсто x число среднее между 2 и 3, а именно 2,1, получаемъ ряды

	f'''	f''	f'	f
[2]	+	+	+	—
		12	10	1
[2,1]	+	+	+	+
		12,6	11,23	0,061

которые показываютъ, что искомый корень заключается между 2 и 2,1. Наибольшее значеніе $f''(x)$, раздѣленное на наименьшее значеніе $2f'(x)$, есть $\frac{12,6}{20}=0,63$; разность предѣловъ 2 и 2,1 есть $\frac{1}{10}$, а потому $k=o, n=1$, и условіе $n=1-k$ выполнено. Слѣдовательно предѣлы 2 и 2,1 довольно близки, чтобы начать приложеніе правила § 140. Здѣсь внѣшній предѣлъ есть 2,1; потому что результаты $f(2,1)$ и $f''(2,1)$ съ одинакими знаками.

Чтобы получить первое приближенное значеніе, должно изъ $\beta=2,1$ вычесть частное $\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}=\frac{f(2,1)}{f'(2,1)}=\frac{0,061}{11,23}$, продолживъ дѣленіе до десятичной цыфры порядка $\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+k}=\left(\frac{1}{10}\right)^2$, т. е. до сотенъ включительно, и увеличивъ послѣднюю цыфру единицею. Такъ какъ $\frac{0,061}{11,23}=0,00\ldots$; то отъ 2,1 должно отнять 0,01; слѣдовательно первое приближенное значеніе корня будетъ 2,09, которое разнится отъ точнаго значенія корня менѣе, нежели $\frac{1}{100}$. Чтобы узнать, будетъ ли 2,09 больше или меньше корня, вставляемъ 2,09 въ $f(x)$ вмѣсто x, поступая по § 137. Слѣдующая таблица представляетъ это вычисленіе

	$f(2)$	$f'(2)$	$f''(2)$	$f'''(2)$
	—1	10	12	6
		0,09	0,09	0,09
		0,9	1,08	0,54
			9	9
(дѣлимъ на 2)			972	486
			0,0486	0,0243
				9
(дѣлимъ на 3)				2187
				0,000729

откуда выводимъ

0,9			
486			
729	10		
0,949329	1,08	12	
—1	243	0,54	

$f(2,09) = -0,050671, f'(2,09) = 11,1043, f''(2,09) = 12,54, f'''(0,08) = 6.$

Такъ какъ результатъ $f(2,09)$ отрицательный; то 2,09 меньше корня, который поэтому заключается между 2,09 и 2,1. Разность этихъ предѣловъ есть $\frac{1}{100} = \left(\frac{1}{10}\right)^2$, а потому частное $\frac{f(2,1)}{f'(2,1)} = \frac{0,061}{11,23}$ вычисляемъ до четвертой десятичной цыфры, и увеличиваемъ эту цыфру единицею; отъ чего получаемъ 0,0055, количество, которое должно вычесть изъ 2,10; и такъ второе приближенное значеніе корня будетъ 2,0945, оно разнится отъ точнаго значенія менѣе нежели 0,0001.

Это приближенное значеніе корня вставляемъ въ $f(x)$, чтобы узнать, будетъ ли оно служить высшимъ или низшимъ предѣломъ; вставка производится по § 137, а именно:

$f(2,09)$,	$f'(2,09)$,	$f''(2,09)$,	$f'''(2,09)$
—0,050671	11,1043	12,54	6
	0,0045	0,0045	0,0045
	555215	6270	
	444172	5016	
	0,04996935	0,056430	0,0270
		45	45
		282150	1350
		225720	1080
		2539350	12150
		0,0001269675	0,00006075
			45
			30375
			24300
			273375
			0,000000091125;

откуда

0,04996935		
0,0001269675		
0,000000091125	11,1043	
0,050096408625	0,056430	12,54
—0,050671	0,00006075	0,0270

$f(2,0945) = -0,000574591375, f'(2,0945) = 11,16079075, f''(20945) = 12,5670$

$$f'''(2,0945) = 6.$$

Результатъ $f(2,0945)$ отрицательный, а потому 2,0945 меньше корня. И такъ искомый корень заключается между 2,0945 и 2,0946: второй изъ этихъ предѣловъ есть внѣшній. Чтобы продолжить вычисленіе должно его вставить въ рядъ функцій; результаты получатся по § 137, взявши $h=0,0001$. Они будутъ

0,001116079075	
62835	
1	11,16079075
0,001116141911	125670
—0,000574591375	3
$f(2,0946) = 0,000541550536$	$f'(2,0946) = 11,16204748$

12,5670
6

$f''(2,0946) = 12,5676, \qquad f'''(2,0946) = 6.$

Такъ какъ разность предѣловъ 2,0945 и 2,0946 есть $0,0001 = \left(\frac{1}{10}\right)^4$; то $n=4$, и частное $\frac{0,000541550536}{11,16204748}$ должно вычислить до 8-й десятичной цифры включительно. Это приближенное частное будетъ 0,00004851; увеличивъ послѣднюю его цыфру единицею, и вычтя его изъ 2,0946,.

получимъ третье приближенное значеніе корня, 2,09455148, которое вставляемъ, какъ здѣсь показано, въ рядъ функцій :

$f(2{,}0945)$	$f'(2{,}0945)$	$f''(2{,}0945)$	$f'''(2{,}0945)$
—0,000574591375,	11,16079075	12,5670	6
	0,00005148	0,00005148	0,00005148
	8928632600	1005360	30888
	4464316300	502680	
	1116079075	125670	
	5580395375	628350	
	0,0005745575078100	0,000646949160	0,00030888
		5148	5148
		5175593280	247104
		2587796640	123552
		646949160	30888
		3234745800	154440
		3330494275680	159011424
		0,00000001665247137860	0,0000000079505712
			5148
			636045696
			318022848
			79505712
			397528560
			409295405376
			0,0000000000000136431801792

отсюда

0,0005745575078100
1665247137840
136431801792

0,000574574160417810201792
—0,000574591375

$f(2{,}09455148) = -0{,}000000017214582189798208$

11,16079075
646949160
79505712

$f'(2{,}09455148) = 11{,}1614377071105712$

12,5670
30888

$f''(2{,}09455148) = 12{,}56730888$ $f'''(2{,}99455148) = 6$

Такъ какъ $f(2,09455148)$ отрицательный; то искомый корень заключается между 2,09455148 и 2,09455149. Желая еще болѣе приблизиться къ корню, вставляемъ второй предѣлъ въ рядъ функцій; результаты этихъ вставокъ получатся изъ предъидущихъ весьма простымъ вычисленіемъ, а именно:

$$\begin{array}{r}
0{,}0000001116143770711057\,12 \\
628365444 \\
1 \\
\hline
0{,}0000001116143776994711\,57 \\
-0{,}0000000172145821897982\,08 \\
\hline
f(2{,}09455149)=0{,}0000000943997955096729\,49
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
11{,}16143770711057\,12 \\
1256730888 \\
3 \\
\hline
f'(2{,}09455149)=11{,}16143783278366\,03
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
12{,}56730888 \\
6 \\
\hline
\end{array}$$

$$f''(2{,}09455149)=12{,}56730894 \quad f'''(2{,}09455169)=6.$$

Теперь $n-8$, а потому частное $\frac{f(2{,}09455149)}{f''(2{,}09455149)}$ вычисляемъ до 16-той десятичной цыфры включительно, и увеличиваемъ эту цыфру единицею; отъ того получаемъ дробь 0,0000000084576735, которую вычитаемъ изъ 2,09455149. Остатокъ 2,0945514815423265 будетъ четвертое приближенное значеніе корня, которое разнится отъ истиннаго менѣе нежели $\left(\frac{1}{10}\right)^{16}$. Оно меньше корня; потому что

$f(2{,}0945514815423265)$

$=-0{,}000000000000000102107496044367984543249518586\,5375$

$f'(2{,}0945514815423265)=11{,}16143772649346472644563309780675$

$f''(2{,}0945514815423265)=12{,}5673088892539590$

$f'''(2{,}0945514815423265)=6.$

Изъ этихъ результатовъ получатся по § 137 результаты, соотвѣтствующіе высшему предѣлу 2,09455148154232б6: они суть

$$f(2,09455148154232б6)$$

$$=0,00000000000000009506881220566669004861257018596$$

$$f'(2,09455148154232б6)=11,1614377264934659831765220232O268$$

$$f''(2,0945514814232б6)=12,5673039598889256$$

Вычисливъ частное $\dfrac{f(2,09455148154232б6)}{f'(2,09455148154232б6)}$ до 32-й десятичной цыфры включительно, и увеличивъ ее единицей, получимъ

$$0,0000000000000000851761345942069;$$

отнявши это отъ предъидущаго внѣшняго предѣла, будемъ имѣть пятое приближенное значеніе корня:

$$2,0945514815423265914823865405793O.$$

Такимъ образомъ можно продолжать приближеніе, какъ угодно далеко.

Примѣръ II.

Мы нашли въ § 117, что уравненіе

$$x^4-4x^3-3x+23=o$$

имѣетъ два дѣйствительные корня, изъ которыхъ одинъ заключается между 2 и 3. Вычислимъ его приближенно до $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{16}$.

Результаты вставокъ этихъ предѣловъ въ рядъ функцій вмѣсто x суть

	f^{IV}	f'''	f''	f'	f
[2]	+ 24	+ 24	0 +	— 19	+ 1
[3]	+ 24	+ 48	+ 36	— 5	—. 13

Здѣсь $\dfrac{f''(B)}{2f'(A)}=\dfrac{36}{2.3}=6$ имѣетъ единицею непосредственно высшаго порядка $10=\left(\dfrac{1}{10}\right)^{-1}$, а потому $k=-1$. Разность предѣловъ 2 и 3 есть $1=\left(\dfrac{1}{10}\right)^{0}$;

слѣдовательно $n=o$, и условіе $n \geq 1-k$ не удовлетворено; и такъ должно стѣснять предѣлы; для этого вставляемъ вмѣсто x число среднее между 2 и 3, а именно 2,1; результаты получатся по § 137 изъ результатовъ ряда [2], и будутъ

$$\begin{array}{lllll}
1, & & & & \\
0{,}004 & 0{,}12 & & & \\
\underline{0{,}0001} & \underline{0{,}004} & & & \\
1{,}0041 & 0{,}124 & 2{,}4 & 24 & \\
\underline{-1{,}9} & \underline{-19} & \underline{0{,}12} & \underline{2{,}4} & \\
f(2{,}1)=-0{,}8959 & f'(2{,}1)=-18{,}876 & f''(2{,}1)=2{,}52 & f'''(2{,}1)=26{,}4 & f^{IV}(2{,}1)=24;
\end{array}$$

отсюда получаемъ рядъ знаковъ

[2,1] $\quad + \quad + \quad + \quad - \quad -$,

который показываетъ, что искомый корень заключается между 2 и 2,1. Разность этихъ предѣловъ есть $\frac{1}{10}$, а потому $n=1$. Единица высшаго порядка частнаго $\frac{f''(B)}{2f'(A)}=\frac{2{,}52}{2.18{,}876}=0{,}0..$ есть $\frac{1}{10}$; слѣдовательно $k=1$, и условіе $n>1-k$ выполнено. Внѣшній предѣлъ есть 2; потому что $f(2)$ и $f''(2)$ имѣютъ одинакіе знаки. Къ нему должно придать частное $\frac{f(2)}{f'(2)}=\frac{1}{19}$, которое вычисляемъ до второй десятичной цыфры включительно, и увеличиваемъ послѣднюю цыфру единицей; это приближенное частное есть 0,06, и 2,06 есть первое приближенное значеніе искомаго корня. Чтобы узнать, будетъ ли оно высшій или низшій предѣлъ, вставляемъ его въ $f(x)$, руководствуясь правиломъ § 137:

$f(2)$	$f'(2)$	$f''(2)$	$f'''(2)$	$f^{IV}(2)$
1	−19	0	24	24
	0,06		0,06	
	−1,14	0	1,44	1,44
			6	
			864	
		0	0,0432	0,0432
			6	
			2592	
			0,000864	0,000864
				6
				5184
				0,00001296

отсюда

$$
\begin{array}{r}
1 \\
0,000864 \\
0,00001296 \\
\hline
1,00087696 \\
-1,14 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
0,0432 \\
0,000864 \\
\hline
0,044064 \\
-19 \\
\hline
\end{array}
$$

$$f(2,06)=-0,13912304 \qquad f'(2,06)=-18,955936$$

$$
\begin{array}{r}
1,44 \\
0,0432 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
24 \\
1,44 \\
\hline
\end{array}
$$

$$f''(2,06)=1,4832 \qquad f'''(2,06)=25,44 \qquad f^{IV}(2,06)=24.$$

Такъ какъ результатъ $f(2,06)$ отрицательный, то 2,06 больше корня, а потому корень заключается между 2,05 и 2,06. Чтобы вставить 2,05 вмѣсто x въ рядъ функцій, беремъ предъидущіе результаты, и поступаемъ съ ними по § 137, взявши $h=-0,01$; результаты суть:

$$f(2,05)=0,05050625, f'(2,05)=-18,9695, f''(2,05)=1,23$$
$$f'''(2,05)=25,2, \quad f^{IV}(2,05)=24.$$

Частное $-\dfrac{f(2,05)}{f'(2,05)}=\dfrac{0,05050625}{18,9695}$ вычисляемъ до цыфры порядка $\left(\dfrac{1}{10}\right)^4=0,\ 0001$, и увеличиваемъ эту цыфру единицею: получаемъ дробь 0,0027, которую придаемъ къ 2,05; отъ того имѣемъ второе приближенное значеніе корня 2,0527. Чтобы узнать, будетъ ли оно больше или меньше корня, вставляемъ его вмѣсто x, поступая по § 137: находимъ

$$f(2,0527)=-0,0007068339282559, \quad f'(2,0527)=-18,966087067268$$
$$f''(2,0527)=1,29812748, \quad f'''(2,0527)=25,2648, \quad f^{IV}(2,0527)=24.$$

Результатъ $f(2,0527)$ отрицательный, а потому 2,0527 больше корня; и такъ корень заключается между 2,0526 и 2,0527. Чтобы вставить 2,0526 въ рядъ функцій, беремъ предъидущіе результаты, и поступаемъ съ ними по § 137, положивъ $h=-0,0001$; находимъ результаты:

$$f(2,0526)=0,0011897812648976, \quad f'(2,0526)=-18,966216753696$$
$$f''(2,0526)=1,29560112, \quad f'''(2,0526)=25,2624, \quad f^{IV}(2,0526)=24.$$

Вычисливши частное — $\frac{f(2.0526)}{f'(2.0526)}=\frac{0,0011897812648976}{18,966216753696}$ до 8-й десятичной цыфры включительно, и увеличивъ эту цыфру единицей, получаемъ 0,00006274. Придавши это къ 2,0526, имѣемъ третье приближенное значеніе корня 2,05266274. Вставивши его вмѣсто x въ рядъ функцій, находимъ результаты:

$f(2,05266274)=-0,000000156523247187965201848 58299$

$f'(2,05266274)=-18,96613541796045605024 5704$

$f''(2,05266274)=1,2971861302116912$

$f'''(2,05266274)=25.26390576$

$f^{\text{IV}}(2,05266274)=24.$

Результатъ $f(2,05266274)$ отрицательный, а потому корень заключается между 2,05266273 и 2,05266274. Вставивши 2,05266273 вмѣсто x, получаемъ

$f(2,05266273)=0,0000000331381070564986483225 9866$

$f'(2,05266273)=-18,966135430932314826046332$

и пр.

Частное — $\frac{f(2,05266273)}{f'(2,05266273)}=\frac{0,00000003313810705649864832259866}{18,966135430932314826046332}$ вычисляемъ до 16-той десятичной цыфры включительно, которую увеличиваемъ единицею; отъ того получаемъ дробь 0,0000000017472251, и четвертое приближенное значеніе корня будетъ

$$x=2,0526627317472251.$$

И т. д.

Замѣч. Когда предѣлы a и b еще не довольно близки, чтобы къ нимъ приложить правило § 140; тогда сближеніе ихъ можно производить по способу *Лагранжа*.

§ **142**. Когда коеффиціенты даннаго уравненія суть количества несоизмѣримыя; тогда вычисляютъ ихъ приближенно. Полученное такимъ образомъ неточное уравненіе преобразуютъ въ другое съ цѣлыми коеффиціентами, и вычисляютъ его корни, которые будутъ приближенныя значенія корней даннаго уравненія. Но замѣтимъ, что здѣсь, отъ измѣненія коеффиціентовъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ измѣняется свойство корней; разсмотримъ эти случаи.

Пусть въ уравненіи

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=0$$

коеффиціенты a_0, a_1, a_2,..,a_m измѣняются въ

$$a_0+\alpha b_0,\ a_1+\alpha b_1,\ a_2+\alpha b_2,..,a_{m-1}+\alpha b_{m-1},\ a_m+\alpha b_m,$$

гдѣ α означаетъ дѣйствительное безконечномалое положительное количество, а b_0, b_1,..b_m какія нибудь дѣйствительныя конечныя количества; приближенное уравненіе будетъ

$$\begin{aligned}\Phi(x)&=(a_0+\alpha b_0)x^m+(a_1+\alpha b_1)x^{m-1}+\ldots+(a_{m-1}+\alpha b_{m-1})x+(a_m+\alpha b_m)\\&=(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m)+\alpha(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m)\\&=f(x)+\alpha\, F(x)=o,\end{aligned}$$

гдѣ для сокращенія

$$F(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots b_{m-1}x+b_m.$$

Отсюда находимъ производныя

$$\Phi'(x)=f'(x)+\alpha.F'(x),\ \Phi''(x)=f''(x)+\alpha F''(x),\ \text{и т. д.}$$

Пусть a и b будутъ безконечноблизкіе предѣлы одного только дѣйствительнаго некратнаго корня даннаго уравненія; то результаты $f(a)$ и $f(b)$ будутъ съ противными знаками. По теоремѣ 3 § 10 для весьма малаго α, какая бы ни была $F(x)$, знакъ $\Phi(a)=f(a)+\alpha F(a)$ одинаковъ съ знакомъ $f(a)$, а знакъ $\Phi(b)=f(b)+\alpha\ F(b)$ одинаковъ съ знакомъ $f(b)$; такъ что $\Phi(a)$ и $\Phi(b)$ будутъ съ противными знаками, а потому уравненіе $\Phi(x)=o$ будетъ имѣть дѣйствительный корень между a и b. Съ уменьшеніемъ α этотъ корень будетъ приближаться къ корню ур. $f(x)=o$, заключающемуся между a и b; потому что тогда ряды результатовъ

$$\Phi^m(a),\ \Phi^{m-1}(a),\ldots\Phi'(a),\ \Phi(a)$$

$$\Phi^m(b),\ \Phi^{m-1}(b),\ldots\Phi'(b),\ \Phi(b),$$

соотвѣтственно будутъ приближаться къ рядамъ

$$f^m(a),\ f^{m-1}(a),\ldots f'(a),\ f(a)$$

$$f^m(b),\ f^{m-1}(b),\ldots f'(b),\ f(b).$$

Отсюда заключаемъ, что, съ безконечномалымъ измѣненіемъ коеффиціентовъ даннаго уравненія, дѣйствительные неравные корни остаются дѣйствительными.

Положимъ, что a и b заключаютъ 2-кратный корень, который означимъ чрезъ r; то

$$f(r)=o,\ f'(r)=o,\ \Phi(r)=\alpha.F(r),\ \Phi'(r)=\alpha.F'(r).$$

Результаты $f(a)$ и $f(b)$ съ одинакими знаками, а $f'(a)$ и $f'(b)$ съ противными. Взявши a столь малымъ, чтобы $\Phi(a)$, $\Phi(b)$, $\Phi'(a)$, $\Phi'(b)$ соотвѣтственно имѣли одинакіе знаки съ $f(a)$, $f(b)$, $f'(a)$, $f'(b)$, результаты $\Phi(a)$ и $\Phi(b)$ будутъ съ одинакими знаками, а $\Phi'(a)$ и $\Phi'(b)$ съ противными. Если $F(r)=o$ и $F'(r)=o$, то $\Phi(r)=o$ и $\Phi'(r)=o$, и уравненія $f(x)=o$ и $\Phi(x)=o$ имѣютъ общій двукратный корень r. Когда результатъ $F'(r)$ не $=o$; тогда онъ имѣетъ знакъ противный одному изъ результатовъ $\Phi'(a)$ и $\Phi'(b)$. Означивши этотъ результатъ чрезъ $\Phi'(d)$, онъ будетъ имѣть противный знакъ съ $\Phi'(r)=a.F'(r)$, и потому $\Phi'(x)=o$ имѣетъ одинъ дѣйствительный корень между r и d. Пусть этотъ корень будетъ r'; то могутъ быть три случая: 1) $\Phi(r')=o$, 2) $\Phi(r')$ не $=o$ и имѣетъ противный знакъ съ $\Phi(a)$ и $\Phi(b)$ и 3) $\Phi(a)$, $\Phi(r')$ и $\Phi(b)$ имѣютъ одинакіе знаки. Въ первомъ случаѣ уравненіе $\Phi(x)=o$ имѣетъ дѣйствительный двукратный корень между a и b; во второмъ случаѣ оно имѣетъ два дѣйствительные неравные корня, наконецъ въ третьемъ случаѣ оно не имѣетъ дѣйствительныхъ корней между a и b. Изъ послѣдняго случая выводимъ заключеніе, что *двукратные дѣйствительные корни даннаго уравненія, съ безконечномалымъ измѣненіемъ коеффиціентовъ, могутъ сдѣлаться мнимыми.* Это заключеніе легко распространить на какіе нибудь дѣйствительные кратные корни.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

Общія свойства ирраціональныхъ функцій.

О знакѣ, принятомъ Г-мъ Остроградскимъ, для изображенія рѣшенія опредѣленныхъ алгебраическихъ уравненій.

§ 143. Въ предъидущей главѣ мы видѣли, какимъ образомъ рѣшаются уравненія вида

$$x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\dots a_{m-1}x+a_m=0\ ,$$

гдѣ a_1, a_2,....a_m какія нибудь дѣйствительныя числа, а m цѣлое положительное число. И такъ неизвѣстное x можно считать (§ 2) явною функціею коеффиціентовъ a_1, a_2,...a_m. Если мы напишемъ

$$x=f(a_1,\ a_2,\dots a_m);$$

то дѣйствіе, означаемое характеристикою f, всегда будетъ извѣстно. Абель доказалъ, что оно не всегда можетъ быть выражено конечнымъ числомъ знаковъ: $+$, $-$, $\times$, $:$ и $\sqrt[n]{}$, а потому, для отличія его отъ другихъ дѣйствій, Г-нъ Остроградскій замѣняетъ букву f знакомъ ∇. Это нововведеніе обѣщаетъ большія облегченія въ Анализѣ, какъ со стороны краткости изображенія функцій, такъ и со стороны вычисленій. Главная выгода этого знака состоитъ въ томъ, что можно имъ выразить всякую алгебраическую функцію (*). Г-нъ Остроградскій доказываетъ это сперва для радикальной функціи порядка μ, потомъ переходитъ къ самой общей функціи, составленной изъ всѣхъ шести основныхъ алгебраическихъ дѣйствій.

(*) Абель первый далъ опредѣленіе, что *Алгебраическая функція* v *нѣсколькихъ количествъ* x y z... *есть та, которая удовлетворяетъ уравненію вида* $v^m+\theta_1v^{m-1}+\theta_2v^{m-2}+\dots\theta_{m-1}v+\theta_m=0$, *гдѣ* θ_1, θ_2,...θ_{m-1}, θ_m *суть раціональныя функціи* x, y, z......

§ 144. Прежде всего докажемъ, что, имѣя радикальную функцію порядка μ

$$v=\frac{\Phi(\phi_1,\phi_2,\ldots\sqrt[n']{\theta_1},\sqrt[n'']{\theta_2},\ldots\sqrt[n^{(m)}]{\theta_m})}{F(\phi_1,\phi_2,\ldots\sqrt[n']{\theta_1},\sqrt[n'']{\theta_2},\ldots\sqrt[n^{(m)}]{\theta_m})},$$

гдѣ Φ и F не заключаютъ дробей (см. § 55), можно ее преобразовать въ другую, у которой знаменатель будетъ раціональная функція.

Расположивъ v по степенямъ одного изъ радикаловъ $\sqrt[n']{\theta_1},\sqrt[n'']{\theta_2},\ldots\sqrt[n^{(m)}]{\theta_m}$, который означимъ чрезъ $\sqrt[n]{\theta}=z$, она приметъ видъ

$$\frac{A_0+A_1z+A_2z^2+A_3z^3+\ldots+A_nz^n+\ldots+A_kz^k}{B_0+B_1z+B_2z^2+B_3z^3+\ldots+B_nz^n+\ldots+B_lz^l}.$$

Вспомнивши сказанное въ § 7, можно помощію $z^n=\theta$ и $z^{n\sigma+\tau}=\theta^\sigma z^\tau$ исключить изъ числителя и изъ знаменателя всѣ степени z, превышающія z^{n-1}; отъ того функція v преобразуется въ слѣдующую

$$v=\frac{(A_0+A_n\theta+\ldots\ldots A_{ns}\theta^s)+(A_1+A_{n+1}\theta+A_{ns+1}\theta^s)z+\ldots\ldots(A_{n+1}+\ldots)z^{n-1}}{(B_0+B_n\theta+\ldots B_{nt}\theta^t)+(B_1+B_{n+1}\theta+\ldots B_{nt+1}\theta^t)z+\ldots(B_{n+1}+\ldots)z^{n-1}},$$

которую, для сокращенія, изобразимъ чрезъ

$$v=\frac{A'+A''z+A'''z^2+\ldots A^{(n-1)}z^{n-1}}{B'+B''z+B'''z^2+\ldots B^{(n-1)}z^{n-1}}=\frac{\psi(z)}{\phi(z)}.$$

Означивъ чрезъ α одинъ изъ корней уравненія

$$y^{n-1}+y^{n-2}+y^{n-3}+\ldots\ldots y^2+y+1=o,$$

прочіе корни, по § 58, будутъ α^2, $\alpha^3\ldots\alpha^{n-1}$ (въ § 99 прим. 7 мы видѣли, что они всѣ мнимые). И такъ

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ldots\alpha^{n-1}$$

будутъ представлять всѣ корни уравненія $y^n-1=o$, а z, αz, α^2z, $\alpha^3z,\ldots\alpha^{n-1}z$ всѣ корни уравненія $z^n-\theta=o$, т. е. всѣ n значеній радикала $\sqrt[n]{\theta}$. Внеся αz, α^2z, $\alpha^3z,\ldots\alpha^{n-1}z$ въ $\phi(z)$ вмѣсто z, составимъ произденіе $p=\Phi(az).\Phi(a^2z)\ldots\Phi(a^{n-1}z)$, и помножимъ на него числителя и знаменателя функціи v; отъ того будетъ

$$v=\frac{\psi(z).\ p}{\Phi(z).\ \Phi(az).\ \Phi(a^2z)\ldots\Phi(a^{n-1}z)}.$$

Разложивъ знаменателя по степенямъ z, и исключивъ изъ него степени, превышающія z^{n-1}, онъ приметъ видъ

$$P+P'z+P''z^2+\ldots+P^{(n-1)}z^{n-1}.$$

Въ § 59 было доказано, что

$$P'=o,\ P''=o,\ldots P^{(n-1)}=o,$$

а P не содержитъ на z ни a; слѣдовательно радикалъ $z=\sqrt[n]{\theta}$ въ знаменателѣ функціи v исчезъ. Числитель же

$$\psi(z).p=\psi(z).\Phi(az).\Phi(a^2z).\Phi(a^3z)\ldots.\Phi(a^{n-1}z),$$

отъ перемѣны a на a^2, $a^3,\ldots a^{n-1}$, не измѣняется, а потому онъ, по сказанному въ § 59 для полинома p, не содержитъ a.

Поступая такимъ образомъ для каждаго изъ радикаловъ $\sqrt[n']{\theta_1}$, $\sqrt[n'']{\theta_2},\ldots\sqrt[n^{(m)}]{\theta_m}$, мы исключимъ ихъ изъ знаменателя; такъ, что порядокъ его понизится единицею. И такъ, имѣя радикальную функцію v, у которой знаменатель есть радикальная функція порядка μ, мы можемъ ее преобразовать въ другую радикальную функцію, у которой знаменатель будетъ порядка $\mu-1$. Эта новая функція можетъ быть преобразована въ другую, у которой знаменатель будетъ порядка $\mu-2$, и т. д. Наконецъ данная функція преобразуется въ радикальную функцію, у которой знаменатель будетъ порядка 0, т. е. будетъ цѣлая раціональная функція. Слѣдовательно v будетъ цѣлая функція радикаловъ $\sqrt[n']{\theta_1}$, $\sqrt[n'']{\theta_2},\ldots\sqrt[n^{(m)}]{\theta_m}$.

§ **145.** Пусть будетъ радикальная функція

$$(1)\qquad v=f(\Phi_1,\ \Phi_2,\ldots\ \sqrt[n']{\theta_1},\ \sqrt[n'']{\theta_2},\ \ldots\ \sqrt[n^{(m)}]{\theta_m}),$$

цѣлая относительно $\sqrt[n']{\theta_1}$, $\sqrt[n'']{\theta_2},\ldots\sqrt[n^{(m)}]{\theta_m}$. Означивъ чрезъ a' одинъ изъ корней уравненія

$$y^{n'-1}+y^{n'-2}+y^{n'-3}+\ldots+y+1=o,$$

всѣ значенія радикала $\sqrt[n']{\theta_1}$ будетъ:

$$\sqrt[n']{\theta_1},\ a'\sqrt[n']{\theta_1},\ (a')^2.\sqrt[n']{\theta_1},\ldots(a')^{n'-1}.\sqrt[n']{\theta_1}.$$

Внеся ихъ въ выраженіе (1), функція v получитъ n' значеній, которыя означимъ чрезъ

$$(2)\qquad v_1,\ v_2,\ v_3\ldots v_{n'}.$$

Пусть a'' будетъ корень уравненія

$$y^{n''-1}+y^{n''-2}+\ldots y+1=o;$$

то всѣ значенія радикала $\sqrt[n'']{\theta_2}$ будутъ

$$\sqrt[n'']{\theta_2},\ a''\sqrt[n'']{\theta_2},\ (a'')^2\sqrt[n'']{\theta_2},\ (a'')^3\sqrt[n'']{\theta_2},\ldots(a'')^{n''-1}\sqrt[n'']{\theta_2}.$$

Вставляя ихъ послѣдовательно вмѣсто $\sqrt[n'']{\theta_2}$ въ выраженія (2), мы получимъ n'' рядовъ значеній; въ каждомъ ряду будетъ по n' значеній, а потому число значеній v относительно радикаловъ $\sqrt[n']{\theta_1}$ и $\sqrt[n'']{\theta_2}$ есть $n'n''$. Изобразимъ ихъ чрезъ

$$(3)\qquad v_1,\ v_2,\ldots v_{n'},\ v_{n'+1},\ v_{n'+2}\ldots v_{2n},\ v_{2n'+1},\ldots v_{n'n''},$$

возмемъ a''' корень уравненія $y^{n'''-1}+y^{n'''-2}+\ldots y+1=o$, и внесемъ въ выраженія (3) вмѣсто радикала $\sqrt[n''']{\theta_3}$ его значенія:

$$\sqrt[n''']{\theta_3},\ a'''\sqrt[n''']{\theta_3},\ (a''')^2\sqrt[n''']{\theta_3},\ldots(a''')^{n'''-1}.\sqrt[n''']{\theta_3};$$

отъ того будемъ имѣть n''' рядовъ значеній v, въ каждомъ по $n'n''$ членовъ. И такъ функція v относительно трехъ радикаловъ $\sqrt[n']{\theta_1}$, $\sqrt[n'']{\theta_2}$, $\sqrt[n''']{\theta_3}$, имѣетъ $n'n''n'''$ значеній, которыя пусть будутъ:

$$(4)\qquad v_1,\ v_2,\ v_3\ldots v_{n'n''},\ v_{n'n''+1},\ldots v_{2n'n''},\ldots v_{n'n''n'''}.$$

Разсуждая такимъ образомъ для каждаго изъ радикаловъ $\sqrt[n']{\theta_1}$, $\sqrt[n'']{\theta_2},\ldots\sqrt[n^{(m)}]{\theta_m}$, заключаемъ, что число значеній v относительно всѣхъ этихъ радикаловъ есть $n'n''n'''\ldots n^{(m)}$, т. е. произведеніе показателей всѣхъ радикаловъ порядка μ. Положивъ $n'n''n'''\ldots n^{(m)}=\lambda$, означимъ всѣ эти значенія v чрезъ

$$(5) \qquad v_1,\ v_2,\ v_3, \ldots v_\lambda.$$

Разсматривая такимъ же образомъ радикалы порядка $\mu-1$, мы выведемъ изъ каждаго члена ряда (5) опредѣленное число значеній v, равное произведенію показателей всѣхъ радикаловъ порядка $\mu-1$. Пусть это число будетъ ν; то число всѣхъ значеній v относительно радикаловъ порядка μ и $\mu-1$ будетъ $\lambda\nu$. Изъ каждаго изъ этихъ значеній v выведутся еще новыя значенія, соотвѣтствующія радикаламъ порядка $\mu-2$: число ихъ есть произведеніе показателей всѣхъ радикаловъ порядка $\mu-2$. Перебравши такимъ образомъ всѣ радикалы всѣхъ порядковъ, входящіе въ данную функцію v, мы наконецъ найдемъ всѣ возможныя значенія этой функціи, которыхъ число, какъ легко понять, будетъ произведеніе показателей всѣхъ радикаловъ. Означимъ эти значенія, въ томъ порядкѣ какъ онѣ выводились, чрезъ

$$(6) \qquad v_1,\ v_2, \ldots v_{n'},\ v_{n'+1}, \ldots v_{n'n''}, \ldots v_\lambda, \ldots v_{\lambda\nu}, \ldots v_m,$$

гдѣ m есть произведеніе всѣхъ показателей, входящихъ въ функцію v.

§ **146.** **Разсмотримъ симметричную функцію всѣхъ значеній (6)**

$$(7) \qquad S = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) + \varphi(v_3) + \ldots \varphi(v_m),$$

гдѣ φ означаетъ какую нибудь раціональную функцію отъ v.

Возьмемъ первые n' члены выраженія S, соотвѣтствующіе первымъ n' значеніямъ (6), и назовемъ сумму ихъ Σ. Такъ какъ v есть раціональная функція радикала $\sqrt[n']{\theta_1} = z$; то $\varphi(v)$ будетъ также раціональная функція z, а потому она имѣетъ видъ

$$\varphi(v) = A + Bz + Cz^2 + \ldots Kz^{n'-1}.$$

Вносся сюда вмѣсто z его n' значенія:

$$z,\ a'z,\ (a')^2 z, \ldots (a')^{n'-1} z,$$

будемъ имѣть

$$\varphi(v_1) = A + Bz + Cz^2 + \ldots + Kz^{n'-1}$$

$$\varphi(v_2) = A + Ba'z + C(a')^2 z^2 + \ldots + K(a')^{n'-1} z^{n'-1}$$

$$\varphi(v_3) = A + B(a')^2 z + C(a')^{2\cdot 2} z^2 + \ldots + K(a')^{2(n'-1)} z^{n'-1}$$

. . . .

$$\varphi(v_{n'}) = A + B(a')^{n'-1} z + C(a')^{(n'-1)2} z^2 + \ldots + K(a')^{(n'-1)(n'-1)} z^{n'-1}.$$

Сложивши эти уравненія, и вспомнивъ сказанное въ § 58 о симметричныхъ функціяхъ корней уравненія $z^n-1=o$, мы получимъ;

$$\Sigma=\varphi(v_1)+\varphi(v_2)\ldots+\varphi(v_{n'})=n'A;$$

откуда видимъ, что Σ не заключаетъ радикала $z=\sqrt[n']{\theta_1}$.

Внося въ Σ всѣ значенія радикала $\sqrt[n'']{\theta_2}$, она получитъ n'' значеній, которыя назовемъ

$$\Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \Sigma_3,\ldots\Sigma_{n''};$$

сумма ихъ

$$\int=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\ldots\Sigma_{n''}$$

есть не что иное, какъ сумма первыхъ $n'n''$ членовъ S. Такъ, какъ Σ не содержитъ радикала $\sqrt[n']{\theta_1}$, то и сумма $\int$ также его не содержитъ. Но Σ заключаетъ радикалъ $\sqrt[n'']{\theta_2}=u$, и, будучи расположена по его степенямъ, принимаетъ видъ

$$\Sigma=A'+B'u+C'u^2+\ldots K'u^{n''-1}.$$

Вставивши сюда послѣдовательно вмѣсто u его значенія:

$$u,\ a''u,\ (a'')^2u,\ (a'')^3u,\ldots(a'')^{n''-1}u,$$

и сложивши результаты, получимъ

$$\int=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\ldots+\Sigma_{n''}=n''A';$$

отсюда видимъ, что $\int$ не заключаетъ радикала $u=\sqrt[n'']{\theta_2}$.

Вставляя въ $\int$ вмѣсто $\sqrt[n''']{\theta_3}$ всѣ его значенія, найдемъ n''' значеній $\int_1$, $\int_2,\ldots\int_{n'''}$, которыхъ сумма есть не что иное, какъ сумма первыхъ $n'n''n'''$ членовъ S, и по предъидущему докажется, что эта сумма не содержитъ радикала $\sqrt[n''']{\theta_3}$. Простирая эти сужденія далѣе, мы найдемъ, что сумма первыхъ λ членовъ S не содержитъ радикаловъ порядка μ. Пусть она будетъ $\mathfrak{S}$. Возьмемъ одинъ изъ радикаловъ порядка $\mu-1$, вставимъ его значенія въ $\mathfrak{S}$; отъ того получимъ столько выраженій, какъ великъ показатель разсматриваемаго радикала, и по предъидущему докажется, что сумма ихъ не содержитъ этого радикала. Въ новой суммѣ беремъ другой радикалъ порядка $\mu-1$, прилагаемъ къ нему предъидущія сужденія, и находимъ сумму, не содержащую этого радикала. Продолжая такимъ образомъ далѣе, мы дойдемъ до суммы первыхъ $\lambda\nu$ членовъ функціи S, и увидимъ, что она не заключаетъ радикаловъ порядка μ и порядка $\mu-1$. Наконецъ, перебравши радикалы всѣхъ порядковъ, мы дойдемъ до суммы S, и увидимъ, что она не содержитъ никакихъ радикаловъ; слѣдовательно она раціональная функція количествъ $x_1, x_2, \ldots x_n$.

И такъ симметричная функція вида (7) *всѣхъ возможныхъ значеній какой нибудь радикальной функціи v количествъ $x_1, x_2, \ldots x_n$ есть раціональная функція этихъ количествъ.*

§ 147. Основываясь на этой теоремѣ, легко доказать, что всѣ возможныя значенія какой-либо радикальной функціи v суть корни алгебраическаго уравненія, котораго коэффиціенты суть раціональныя функціи.

Въ самомъ дѣлѣ: уравненіе, котораго корни суть значенія (6), есть

$$(v-v_1)(v-v_2)(v-v_3)\ldots(v-v_м)$$

$$=v^м+\theta_1 v^{м-1}+\theta_2 v^{м-2}+\ldots+\theta_{м-1}v+\theta_м=0;$$

коэффиціенты $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \ldots \theta_{м-1}, \theta_м$ по § 64 выразятся раціональными функціями простыхъ симметричныхъ функцій:

$$S_1=v_1+v_2+v_3+\ldots+v_м$$

$$S_2=v_1^2+v_2^2+v_3^2+\ldots+v_м^2$$

$$S_3=v_1^3+v_2^3+v_3^3+\ldots+v_м^3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

которыя по теоремѣ, доказанной въ предъидущемъ §, суть раціональныя функціи относительно количествъ $x_1, x_2, \ldots x_n$; слѣдовательно коэффиціенты $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots \theta_м$ суть также раціональныя функціи этихъ количествъ. И такъ всякая радикальная функція v количествъ $x_1, x_2, \ldots x_n$ можетъ быть преобразована въ

$$\nabla(\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_м),$$

гдѣ $\theta_1, \theta_2 \ldots \theta_м$ суть раціональныя функціи $x_1, x_2 \ldots x_n$, число $м$ есть произведеніе всѣхъ показателей радикаловъ, входящихъ въ функцію v, а характеристика ∇ знакъ рѣшеніе уравненія степени $м$, котораго послѣдовательные коэффиціенты суть $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_м$.

§ 148. Распространимъ эту теорему на всякую алгебраическую функцію. Но прежде составимъ себѣ понятіе о самой общей алгебраической функціи, т. е. о самой общей функціи, выраженной конечнымъ числомъ знаковъ

$$+,\ -,\ \times,\ :,\ \sqrt[n]{}\ \text{и}\ \nabla.$$

Мы будемъ называть ∇ неприводимымъ (irreductible) когда онъ означаетъ рѣшеніе такого уравненія, которому не можетъ удовлетворять никакая радикальная функція (что существуютъ такія уравненія, мы это увидимъ послѣ).

Алгебраическими ирраціональными функціями перваго порядка мы станемъ называть функціи вида

$$f(x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ \sqrt[n'_1]{\theta_1},\ \sqrt[n'_2]{\theta_2},\ldots y,\ z,\ u);$$

гдѣ f означаетъ раціональную функцію выраженій въ скобкахъ, $\theta_1,\ \theta_2\ldots$ раціональныя функціи отъ $x_1,\ x_2\ldots x_n$, $n'_1,\ n'_2,\ldots$ первоначальныя числа, а

$$y=\nabla(\phi_1,\ \phi_2,\ldots\phi_p),\ z=\nabla(\psi_1,\ \psi_2,\ldots\psi_q),\ldots,$$

неприводимые ∇ уравненій, въ которыхъ коеффиціенты: $\phi_1,\ \phi_2\ldots\phi_p$, и $\psi_1,\ \psi_2,\ldots\psi_q\ldots$ суть раціональныя функціи отъ $x_1,\ x_2,\ldots x_n$.

Ирраціональною функціею 2-го порядка назовемъ функцію вида

$$f(r_1,\ r_2\ldots\sqrt[n''_1]{\theta'_1},\ \sqrt[n''_2]{\theta'_2},\ldots y',\ z',\ u'\ldots),$$

гдѣ $r_1,\ r_2\ldots$ суть или ирраціональныя функціи перваго порядка, или радикальныя перваго порядка, или раціональныя, $\theta'_1,\ \theta'_2\ldots$ ирраціональныя и радикальныя функціи перваго порядка, $n''_1,\ n''_2\ldots$ первоначальныя числа, а

$$y'=\nabla(\phi'_1,\ \phi'_2,\ldots\phi'_{p_1}),\ z'=\nabla(\psi'_1,\ \psi'_2,\ldots\psi'_{q_1}),\ldots,$$

неприводимые ∇ уравненій, которыхъ коеффиціенты: $\phi'_1,\ \phi'_2,\ldots\phi'_{p_1}$, $\psi'_1,\ \psi'_2,\ldots\psi'_{q_1}\ldots$ суть ирраціональныя функціи перваго порядка.

Такимъ же образомъ мы опредѣлимъ общіе виды ирраціональныхъ функцій 3-го, 4-го, 5-го и т. д. порядковъ. Вообще, ирраціональная функція порядка μ есть та, которая имѣетъ видъ

$$f\{R_1,\ R_2\ldots\sqrt[n_1]{\theta_1},\ \sqrt[n_2]{\theta_2},\ldots\nabla(\phi_1,\ \phi_2\ldots\phi_{m_1}),\ \nabla(\chi_1,\ \chi_2\ldots\chi_{m_2}),\ldots\},$$

гдѣ R_1, R_2,... суть вообще ирраціональныя функціи порядка $\mu-1$ и порядковъ низшихъ, θ_1, θ_2,.... θ_m, ϕ_1, ϕ_2....ϕ_m, χ_1, χ_2,...χ_m, ирраціональныя функціи порядка $\mu-1$, показатели n_1, n_2,.... числа первоначальныя, а ∇ неприводимый знакъ рѣшенія алгебраическихъ уравненій. Это выраженіе можетъ служить общимъ видомъ всякой алгебраической функціи.

§ 149. Пусть v будетъ ирраціональная функція порядка μ. Возьмемъ въ ней одну изъ *ирраціональностей* порядка μ, которая пусть будетъ

$$z=\nabla(\phi_1, \phi_2,..\phi_m). \tag{8}$$

Такъ какъ v есть раціональная функція z; то она имѣетъ видъ

$$v=\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+....a_kz^k}{b_0+b_1z+b_2z^2+....b_lz^l}, \tag{9}$$

гдѣ a_0, a_1,... a_k, b_0, b_1,.. b_l не содержатъ z, а k и l могутъ быть или больше или меньше m; но первый случай можетъ быть всегда приведенъ ко второму. Въ самомъ дѣлѣ: выраженіе (8) даетъ

$$z^m+\phi_1z^{m-1}+\phi_2z^{m-2}+...... \phi_m=0; \tag{10}$$

откуда

$$z^m=-\phi_1z^{m-1}-\phi_2z^{m-2}-.....-\phi_m. \tag{11}$$

Помножая обѣ части этого уравненія послѣдовательно на $z, z^2,... z^{k-m}$, находимъ:

$$z^{m+1}=-\phi_1z^m-\phi_2z^{m-1}-....-\phi_mz \tag{12}$$

$$z^{m+2}=-\phi_1z^{m+1}-\phi_2z^m-....-\phi_mz^2 \tag{13}$$

. . . .

$$z^k=-\phi_1z^{k-1}-\phi_2z^{k-2}-....-\phi_mz^{k-m}. \tag{14}$$

Исключивъ z^m изъ уравненія (12) помощію уравненія (11), изъ ур. (13) z^m и z^{m+1} помощію ур. (12) и (11), и т. д., наконецъ изъ ур. (14) z^{k-1},... z^m помощію всѣхъ предъидущихъ уравненій, всѣ степени

$$z^m, z^{m+1},..... z^k$$

сдѣлаются раціональными функціями z степени не выше $m-1$. Внеся ихъ въ выраженіе (9), функція v приметъ видъ

(15) $$v=\frac{a+a'z+a''z^2+\ldots\ldots a^{(m-1)}z^{m-1}}{b+b'z+b''z^2+\ldots\ldots b^{(m-1)}z^{m-1}}=\frac{\psi(z)}{\Phi(z)}.$$

Означивъ чрезъ

(16) $$z,\ z_1,\ z_2,\ldots\ z_{m-1}$$

всѣ корни уравненія (11), т. е. всѣ значенія ирраціональности z при постоянномъ значеніи коеффиціентовъ: ϕ_1, $\phi_2\ldots$ ϕ_m, помножимъ числителя и знаменателя выраженія (15) на произведеніе

$$p=\Phi(z_1),\ \Phi(z_2),\ \Phi(z_3)\ldots\ldots\ \Phi(z_{m-1});$$

получаемъ

$$v=\frac{\psi(z).\ p}{\Phi(z).\ \Phi(z_1).\ (z_2)\ldots\ \Phi(z_{m-1})}.$$

Знаменатель послѣдняго выраженія есть симметричная функція корней $z,\ z_1,\ldots\ldots z_{m-1}$, а потому онъ выразится раціональною функціею коеффиціентовъ ϕ_1, ϕ_2, $\phi_3,\ldots$ ϕ_m; слѣдовательно онъ не будетъ содержать z. Числитель $\psi(z).p$ не будетъ содержать z_1, $z_2,\ldots$ z_{m-1}; это нужно только доказать для p:

Произведеніе p есть симметричная функція корней z_1, $z_2,\ldots$ z_{m-1}, а потому оно выразится раціональною функціею коеффиціентовъ уравненія

(17) $$(y-z_1)\ (y-z_2)\ldots\ (y-z_{m-1})=o,$$

которое получится по вставкѣ y въ ур. (10) вмѣсто z и по раздѣленіи первой части на $y-z$: оно будетъ

$$y^{m-1}+(\phi_1+z)\,y^{m-2}+(\phi_2+\phi_1 z+z^2)\,y^{m-3}+(\phi_3+\phi_2 z+\phi_1 z^2+z^3)\,y^{m-4}+\ldots\ldots$$
$$(\phi_{m-1}+\phi_{m-2}z+\phi_{m-3}z^2+\ldots\phi_1 z^{m-2}+z^{m-1})=o.$$

Слѣдовательно p выразится раціональною функціею полиномовъ:

$$\phi_1+z,\ \phi_2+\phi_1 z+z^2,\ldots\ldots\ \phi_{m-1}+\phi_{m-2}z+\ldots\ldots\ \phi_1 z^{m-2}+z^{m-1}.$$

Но какъ послѣдніе не содержатъ корней z_1, $z_2,\ldots$ z_m; то и p не будетъ ихъ содержать. И такъ функціи v можно дать видъ

$$\frac{c_0+c_1 z+c_2 z^2+\ldots\ldots+c_{m-1}z^{m-1}}{R},$$

гдѣ c_0, c_1, c_2,.... c_{m-1} и R не заключаютъ ирраціональности z. Знаменатель R можетъ заключать другія ирраціональности ∇ порядка μ; но онѣ переведутся въ числитель такъ же, какъ и z. Такимъ образомъ въ знаменателѣ v исчезнутъ всѣ ирраціональности ∇ порядка μ. Послѣ того, по способу § 144, мы переведемъ изъ знаменателя въ числитель радикалы порядка μ, отъ чего порядокъ знаменателя функціи v понизится единицею; потомъ онъ понизится еще единицею, наконецъ сдѣлается раціональною функціею, и v будетъ тогда цѣлая функція относительно ирраціональностей порядка μ.

§ **150.** Вставляя въ v вмѣсто $z=\nabla(\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_m)$ его значенія (16); потомъ вмѣсто $u=\nabla(\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_{m'})$ всѣ его значенія при постоянныхъ коеффиціентахъ χ_1, χ_2,.... $\chi_{m'}$, и т. д.; однимъ словомъ, поступая здѣсь такъ же, какъ и въ § 145, мы выведемъ всѣ возможныя значенія функціи v, число которыхъ равно произведенію показателей всѣхъ радикаловъ на показатели степеней ∇. Пусть всѣ эти значенія v будутъ:

$$(18) \qquad v_1, v_2, \ldots v_m, \ldots v_\varkappa.$$

Разсмотримъ симметричную функцію

$$S=f(v_1)+f(v_2)+f(v_3)+\ldots+f(v_m)+\ldots+f(v_\varkappa),$$

означая чрезъ $f(v)$ раціональную функцію отъ v. Такъ какъ v имѣетъ видъ

$$v=A+A'z+A''z^2+\ldots+A^{(m-1)}z^{m-1},$$

гдѣ A, A', A''.... $A^{(m-1)}$ суть ирраціональныя функціи порядка μ или порядковъ низшихъ, не содержащія z; то $f(v)$ будетъ такого же вида. И такъ мы можемъ положить

$$f(v)=A_0+A_1z+\ldots+A_{m-1}z^{m-1},$$

гдѣ A_0, A_1,.... A_{m-1} имѣютъ то же свойство, что и A', A'',... $A^{(m-1)}$. Вставивши сюда вмѣсто z его m значеній

$$z_1, z_2, \ldots z_m,$$

т. е. корни уравненія

$$(19) \qquad z^m+\phi_1z^{m-1}+\phi_2z^{m-2}+\ldots+\phi_m=0$$

при постоянномъ значеніи коеффиціентовъ ϕ_1, ϕ_2,.... ϕ_m, имѣемъ уравненія:

$$f(v_1)=A_0+A_1z_1+A_2z_1^2+\ldots+A_{m-1}z_1^{m-1}$$

$$f(v_2)=A_0+A_1z_2+A_2z_2^2+\ldots+A_{m-1}z_2^{m-1}$$

$$f(v_3)=A_0+A_1z_3+A_2z_3^2+\ldots+A_{m-1}z_3^{m-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(v_m)=A_0+A_1z_m+A_2z_m^2+\ldots+A_{m-1}z_m^{m-1},$$

по сложеніи которыхъ, получаемъ

$$\Sigma=f(v_1)+f(v_2)+f(v_3)+\ldots+f(v_m)=mA_0+A_1S_1+A_2S_2+\ldots+A_{m-1}S_{m-1}.$$

Здѣсь S_1, S_2, S_3,... S_{m-1} означаютъ простыя симметричныя функціи корней ур. (19), а потому онѣ выразятся раціональными функціями коеффиціентовъ ϕ_1, ϕ_2,... ϕ_{m-1}; слѣдовательно Σ, сумма первыхъ m членовъ въ S, будетъ раціональная функція только отъ A_0, A_1,... A_{m-1}, ϕ_1, ϕ_2,... ϕ_m. Но какъ послѣдніе не содержатъ z, то и Σ ихъ не содержитъ.

Взявши ирраціональность порядка μ:

$$u=\nabla(\chi_1, \chi_2, \chi_3 \ldots \chi_{m'}),$$

вносимъ вмѣсто ея въ Σ корни уравненія

$$u^{m'}+\chi_1u^{m'-1}+\chi_2u^{m'-2}+\ldots+\chi_{m'}=0;$$

отъ того Σ получитъ m' значеній, которыя назовемъ

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_{m'}.$$

Сумма ихъ

$$\int=\Sigma_1+\Sigma_2+\ldots+\Sigma_{m'}.$$

есть не что иное какъ сумма первыхъ mm' членовъ S, и по предъидущему докажется, что она не содержитъ u. Продолжая здѣсь сужденія такъ же, какъ и въ § 146, найдемъ наконецъ, что полная сумма S не будетъ содержать никакихъ ирраціональностей, т. е. будетъ раціональная функція x_1, x_2,... x_n.

Возьмемъ теперь уравненіе

$$(v-v_1)(v-v_2)(v-v_3)\ldots\ldots(v-v_\mu)=v^\mu+\theta_1v^{\mu-1}+\theta_2v^{\mu-2}+\ldots+\theta_\mu=0,$$

котораго корни суть всѣ значенія ирраціональной функціи v. Коеффиціенты его θ_1, θ_2,... θ_m выразятся раціональными функціями симметричныхъ функцій вида $S_p = v_1^p + v_2^p + v_3^p + \ldots + v_\mu^p$, слѣдовательно будутъ раціональныя функціи отъ x_1, x_2,...x_n. Такимъ образомъ мы достигли одной изъ важнѣйшихъ теоремъ въ Математическомъ Анализѣ, а именно: *всякая алгебраическая функція* v *нѣсколькихъ количествъ* x_1, x_2,...x_m *способна удовлетворять алгебраическому уравненію вида*

$$v^n + A_1 v^{n-1} + A_2 v^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-1} v + A_n = 0, \tag{20}$$

гдѣ A_1, A_2,.... A_n *суть раціональныя функціи отъ* x_1, x_2,... x_m, *т. е. способна быть выражена однимъ знакомъ*

$$\nabla\, (A_1, A_2, \ldots. A_n).$$

На этой теоремѣ новѣйшіе Геометры основываютъ раздѣленіе функцій на *Алгебраическія* и *Трансцендентныя*. Трансцендентная функція есть та, которая не способна удовлетворять уравненію вида (20).

§ **151**. Въ § 148 мы предположили существованіе такихъ уравненій, которыхъ корни не могутъ быть выражены никакою радикальною функціею; остается теперь намъ это доказать.

Радикальное рѣшеніе общаго уравненія второй степени было извѣстно *Діофанту*. Въ половинѣ 16-го столѣтія *Тарталеа*, *Карданъ* и *Феррари* дали радикальное рѣшеніе общихъ уравненій 3-й и 4-й степени. По примѣру ихъ Геометры стали искать подобныя рѣшенія для общихъ уравненій 5-й и высшихъ степеней; но всѣ старанія ихъ были тщетны, и нѣкоторые изъ нихъ стали уже отказываться отъ дальнѣйшихъ изысканій (*). Наконецъ Норвежскій Геометръ *Абель* доказалъ невозможность радикальнаго рѣшенія общаго уравненія 5-й степени. Прежде нежели мы изложимъ это доказательство, разсмотримъ нѣкоторыя необходимыя для того леммы.

(*) *Лагранжъ* говоритъ: »il parait fort douteux qu'aucune de ces méthodes donne »jamais la résolution complette seulement du cinquième dégré, et à plus forte raison des »dégrés supérieurs; cette incertitude jointe à la longueur rébutante des calculs qu'elles »éxigent, est propre à effrayer d'avance les plus intrépides calculateurs.

Достойны замѣчанія слова *Фурье* о несообразности требовать радикальнаго рѣшенія всякаго уравненія:

»Proposer de résoudre ainsi une équation élévée, c'est assigner d'avance certaines opéra»tions que l'on a voulu choisir, savoir celles qui servent à extraire les racines carrées, *О числѣ различныхъ значеній, принимаемыхъ раціональною функціею нѣсколькихъ количествъ, отъ перестановки этихъ количествъ всѣми возможными образами.*

§ 152. Пусть $v=f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_m)$ будетъ раціональная функція нѣсколькихъ количествъ $x_1, x_2, \ldots x_m$. Перемѣняя эти количества одни на другія, значеніе v можетъ измѣняться, и извѣстно, что число всѣхъ различныхъ значеній v не будетъ больше произведенія $\mu=1.2.3\ldots m$, т. е. числа всѣхъ возможныхъ перестановокъ изъ m буквъ по m.

Положимъ, что мы произвели всѣ μ перестановокъ, и что всѣ значенія v, соотвѣтствующія этимъ перестановкамъ суть:

$$(1) \qquad v_1, v_2, v_3, \ldots v_\mu;$$

они могутъ быть, или всѣ равныя, или всѣ различныя, или только нѣкоторыя изъ нихъ равныя. Разсмотримъ послѣдній случай.

Положимъ, что v имѣетъ въ ряду (1) $\varkappa-1$ членовъ себѣ равныхъ (*), которые пусть будутъ начальные; такъ, что

$$(2) \qquad v_1=v_2=v_3=\ldots\ldots=v_\varkappa,$$

а всѣ остальные члены не равны имъ. Замѣтивши перестановку, посредствомъ которой членъ $v_{\varkappa+1}$ произошелъ отъ v_1, приложимъ ее къ каждому изъ членовъ (2); отъ того мы получимъ $\varkappa$ новыхъ значеній v, неравныхъ предъидущимъ, но равныхъ между собою $=v_{\varkappa+1}$; пусть они будутъ

$$(3) \qquad v_{\varkappa+1}=v_{\varkappa+2}=v_{\varkappa+3}=\ldots\ldots=v_{2\varkappa}.$$

»cubiques, quatrièmes, etc., et demander dans quel ordre il faut effectuer un nombre »limité de telles opérations, en sorte que le résultat de la dernière donne toutes les »racines. L'analogie du second dégré est trop incomplète pour fonder ce jugement *à priori* »sur l'éspèce des opérations. Il etait même assez facile de prévoir qu'un nombre limité »d'extractions de racines de divers ordres ne peut pas conduire à la connaissance effective »des valeurs cherchées, car il n'y a aucune extraction de racine qui donne en nombre »réel plus de deux valeurs différentes, et l'on ne voit pas comment il serait possible »qu'en effectuant un nombre fini de ces opérations, on arrivât à une dernière qui don»nerait un nombre impair de valeurs différentes.

(*) Здѣсь подъ словомъ *равныя* должно понимать *тожественныя*; т. е. два значенія v_1 и v_2 равны между собою, какія бы ни были $x_1, x_2, \ldots x_m$. Напр.

$$v_1=x_1x_2+x_3=v_2=x_2x_1+x_3$$

Приложивъ къ каждому изъ нихъ перестановку, посредствомъ которой $v_{2\kappa+1}$ происходитъ отъ $v_{\kappa+1}$, мы получимъ еще κ новыхъ значеній v, отличныхъ отъ (2) и (3); но равнымъ между собою и равныхъ $v_{2\kappa+1}$. Означимъ ихъ чрезъ

$$v_{2\kappa+1}=v_{2\kappa+2}=v_{2\kappa+3}=\ldots=v_{3\kappa}.$$

Продолжая такимъ образомъ далѣе, мы дойдемъ до ряда, состоящаго изъ κ равныхъ значеній v, которыми и кончится рядъ (1). Въ самомъ дѣлѣ: изобразивъ послѣдній рядъ равныхъ значеній чрезъ

$$v_{(\varrho-1)\kappa+1}=v_{(\varrho-1)\kappa+2}=v_{(\varrho-1)\kappa+3}=\ldots v_{\varrho\kappa},$$

и положивъ, что значеніе $v_{\varrho\kappa-i}$, гдѣ $i<\kappa$, есть послѣдній членъ ряда (1), значенія:

$$v_{\varrho\kappa-i+1},\ v_{\varrho\kappa-i+2},\ldots,\ v_{\varrho\kappa}$$

должны входить въ предъидущіе ряды, а потому должны быть равны нѣкоторымъ изъ значеній v_1, $v_{\kappa+1}$, $v_{2\kappa+1}$, $v_{(\varrho-2)\kappa+1}$; слѣдовательно и $v_{(\varrho-1)\kappa+1}$ будетъ равно одному изъ послѣднихъ. Но это не возможно. И такъ всѣ μ значенія функціи v раздѣлились на ϱ группъ, содержащихъ по κ равныхъ членовъ, а потому

$$\mu=1.2.3\ldots m=\varrho\kappa;$$

откуда видимъ, что число различныхъ значеній, получаемыхъ раціональною функціею v отъ перестановки количествъ x_1, x_2,.... x_m всѣми возможными образами, всегда есть дѣлитель произведенія $1.2.3\ldots m$.

§ **153.** Разсмотримъ теперь различные виды перестановокъ. Пусть $a, b, c, d,\ldots$ и $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ будутъ значки количествъ $x_1, x_2,\ldots x_m$ въ какомъ-либо порядкѣ, и положимъ, что $a, b, c, d\ldots$ замѣняются соотвѣтственно значками $\alpha, \beta, \gamma, \delta,\ldots$: такую перестановку мы будемъ означать выраженіемъ

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d,\ldots \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta,\ldots \end{pmatrix}.$$

Ясно, что свойство перестановки не измѣнится отъ перемѣны мѣста вертикальныхъ паръ значковъ; такъ, что предъидущему выраженію можно дать видъ

$$\begin{pmatrix} b, & d, & c, & a, \ldots \\ \beta, & \delta, & \gamma, & \alpha, \ldots \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} a, & d, & b, & c, \ldots \\ \alpha, & \delta, & \beta, & \gamma, \ldots \end{pmatrix} \text{ и пр.}$$

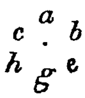
Основываясь на этомъ, можно въ каждой перестановкѣ порядокъ вертикальныхъ паръ значковъ подчинить правилу (§ 43, 3). И такъ перестановки:

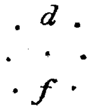
$$\left.\begin{matrix} \begin{pmatrix} e, h, b, c, k, d, a, f, g \\ g, k, c, e, a, f, d, b, h \end{pmatrix} \\[2ex] \begin{pmatrix} a, g, e, b, c, d, h, f \\ b, h, g, e, a, f, c, d \end{pmatrix} \\[2ex] \begin{pmatrix} a, g, e, c, f, h, b, d \\ h, f, a, d, e, g, c, b \end{pmatrix} \\[2ex] \begin{pmatrix} h, b, f, i, g, e, c, k, a, l, d, m \\ b, e, h, f, i, g, a, c, d, m, k, l \end{pmatrix} \\[2ex] \begin{pmatrix} a, c, b, h, l, f, m, k, n, p \\ c, b, f, k, l, h, m, a, n, p \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} \text{ обращаются въ } \left\{\begin{matrix} \begin{pmatrix} e, g, h, k, a, d, f, b, c \\ g, h, k, a, d, f, b, c, e \end{pmatrix} (a) \\[2ex] \begin{pmatrix} a, b, e, g, h, c, d, f \\ b, e, g, h, c, a, f, d \end{pmatrix} (b) \\[2ex] \begin{pmatrix} a, h, g, f, e, c, d, b \\ h, g, f, e, a, d, b, c \end{pmatrix} (c) \\[2ex] \begin{pmatrix} h, b, e, g, i, f, c, a, d, k, l, m \\ b, e, g, i, f, h, a, d, k, c, m, l \end{pmatrix} (d) \\[2ex] \begin{pmatrix} a, c, b, f, h, k, l, m, n, p \\ c, b, f, h, k, a, l, m, n, p \end{pmatrix} (e) \end{matrix}\right.$$

Отличительный признакъ перестановокъ вида (a) состоитъ въ томъ, что нижній рядъ кончится тою буквою, которою начинается верхній. Чтобы повторить такую перестановку, стоить только въ нижнемъ ряду начальную букву переставить на конецъ. Въ § 43 мы видѣли, что перестановка, состоящая изъ n буквъ, будучи совершена n разъ, приводитъ буквы къ начальному положенію: напр. перестановка (a), будучи совершена 9 разъ, приводится къ $\begin{pmatrix} c, e, g, h, k, a, d, f, b \\ e, g, h, k, a, d, f, b, c \end{pmatrix}$. Это послѣдовательное повтореніе одной и той же перестановки подобно вращенію круга въ противную сторону порядка буквъ въ верхнемъ ряду; такъ напр., написавши по окружности круга буквы верхняго ряда перестановки (a), имѣемъ

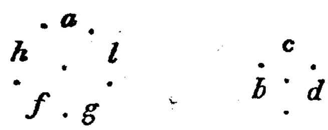
$$\begin{matrix} & & e & & \\ & c & & g & \\ b & & \cdot & & h \\ & f & & & k \\ & & d \quad a & & \end{matrix}$$

Повернувъ кругъ справа налѣво на одну букву, получимъ нижній рядъ $g, h, k, a, d, f, b, c, e$ первой перестановки; повернувъ кругъ еще на одну букву, будемъ имѣть нижній рядъ второй перестановки, и т. д. Ясно, что послѣ 9 движеній кругъ сдѣлаетъ полный оборотъ, и буквы воротятся на прежнія мѣста.

Перестановки вида (b), (c), (d) состоятъ изъ нѣсколькихъ перестановокъ вида (a). Такъ въ (b), при повтореніи одной и той же перестановки, 6 первыхъ буквъ и 2 послѣднія отдѣльно будутъ совершать кругообращенія, и, въ то время какъ кругъ 

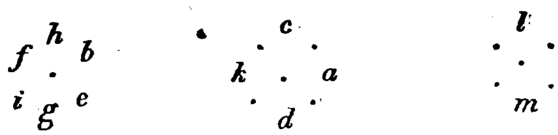
совершитъ полное обращеніе, кругъ 

обернется два раза; послѣ чего круги придутъ въ прежнее положеніе. Вообще, когда въ какой нибудь перестановкѣ, состоящей изъ n перестановокъ вида (a), число буквъ въ главной (т. е. въ которой больше всѣхъ буквъ), которое назовемъ p, есть кратное всѣхъ прочихъ; тогда отъ повторенія данной перестановки p разъ, буквы придутъ въ начальное положеніе. Въ перестановкѣ (c) буквы верхняго ряда придутъ въ начальное положеніе послѣ 3.5=15 разъ повтореній перестановки; потому что круги



обращаясь, могутъ придти въ прежнее положеніе только тогда, когда первый кругъ обернется 3 раза, а второй 5 разъ, т. е. послѣ 15-ти движеній.

Перестановка (d) состоитъ изъ трехъ перестановокъ вида (a): первая содержитъ 6 буквъ, вторая 4, третья 2; круги:



придутъ въ начальное положеніе, когда первый обернется 2 раза, второй 3, третій 6, т. е. послѣ 12-ти движеній, и такъ перест. (d), будучи совершена 12 разъ, приводитъ буквы въ начальное положеніе. Вообще если какая нибудь перестановка состоитъ изъ нѣсколькихъ другихъ вида (a), изъ которыхъ первая содержитъ p буквъ, вторая q, третья r, и пр.; то наименьшее дѣлимое чиселъ p, q, r,.... будетъ означать, сколько разъ должно совершить данную перестановку, чтобы буквы пришли въ прежнее положеніе.

Въ перестановкѣ (e) можно не обращать вниманія на буквы l, m, n, p; потому что они остаются на своихъ мѣстахъ. Такъ, что перестановка (e) все то же, что

$$\begin{pmatrix} a, c, b, f, h, k \\ c, b, f, h, k, a \end{pmatrix}.$$

§ 154. Означимъ всѣ возможныя переложенія значковъ x_1, $x_2 \ldots . x_m$ по m чрезъ

$$A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_\mu,$$

гдѣ $\mu = 1.\ 2 \ldots . m$. Переходъ отъ одного переложенія A_r къ другому A_s, или перестановку, мы станемъ изображать чрезъ $\begin{pmatrix} A_r \\ A_s \end{pmatrix}$, а значеніе, которое получаетъ v отъ этой перестановки чрезъ $v\begin{pmatrix} A_r \\ A_s \end{pmatrix}$. Если послѣ перестановки $\begin{pmatrix} A_r \\ A_s \end{pmatrix}$ производится другая $\begin{pmatrix} A_{r'} \\ A_{s'} \end{pmatrix}$; то значеніе v, происходящее отъ этихъ двухъ перестановокъ, будемъ означать такъ: $v \begin{pmatrix} A_r \\ A_s \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A_{r'} \\ A_{s'} \end{pmatrix}$. А если къ v прилагается p разъ одна и та же перестановка $\begin{pmatrix} A_r \\ A_s \end{pmatrix}$; то послѣднее значеніе v будемъ изображать чрезъ $v \begin{pmatrix} A_r \\ A_s \end{pmatrix}^p$.

Приложимъ къ данной функціи v какую нибудь перестановку $\begin{pmatrix} A_r \\ A_s \end{pmatrix}$, и повторимъ ее нѣсколько разъ; отъ того v получитъ рядъ значеній:

$$(4) \qquad v = v \begin{pmatrix} A_r \\ A_s \end{pmatrix}, \ v \begin{pmatrix} A_r \\ A_s \end{pmatrix}^1, \ v \begin{pmatrix} A_r \\ A_s \end{pmatrix}^2, \ldots . v \begin{pmatrix} A_r \\ A_s \end{pmatrix}^p.$$

Ясно, то въ этомъ ряду, идя слѣва направо, мы должны встрѣтить опять значеніе u. Пусть $v = v \begin{pmatrix} A_r \\ A_s \end{pmatrix}^p$; то перестановка $\begin{pmatrix} A_r \\ A_s \end{pmatrix}$, будучи приложена p разъ къ какому нибудь члену ряда (4) возвратитъ ему его значеніе, такъ, что

$$v\begin{pmatrix}A_r\\A_s\end{pmatrix}^i=v\begin{pmatrix}A_r\\A_s\end{pmatrix}^{i+p}, \text{ и } v=v\begin{pmatrix}A_r\\A_s\end{pmatrix}^p=v\begin{pmatrix}A_r\\A_s\end{pmatrix}^{p\alpha},$$

гдѣ α какое нибудь цѣлое число; поэтому

$$v\begin{pmatrix}A_r\\A_s\end{pmatrix}^i=v\begin{pmatrix}A_r\\A_s\end{pmatrix}^{p\alpha+i}.$$

Пусть p будетъ наибольшее первоначальное число въ ряду $1,2,3,\ldots m$, и положимъ, что число всѣхъ различныхъ значеній v меньше p; то между p какими нибудь значеніями v два необходимо должны быть равны между собою. Слѣдовательно рядъ

$$v\begin{pmatrix}A_r\\A_s\end{pmatrix}^0, v\begin{pmatrix}A_r\\A\end{pmatrix}^1, v\begin{pmatrix}A_r\\A_s\end{pmatrix}^2,\ldots v\begin{pmatrix}A_r\\A\end{pmatrix}^{p-1}$$

долженъ имѣть покрайней мѣрѣ два члена равные. Пусть они будутъ:

$$v\begin{pmatrix}A_r\\A_s\end{pmatrix}^i=v\begin{pmatrix}A_r\\A_s\end{pmatrix}^\kappa;$$

приложивъ къ нимъ $p-i$ разъ перестановку $\begin{pmatrix}A_r\\A_s\end{pmatrix}$, находимъ

$$v\begin{pmatrix}A_r\\A_s\end{pmatrix}^{i+p-i}=v\begin{pmatrix}A_r\\A_s\end{pmatrix}^{\kappa+p-i},$$

т. е.

$$v\begin{pmatrix}A_r\\A_s\end{pmatrix}^p=v\begin{pmatrix}A_r\\A_s\end{pmatrix}^{\kappa+p-i}=v.$$

Положивъ $\kappa+p-i=q$, имѣемъ

$$v=v\begin{pmatrix}A_r\\A_s\end{pmatrix}^q.$$

Слѣдовательно значеніе v не перемѣняется отъ повторенія p разъ перестановки $\begin{pmatrix}A_r\\A_s\end{pmatrix}$, а потому оно не перемѣнится отъ повторенія этой перестановки $q\beta$ разъ, гдѣ β цѣлое положительное число; и такъ

$$v=v\begin{pmatrix}A_r\\A_s\end{pmatrix}^{q\beta}. \tag{5}$$

Такъ какъ κ **и** i меньше p, то $\kappa-i<p$; слѣдовательно $q=k+q-i$ не дѣлится на p безъ остатка. Число p, по положенію, первоначальное, а потому q и p не имѣютъ общихъ дѣлителей. Извѣстно, что въ такомъ случаѣ можно выбрать два цѣлыя числа α и β, удовлетворяющія уравненію

$$q\beta-p\alpha=1 \text{ или } q\beta=p\alpha+1;$$

отъ того, по ур. (5), будетъ

$$v=v\begin{pmatrix}A_r\\A_s\end{pmatrix}^{p\alpha+1}.$$

Но $v=v\begin{pmatrix}A_r\\A_s\end{pmatrix}^{p\alpha}$; слѣдовательно

$$v=v\begin{pmatrix}A_r\\A_s\end{pmatrix}^{1}.$$

Итакъ: *если число значеній данной функціи v меньше* p, *наибольшаго первоначальнаго числа, заключеннаго въ ряду* 1,2,3,... m; *то, прилагая къ ней перестановку, возвращающую буквы въ прежнее положеніе послѣ* p *разъ повтореній, она не будетъ измѣнять своего значенія.*

§ **155.** Ясно, что перестановки:

$$\begin{pmatrix}a, b, c, d, e, \ldots f, g, h\\b, c, d, e, \ldots f, g, h, a\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}b, c, d, e, \ldots f, g, h, a\\c, a, b, d, e, \ldots f, g, h\end{pmatrix},$$

гдѣ число буквъ въ каждомъ ряду $=p$, возвращаютъ буквы въ прежнее положеніе послѣ p разъ повтореній (*); слѣдовательно, по предъидущей теоремѣ, значеніе функціи v не измѣнится, если къ ней приложимъ **послѣдовательно эти двѣ перестановки. Но онѣ совокупляются въ одну перестановку**

$$\begin{pmatrix}a, b, c, d, \ldots f, g, h\\c, a, b, d, \ldots f, g, h\end{pmatrix},$$

которая есть не что иное какъ перестановка

$$\begin{pmatrix}a, b, c\\c, a, b\end{pmatrix}$$

(*) Для первой это ясно, потому что она вида (a), см. §153; вторая же приводится къ этому виду отъ перестановки вертикальныхъ паръ значковъ: она будетъ

$$\begin{pmatrix}a, h, g, f, \ldots e, d, b, c\\h, g, f, \ldots e, d, b, c, a\end{pmatrix}$$

а послѣдняя можетъ быть произведена посредствомъ двухъ слѣдующихъ:

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ b, & a \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} b, & c \\ c, & b \end{pmatrix}.$$

И такъ значеніе v, по совершеніи этихъ двухъ перестановокъ, не измѣняется, т. е.

$$v = v \begin{pmatrix} a, & b \\ b, & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b, & c \\ c, & b \end{pmatrix}$$

Такъ какъ a, b, c означаютъ какіе нибудь значки, то мы имѣемъ право написать

$$v = v \begin{pmatrix} b, & c \\ c, & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c, & d \\ d, & c \end{pmatrix}.$$

Взявши вмѣсто v ея значеніе $v \begin{pmatrix} a, & b \\ b, & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b, & c \\ c, & b \end{pmatrix}$, и приложивъ къ нему перестановку $\begin{pmatrix} b, & c \\ c, & b \end{pmatrix}$, получимъ значеніе $v \begin{pmatrix} a, & b \\ b, & a \end{pmatrix}$, которое отъ перестановки $\begin{pmatrix} c, & d \\ d, & c \end{pmatrix}$ даетъ $v \begin{pmatrix} a, & b \\ b, & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c, & d \\ d, & c \end{pmatrix}$; слѣдовательно

$$v \begin{pmatrix} a, & b \\ b, & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c, & d \\ d, & c \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} b, & c \\ c, & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c, & d \\ d, & c \end{pmatrix},$$

а потому

$$v = \begin{pmatrix} a, & b \\ b, & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c, & d \\ d, & c \end{pmatrix}.$$

Отсюда заключаемъ, что значеніе $v = f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ не перемѣнится отъ двухъ послѣдовательныхъ перестановокъ вида $\begin{pmatrix} a, & b \\ b, & a \end{pmatrix}$, разумѣя подъ a и b два какіе нибудь указателя количествъ x_1, x_2,... x_m. Такого рода перестановку *Коши* и *Абель* назвали *перемѣщеніемъ* (Transposition) (Versetzung). И такъ отъ четнаго числа перемѣщеній значеніе v не измѣнится. Но, произведя перемѣщеніе одинъ разъ, v можетъ принять другое значеніе, которое отъ четнаго числа перемѣщеній сохраняется; слѣдовательно всѣ значенія v, происходящія отъ нечетнаго числа перемѣщеній, будутъ также равны между собою.

Такъ какъ всякая перестановка можетъ быть произведена чрезъ опредѣленное число перемѣщеній, то заключаемъ, что изъ всѣхъ возможныхъ значеній v только два могуть быть различныя; поэтому имѣемъ слѣдующую теорему:

Если число различныхъ значеній, принимаемыхъ раціональною функціею количествъ $x_1, x_2, \ldots x_m$, *отъ перестановки этихъ количествъ между собою всѣми возможными образами, меньше наибольшаго первоначальнаго числа, заключеннаго въ ряду* 1, 2, 3,...m; *то оно не больше 2-хъ, т. е.* $=1$ *или* 2. Эту теорему далъ *Коши* (*).

Функціи подобныя и неподобныя.

§ **156.** Пусть будетъ дано уравненіе

$$x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}\,x+a_m=0,$$

котораго корни означимъ чрезъ $x_1, x_2, \ldots x_m$. Имѣя видъ раціональной функціи этихъ корней

$$y=f(x_1, x_2, \ldots x_m),$$

можно всегда составить уравненіе, котораго корни будутъ всѣ неравныя значенія y: это мы показали въ § 64. Пусть $z=\varphi(x_1, x_2, \ldots x_m)$ будетъ другая раціональная функція корней $x_1, x_2, \ldots x_m$, которая отъ всѣхъ возможныхъ перестановокъ этихъ корней имѣетъ одинакое число значеній съ y, и измѣняетъ или сохраняетъ свое значеніе, смотря по тому, будетъ ли y измѣнять или сохранять свое значеніе. Такія функціи называются *подобными* (Semblables). Главное свойство ихъ состоитъ въ томъ, что, зная какое-либо значеніе одной изъ нихъ, мы можемъ опредѣлить соотвѣтствующее значеніе другой. Чтобы это доказать, положимъ, что

(1) $$y_1, y_2, y_3, \ldots y_\mu$$

суть значенія функціи y, а

(2) $$z_1, z_2, z_3, \ldots z_\mu$$

соотвѣтствующія имъ значенія z; такъ, что когда y_1, отъ какой-либо перестановки перейдемъ въ y_λ, гдѣ $\lambda<\mu$, то отъ той же перестановки z перейдетъ въ z_λ. Примемъ значенія (1) за извѣстныя, и опредѣлимъ по нимъ значенія (2).

(*) Journal de l'Ecole Polytéchnique, cahier 17.

Функція

$$y_1^p z_1+y_2^p z_2+y_3^p z_3+\ldots+y_\mu^p z_\mu=P_p,$$

гдѣ p цѣлое число, симметрична относительно корней x_1, x_2,... x_m; потому что, отъ перестановки ихъ какимъ нибудь образомъ, одинъ изъ ея членовъ переходитъ въ другой; слѣд. P_p можно всегда выразить раціональною функціею коеффиціентовъ a_1, a_2,... a_m. Полагая $p=0$, 1, 2,... μ, и сдѣлавъ $q=1$, находимъ:

$$z_1+z_2+z_3+\ldots+z_\mu=P_0$$

$$y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3+\ldots+y_\mu z_\mu=P_1$$

$$y_1^2z_1+y_2^2z_2+y_3^2z_3+\ldots+y_\mu^2 z_\mu=P_2$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$y_1^{\mu-1}z_1+y_2^{\mu-1}z_2+y_3^{\mu-1}z_3+\ldots+y_\mu^{\mu-1}z_\mu=P_{\mu-1},$$

гдѣ P_0, P_1,... $P_{\mu-1}$ будутъ извѣстны.

Помноживши первыя $\mu-1$ уравненія соотвѣтственно на неопредѣленные множители $B_{\mu-1}$, $B_{\mu-2}$, $B_{\mu-3}$,... B_2, B_1, и сложивши ихъ съ послѣднимъ уравненіемъ, получаемъ

$$(3)\quad \left.\begin{aligned}&(y_1^{\mu-1}+B_1y_1^{\mu-2}+\ldots+B_{\mu-2}y_1+B_{\mu-1})z_1\\&(y_2^{\mu-1}+B_1y_2^{\mu-2}+\ldots+B_{\mu-2}y_2+B_{\mu-1})z_2\\&(y_3^{\mu-1}+B_1y_3^{\mu-2}+\ldots+B_{\mu-2}y_3+B_{\mu-1})z_3\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\\&(y_\mu^{\mu-1}+B_1y_\mu^{\mu-2}+\ldots+B_{\mu-2}y_\mu+B_{\mu-1})z_\mu\end{aligned}\right\}=P_0B_{\mu-1}+P_1B_{\mu-2}+\ldots+P_{\mu-1}.$$

Чтобы опредѣлить отсюда одно изъ значеній z, напр. z_1, положимъ:

$$y_2^{\mu-1}+B_1y_2^{\mu-2}+\ldots+B_{\mu-2}y_2+B_{\mu-1}=o$$

$$y_3^{\mu-1}+B_1y_3^{\mu-2}+\ldots+B_{\mu-2}y_3+B_{\mu-1}=o$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_\mu^{\mu-1}+B_1y_\mu^{\mu-2}+\ldots+B_{\mu-2}y_\mu+B_{\mu-1}=o,$$

Откуда видимъ, что неопредѣленные множители B_1, B_2,... $B_{\mu-1}$ суть коеффиціенты уравненія, котораго корни суть y_2, y_3,... y_μ. Это уравненіе легко получить: составимъ по § 64 уравненіе, котораго корни были бы y_1, y_2, y_3,... y_μ, и означимъ его чрезъ

$$\Phi(y)=y^\mu+A_1y^{\mu-1}+A_2y^{\mu-2}+\ldots+A_{\mu-1}y+A_\mu=0;$$

то искомое уравненіе

$$F(y)=(y-y_2)\,(y-y_3)\ldots(y-y_\mu)=y^{\mu-1}+B_1y^{\mu-2}+B_2y^{\mu-3}+\ldots+B_{\mu-1}=0$$

будетъ

$$\frac{y^\mu+A_1y^{\mu-1}+A_2y^{\mu-2}+\ldots+A_{\mu-1}y+A_\mu}{y-y_1}=$$

$$y^{\mu-1}+(A_1+y_1)y^{\mu-2}+(A_2+A_1y_1+y_1^2)y^{\mu-3}+\ldots$$

$$\ldots+(A_{\mu-1}+A_{\mu-2}y_1+\ldots+A_1y_1{}^{\mu-2}+y_1{}^{\mu-1})=0;$$

слѣдовательно

$$B_1=A_1+y_1$$

$$B_2=A_2+A_1y_1+y_1^2$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$B_{\mu-1}=A_{\mu-1}+A_{\mu-2}y_1+\ldots+A_1y_1{}^{\mu-2}+y_1{}^{\mu-1}.$$

Наконецъ уравненіе (3) даетъ

$$z_1=\frac{P_0B_{\mu-1}+P_1B_{\mu-2}+\ldots+P_{\mu-2}B_1+P_{\mu-1}}{y_1{}^{\mu-1}+B_1y_1{}^{\mu-2}+B_2y_1{}^{\mu-3}+\ldots+B_{\mu-2}y_1+B_{\mu-1}}=$$

$$\frac{P_0(A_1+y_1)+P_1(A_2+y_1A_1+y_1^2)+\ldots+P_{\mu-2}(A_{\mu-1}+A_{\mu-2}y_1+\ldots y_1{}^{\mu-1})+P_{\mu-1}}{F(y_1)}.$$

Такъ какъ $\Phi(y)=(y-y_1)F(y)$; то, взявши производную по § 14, находимъ

$$\Phi'(y)=F(y)+(y-y_1)F'(y),$$

а потому

$$\Phi'(y_1)=F(y_1)$$

и $$z_1=\frac{P_0(A_{\mu-1}+\ldots A_1y_1^{\mu-2}+y_1^{\mu-1})+P_1(A_{\mu-2}+\ldots y_1^{\mu-2})+\ldots+P_{\mu-1}}{\Phi'(y_1)}$$

Въ послѣднемъ выраженіи все извѣстно; и такъ мы достигли своей цѣли,—выразили z_1 раціональною функціею y_1. Вставляя вмѣсто y_1 прочія значенія y_2, y_3,... y_μ, находимъ:

$$z_2=\frac{P_0(A_{\mu-1}+\ldots A_1y_2^{\mu-2}+y_2^{\mu-1})+P_1(A_{\mu-1}+\ldots y_2^{\mu-2})+\ldots+P_{\mu-1}}{\Phi'(y_2)}$$

$$z_3=\frac{P_0(A_{\mu-1}+\ldots A_1y_3^{\mu-2}+y_3^{\mu-1})+P_1(A_{\mu-2}+\ldots y_3^{\mu-2})+\ldots+P_{\mu-1}}{\Phi'(y_3)}$$

$$z_\mu=\frac{P_0(A_{\mu-1}+\ldots A_1y_\mu^{\mu-2}+y_\mu^{\mu-1})+P_1(A_{\mu-2}+\ldots y_\mu^{\mu-2})+\ldots+P_{\mu-1}}{\Phi'(y_\mu)}.$$

Такимъ образомъ каждое изъ значеній z выразилось раціональною функціею соотвѣтствующаго ему значенія y и коеффиціентовъ даннаго уравненія.

§ **157. Разсмотримъ теперь случаи, когда число значеній функціи y не равно числу значеній функціи z: такія функціи называются *неподобными*.**

1) Положимъ сперва, что y имѣетъ больше значеній нежели z, и, что отъ тѣхъ перестановокъ, которыя не измѣняютъ z, функція y получаетъ λ различныхъ значеній; пусть будутъ

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ldots\ y_\mu$$

всѣ значенія y, а

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ldots\ z_\mu\ (*)$$

всѣ значенія z, какъ равныя такъ и неравныя.

Послѣднія раздѣляются на нѣсколько періодовъ, заключающихъ по λ равныхъ членовъ; положивъ $\mu=\lambda\varrho$, изобразимъ эти періоды чрезъ

$$z_1=z_2=z_3=\ldots z_\lambda$$

$$z_{\lambda+1}=z_{\lambda+2}=z_{\lambda+3}=\ldots z_{2\lambda}$$

$$z_{2\lambda+1}=z_{2\lambda+2}=z_{2\lambda+3}=\ldots z_{3\lambda}$$

. . . .

$$z_{(\varrho-1)\lambda+1}=z_{(\varrho-1)\lambda+2}=z_{(\varrho-1)\lambda+3}=\ldots z_{\varrho\lambda}.$$

(*) Здѣсь предполагается, что z_n получается изъ z и y_n изъ y чрезъ одинакія перестановки.

Выраженіе вида

$$y_1^p z_1+y_2^p z_2+y_3^p z_3+\ldots+y_\mu^p z_\mu=P_p,$$

будетъ симметричная функція отъ $x_1, x_2,\ldots x_m$, а потому мы можемъ его выразить раціональною функціею коеффиціентовъ $a_1, a_2,\ldots a_m$. Такимъ образомъ мы будемъ знать суммы:

$$z_1+z_2+\ldots+z_\lambda+\ldots+z_{(\varrho-1)\lambda}+\ldots+z_\mu=P_0$$

$$y_1 z_1+y_2 z_2+\ldots+y_\lambda z_\lambda+\ldots+y_{(\varrho-1)\lambda} z_{(\varrho-1)\lambda}+\ldots+y_\mu z_\mu=P_1$$

$$y_1^2 z_1+y_2^2 z_2+\ldots+y_\lambda^2 z_\lambda+\ldots+y_{(\varrho-1)\lambda}^2 z_{(\varrho-1)\lambda}+\ldots+y_\mu^2 z_\mu=P_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_1^{\mu-1} z_1+y_2^{\mu-1} z_2+\ldots+y_\lambda^{\mu-1} z_\lambda+\ldots+y_{(\varrho-1)\lambda}^{\mu-1} z_{(\varrho-1)\lambda}+\ldots+y_\mu^{\mu-1} z_\mu=P_{\mu-1}.$$

Помноживши эти равенства, исключая послѣдняго, на неопредѣленные множители $B_{\mu-1}$, $B_{\mu-2},\ldots B_1$, сложивши ихъ, и положивъ для сокращенія

$$y^{\mu-1}+B_1 y^{\mu-2}+\ldots+B_{\mu-2}y+B_{\mu-1}=F(y),$$

получимъ уравненіе

$$F(y_1)z_1+F(y_2)z_2+\ldots F(y_\mu)z_\mu=P_0 B_{\mu-1}+P_1 B_{\mu-2}+\ldots P_{\mu-2}B_1+P_{\mu-1};$$

отсюда легко опредѣлить каждое изъ значеній z.

Для опредѣленія z_1, положимъ $F(y_2)=o$, $F(y_3)=o,\ldots F(y_\mu)=o$; отъ того B_1, $B_2,\ldots B_{\mu-1}$ будутъ коеффиціентами уравненія

$$F(y)=(y-y_2)\,(y-y_3)\ldots\,(y-y_\mu)=o.$$

Чтобы получить это уравненіе, составимъ сперва по § 64 уравненіе

$$\Phi(y)=(y-y_1)\,(y-y_2)\ldots\,(y-y_\mu)=y^\mu+A_1 y^{\mu-1}+A_2 y^{\mu-2}+\ldots+A_{\mu-1}y+A_\mu,$$

и отдѣлимъ потомъ отъ него корень y_1. И такъ

$$F(y)=y^{\mu-1}+(A_1+y_1)y^{\mu-2}+(A_2+A_1y_1+y_1^2)y^{\mu-3}+\ldots+(A_{\mu-1}+\ldots+y_1^{\mu-1})$$

и

$$B_1=A_1+y_1$$

$$B_2=A_2+A_1y_1+y_1^2$$

$$\cdots\cdots$$

$$B_{\mu-1}=A_{\mu-1}+\ldots+A_1y_1^{\mu-2}+y_1^{\mu-1}.$$

а потому

$$z_1 = \frac{P_0(A_{\mu-1}+\ldots+A_1 y_1^{\mu-1}+y_1^{\mu})+P_1(A_{\mu-2}+\ldots+y_1^{\mu-1})+\ldots P_{\mu-1}}{F(y_1)}$$

Здѣсь знаменатель $F(y_1)$ можно такъ же, какъ и въ предъидущемъ §, замѣнить $\Phi(y_1)$.

Замѣняя y_1 прочими значеніями $y_2, y_3, \ldots y_\mu$, мы найдемъ остальныя значенія z, изъ которыхъ будетъ по λ равныхъ между собою (*).

2) Здѣсь нельзя выразить y чрезъ z, или когда число значеній y меньше числа значеній z; то z нельзя выразить чрезъ y. Въ самомъ дѣлѣ: положивъ, что равныя значенія y суть:

$$y_1 = y_{\lambda+1} = y_{2\lambda+1} = \ldots y_{(\varrho-1)\lambda+1}$$

$$y_2 = y_{\lambda+2} = y_{2\lambda+2} = \ldots y_{(\varrho-1)\lambda+2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_\lambda = y_{2\lambda} = y_{3\lambda} = \ldots y_{\varrho\lambda},$$

уравненіе

$$y_1^p z_1 + y_2^p z_2 + y_3^p z_3 + \ldots + y_\mu^p z_\mu = P_p$$

приметъ видъ

$$y_1^p(z_1+z_{\lambda+1}+\ldots z_{(\varrho-1)\lambda+1})+y_2^p(z_2+z_{\lambda+2}+\ldots z_{(\varrho-1)\lambda+2})+\ldots y_\lambda^p(z_\lambda+\ldots z_{\varrho\lambda})=P_p$$

или

$$y_1^p\xi_1+y_2^p\xi_2+y_3^p\xi_3+\ldots+y_\lambda^p\xi_\lambda=P_p,$$

сдѣлавъ для сокращенія

$$\xi_1 = z_1+z_{\lambda+1}+\ldots+z_{(\varrho-1)\lambda+1}$$

$$\xi_2 = z_2+z_{\lambda+2}+\ldots+z_{(\varrho-1)\lambda+2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots ;$$

отсюда, полагая послѣдовательно $p=0, 1, 2, \ldots \lambda-1$, имѣемъ:

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3+\ldots+\xi_\lambda=P_0$$

$$y_1\xi_1+y_2\xi_2+y_3\xi_3+\ldots+y_\lambda\xi_\lambda=P_1$$

$$y_1^2\xi_1+y_2^2\xi_2+y_3^2\xi_3+\ldots+y_\lambda^2\xi_\lambda=P_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_1^{\lambda-1}\xi_1+y_2^{\lambda-1}\xi_2+y_3^{\lambda-1}\xi_3+\ldots+y_\lambda^{\lambda-1}\xi_\lambda=P_{\lambda-1}.$$

(*) Чтобъ не слишкомъ удалиться отъ нашей цѣли, мы не станемъ здѣсь дѣлать примѣромъ: теорія сама по себѣ ясна.

Поступивши съ этими уравненіями такъ же, какъ и въ предъидущемъ случаѣ, получимъ

$$F(y_1)\xi_1+F(y_2)\xi_2+\ldots F(y_\lambda)\xi_\lambda=P_0B_{\lambda-1}+P_1B_{\lambda-2}+\ldots P_{\lambda-2}B_1+P_{\lambda-1}.$$

Положивъ $F(y_2)=o,\ldots F(y_\lambda)=o$, находимъ

$$\xi_1=\frac{P_0B_{\lambda-1}+P_1B_{\lambda-2}+\ldots P_{\lambda-2}B_1+P_{\lambda-1}}{\Phi'(y_1)}.$$

гдѣ $\Phi'(y_1)=F(y_1)$, а $\Phi(y)=o$ есть уравненіе, котораго корни суть всѣ различныя значенія y. Такимъ же образомъ опредѣлимъ $\xi_2, \xi_3,\ldots \xi_\lambda$ помощію соотвѣтственныхъ имъ значеній y.

Но каждое значеніе z нельзя выразить раціональною функціею значенія y: мы можемъ только составить уравненія, которыхъ корни будутъ:

$$(z_1,\ z_{\lambda+1},\ \ldots z_{(\varrho-1)\lambda+1}),\ (z_2,\ z_{\lambda+2},\ldots z_{(\varrho-1)\lambda+2}),\ldots(z_\lambda,\ z_{2\lambda},\ldots z_{\varrho\lambda}).$$

Докажемъ это для первой группы значеній z.

Пусть будетъ

$$S=(z_1,\ z_{\lambda+1},\ z_{2\lambda+1},\ldots z_{(\varrho-1)\lambda+1})$$

симметричная функція отъ $z_1,\ldots z_{(\varrho-1)\lambda+1}$. Прилагая къ этимъ значеніямъ z перестановки, не измѣняющія значенія y_1, они не будутъ выходить изъ первой группы значеній z, а будутъ только мѣняться одно на другое; слѣдовательно S не измѣняется отъ перестановокъ, не измѣняющихъ y_1. Но если къ нимъ приложимъ перестановку, отъ которой y_1 переходитъ въ y_γ (полагая $1<\gamma<\lambda$); то первая группа значеній z перемѣнится въ

$$(z_\gamma,\ z_{\lambda+\gamma},\ z_{2\lambda+\gamma},\ldots z_{(\varrho-1)\lambda+\gamma}),$$

а отъ того можетъ перемѣниться и S. Отсюда заключаемъ, что S есть или подобная функція y, или неподобная, но имѣющая меньше значеній нежели y. А потому во всякомъ случаѣ можно выразить S раціональною функціею y_1. Слѣдовательно въ уравненіи

$$(z-z_1)\ (z-z_{\lambda+1})\ (z-z_{2\lambda+1}),\ldots\ (z-z_{(\varrho-1)\lambda+1})$$
$$=z^\varrho+b_1z^{\varrho-1}+b_2z^{\varrho-2}+\ldots+b_{\varrho-1}z+b_\varrho=o$$

коеффиціенты $b_1,\ b_2,\ b_3,\ldots b_{\varrho-1},\ b_\varrho$ выразятся раціональными функціями y_1. То же самое и для прочихъ группъ значеній z.

§ 158. На теоріи подобныхъ и неподобныхъ функцій *Лагранжъ* основалъ способъ радикальнаго рѣшенія нѣкоторыхъ уравненій. Мы этимъ воспользуемся для доказательства возможности радикальнаго рѣшенія общихъ уравненій 3-й и 4-й степени.

1) Пусть дано уравненіе

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=o,$$

котораго корни суть x_1, x_2, x_3. Возьмемъ линейную функцію

$$t=x_1+ax_2+a^2x_3,$$

гдѣ $a^2+a+1=o$: она отъ перестановки x_1, x_2, x_3 принимаетъ 6 разныхъ значеній

$$\begin{array}{ll} t\ =x_1+ax_2+a^2x_3 & t_4=x_1+ax_3+a^2x_2 \\ t_2=x_2+ax_3+a^2x_1 & t_5=x_2+ax_1+a^2x_3 \\ t_3=x_3+ax_1+a^2x_2 & t_6=x_3+ax_2+a^2x_1; \end{array}$$

но ея степень

$$\theta=(x_1+ax_2+a^2x_3)^3=t^3$$

имѣетъ только два значенія. Чтобы это доказать, возьмемъ всѣ шесть значеній θ:

$$\begin{array}{ll} (1)\ \ (x_1+ax_2+a^2x_3)^3 & (4)\ \ (x_1+ax_3+a^2x_2)^3 \\ (2)\ \ (x_2+ax_3+a^2x_1)^3 & (5)\ \ (x_2+ax_1+a^2x_3)^3 \\ (3)\ \ (x_3+ax_1+a^2x_2)^3 & (6)\ \ (x_3+ax_2+a^2x_1)^3, \end{array}$$

и помножимъ (1), (2), (4) и (5) на $a^3=1$: находимъ

$$(1)=a^3(x_1+ax_2+a^2x_3)^3=(ax_1+a^2x_2+a^3x_3)^3=(ax_1+a^2x_2+x_3)=(3)$$

$$(2)=a^3(x_2+ax_3+a^2x_1)^3=(ax_2+a^2x_3+a^3x_1)^3=(ax_2+a^2x_3+x_1)=(1)$$

$$(4)=a^3(x_1+ax_3+a^2x_2)^3=(ax_1+a^2x_3+a^3x_2)^3=(ax_1+a^2x_3+x_2)=(5)$$

$$(5)=a^3(x_2+ax_1+a^2x_3)^3=(ax_2+a^2x_1+a^3x_3)^3=(ax_2+a^2x_1+x_3)=(6);$$

слѣдовательно (1)=(2)=(3) и (4)=(5)=(6). А потому θ имѣетъ только два неравныя значенія

$$(4)\qquad \begin{array}{l} \theta'=(x_1+ax_2+a^2x_3)^3 \\ \theta''=(x_1+ax_3+a^2x_2)^3 \end{array}$$

Для опредѣленія ихъ, составимъ уравненіе

(5) $$(\theta-\theta')(\theta-\theta'')=\theta^2+A_1\theta+A_2=o;$$

коеффиціенты его A_1 и A_2 суть симметричныя функціи корней x_1, x_2, x_3; поэтому они выразятся раціональными функціями коеффиціентовъ a_1, a_2, a_3, а именно:

$$A_1=-(\theta'+\theta'')=-[(x_1+\alpha x_2+\alpha^2 x_3)^3+(x_1+\alpha x_3+\alpha^2 x_2)^3]$$

$$=-5(x_1^3+x_2^3+x_3^3)-12x_1x_2x_3+3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(x_1+x_2+x_3)$$

$$=-2a_1^3+9a_1a_2-27a_3$$

$$A_2=(x_1+\alpha x_2+\alpha^2 x_3)^3(x_1+\alpha x_3+\alpha^2 x_2)^3=(a_1^2-3a_2)^3;$$

и такъ ур. (5) будетъ

(6) $$\theta^2+(-2a_1^3+9a_1a_2-27a_3)\theta+(a_1^2-3a_2)^3=o;$$

отсюда мы опредѣлимъ значенія θ' и θ'', и внеся ихъ въ (4), найдемъ:

$$x_1+\alpha x_2+\alpha^2 x_3=\sqrt[3]{\theta'}$$

$$x_1+\alpha x_3+\alpha^2 x_2=\sqrt[3]{\theta''};$$

присоединивъ сюда уравненіе

$$x_1+x_2+x_3=-a_1,$$

мы будемъ имѣть три линейныя уравненія относительно x_1, x_2, x_3, изъ которыхъ получимъ

(7) $$\left\{\begin{aligned} x_1&=\frac{\sqrt[3]{\theta'}+\sqrt[3]{\theta''}-a_1}{3}\\ x_2&=\frac{\alpha^2\sqrt[3]{\theta'}+\alpha\sqrt[3]{\theta''}-a_1}{3}\\ x_3&=\frac{\alpha\sqrt[3]{\theta'}+\alpha^2\sqrt[3]{\theta''}-a_1}{3}\end{aligned}\right.$$

Такъ какъ, по § 67, во всякомъ уравненіи, можно уничтожить коеффиціентъ втораго члена; то за общій видъ уравненій третьей степени можно принять

$$x^3+px+q=o.$$

Чтобы вывести радикальныя выраженія 3-хъ корней этого уравненія, положимъ въ ур. (6) $a_1=o$, $a_2=p$, $a_3=q$; отъ того получимъ уравненіе

$$\theta^2-27q\theta-27p^3=o,$$

которое даетъ

$$\theta'=3^3\left\{\frac{q}{2}+\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right\},\quad \theta''=3^3\left\{\frac{q}{2}-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Внеся это въ выраженія (7), и замѣтивъ; что $a=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $a^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, находимъ:

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}
x_1&=\left\{\frac{q}{2}+\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}+\left\{\frac{q}{2}-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}\\
x_2&=\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)\left\{\frac{q}{2}+\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\left\{\frac{q}{2}-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}\\
x_3&=\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\left\{\frac{q}{2}+\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)\left\{\frac{q}{2}-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}\right.$$

Эти формулы называются *Кардановыми*, а открылъ ихъ *Тарталеа*.

2) Перейдемъ теперь къ уравненію 4-й степени

$$x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=o.$$

Разсмотримъ опять линейную функцію

$$t=x_1+ax_2+a^2x_3+a^3x_4,$$

гдѣ a есть одинъ изъ корней уравненія $y^4=1$, за исключеніемъ 1. Взявши $a=-1$, имѣемъ $a^2=1$, $a^3=a$; отъ чего

$$t=(x_1+x_3)+(x_2+x_4)a.$$

Эта функція имѣетъ 6 различныхъ значеній:

(1) $(x_1+x_3)+(x_2+x_4)a$	(4) $(x_2+x_4)+(x_1+x_3)a$
(2) $(x_1+x_2)+(x_3+x_4)a$	(5) $(x_3+x_4)+(x_1+x_2)a$
(3) $(x_1+x_4)+(x_2+x_3)a$	(6) $(x_2+x_3)+(x_1+x_4)a$;

но квадратъ ея

$$\theta=[(x_1+x_3)+(x_2+x_4)a]^2$$

имѣетъ только три; потому что

$$(1)^2=\alpha^2[(x_1+x_3)+(x_2+x_4)\alpha]^2=[(x_1+x_3)\alpha+(x_2+x_4)]^2=(4)^2$$

$$(2)^2=\alpha^2[(x_1+x_2)+(x_3+x_4)\alpha]^2=[(x_1+x_2)\alpha+(x_3+x_4)]^2=(5)^2$$

$$(3)^2=\alpha^2[(x_1+x_4)+(x_2+x_3)\alpha]^2=[(x_1+x_4)\alpha+(x_2+x_3)]^2=(6)^2.$$

Означивъ эти три значенія чрезъ θ', θ'', θ''', составимъ уравненіе

$$(\theta-\theta')\,(\theta-\theta'')\,(\theta-\theta''')=\theta^3+A_1\theta^2+A_2\theta+A_3=o;$$

коэффиціенты его будутъ симметричныя функціи, а потому они выразятся раціональными функціями коэффиціентовъ даннаго уравненія. Послѣ того всѣ три значенія θ опредѣлятся по формуламъ (7) и дадутъ

$$(x_1+x_3)+(x_2+x_4)\alpha=\sqrt{\theta'}$$

$$(x_1+x_2)+(x_3+x_4)\alpha=\sqrt{\theta''}$$

$$(x_1+x_4)+(x_2+x_3)\alpha=\sqrt{\theta'''};$$

присоединивъ сюда еще уравненіе

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-a_1,$$

и замѣтивъ, что $\alpha=-1$, будемъ имѣть четыре линейныя уравненія:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-a_1,$$

$$x_1+x_3-x_2-x_4=\sqrt{\theta'}$$

$$x_1+x_2-x_3-x_4=\sqrt{\theta''}$$

$$x_1+x_4-x_2-x_3=\sqrt{\theta'''},$$

изъ которыхъ получимъ:

$$x_1=\frac{\sqrt{\theta'}+\sqrt{\theta''}+\sqrt{\theta'''}-a_1}{4}$$

$$x_2=\frac{-\sqrt{\theta'}+\sqrt{\theta''}-\sqrt{\theta'''}-a_1}{4}$$

$$x_3=\frac{\sqrt{\theta'}-\sqrt{\theta''}-\sqrt{\theta'''}-a_1}{4}$$

$$x_4=\frac{-\sqrt{\theta'}-\sqrt{\theta''}+\sqrt{\theta'''}-a_1}{4}.$$

Радикальное рѣшеніе уравненія четвертой степени открыто *Феррари*.

Свойства радикальныхъ функцій, выражающихъ корень даннаго уравненія.

§ **159**. Положимъ, что данному уравненію

$$x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=0$$

удовлетворяетъ радикальная функція коэффиціентовъ. Означивъ чрезъ $z=\sqrt[n]{\theta}$ одинъ изъ ея радикаловъ самаго высшаго порядка, можно, по § 144, всегда ей дать видъ

$$(1)\qquad x=q_0+q_1z+q_2z^2+q_3z^3+\ldots+q_{n-1}z^{n-1},$$

гдѣ $q_0, q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$ содержатъ прочіе радикалы и функцію θ. Въ этомъ выраженіи можно всегда коэффиціентъ при первой степени радикала сдѣлать $=1$. Въ самомъ дѣлѣ: если q_1 не равно 0; то, положивъ $\sqrt[n]{\theta}=\frac{\sqrt[n]{p}}{q_1}$, или $z=\frac{y}{q_1}$, означая чрезъ y новый радикалъ $\sqrt[n]{p}$, мы получимъ

$$x=q_0+y+\frac{q_2}{q_1^2}y^2+\frac{q_3}{q_1^3}y^3+\ldots+\frac{q_{n-1}}{q_1^{n-1}}y^{n-1}.$$

Но если $q_1=0$: то возьмемъ другой коэффиціентъ не равный нулю, который пусть будетъ q_μ, и положимъ $q_\mu z^\mu=y=\sqrt[n]{p}$; отъ того $z^{\alpha\mu}=\frac{y^\alpha}{q_\mu^\alpha}$. Извѣстно, что можно всегда найти два цѣлыя числа α и β, удовлетворящія условію $\alpha\mu-\beta n=\mu'$ (потому что n число первоначальное, такъ, что μ и n не имѣютъ общихъ множителей), гдѣ μ' произвольное цѣлое число; отсюда будетъ $\alpha\mu=\mu'+\beta n$; внеся это въ $z^{\alpha\mu}$, получимъ

$$z^{\alpha\mu}=z^{\mu'+\beta n}=z^{\mu'}\theta^\beta=\frac{y^\alpha}{q_\mu^\alpha},$$

и

$$z^{\mu'}=\frac{y^\alpha}{q_\mu^\alpha\theta^\beta}.$$

Полагая послѣдовательно $\mu'=1, 2, 3, \ldots n-1$, и опредѣляя соотвѣтственныя наименьшія значенія α и β, мы выразимъ всѣ степени z помощію степеней новаго радикала y; внеся ихъ въ нашу радикальную функцію (1), она приметъ видъ

$$(2)\qquad x=q+y+q'y^2+q''y^3+\ldots+q^{(n-2)}y^{(n-1)},$$

гдѣ $q, q', q'', \ldots q^{(n-2)}$ такого же свойства, какъ и $q_0, q_1, \ldots q_{n-1}$. Вставивъ это выраженіе x въ данное уравненіе, и расположивъ результатъ по степенямъ y, послѣдній будетъ вида

$$r_0+r_1y+r_2y^2+\ldots+r_{n-1}y^{n-1}=o.$$

Это уравненіе должно быть тожественное, то есть должно быть: $r_0=o$, $r_1=o$, $r_2=o$,... $r_{n-1}=o$. Чтобы это доказать, допустимъ противное: тогда два уравненія

$$(3) \qquad y^n-p=o$$

$$(4) \qquad r+r_1y+\ldots+r_{n-1}y^{n-1}=o$$

должны имѣть нѣсколько общихъ корней. Одного только общаго корня они не могутъ имѣть; потому что тогда первыя ихъ части имѣли бы линейнаго раціональнаго множителя относительно r_0, r_1,... r_{n-1}, p, и приравнявъ его нулю, получили бы уравненіе первой степени, изъ котораго y опредѣлился бы раціональнымъ образомъ относительно p, r_0, r_1,... r_{n-1}, а это невозможно. И такъ, число общихъ корней уравненій (3) и (4) не меньше 2-хъ, и потому первыя ихъ части должны имѣть общаго раціональнаго множителя относительно r_0, r_1,...r_{n-1}, p, котораго степень не меньше 2. Означимъ его чрезъ

$$t_0+t_1y+t_2y^2+\ldots+t_{\mu-1}y^{\mu-1}+t_\mu y^\mu,$$

и положимъ, что первыя части ур. (3) и (4) не могутъ имѣть другаго такого же множителя степени низшей; то уравненія

$$y^n-p=o \text{ и } t_0+t_1y+t_2y^2+\ldots+t_\mu y^\mu=o$$

будутъ имѣть μ общихъ корней; слѣдовательно второму уравненію будетъ удовлетворять ay, гдѣ a есть мнимый корень уравненія $y^{n-1}+y^{n-2}+..y+1=o$. А потому имѣемъ:

$$t_0+t_1y+t_2y^2+\ldots+t_{\mu-1}y^{\mu-1}+t^\mu y^\mu=o$$

$$t_0+t_1ay+t_2a^2y^2+\ldots+t_{\mu-1}a^{\mu-1}y^{\mu-1}+t_\mu a^\mu y^\mu=o.$$

Помноживши первое на a^μ, и вычтя изъ него второе, получаемъ:

$$t_0(a^\mu-1)+t_1(a^\mu-a)y+t_2(a^\mu-a^2)y^2+\ldots+t_{\mu-1}(a^\mu-a^{\mu-1})y^{\mu-1}=o.$$

Если это уравненіе не есть тожественное, то его первая часть будетъ множителемъ первой части ур. (4); но это не возможно, потому что степень такого множителя не можетъ быть менѣе μ; слѣд. должно допустить:

$$a^{\mu}-1=o,\ a^{\mu}-a=o,\dots\ a^{\mu}-a^{\mu-1}=o,$$

что также не возможно. Слѣд. предположеніе, что ур. (4) не есть тожественное не справедливо. И такъ должно быть

$$r_0=o,\ r_1=o,\dots\ r_{n-1}=o.$$

А потому данному уравненію удовлетворяетъ выраженіе (2) при всѣхъ значеніяхъ радикала $y=\sqrt[n]{p}$, т. е., если вставимъ въ (2)

$$\sqrt[n]{p},\ a\sqrt[n]{p},\ a^2\sqrt[n]{p},\dots\ a^{n-1}\sqrt[n]{p}$$

вмѣсто y, то мы получимъ n корней даннаго уравненія:

$$x_1=q+\sqrt[n]{p}+q'(\sqrt[n]{p})^2+q''(\sqrt[n]{p})^3+\dots+q^{(n-2)}(\sqrt[n]{p})^{n-1}$$

$$x_2=q+a\sqrt[n]{p}+q'a^2(\sqrt[n]{p})^2+q''a^3(\sqrt[n]{p})^3+\dots+q^{(n-2)}a^{n-1}(\sqrt[n]{p})^{n-1}$$

$$x_3=q+a^2\sqrt[n]{p}+q'a^4(\sqrt[n]{p})^2+q''a^6(\sqrt[n]{p})^3+\dots\ q^{(n-2)}a^{2(n-1)}(\sqrt[n]{p})^{n-1}$$

. . . .

$$x_n=q+a^{n-1}\sqrt[n]{p}+q'a^{2(n-1)}(\sqrt[n]{p})^2+\dots q^{(n-2)}a^{(n-1)(n-1)}(\sqrt[n]{p})^{n-1};$$

отсюда

$$q=\frac{1}{n}\,(x_1+x_2+\dots+x_n)$$

$$\sqrt[n]{p}=\frac{1}{n}\,(x_1+a^{n-1}x_2+a^{n-2}x_3+\dots+ax_n)$$

$$q'(\sqrt[n]{p})^2=\frac{1}{n}\,(x_1+a^{n-2}x_2+a^{n-4}x_3+\dots+a^2x_n)$$

. . . .

$$q^{(n-1)}(\sqrt[n]{p})^{n-1}=\frac{1}{n}\,(x_1+ax_2+a^2x_3+\dots+a^{n-1}x_n),$$

и общее выраженіе для коэффиціентовъ $q,\ q',\dots\ q^{(n-2)}$ будетъ

$$q^{(i)}=\frac{n^{i-1}\;(x_1+a^{n-i}x_2+a^{n-2i}x_3+\ldots a^i x_n)}{(x_1+a^{n-1}x_2+a^{n-2}x_3+\ldots+ax_n)^i}.$$

И такъ каждый членъ радикальнаго рѣшенія (2) выражается раціональною функціею корней даннаго уравненія.

Возьмемъ теперь одну изъ функцій $p,\ q,\ q',\ldots\ q^{(n-2)}$, напр. p, и станемъ въ ней переставливать $x_1,\ x_2,\ldots\ x_m$ всѣми возможными образами; то она получитъ опредѣленное число значеній. Означивъ эти значенія чрезъ

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ldots\ p_{n'},$$

мы всегда можемъ, по § 64, составить уравненіе

$$(p-p_1)\ (p-p_2)\ (p-p_3)\ldots(p-p_{n'})=o,$$

котораго коеффиціенты будутъ раціональныя функціи коеффиціентовъ даннаго уравненія. Это уравненіе имѣетъ радикальное рѣшеніе вида

$$l=S_0+\sqrt[n']{r}+S_1(\sqrt[n']{r})^2+S_2(\sqrt[n']{r})^3+\ldots+S_{n'-2}(\sqrt[n']{r})^{n-1},$$

и по предъидущему докажется, что

$$\sqrt[n']{r},\ S_0,\ S_1,\ldots\ S_{n'-2}$$

суть раціональныя функціи отъ $p_1,\ p_2,\ldots$, а потому они также раціональныя функціи отъ $x_1,\ x_2,\ldots\ x_m$.

Такимъ же образомъ докажется, что радикальныя функціи, входящія въ $r,\ S_0,\ S_1,\ldots\ S_{n'-2}$ суть раціональныя функціи отъ $x_1,\ x_2,\ldots\ x_m$. Продолжая эти сужденія далѣе, найдемъ наконецъ, что всѣ радикальныя функціи, входящія въ (2), суть раціональныя функціи коеффиціентовъ даннаго уравненія. И такъ заключаемъ:

Если Алгебраическое уравненіе имѣетъ радикальное рѣшеніе; то всѣ радикальныя функціи, входящія въ составъ этого рѣшенія, будутъ раціональныя функціи корней.

Невозможность радикальнаго рѣшенія общаго уравненія 5-й степени.

§ **160**. Возьмемъ общій видъ уравненій 5-й степени

$$x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5=o,$$

и посмотримъ, можно ли всегда составить радикальную функцію отъ

a_1, a_2,... a_5, удовлетворяющую этому уравненію, или, другими словами, можно ли

$$x=\nabla(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)$$

всегда выразить радикальною функціею отъ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

Радикалы 1-го порядка, которые будутъ входить въ это выраженіе, по пред. §, суть раціональныя функціи корней x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, а потому число ихъ различныхъ значеній, или ихъ показатели, должны быть дѣлителями произведенія 1.2.3.4.5; но какъ эти показатели суть числа первоначальныя, то они будутъ или 2 или 5 (они не могутъ быть=3 по § 155). Въ первомъ случаѣ радикалы имѣютъ видъ (см. § 42).

$$q\sqrt{\varrho},$$

гдѣ q симметричная функція корней x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, а ϱ знакопеременяющая функція

(1) $\varrho=(x_1-x_2)\,(x_1-x_3)\,(x_1-x_4)\,(x_1-x_5)\ldots\,(x_3-x_4)\,(x_3-x_5)(x_4-x_5)$.

Во второмъ случаѣ они будутъ раціональныя функціи 5-ти количествъ, принимающія 5 различныхъ значеній. Такую функцію можно считать подобною функціею x_1, и потому, по § 156, можно ее выразить раціональною функціею x_1 вида

$$v_1=\frac{b_0+b_1x_1+b_2x_1^2+b_3x_1^3+b_4x_1^4}{c_0+c_1x_1+c_2x_1^2+c_3x_1^3+c_4x_1^4}=\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)},$$

гдѣ b_0, b_1, b_2,.. b_4, c_0, c_1,... c_4 суть раціональныя функціи отъ a_1, a_2,... a_5. Помноживши числителя и знаменателя на произведеніе

$$P=\varphi(x_2)\ \varphi(x_3)\ \varphi(x_4)\ \varphi(x_5),$$

имѣемъ

$$v_1=\frac{f(x_1)P}{\varphi(x_1)\ \varphi(x_2)\ \varphi(x_3)\ \varphi(x_4)\ \varphi(x_5)}.$$

Знаменатель есть симметричная функція отъ x_1, x_2,... x_5, слѣдовательно выразится раціональною функціею отъ a_1, a_2,... a_5; функція P симметрична относительно x_2, x_3, x_4, x_5, а потому выразится раціональною функціею коеффиціентовъ уравненія

$$(x-x_2)\ (x-x_3)\ (x-x_4)\,(x-x_5)=\frac{x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5}{x-x_1}$$

$$=x^4+(a_1+x_1)x^3+(a_2+a_1x_1+x_1^2)x^2+(a_3+a_2x_1+a_1x_1^2+x_1^3)x+$$
$$(a_4+a_3x_1+a_2x_1^2+a_1x_1^3+x_1^4)=o;$$

и такъ P будетъ вида

$$P=d_0+d_1x_1+d_2x_1^2+d_3x_1^3+d_4x_1^4,$$

гдѣ d_0, d_1,... d_4 суть раціональныя функціи отъ a_1, a_2,... a_5; слѣдовательно и $f(x_1)P$ будетъ такого же вида. Положивъ

$$f(x_1)P=e_0+e_1x_1+e_2x_1^2+e_3x_1^3+e_4x_1^4,$$

$$\varphi(x_1)\ \varphi(x_2)\ \varphi(x_3)\ \varphi(x_4)\ \varphi(x_5)=s,$$

имѣемъ

$$v_1=\frac{e_0+e_1x_1+e_2x_1^2+e_3x_1^3+e_4x_1^4}{s};$$

наконецъ, сдѣлавъ для сокращенія $\frac{e_0}{s}=a$, $\frac{e_1}{s}=b$, $\frac{e_2}{s}=c$, $\frac{e_3}{s}=d$, $\frac{e_4}{s}=e$, имѣемъ

$$v_1=a+bx_1+cx_1^2+dx_1^3+ex_1^4,$$

гдѣ a, b, c, d, e, суть раціональныя функціи коеффиціентовъ даннаго уравненія.

Такъ какъ функція x_1 подобна функціи v_1; то она, по § 156, будетъ имѣть видъ

$$x_1=\frac{k_0+k_1v_1+k_2v_1^2+k_3v_1^3+k_4v_1^4}{l_0+l_1v_1+l_2v_1^2+l_3v_1^3+l_4v_1^4}.$$

Пусть v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 будутъ пять различныхъ значеній v; то, взявши уравненіе

$$(v-v_1)(v-v_2)(v-v_3)(v-v_4)(v-v_5)=v^5+A_1v^4+A_2v^3+A_3v^2+A_4v+A_5=o,$$

коеффиціенты его, по § 64, выразятся раціональными функціями коеффиціентовъ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Помощію этого уравненія мы переведемъ v_1 изъ знаменателя въ числитель, такъ, что x_1 приметъ видъ

$$x_1=A+Bv_1+Cv_1^2+Dv_1^3+Ev_1^4,$$

гдѣ A, B, C, D, E будутъ раціональныя функціи отъ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

§ **161**. Радикалы перваго порядка, входящіе въ выраженіе для x, по сказанному въ предъидущемъ § , будутъ, или вида $\sqrt[5]{R}$, или вида $\sqrt[2]{R}$, гдѣ R есть раціональная функція коэффиціентовъ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Положимъ, что x содержитъ радикалъ перваго порядка

$$v=\sqrt[5]{R};$$

то этотъ радикалъ, по § 159, будетъ раціональная функція x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, принимающая пять различныхъ значеній, а потому, вслѣдствіе предъидущаго §, можно положить

$$\sqrt[5]{R}=a+bx_1+cx_1^2+dx_1^3+ex_1^4$$

$$x_1=A+B\sqrt[5]{R}+C(\sqrt[5]{R})^2+D(\sqrt[5]{R})^3+E(\sqrt[5]{R})^4;$$

но, по § 159, имѣемъ

$$B\sqrt[5]{R}=\tfrac{1}{5}(x_1+\alpha^4x_2+\alpha^3x_3+\alpha^2x_4+\alpha x_5),$$

гдѣ $\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=o$: это уравненіе не возможно; потому что вторая часть можетъ имѣть 120 различныхъ значеній, а первая только 5. Слѣдовательно x не можетъ содержать радикаловъ перваго порядка вида $\sqrt[5]{R}$.

Допустимъ, что x содержитъ радикалы перваго порядка вида $\sqrt{R}$: этотъ радикалъ будетъ раціональная функція x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, принимающая отъ перестановки ихъ 2 значенія, равныя и съ противными знаками, т. е. будетъ знакоперемѣняющая функція. А потому можно положить

$$\sqrt{R}=q.\varrho,$$

гдѣ q симметричная функція, а ϱ функція (1).

Если бы x выражался радикальною функціею 1-го порядка; то онъ былъ бы раціональною функціею коэффиціентовъ a_1, a_2,... a_5 и выраженій вида

$$\sqrt{R}=q.\varrho,\ \sqrt{R'}=q'\varrho,\ \sqrt{R''}=q''\varrho,\ldots,$$

означая чрезъ q, q', q'',... симметр. функціи; т. е. былъ бы вида

$$x=\frac{A+B\varrho+C\varrho^2+D\varrho^3+\ldots+K\varrho^{\varkappa}}{A'+B'\varrho+C'\varrho^2+D'\varrho^3+\ldots+K'\varrho^{\varkappa'}}$$

гдѣ A, B, C,... A', B', C',... суть раціональныя функціи коэффиціентовъ. Отдѣливъ члены съ четными степенями отъ членовъ съ нечетными степенями ϱ, имѣли бы:

$$x=\frac{A+C\varrho^2+E\varrho^4+\ldots+(B+D\varrho^2+\ldots)\varrho}{A'+C'\varrho^2+E'\varrho^4+\ldots+(B'+D'\varrho^2+\ldots)\varrho}=\frac{P+Q\varrho}{P'+Q'\varrho},$$

гдѣ P, Q, P' и Q' симметричныя функціи. Помноживши числителя и знаменателя на $P'-Q'\varrho$, получили бы

$$x=\frac{(P+Q\varrho)\ (P'-Q'\varrho)}{(P'+Q'\varrho)\,(P'-Q'\varrho)}=\frac{(PP'-QQ'\varrho^2)+(QP'-PQ')\varrho}{P'^2-Q'^2\varrho^2}.$$

$$=\alpha+\beta\varrho,$$

гдѣ α и β симметричныя функціи. Слѣдоват. x былъ бы функція, принимающая отъ перестановки всѣхъ корней x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 только 2 значенія. Но это не сообразно; потому что x, какъ корень уравненія 5-й степени, можетъ имѣть пять различныхъ значеній. И такъ x не можетъ быть радикальною функціею перваго порядка. Посмотримъ теперь, можетъ ли x содержать радикалы втораго порядка.

Допустимъ одинъ изъ нихъ

$$z=\sqrt[n]{S},$$

гдѣ S функція, имѣющая только два различныя значенія. Положивъ $S=p+q.\varrho$ (функція вида (33) § 42), имѣемъ для z два значенія:

(2) $$z_1=\sqrt[n]{p+q\cdot\varrho}\ \text{ и }\ z_2=\sqrt[n]{p-q\cdot\varrho}.$$

Если $n=2$, то каждое даетъ два другія, такъ, что z будетъ имѣть 4 различныя значенія:

$$+\sqrt[2]{p+q\cdot\varrho},\ -\sqrt[2]{p+q\cdot\varrho},\ +\sqrt[2]{p-q\cdot\varrho},\ -\sqrt[2]{p-q\cdot\varrho}.$$

Но это не возможно; потому что, по § 155, нѣтъ раціональной функціи 5-ти количествъ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, имѣющей 4 различныя значенія. Нельзя также допустить $n=3$; потому, что тогда произведеніе $z_1\,z_2=\sqrt{p^2-q^2\varrho}$ будетъ имѣть три значенія. Слѣдовательно можно только положить $n=5$. При этомъ положеніи, возьмемъ произведеніе выраженій (2), которое назовемъ γ; то будетъ

$$\gamma=z_1.z_2=\sqrt[5]{p^2-q^2\varrho^2}.$$

Функція γ, отъ перестановки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, должна имѣть или 5 различныхъ значеній, или 2, или быть симметричною. Въ первомъ случаѣ, по § 160, она будетъ имѣть видъ

$$\gamma=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4,$$

гдѣ a, b, c, d, e, суть раціональныя функціи коеффиціентовъ. Отсюда, имѣемъ

$$x = A + B\gamma + C\gamma^2 + D\gamma^3 + E\gamma^4,$$

и по § 159, $B\gamma$ будетъ раціональная функція:

$$\tfrac{1}{5}(x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5).$$

Но это не возможно; потому что послѣднее выраженіе можетъ имѣть 120 различныхъ значеній, между тѣмъ какъ $B\gamma$ имѣетъ только 5.

Положивъ, что γ имѣетъ два значенія, она будетъ вида (33) § 42. Пусть

$$\gamma = \theta + \omega . \varrho;$$

то

$$\gamma^5 = (\theta^5 + 10\theta^3\omega^2\varrho^2 + 5\theta\omega^4\varrho^4) + (4\theta^5 + 10\theta^2\omega^2\varrho^2 + \omega^4\varrho^4)\omega . \varrho = p^2 - q^2\varrho.$$

Первая часть есть функціи, имѣющая два значенія, а вторая симметричная. Чтобы это равенство было возможно, необходимо, чтобъ

$$(5\theta^4 + 10\theta^2\omega^2\varrho^2 + \omega^4\varrho^4)\omega = o;$$

первый множитель нельзя положить равнымъ нулю, потому что тогда θ можетъ имѣть четыре различныя значенія; слѣдовательно $\omega = o$, а потому $\gamma = \theta$, т. е. произведеніе $z_1 . z_2 = \gamma$ есть симметричная функція.

Возьмемъ теперь сумму

$$u = z_1 + z_2 = z_1 + \frac{\gamma}{z_1}.$$

Перестановки количествъ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, измѣняющія $p + q.\varrho$, не измѣняютъ значенія u; потому что тогда z_1 переходитъ въ z_2, а z_2 въ z_1, и γ остается постояннымъ. Но u принимаетъ 5 различныхъ значеній для 5-ти значеній радикала $\sqrt[5]{p + q\varrho}$, а именно:

$$z_1 + \frac{\gamma}{z_1},\ \alpha z_1 + \frac{\gamma}{\alpha z_1},\ \alpha^2 z_1 + \frac{\gamma}{\alpha^2 z_1},\ \alpha^3 z_1 + \frac{\gamma}{\alpha^3 z_1},\ \alpha^4 z_1 + \frac{\gamma}{\alpha^4 z_1},$$

гдѣ $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = o$. Слѣдовательно u имѣетъ видъ

$$u = z + \frac{\gamma}{z} = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4;$$

отсюда

$$x = A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4,$$

гдѣ A, B, C, D, E раціональныя функціи коеффиціентовъ даннаго уравненія.

Положивъ $p+q.\varrho=v$, имѣемъ

$$u=\sqrt[5]{v}+\frac{\gamma}{\sqrt[5]{v}}=\sqrt[5]{v}+\frac{\gamma(\sqrt[5]{v})^4}{v}=z_1+\frac{\gamma z_1^4}{v};$$

внеся это въ предъидущее выраженіе для x, находимъ

$$x=A'+B'z_1+C'z_1^2+D'z_1^3+E'z_1^4,$$

гдѣ A', B', C', D', E' суть раціональныя функціи отъ v и отъ коеффиціентовъ a_1, a_2,... a_5. Вставивши послѣдовательно вмѣсто z_1 его значенія: z_1, αz_1, $\alpha^2 z_1$, $\alpha^3 z_1$, $\alpha^4 z_1$, имѣемъ:

$$x_1=A'+B'z_1+C'z_1^2+D'z_1^3+E'z_1^4$$

$$x_2=A'+B'\alpha z_1+C'\alpha^2 z_1^2+D'\alpha^3 z_1^3+E'\alpha^4 z_1^4$$

$$x_3=A'+B'\alpha^2 z_1+C'\alpha^4 z_1^2+D'\alpha^6 z_1^3+E'\alpha^8 z_1^4$$

$$x_4=A'+B'\alpha^3 z_1+C'\alpha^6 z_1^2+D'\alpha^9 z_1^3+E'\alpha^{12} z_1^4$$

$$x_5=A'+B'\alpha^4 z_1+C'\alpha^8 z_1^2+D'\alpha^{12} z_1^3+E'\alpha^{16} z_1^4;$$

откуда находимъ

$$(3)\qquad B'z_1=\tfrac{1}{5}(x_1+\alpha^4 x_2+\alpha^3 x_3+\alpha^2 x_4+\alpha x_5).$$

Такъ какъ B' есть раціональная функція отъ a_1,... a_5 и отъ $v=p+q.\varrho$; то, по сказанному для (3), B' и всякая ея раціональная функція будутъ вида $\alpha+\beta.\varrho$, гдѣ α и β симметричныя функціи, а ϱ знакоперемѣняющая. Положивъ $(B')^5=\alpha+\beta.\varrho$, имѣемъ

$$B'z_1=\sqrt[5]{(p+q.\varrho)(B')^5}=\sqrt[5]{(p+q.\varrho)(\alpha+\beta.\varrho)}=\sqrt[5]{(p\alpha+q.\beta\varrho^2)+(p\beta+q.\alpha)\varrho};$$

отсюда **видимъ, что $B'z_1$, т. е. первая часть ур.** (3), имѣетъ только 10 различныхъ значеній; вторая же часть можетъ имѣть 120 различныхъ значеній, а потому это уравненіе не справедливо. **Слѣдов.** нельзя допустить существованіе радикаловъ вида $z=\sqrt[5]{p+q.\varrho}$.

Но какъ x никакихъ другихъ радикаловъ втораго порядка содержать не можетъ; то заключаемъ, что x вовсе не содержитъ радикальныхъ функцій втораго порядка, а потому не можетъ содержать и радикальныхъ функцій высшихъ порядковъ. И такъ x нельзя выразить никакою радикальною функціею коеффиціентовъ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

§ 162. Совершенно тѣмъ же путемъ можно доказать **невозможность** радикальнаго рѣшенія общаго уравненія всякой **первоначальной степени**

n (*): въ этомъ доказательствѣ важную роль играетъ теорема: *всякая раціональная функція v всѣхъ корней даннаго уравненія, принимающая n различныхъ значеній отъ перестановки этихъ корней всѣми возможными образами, имѣетъ видъ*

$$a+bx_1+cx_1^2+dx_1^3+\ldots\; kx_1^n,$$

гдѣ a, b, c, d,... k, *суть симметричныя функціи корней. Абель* ее доказалъ для $n=5$ частнымъ образомъ, а потому распространеніе доказательства невозможности радикальнаго рѣшенія для $n>5$ было затруднительно. Но это затрудненіе Г-нъ Остроградскій уничтожилъ, выведя ту же теорему изъ свойства подобныхъ функцій, независимо отъ частнаго значенія n.

Мы ограничимся только доказательствомъ невозможности радикальнаго рѣшенія общаго уравненія 5-й степени; намъ и этого достаточно, чтобы сказать, что *рѣшеніе опредѣленныхъ алгебраическихъ уравненій есть особаго рода дѣйствіе, и заключаетъ въ себѣ, какъ частные случаи, прочія основныя дѣйствія: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе и извлеченіе радикаловъ.*

Есть случаи, въ которыхъ радикальное рѣшеніе возможно: это зависитъ отъ степени уравненія и отъ даннаго условія, существующаго между корнями или между коеффиціентами. Сюда принадлежатъ: *двучленныя уравненія и вообще уравненія, которыхъ всѣ корни выражаются одною и тою же раціональною функціею одного какого нибудь корня* (**) *и множество другихъ.*

Я не разсматриваю этихъ случаевъ; потому что для того нужны предварительныя свѣденія изъ неопредѣленнаго Анализа, который можетъ быть не всѣмъ изъ моихъ читателей извѣстенъ. Желающіе знать радикальное рѣшеніе уравненія

$$x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1=0,$$

по способу Гаусса, могутъ его найти на Русскомъ языкѣ *въ Лекціяхъ Алгебр. и Трансценд. Анализа Г-на Остроградскаго.*

КОНЕЦЪ.

(*) См. Лекціи Алгебр. и Трансц. Анализа Г-на Остроградскаго Часть II.

(**) Journal für die reine und angewandte Mathematik. Von A. Crelle, IV-ter Band, 2-tes Heft. Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement. Par. Abel. *Idem.* X-ter Band, 2-tes Heft. Mémoire sur la résolution des équations algébriques dont les racines ont entre elles un rapport donné etc.

ПРИБАВЛЕНІЯ.

I.

1. Хотя Геометрія есть наука прикладная; но ее, съ древнихъ временъ по нынѣшнее состояніе Математическихъ наукъ, причисляютъ къ чистой Математикѣ, и многіе Геометры для доказательства какой-либо общей теоремы въ Анализѣ прибѣгаютъ иногда къ геометрическимъ построеніямъ. Но этого не должно быть; потому что Геометрія разсматриваетъ частныя величины, а математическій Анализъ имѣетъ предметомъ величины отвлеченныя, независимыя отъ частнаго явленія природы физической. Не смотря на это, геометрическія построенія могутъ принести большую пользу при изученіи: они служатъ поясненіемъ аналитическаго доказательства и дѣлаютъ его болѣе ощутительнымъ для учащагося. Такъ говоритъ Фурье о геометрическихъ построеніяхъ въ отдѣленіи корней: « Il ne suffisait pas de donner « le principe analytique dont nous avons déduit autre fois la solution: il est préférable de rendre les conséquenses très-sensibles par l'emploi des constructions. Rien « n'est plus propre à montrer distinctement la nature de la question. »

2. Первую часть уравненія

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots a_{m-2}x^2+a_{m-1}x+a_m=o, \tag{1}$$

котораго коеффиціенты $a_0, a_1, a_2, \ldots a_m$ дѣйствительныя числа, можно разсматривать, какъ частное состояніе неопредѣленнаго уравненія

$$y=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots a_{m-1}x+a_m, \tag{2}$$

соотвѣтствующее $y=o$.

Изъ Аналитической Геометріи извѣстно (*), что разумѣется подъ уравненіемъ какой-либо плоской кривой линіи, отнесенной къ прямолинейнымъ координатамъ. Кривая линія, опредѣляемая уравненіемъ вида (2), называется *параболическою*. Здѣсь x означаетъ абсциссу какой нибудь точки, а y соотвѣтствующую ему ординату.

Начертивъ прямоугольныя оси координатъ Ox и Oy (Фиг. 1), примемъ Ox за ось абсциссъ, а Oy за ось ординатъ. Положить $y=o$ въ уравненіи (2), значитъ положить, что кривая пересѣкается съ осью Ox; абсцисса этой точки

(*) См. *Аналитическую Геометрію* О. П. *Брашмана*, § 54.

пересѣченія есть величина, которая, будучи вставлена вмѣсто x въ первую часть уравненія (1) дѣлаетъ ее тожественно нулемъ. Такъ какъ кривая можетъ нѣсколько разъ пересѣкать ось Ох; то различныхъ дѣйствительныхъ значеній для x, дающихъ $y=0$, должно быть столько, сколько имѣется этихъ точекъ пересѣченія. Эти дѣйствительныя абсциссы точекъ пересѣченія суть различные дѣйствительные корни уравн. (1).

3. Чтобы y и x были линіи, необходимо, чтобы $f(x)$ была линейная однородная функція; для этого коеффиціентъ a_m долженъ выражать линію, a_{m-1} долженъ быть отвлеченное число, a_{m-2} — величина *перваго отрицательнаго* измѣренія, т. е. число, раздѣленное на линію, a_{m-3} — величина *втораго отрицательнаго измѣренія*, т. е. число, раздѣленное на произведеніе двухъ линій, и т. д., a_1 — величина измѣренія —$(m-2)$, наконецъ a_0—величина — $(m-1)$ измѣренія.

Если коеффиціентъ при x^m есть единица; то подъ нимъ должно разумѣть выраженіе $\frac{1}{1^{m-1}}$, гдѣ 1^{m-1} есть произведеніе $m-1$ линій, изъ которыхъ каждая принимается за единицу длины.

4. Положимъ, что уравненіе

$$y=f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m$$

выражаетъ кривую ВМ М'R (Фиг. 2).

Давши x частное значеніе абсциссы ОР, y получитъ значеніе ординаты МР. Перейдя потомъ къ точкѣ М', x получитъ приращеніе $\Delta x = PP'$, а y приращеніе $\Delta y = M'Q$; такъ, что координаты точки М' будутъ

$$OP'=x+\Delta x,\ M'P'=y+\Delta y=f\,(x+\Delta x);$$

откуда

$$\Delta y=M'Q=f(x+\Delta x)-y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

Раздѣливши эту разность на $MQ=\Delta x$, находимъ

$$\frac{M'Q}{MQ}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\mathrm{tang}(M'MQ)=\mathrm{tang}(M'Sx).$$

Съ уменьшеніемъ Δx точки М и М' будутъ сближаться, отъ чего уголъ M'Sx будетъ приближаться къ углу GTx; слѣдовательно предъидущее отношеніе, съ уменьшеніемъ Δx, будетъ приближаться къ tang(GTx); такъ, что

$$\text{пред.}\left\{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right\}=f'(x)=\mathrm{tang}(GTx),$$

т. е. *производная функція ординаты* y, *при соотвѣтственной ей абсциссѣ* x, *есть не что иное, какъ тангенсъ угла, составляемаго касательною въ точкѣ, опредѣляемой координатами* x *и* y, *съ осью x-въ*.

5. Изъ треугольника GMQ имѣемъ

$$GQ=MQ.\ \mathrm{tang}(GMQ)=\Delta x.\ f'(x),$$

а потому

$$QP'+QG=GP'=y+\Delta x.f'(x)=f(x)+\Delta x.f'(x).$$

Ордината точки M' (см. § 18) можетъ быть выражена такъ:

$$M'P'=f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta x.f'(x)+\frac{\Delta x^2}{2}.f''(x+\phi\Delta x).$$

Вычтя ее изъ GP', находимъ

$$GP'-M'P'=-\frac{\Delta x^2}{2}.f''(x+\phi\Delta x).$$

Когда кривая BM M'R между точками M и M' обращена вогнутою стороною къ оси x; *тогда, какъ бы ни было мало* $PP'=\Delta x$, *будетъ* $GP'>M'P'$, и потому $-\frac{\Delta x^2}{2}f''(x+\phi\Delta x)$ должно быть количество положительное, для чего $f''(x+\phi\Delta x)$ должно быть отрицательное, слѣд. $f''(x)$ также отрицательное. Если же кривая обращена выпуклою стороною къ оси x, то, какъ бы ни было мало Δx, $GP'<M'P'$, и $-\frac{\Delta x^2}{2}f''(x+\Delta x)$ должно быть количество отрицательное, для чего $f''(x)$ должно быть положительное. И такъ: *когда кривая, въ сопредѣльности какой-либо точки, выпуклою стороною обращена къ оси* x; *тогда производная втораго порядка ординаты относительно абсциссы будетъ положительная. Если же кривая обращена вогнутою стороною къ оси* x; *то производная втораго порядка отъ* y *по* x *будетъ отрицательная.*

6. Когда кривая съ возрастаніемъ x, будучи сначала выпуклая, дѣлается потомъ вогнутою, или на оборотъ; то вторая производная изъ положительной дѣлается отрицательною, или на оборотъ, и переходитъ чрезъ нуль. Точка, соотвѣтствующая этому состоянію кривой, называется точкою *перегиба*.

Если ордината съ возрастаніемъ абсциссы уменьшается до нѣкотораго значенія, послѣ котораго она начнетъ возрастать; то это значеніе ординаты будетъ *minimum*. Производная въ то же время, по § 17, изъ отрицательнаго значенія переходитъ въ положительное, и при *minimum* значеніи ординаты обращается въ нуль; слѣдовательно она непрерывно возрастаетъ съ возрастаніемъ x, а потому вторая производная, при *minimum* значеніи ординаты, должна быть положительною. Отсюда заключаемъ, что, если ордината имѣетъ наименьшее значеніе изъ всѣхъ смежныхъ; то касательная въ точкѣ, соотвѣтствующей этому наименьшему значенію, параллельна оси x, и кривая выпуклою стороною обращена къ этой оси. Когда же ордината достигаетъ наибольшаго значенія изъ всѣхъ смежныхъ; тогда касательная также параллельна оси x; но вторая производная отрицательная, т. е. кривая обращена вогнутою стороною къ этой оси.

Если это *maximum* или *minimum* будетъ 0, т. е., при одной и той же абсциссѣ, будетъ $f(x)=o$ и $f'(x)=o$; то, по § 69, эта абсцисса будетъ двукратный корень уравненія $f(x)=o$. Если кромѣ того $f''(x)=o$, то x будетъ трикратный корень ур.

$f(x)=o$. Въ первомъ случаѣ кривая касается оси x, а во второмъ она пересѣкается и касается въ точкѣ, гдѣ кривая изъ вогнутой дѣлается выпуклою, или на оборотъ, т. е. въ точкѣ *перегиба*. Когда уравненіе имѣетъ болѣе трехъ равныхъ корней; то число ихъ можно узнать слѣдующимъ образомъ:

Возьмемъ рядъ производныхъ

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ f^{\mathrm{IV}}(x)..f^{m-1}(x)$$

и построимъ кривыя

$$(3)\qquad y=f(x),\ y=f'(x),\ y=f''(x),\ y=f'''(x),\ y=f^{\mathrm{IV}}(x),\ldots y=f^{m-1}(x);$$

если первыя n кривыя имѣютъ общую точку на оси x, то абсцисса этой точки будетъ дѣйствительный n кратный корень даннаго уравненія $f(x)=o$.

7. Коэффиціенты $a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots\ a_m$ могутъ быть таковы, что кривая, данная уравненіемъ

$$y=f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m,$$

пересѣкаетъ ось абсциссъ въ m точкахъ. Но, измѣнивъ эти коэффиціенты, видъ кривой можетъ такъ измѣниться, что нѣкоторыя пересѣченія исчезнутъ; потому что кривая, измѣняя свой видъ, можетъ потерять нѣкоторые изгибы; нѣкоторые же могутъ оставаться, но не пересѣкать ось x. Такъ какъ каждый изгибъ пересѣкаетъ ось x въ двухъ точкахъ; то число исчезающихъ точекъ пересѣченія кривой съ осью x должно быть всегда четное. Эти исчезающія точки соотвѣтствуютъ мнимымъ корнямъ уравненія $f(x)$

Если, при исчезаніи двухъ точекъ пересѣченія, кривая потеряла изгибъ, имъ соотвѣтствующій; то дѣйствительные корни, обратившіеся въ мнимые, не оставляютъ ни какого слѣда на чертежѣ. А потому видъ кривой $y=f(x)$ не всегда можетъ показать мнимые корни уравненія $f(x)=o$.

8. Вставляя въ рядъ функцій

$$f^m(x),f^{m-1}(x),\ldots f'''(x),f''(x),f'(x),\ f(x)$$

вмѣсто абсциссы x различныя величины, и построивая для каждой соотвѣтственно ординаты кривыхъ (3), мы, по теоремѣ Фурье отдѣленія корней, опредѣлимъ точки, между которыми могутъ лежать точки пересѣченія этихъ кривыхъ съ осью x.

Разсмотримъ случай, когда двѣ абсциссы a и b соотвѣтствуютъ двумъ ординатамъ $f(a)$ и $f(b)$, имѣющимъ одинакіе знаки, и кривая между этими ординатами имѣетъ одно только *maximum* или *minimum*, и не имѣетъ точекъ *перегиба*, т. е. знаки трехъ функцій $f''(x),\ f'(x),\ f(x)$, для двухъ значеній $x=a$ и $x=b$ суть

$$\begin{matrix}[a]\\ [b]\end{matrix}\quad \text{или}\quad \begin{matrix}+ & - & +\\ + & + & +\end{matrix}\quad \text{или}\quad \begin{matrix}- & + & -\\ - & - & -.\end{matrix}$$

Это случай, въ которомъ нужно правило § 111 для распознавія, будутъ ли корни ур. $f(x)=o$, назначаемые предѣлами a и b, дѣйствительные или мнимые, или для распознанія, будетъ ли кривая mn (Фиг. 3) пересѣкать ось x, между точками a и b, или внѣ. Это было бы легко различить, если бы знали точное значеніе γ, абсциссы точки t, гдѣ касательная параллельна оси x, т. е. для которой производная есть нуль: тогда стоило бы вставить γ въ $f(x)$ вмѣсто x, и посмотрѣть, каковъ знакъ результата $\gamma t = f(\gamma)$. Если онъ противенъ знаку ординатъ $am = f(a)$ и $bn = f(b)$, то кривая mn пересѣкаетъ ось x въ двухъ точкахъ α и β; но если знакъ $f(\gamma)$ одинаковъ съ знакомъ $f(a)$ и $f(b)$, то изгибъ кривой mn не достигаетъ оси x, и корни уравненія $f(x)=o$, назначаемые предѣлами a и b, мнимые.

Если мы, вставивши въ $f(x)$ вмѣсто x величину близкую къ γ, найдемъ, что знакъ результата противенъ знаку $f(a)$ и $f(b)$; то кривая пересѣкаетъ ось x. Но если знакъ всѣхъ трехъ результатовъ одинаковъ; то корни, назначаемые предѣлами a и b, остаются въ неизвѣстности: мы не вправѣ сказать, что они мнимые; потому что можетъ быть величина ближайшая къ γ, нежели предъидущая, будучи вставлена въ $f(x)$ вмѣсто x, даетъ результатъ съ противнымъ знакомъ $f(a)$ и $f(b)$.

Проведя въ точкахъ m и n касательныя ma' и nb', изъ точекъ ихъ пересѣченія съ осью x возставимъ ординаты $a'm'$ и $b'n'$; потомъ проведемъ еще касательныя $m'a''$, $n'b''$, и т. д. Когда корни, назначаемые предѣлами a и b, дѣйствительные, т. е. кривая пересѣкаетъ ось x; то всѣ эти касательныя должны пересѣкаться внизу оси x; отъ чего сумма двухъ соотвѣтственныхъ подкасательныхъ:

$$aa'+b'b,\quad a'a''+b''b',\ \text{и т. д.}$$

будетъ всегда меньше соотвѣтственнаго ей разстоянія: $a\,b$, $a'b'$, $a''b''$,... Если же корни мнимые, т. е. кривая не достигаетъ оси x; то мы необходимо должны дойти до такихъ касательныхъ $m's$ и $n'r$, которыя пересѣкутся между кривою и осью x, или на самой оси x, и сумма двухъ подкасательныхъ $a's$ и $b'r$ будетъ больше разстоянія $a'b'$. И такъ признакъ, отличающій мнимые корни отъ дѣйствительныхъ, состоитъ въ томъ, что

$$a's + b'r \geqq a'b'. \tag{4}$$

Изъ треугольниковъ $a'm's$ и $b'n'r$ находимъ

$$a's = \frac{a'm'}{\operatorname{tang}(a'sm')},\quad b'r = \frac{b'n'}{\operatorname{tang}(b'rn')};$$

но $\operatorname{tang}(a'sm') = -\operatorname{tang}(m'sx) = -f'(a')$ и $\operatorname{tang}(b'rn') = f'(b')$, а потому предъидущія выраженія обратятся въ слѣдующія:

$$a's = \frac{f(a')}{-f'(a')},\quad b'r = \frac{f(b')}{f'(b')}.$$

Внеся ихъ въ неравенство (4) и замѣтивъ, что $a'b' = b'-a'$, получаемъ

$$\frac{f(a')}{-f'(a')} + \frac{f(b')}{f'(b')} \geqq b'-a'. \tag{5}$$

То же неравенство, которое мы нашли въ § 111. Фигуры (N 3) и (N 4) относятся ко второму случаю, а именно, когда $f(a)$, $f(b)$, $f'(b)$, $f''(a)$, $f''(b)$ отрицательныя: N 3 относится къ случаю дѣйствительныхъ корней, а N 4 къ случаю мнимыхъ корней. Разсуждая здѣсь по предъидущему, мы дойдемъ опять до неравенства (5).

Когда кривая mn своимъ изгибомъ касается оси x, тогда корни, назначаемые предѣлами a и b, равны между собою, сближая предѣлы a и b, мы не отдѣлимъ этихъ корней, и никогда не дойдемъ до неравенства (5). Въ § 111 было показано, какъ поступать въ такомъ случаѣ.

По способу Фурье отдѣленія корней мы всегда можемъ дойти до двухъ предѣловъ a и b, которые заключаютъ одинъ дѣйствительный корень уравненія $f(x)=o$, и первыя двѣ производныя $f'(x)$ и $f''(x)$ постоянно сохраняютъ свои знаки между этими предѣлами; мы показали (§ 132), что въ такомъ случаѣ можно начать линейное приближеніе къ корню $f(x)$, заключенному между a и b, и вывели выраженія для новыхъ предѣловъ, болѣе близкихъ между собою. Дадимъ теперь геометрическое построеніе этихъ выраженій.

Пусть $y=f(x)$ будетъ уравненіе кривой MN″, абсциссы Oa и Ob данные предѣлы a и b; то соотвѣтствующія имъ ординаты am и bn будутъ результаты $f(a)$ и $f(b)$. Такъ какъ $f'(x)$ и $f''(x)$ не уничтожаются между этими предѣлами; то дуга mn не имѣетъ, ни *maximum*, ни *minimum*, ни точекъ перегиба. Фигура (4) относится къ случаю (1) § 132: здѣсь $f'(x)$ положительная, а потому дуга mn обращена выпуклою стороною къ оси x, а какъ $f(x)$ также положительная, то вѣтвь man имѣетъ восходящее положеніе, т. е. ордината $f(x)$ возрастаетъ съ возрастаніемъ x. До $x=a=$ искомому корню, $f(x)$ отрицательная; съ приближеніемъ x къ a, она приближается къ нулю, и кривая пересѣкаетъ ось абсциссъ, послѣ чего $f(x)$ дѣлается положительною.

Проведемъ въ точкѣ n касательную, эта касательная пересѣчетъ ось абсциссъ въ точкѣ b' между a и b, а потому абсцисса Ob' меньше прежняго предѣла Ob; слѣдовательно ближе къ корню Oα. Прямая ma', параллельная съ касательною nb', пересѣчетъ ось абсциссъ между a и α; поэтому Oa'>Oa и ближе къ корню Oα.

Такъ какъ $Ob'=Ob-bb'$, гдѣ $Ob=b$, и (изъ прямоуг. треуг. nbb') $bb'=\dfrac{nb}{\operatorname{tang}(nb'b)}=\dfrac{f(b)}{f'(b)}$; то $Ob'=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$.

Равнымъ образомъ $Oa'=Oa+aa'$, гдѣ $Oa=a$ и $aa'=\dfrac{ma}{\operatorname{tang}(aa'm)}=\dfrac{-f(a)}{f'(b)}$; слѣдовательно $Oa'=a+\left(-\dfrac{f(a)}{f'(b)}\right)$. И такъ абсциссы O$b'$ и Oa' суть геометрическія величины приближенныхъ значеній корня, найденныя въ § 133. Ob' есть внѣшній предѣлъ, употребляемый Ньютономъ.

Поступивъ съ абсциссами Oa' и Ob' такъ же, какъ и съ Oa и Ob, мы перейдемъ къ третьимъ предѣламъ, болѣе близкимъ къ Oα, нежели Oa и Ob.

Предъидущее строеніе объясняетъ условіе § 132, а именно, что уравненіе $f'(x)=o$ и $f''(x)=o$ не имѣютъ дѣйствительныхъ корней между a и b, т. е. не имѣютъ, ни *maximum*, ни *minimum*, ни точекъ перегиба. Когда это условіе выполнено; тогда касательная, проведенная въ точкѣ n, концѣ ординаты bn, необходимо пересѣкаетъ Ox между a и b въ b', и Ob' будетъ ближе къ корню, нежели Ob. Но если предѣлъ b будетъ означать OB, абсциссу точки N, полагая, что между N и a есть перегибъ r; то касательная, проведенная въ точкѣ N, можетъ пересѣчь ось Ox въ точкѣ, весьма отдаленной отъ a, а потому величину OB нельзя употребить для приближенія къ корню: вмѣсто того, чтобы къ нему приблизиться, мы можемъ отъ него удалиться. Когда b будетъ абсцисса OB″ точки N″, находящейся по правую сторону точки N′, соотвѣтствующей *maximum* N′B′; тогда касательная въ точкѣ N″ пересѣчетъ ось Ox въ точкѣ T, болѣе удаленной отъ a, нежели B″; такъ, что OT будетъ >OB″; слѣдовательно, употребивъ для приближенія OT, мы удалимся непремѣнно отъ корня a. И такъ приближеніе должно начинать не прежде того, какъ увѣримся, что между m и n нѣтъ, ни точекъ перегиба, ни *maximum*, ни *minimum*, т. е., что уравненія $f(x)=o$ и $f''(x)=o$ не имѣютъ дѣйствительныхъ корней между $a=Oa$ и $b=Ob$.

Ясно также, что нельзя начинать приближеніе съ предѣла $Oa=a$; потому что касательная, проведенная въ точкѣ m можетъ пересѣчь ось абсциссъ по правую сторону точки b, на пр, въ k; тогда новый предѣлъ

$$Ok=Oa+ak=a+\left(-\frac{f(a)}{f'(a)}\right)\ (*)$$

будетъ болѣе предѣла $Ob=b$. И такъ должно начинать вычисленіе съ первой приближенной величины $Ob=b$, которая приводитъ насъ къ другой $Ob'=b'$ или къ $O\beta'=\beta'$, остановясь на точкѣ β, весьма близкой къ b' между b' и b. Отъ предѣла $O\beta'$ переходимъ къ третьему предѣлу Ob'' или $O\beta''$, и т. д.

Помощію предѣловъ a и b можно вычислить еще предѣлъ, который будетъ ближе къ корню, нежели a' и b'. Въ самомъ дѣлѣ: проведя пересѣкающую msn точка s пересѣченія этой прямой съ осью Ox, будетъ ближе къ a, нежели a', а потому Os къ Oa ближе, нежели Oa'.

Мы имѣемъ

$$Os=Ob-sb=b-sb;$$

изъ тр. nsb, находимъ $sb=\dfrac{nb}{\operatorname{tang}(nsb)}=\dfrac{nb}{\operatorname{tang}(asm)}$, но $\operatorname{tang}(asm)=\dfrac{am}{as}=\dfrac{-f(a)}{ab-sb}$; а потому $sb=\dfrac{nb(ab-sb)}{-f(a)}$, или, замѣтивъ, что $nb=f(b)$ и $ab=b-a$,

$$sb=\frac{f(b)(b-a)-f(b).sb}{-f(a)};$$

отсюда

$$sb=\frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}.$$

Внеся это въ выраженіе Os, получаемъ

$$Os=b-\frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}.$$

(*) Потому что $Oa=a$, и изъ тр. amk имѣемъ $ak=\dfrac{am}{\operatorname{tang}(akm)}=-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$

Фигура, которую мы разсматривали относится къ случаю (1) § 132; здѣсь вѣтвь mn восходящая, и выпуклою стороною обращена къ оси абсциссъ. Къ случаю (2) относится фигура 5; здѣсь вѣтвь низходящая, и вогнутою стороною обращена къ оси абсциссъ; приближеніе должно начинать такъ же, какъ и въ первомъ случаѣ, съ высшаго предѣла b. Фигура 6 принадлежитъ случаю (3); здѣсь вѣтвь mn низходящая и выпуклою стороною обращена къ оси Ох приближеніе должно начинать съ низшаго предѣла a. Наконецъ фигура 7 представляетъ случай (4); здѣсь кривая восходящая и вогнутою стороною обращена къ оси Ох; приближеніе должно начинать такъ же, какъ и въ предъидущемъ случаѣ, съ предѣла a.

Во всякомъ случаѣ должно начинать приближеніе съ *внѣшняго* предѣла, т. е. съ того, котораго конецъ находится внѣ пространства, объемлемаго кривою.

II.

1. Въ линейномъ или Нютоновомъ способѣ приближенія, мы въ разложеніи

$$(1)\qquad f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\frac{h^3}{1.2\,3}f'''(a)+\ldots h^m=o,$$

гдѣ a есть приближенное значеніе искомаго корня $a+h$, пренебрегаемъ членами съ степенями h, превышающими первую; отъ того получаемъ приближенное значеніе h, которое, будучи сложено съ a, даетъ новое приближенное значеніе къ искомому корню. Но мы получимъ значеніе болѣе точное, если мы въ разложеніи (1) удержимъ первую и вторую степень h, пренебрежемъ прочими членами, выведемъ значеніе h, и придадимъ его къ a; такого рода приближеніе называется приближеніемъ втораго порядка. Оно гораздо быстрѣе линейнаго; но не имѣетъ съ нимъ одинакой простоты и легкости. Въ немъ встрѣчаются тѣ же недостатки, какъ и въ Нютоновомъ способѣ.

Удержавши первые три члена разложенія (1) имѣемъ уравненіе 2-й степени

$$f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)=o,$$

которое, будучи рѣшено относительно h, даетъ

$$(2)\qquad h=\frac{-f'(a)\pm\sqrt{[f'(a)]^2-2f(a)f''(a)}}{f''(a)}.$$

Чтобы h было количество дѣйствительное, когда $f(a)$ и $f''(a)$ имѣютъ одинакіе знаки, необходимо, чтобы

$$(3)\qquad [f'(a)]^2>2f(a)f''(a)$$

Но такъ какъ мы ищемъ одинъ изъ неравныхъ корней уравненія $f(x)=o$, то $f'(a)$, съ приближеніемъ a къ x, будетъ приближаться къ какому нибудь количеству, не равному нулю; между тѣмъ результатъ $f(a)$ и, слѣдовательно произведеніе, $2\,f(a).\,f''(a)$ будутъ приближаться къ нулю, а потому условіе (3) всегда можетъ быть удовлетворено. И такъ, чтобы начать приближеніе втораго порядка, количество a должно удовлетворять неравенству (3). Изъ двухъ значеній h должно взять то, отъ котораго $a+h$ будетъ ближе къ x. Здѣсь можетъ случиться то же, что и въ линейномъ приближеніи: новое приближенное значеніе $a+h$ можетъ перейти за корень; т. е. если $a<x$, то $a+h$ сдѣлается $>x$, и на оборотъ; такъ, что мы не знаемъ, приблизились ли мы къ x, или удалились отъ него. Въ такомъ случаѣ можно для h составить другое значеніе, при которомъ $a+h$ будетъ предѣлъ такого же свойства, какъ a, и будетъ ближе къ x нежели a (подробности этого изложены въ *Лекціяхъ Алгебр. и Трансц. Анализа Г. Остроградскаго*); но *исправленное* такимъ образомъ значеніе $a+h$ мало имѣетъ выгоды предъ линейнымъ; на противъ того, сохранивъ для h одно изъ значеній (2), предѣлъ $a+h$ будетъ имѣть почти втрое болѣе точныхъ цыфръ нежели a. *Фурье* это доказываетъ слѣдующимъ образомъ:

2. Положимъ, что a есть низшій предѣлъ и знаки трехъ функцій $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$ принадлежатъ къ случаямъ (1), (2) § 132; то произведеніе $-\ 2\,f(a)\,.\,f''(a)$ будетъ положительное, и числовое значеніе $\sqrt{[f'(a)]^2-2f(a)\,.\,f''(a)}$ будетъ больше числоваго значенія $f'(a)$, а потому для h должно взять $\sqrt{\ }$ съ $+$.

Пусть $x-a=\omega$ и $x-(a+h)=\omega'$, то будетъ $\omega'=\omega-h$. Положимъ, что a есть величина весьма близкая къ x, такъ, что ω и ω' количества весьма малыя, и отъищемъ ихъ соотношеніе. Внеся въ $\omega'=\omega-h$ вмѣсто h его значеніе

$$\frac{-f'(a)+\sqrt{[f'(a)]^2-2.\,f(a).\,f''(a)}}{f''(a)}=\frac{-f'(x-\omega)+\sqrt{[f'(x-\omega)]^2-2.f(x-\omega)f''(x-\omega)}}{f''(x-\omega)},$$

имѣемъ

$$\omega'=\frac{\omega f''(x-\omega)+f'(x-\omega)-\sqrt{[f'(x-\omega)]^2-2f(x-\omega).f''(x-\omega)}}{f''(x-\omega)}.$$

По малости ω, станемъ пренебрегать степенями ω, превышающими ω^3; вмѣсто знаменателя $f''(x-\omega)$ возмемъ $f''(x)$, и, для сокращенія, не будемъ писать x подъ характеристиками $f, f', f'', f''', \ldots$ Первые два члена выраженія ω',

$$\omega f''(x-\omega)+f'(x-\omega),$$

по разложеніи ихъ до ω^3, даютъ

$$(4)\qquad f'-\frac{\omega^2}{2}f'''+\frac{\omega^3}{3}f^{\text{IV}}.$$

Подъ радикаломъ въ произведеніи $f(x-\omega).\,f''(x-\omega)$ множитель $f(x-\omega)$ разлагается въ

$$f-\omega f'+\frac{\omega^2}{2}f''-\frac{\omega^3}{2.3}f''' \text{ или въ } -\omega f'+\frac{\omega^2}{2}f''-\frac{\omega^3}{2.3}f''';$$

потому что $f=f(x)=o$. Такъ какъ въ послѣднемъ выраженіи ω входитъ множителемъ, то множитель $f''(x-\omega)$ достаточно разложить до ω^2: онъ будетъ

$$f''-\omega f'''+\frac{\omega^2}{2}f^{\mathrm{IV}},$$

А потому произведеніе $f(x-\omega).f''(x-\omega)$ равно

$$-\omega f' f''+\omega^2\left(\frac{1}{2}f''^2+f'f'''\right)-\omega^3\left(\frac{2}{3}f''f'''+\frac{1}{2}f'f^{\mathrm{IV}}\right).$$

Квадратъ отъ

$$f'(x-\omega)=f'-\omega f''+\frac{\omega^2}{2}f'''-\frac{\omega^3}{2.3}f^{\mathrm{IV}}$$

есть

$$f'^2-2\omega f' f''+\omega^2\left(f''^2+f'f'''\right)-\omega^3\left(f''f'''+\frac{1}{3}f'f^{\mathrm{IV}}\right).$$

И такъ выраженіе подъ радикаломъ будетъ

$$f'^2-\omega^2 f'f'''+\omega^3\left(\frac{1}{3}f''f'''+\frac{2}{3}f'f^{\mathrm{IV}}\right).$$

Извлекши изъ него корень квадратный, т. е., возведя его по Нютоновой строкѣ въ степень $\frac{1}{2}$, получаемъ для радикала слѣдующее значеніе

$$f'\left[1-\frac{\omega^2}{2}\cdot\frac{f'''}{f'}+\omega^3\left(\frac{1}{2.3}\frac{f''f'''}{f'^2}+\frac{1}{3}\frac{f^{\mathrm{IV}}}{f'}\right)\right]$$

$$=f'-\frac{\omega^2}{2}\cdot f'''+\omega^3\left(\frac{1}{2.3}\frac{f''f'''}{f'}+\frac{1}{3}f^{\mathrm{IV}}\right).$$

Вычтя его изъ (4), и раздѣливъ остатокъ на f'', находимъ

(5) $$\omega'=\frac{1}{f''}\left(-\frac{\omega^3}{2.3}\frac{f''f'''}{f'}\right)=-\frac{\omega^3}{2.3}.\frac{f'''}{f'}.$$

Можно этимъ выраженіемъ воспользоваться для отысканія высшаго предѣла, соотвѣтствующаго a: взявши вмѣсто f''' наибольшій изъ результатовъ $f'''(a)$ и $f'''(b)$, вмѣсто f' наименьшій изъ результатовъ $f'(a)$ и $f'(b)$, а вмѣсто ω предъидущую разность предѣловъ; опредѣливши потомъ единицу высшаго порядка полученнаго чрезъ то выраженія; вычисливши h до этой единицы, и разсуждая такимъ же образомъ, какъ въ § 139, мы опредѣлимъ число точныхъ цыфръ корня. Но мы не всегда этого достигнемъ съ перваго раза; потому что мы не знаемъ какое имѣютъ вліяніе пренебрегаемые члены на точное значеніе ω'.

Выраженіе (5) будетъ справедливо и въ случаяхъ (3) (4) § 132, употребивъ для приближенія высшій предѣлъ b.

3. Если въ разложеніи $f(a+h)=o$ мы удержимъ первые четыре члена; то будемъ имѣть для опредѣленія h уравненіе 3-й степени:

$$f(a)+f'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\frac{h^3}{2.3}f'''(a)=o;$$

такое приближеніе называется приближеніемъ 3-го порядка, и *Фурье* нашелъ, что $a+h$ будетъ разниться отъ x количествомъ почти равнымъ

$$-\frac{\omega^4}{2.3.4}\cdot\frac{f^{IV}}{f'},$$

гдѣ $\omega=x-h$ есть разность весьма малая. Онъ вообще показалъ, что, если въ разложеніи $f(a+h)=o$ мы удержимъ $i+1$ первыхъ членовъ, остальные отбросимъ, и опредѣлимъ изъ уравненія

$$f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\ldots+\frac{h^i}{1.2\ldots.i}f^i(a)=o$$

надлежащее значеніе h; то $a+h$ будетъ разниться отъ x почти количествомъ

$$-\frac{\omega^{i+1}}{1.2\ldots(i+1)}\cdot\frac{f_1^i}{f'},$$

гдѣ $\omega=x-h$ есть количество весьма малое.

Но къ сожалѣнію на этихъ замѣчаніяхъ нельзя основать удобнаго способа вычисленія корней.

4. Приближеніе втораго порядка даетъ весьма простой способъ различать дѣйствительные корни отъ мнимыхъ.

a) Разсмотримъ сперва случай, когда два предѣла a и b даютъ слѣдующіе ряды знаковъ:

	$f^m(x)$		$f'''(x)$,	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$
[a]	$+$.	. . .	$+$	$+$	$-$	$+$
			0	0	1	2
[b]	$+$.	. . .	$+$	$+$	$+$	$+$.

Указатель 2 показываетъ, что въ промежуткѣ предѣловъ a и b должно искать два корня для уравненія $f(x)=o$. Положивъ $x=a+h$, имѣемъ

$$f(x)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a+\varphi h),$$

или, вставивши сюда $x-a$ вмѣсто h,

$$(6)\qquad f(x)=f(a)+(x-a).f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''[a+\Phi(x-a)]$$

Такъ какъ $f'''(x)$ остается положительною для всякаго значенія x, начиная отъ a до b; то $f''(a)$ будетъ наименьшее значеніе $f''(x)$ между этими предѣлами, а $f''(b)$ наибольшее; поэтому при $x>a$ и $<b$ будетъ $f''[a+\Phi(x-a)]>f''(a)$, и

$$(7)\qquad f(x)>f(a)+(x-a).f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(a).$$

Если вторая часть этого неравенства не имѣетъ дѣйствительныхъ корней относительно x; то, съ измѣненіемъ x отъ a до b, она не уничтожится и сохранитъ знакъ результата $f''(a)$, который $>o$; поэтому функція $f(x)$, съ измѣненіемъ x между a и b, будетъ также $>o$; слѣд. корни, назначаемые предѣлами a и b для уравненія $f(x)=o$, мнимые. *Фурье* поясняетъ это слѣдующимъ геометрическимъ строеніемъ:

Начертимъ кривыя

$$(8)\qquad y=f(x) \text{ и } \eta=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(a),$$

и разсмотримъ ихъ дуги mpn и $m\pi\nu$ (фиг. 8) между точками, которыхъ абсциссы суть a и b. Производныя отъ y и η будутъ

$$y'=f'(x) \text{ и } \eta'=f'(a)+(x-a)f''(a).$$

Онѣ дѣлаются равными при $x=a$, а потому обѣ кривыя имѣютъ общую касательную въ точкѣ m. Начиная съ этой точки вправо, кривыя расходятся, и неравенство (7) показываетъ, что $y>\eta$, т. е., что вторая кривая, на разстояніи отъ a до b, проходитъ ниже первой. Слѣдовательно, когда дуга $m\pi\nu$ не пересѣкаетъ ось x, то дуга mpn также ее не пересѣкаетъ, и корни, назначаемые предѣлами a и b, мнимые. Но такъ какъ $x-a=h$; то, если x мнимое, h будетъ также мнимое, и на оборотъ, а потому въ разсматриваемомъ нами случаѣ уравненіе

$$f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)=o$$

должно имѣть мнимые корни, для чего должно быть удовлетворено условіе

$$[f'(a)]^2<2f(a).f''(a).$$

Замѣнивъ въ уравненіи (6) $f''[a+\Phi(x-a)]$ количествомъ бо́льшимъ, $f''(b)$, будемъ имѣть

$$(9)\qquad f(x)<f(a)+(x-a).f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f(b).$$

Вторая часть при $x=a$ имѣетъ результатъ положительный, $f(a)$, тотъ же, что и первая часть. При $x=b$ первая часть обращается въ положительное количество

$f(b)$, а потому и вторая часть также должна обратиться въ положительное количество. Если уравненіе

$$(10) \qquad f(a)+(x-a).f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(b)=o$$

имѣетъ дѣйствительные корни; то вторая часть неравенства (9) изъ положительной дѣлается отрицательною, а потомъ опять дѣлается положительною,— проходитъ два раза чрезъ нуль; то же будетъ и съ $f(x)$. Слѣд. въ этомъ случаѣ уравненіе $f(x)=o$ имѣетъ два дѣйствительные корня между a и b.

Пусть дуга $m\pi'\nu'$ будетъ часть кривой, выражаемой уравненіемъ

$$(11) \qquad \eta_{,}=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(b).$$

Такъ какъ производная отъ $\eta_{,}$, $f'(a)+(x-a).f''(b)$, при $x=a$, равна $f(a)$, производной отъ $f(x)$; то двѣ кривыя mpn и $m\pi'\nu'$ имѣютъ общую касательную въ точкѣ m. Начиная отъ этой точки вправо, онѣ расходятся, и какъ на разстояніи ab, по неравенству (9), $y>\eta_{,}$, то дуга $m\pi'\nu'$ лежитъ выше дуги mpn. А потому, если дуга $m\pi'\nu'$ пересѣкаетъ ось x, то дуга mpn также пересѣкаетъ эту ось; т. е., если корни ур. (10) дѣйствительные, то корни уравненія $f(x)=o$, назначаемые предѣлами a и b, также должны быть дѣйствительные. Но, чтобы $x=a-h$ было дѣйствительное, h должно быть дѣйствительное; слѣд. корни уравненія

$$f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2}f''(b)=o$$

должны быть дѣйствительные, а это требуетъ условія

$$[f'(a)]^2>2f(a).f''(b).$$

Подобныя условія можно вывести изъ разложенія

$$(12) \qquad f(x)=f(b-k)=f[b-(b-x)]=f(b)-(b-x)f'(b)+\frac{(b-x)^2}{2}f''[b-\varphi(b-x)].$$

Замѣнивъ $f''[b-\varphi(b-h)]$ количествомъ бо́льшимъ $f''(b)$, имѣемъ

$$(13) \qquad f(x)<f(b)-(b-x)f'(b)+\frac{(b-x)^2}{2}f''(b);$$

при $x=b$ обѣ части этого неравенства обращаются въ $f(b)$, и кривыя, ими выражаемыя, будутъ имѣть общую точку, опредѣляемую координатами $x=b$ и $y=f(b)$; отъ этой точки до $x=a$ существуетъ неравенство (13), т. е. кривыя расходятся, и первая лежитъ ниже второй; при $x=a$ первая часть неравенства обращается въ положительное количество $f(b)$, а потому и вторая часть будетъ также положительная. Если уравненіе

$$f(b)-(b-x)f'(b)+\frac{(b-x)^2}{2}f''(b)=o$$

имѣетъ дѣйствительные корни, т. е. существуетъ неравенство

$$(14)\qquad [f'(b)]^2>2.f(b)f''(b);$$

то вторая часть нерав. (13)изъ положительной дѣлается отрицательною, и опять дѣлается положительною, — два раза переходитъ чрезъ нуль, а потому то же должно быть и съ $f(x)$; слѣд. когда удовлетворено условіе (14), тогда корни ур. $f(x)=o$, назначаемые предѣлами a и b, дѣйствительные.

Вставивши въ (12) вмѣсто $f''[b-\Phi(b-x)]$ количество меньшее, $f''(a)$, имѣемъ

$$f(x)>f(b)-(b-x).f'(b)+\frac{(b-x)^2}{2}f''(a).$$

Когда вторая часть не имѣетъ дѣйствительныхъ корней, или когда

$$[f'(b)]^2<2.f(b).f''(a);$$

тогда она, съ измѣненіемъ x отъ a до b, остается $>o$, а потому и $f(x)$ въ этомъ промежуткѣ $>$o; слѣдоват. корни ур. $f(x)=$o, назначаемые предѣлами a и b, мнимые.

Изъ всего сказаннаго въ этомъ членѣ, выводимъ слѣдующія заключенія: 1) два корня уравненія $f(x)=o$, назначаемые предѣлами a и b, дѣйствительные, когда удовлетворено одно изъ условій:

$$(15)\qquad [f'(a)]^2>2.f(a).f''(b)$$

$$(16)\qquad [f'(b)]^2>2.f(b).f''(b);$$

2) искомые корни будутъ мнимые, когда удовлетворено одно изъ условій:

$$(17)\qquad [f'(a)]^2<2f(a).f''(a)$$

$$(18)\qquad [f'(b)]^2<2f(b).f''(a).$$

Можетъ случиться, что ни одно изъ условій (15) (16) (17) (18) не удовлетворено; тогда предѣлы a и b не довольно близки, чтобы судить о свойствѣ корней: ихъ должно сближать, и ясно, что отъ того мы необходимо, или дойдемъ до количества c, $>a$ и $<b$, которое $f(x)$ даетъ результатъ съ противнымъ знакомъ $f(a)$ и $f(b)$, или дойдемъ до такихъ предѣловъ, которые удовлетворятъ одному или нѣсколькимъ изъ условій (15) (16) (17) (18); въ первомъ случаѣ искомые корни дѣйствительные и отдѣлены, а во второмъ мы узнаемъ ихъ свойство, и потому, если они дѣйствительные, то могутъ быть отдѣлены.

b). Разсмотримъ теперь случай, когда ряды $[a]$ и $[b]$ будутъ

	$f^m(x)$		$f'''(x)$,	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$
$[a]$	+	. . . . .	—	+	—	+
$[b]$	+	. . . . .	—	+	+	+.

Такъ какъ $f'''(x)$ отрицательная для всякаго значенія x, начиная отъ a до b; то функція $f''(x)$ уменьшается, съ возрастаніемъ x отъ a до b, а потому $f''(b)$ есть наименьшее изъ ея значеній, а $f''(a)$ наибольшее.

Взявши разложеніе

$$(19)\qquad f(x)=f(a+x-a)=f(a)+(x-a)\,f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}\cdot f''[a+\Phi(a-a)]$$

и, вставивъ въ него вмѣсто $f[a+\Phi(x-a)]$ количество меньшее, $f''(b)$, имѣемъ

$$f(x)>f(a)+(x-a).f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(b).$$

Если

$$[f'(a)]^2<2.f(a)f''(b),$$

то вторая часть этого нер. не имѣетъ дѣйствительныхъ корней, а потому сохраняетъ знакъ $f''(b)$ для всякаго значенія x, начиная отъ a до b, а именно, остается $>o$; слѣд. $f(x)$ въ этомъ промежуткѣ остается $>o$, и искомые корни ур. $f(x)=o$ мнимые.

Замѣнивъ $f'[a+\Phi(x-a)]$ результатомъ $f''(a)$, находимъ

$$(20)\qquad f(x)<f(a)+(x-a).f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}\cdot f''(a).$$

Когда

$$[f'(a)]^2>2.f(a).f''(a);$$

тогда вторая часть неравенства (20) имѣетъ два дѣйствительные корня между a и b, т. е., съ измѣненіемъ x отъ a до b, два раза переходитъ чрезъ нуль, а именно: изъ положительной дѣлается отрицательною, потомъ опять дѣлается положительною; слѣдовательно то же самое будетъ и съ $f(x)$, а потому искомые корни дѣйствительные.

Вставивши въ разложеніе

$$f(x)=f[b-(b-x)]=f(b)-(b-x)f'(b)+\frac{(b-x)^2}{2}f''[b-\Phi(b-x)]$$

результатъ $f''(b)$, а потомъ $f''(a)$, вмѣсто $f''[b-\Phi(b-x)]$, имѣемъ

$$f(x)>f(b)-(b-x)f'(b)+\frac{(b-x)^2}{2}f''(b)$$

$$(21)\qquad f(x)<f(b)-(b-x)\,f'(b)+\frac{(b-x)^2}{2}\cdot f''(a).$$

Если въ первомъ неравенствѣ будетъ

$$[f'(b)]^2<2f(b).f''(b),$$

то вторая его часть для $x>a$ и $<b$ остается $>$o, а потому и $f(x)>o$; слѣд. искомые два корня уравненія $f(x)=o$ мнимые. Они будутъ дѣйствительные, если въ неравенствѣ (21) будетъ

$$[f'(b)]^2>2.f(b).f''(a).$$

Сравнивая результаты, выведенные въ разсматриваемомъ нами случаѣ, заключаемъ:

1) Искомые корни будутъ дѣйствительные, когда квадратъ $f'(x)$, для $x=$одному изъ предѣловъ a и b, превосходитъ удвоенное произведенiе $f(x)$, для $x=$ тому же предѣлу, на $f''(a)$; 2) искомые корни мнимые, если квадратъ $f'(x)$, для $x=a$ или b, будетъ меньше удвоеннаго произведенiя $f(x)$, для $x=$ тому же предѣлу, на $f'(b)$.

c). Когда ряды $[a]$ и $[b]$ будутъ

	$f^m(x)$	$f'''(x)$;	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$
$[a]$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
$[b]$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$;

тогда для низшаго предѣла a имѣемъ неравенства:

$$f(x)>f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(a)$$

$$f(x)<f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(b).$$

Если въ первомъ будетъ

$$[f'(a)]^2>2.f(a).f''(a),$$

то корни $f(x)$, назначаемые предѣлами a и b, будутъ дѣйствительные, а если во второмъ неравенствѣ найдемъ

$$[f'(a)]^2<2.f(a).f''(b),$$

то искомые корни мнимые.

Высшiй предѣлъ b даетъ неравенства:

$$f(x)>f(b)-(b-x)f'(b)+\frac{(b-x)^2}{2}f''(a)$$

$$f(x)<f(b)-(b-x)f'(b)+\frac{(b-x)^2}{2}f''(b).$$

Если въ первомъ будетъ удовлетворенно условiе

$$[f'(b)]^2>2.f(b).f''(a),$$

то искомые корни дѣйствительные; они будутъ мнимые, если во второмъ неравенствѣ будетъ

$$[f'(b)]^2<2.f(b).f''(b).$$

d). Наконецъ для рядовъ

	$f^m(x)$	$f'''(x)$,	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$
$[a]$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
$[b]$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$;

имѣемъ неравенства

$$f(x)>f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(b)$$

$$f(x)<f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(a)$$

$$f(x)>f(b)-(b-x)f'(b)+\frac{(b-x)^2}{2}f''(b)$$

$$f(x)<f(b)-(b-x)f'(b)+\frac{(b-x)^2}{2}f''(a),$$

которыя показываютъ, что корни ур. $f(x)=o$, назначаемые предѣлами a и b, будутъ дѣйствительные, если

$$[f'(a)]^2>2f(a).f''(b) \text{ или } [f'(b)]^2>2f(b).f''(b),$$

а мнимые, когда

$$[f'(a)]^2<2.f(a).f''(a) \text{ или } [f'(b)]^2<2.f(b).f''(a).$$

Изъ разбора всѣхъ этихъ случаевъ *Фурье* выводитъ слѣдующее правило для распознанія дѣйствительныхъ корней отъ мнимыхъ:

Въ § 115 мы видѣли, что единственный случай, гдѣ нужно правило для распознанія корней, есть тотъ, когда два предѣла a и b даютъ ряды знаковъ, въ которыхъ первый указатель 1, справа, стоитъ между 0 и 2. Пусть три функціи, которымъ соотвѣтствуютъ указатели 012, будутъ $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$, и положимъ, что предѣлы a и b такъ близки между собою, что $f'''(x)$ въ ихъ промежуткѣ не имѣетъ ни дѣйствительныхъ ни мнимыхъ корней. Разсматривая извѣстные уже результаты

$$\begin{matrix} f''(a), & f'(a), & f(a) \\ f''(b), & f'(b), & f(b), \end{matrix}$$

мы узнаемъ свойство корней, назначаемыхъ предѣлами a и b, руководствуясь слѣдующими правилами:

1-е. Два искомые корня будутъ дѣйствительные, если квадратъ одного изъ среднихъ членовъ $f'(a)$ и $f'(b)$ больше удвоеннаго произведенія члена, взятаго въ той же строкѣ по правую его сторону, на тотъ изъ результатовъ $f''(a)$ и $f''(b)$, который имѣетъ наибольшее числовое значеніе. Мы здѣсь имѣемъ два условія, и искомые корни дѣйствительные, будетъ ли удовлетворено одно изъ нихъ или оба.

2-е. Искомые корни мнимые, если квадратъ одного изъ среднихъ членовъ $f(a)$ и $f'(b)$ меньше удвоеннаго произведенія члена, стоящаго по правую его сторону въ той же строкѣ, на тотъ изъ членовъ $f''(a)$ и $f''(b)$, котораго числовое значеніе наибольшее. Здѣсь мы имѣемъ два условія, и искомые корни мнимые, будетъ ли удовлетворено одно изъ нихъ или оба.

Когда ни одно изъ этихъ четырехъ условій не удовлетворено, тогда предѣлы a и b не довольно близки, чтобы сразу открыть свойство корней,— ихъ должно сблизить:

если, по вставкѣ вмѣсто x числа средняго между a и b, корни не отдѣлятся; то должно повторить предъидущее правило. Продолжая такимъ образомъ далѣе, мы непремѣнно отдѣлимъ искомые корни, если они дѣйствительные, или узнаемъ, что они мнимые.

Это правило очень просто въ приложенія, и потому не должно его оставлять безъ вниманія.

III.

1. Въ главѣ 2-й мы доказали, что общій видъ результата всякаго алгебраическаго дѣйствія заключается въ *символическомъ* выраженіи $a+l\sqrt{-1}$: это справедливо и для трансцендентныхъ дѣйствій. — Символъ $a+b.\sqrt{-1}$ есть одинъ изъ важнѣйшихъ въ Анализѣ; поэтому разсмотримъ подробнѣе его свойства.

2. Выраженіе $a+b\sqrt{-1}$ обыкновенно означаютъ такъ

$$a+b.i,$$

гдѣ для сокращенія $i=\sqrt{-1}$; пользуясь свойствами тригонометрическихъ линій, можно ему дать другой видъ, отъ котораго сокращаются вычисленія.

Сдѣлавши въ выраженіи $a+b.i$ дѣйствительную часть a общимъ множителемъ, имѣемъ

$$(1) \qquad a+b.i=a\left(1+\frac{b}{a}\right).i.$$

Такъ какъ $\frac{b}{a}$ представляетъ какое нибудь дѣйствительное количество, и *тангенсъ*, съ измѣненіемъ дуги, способенъ принять всякое дѣйствительное значеніе; то существуетъ всегда такая дуга φ, которой тангенсъ равенъ $\frac{b}{a}$; и такъ мы имѣемъ право положить

$$\frac{b}{a}=\operatorname{tang}\varphi;$$

но $\operatorname{tang}\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$; поэтому $\frac{b}{a}=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ или $\frac{b}{\sin\varphi}=\frac{a}{\cos\varphi}$;

отсюда

$$\frac{b^2+a^2}{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}=\frac{a^2+b^2}{1}=\frac{a^2}{\cos^2\varphi}=\frac{b^2}{\sin^2\varphi},$$

и

$$a=\sqrt{a^2+b^2}.\cos\varphi, \quad b=\sqrt{a^2+b^2}.\sin\varphi.$$

Абсолютное значеніе $\sqrt{a^2+b^2}$ есть модуль выраженія (1); означивши его чрезъ r, имѣемъ

$$a=r.\cos\varphi, \quad b=r.\sin\varphi,$$

а потому

$$a+b.i=r(\cos\varphi+i.\sin\varphi).$$

Перемѣнивъ φ на $-\varphi$, получимъ сопряженное выраженіе

$$a-b.i=r(\cos\varphi-i.\sin\varphi);$$

потому что

$$\sin(-\varphi)=-\sin\varphi,\ \cos(-\varphi)=\cos\varphi$$

и модуль r остается тотъ же.

3. Произведеніе двухъ выраженій

$$r(\cos\varphi+i.\sin\varphi),\ r'(\cos\varphi'+i.\sin\varphi')$$

будетъ

$$rr'(\cos\varphi+i.\sin\varphi)(\cos\varphi'+i.\sin\varphi')=rr'[(\cos\varphi.\cos\varphi'-\sin\varphi.\sin\varphi')$$
$$+(\sin\varphi.\cos\varphi'+\sin\varphi'.\cos\varphi).i]$$

но изъ Тригонометріи извѣстно, что

$$\cos\varphi.\cos\varphi'-\sin\varphi.\sin\varphi'=\cos(\varphi+\varphi')$$
$$\sin\varphi.\cos\varphi'+\sin\varphi'.\cos\varphi=\sin(\varphi+\varphi'),$$

а потому

$$(2)\qquad r(\cos\varphi+i.\sin.\varphi).r'(\cos\varphi'+i.\sin\varphi')=rr'[\cos(\varphi+\varphi')+i.\sin(\varphi+\varphi')].$$

Слѣдовательно, *чтобы перемножить два мнимыя выраженія, должно перемножить ихъ модули, и сложить дуги, имъ соотвѣтствующія.*

Произведеніе n мнимыхъ множителей

$$r_1(\cos\varphi_1+i.\sin\varphi_1),r_2(\cos\varphi_2+i.\sin\varphi_2),r_3(\cos\varphi_3+i.\sin\varphi_3),\ldots r_n(\cos\varphi_n+i.\sin\varphi_n)$$

будетъ

$$r_1r_2r_3\ldots r_n(\cos\varphi_1+i.\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i.\sin\varphi_2)(\cos\varphi_3+i.\sin\varphi_3)\ldots(\cos\varphi_n+i.\sin\varphi_n)$$
$$=r_1r_2r_3\ldots r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i.\sin(\varphi_1+\varphi_2)](\cos\varphi_3+i.\sin\varphi_3)\ldots(\cos\varphi_n+i.\sin\varphi_n)$$
$$=r_1r_2r_3\ldots r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)+i.\sin(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)]\ldots(\cos\varphi_n+i.\sin\varphi_n)$$

и т. д., наконецъ

$$=r_1r_2r_3\ldots r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\ldots+\varphi_n)+i.\sin(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\ldots+\varphi\ )].$$

И такъ вообще, *чтобы перемножить нѣсколько выраженій, должно перемножить всѣ ихъ модули, и сложить дуги, имъ соотвѣтствующія.*

Отсюда выводимъ знакомую намъ теорему:

Модуль произведенія нѣсколькихъ мнимыхъ выраженій есть произведеніе модулей каждаго множителя.

Положивъ $r_1=r_2=r_3=\ldots=r_n=r$ и $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\ldots=\varphi_n=\varphi$, имѣемъ

$$r^n(\cos\varphi+i.\sin\varphi)^n=r^n[\cos(n\varphi)+i.\sin(n\varphi)];$$

откуда

(3) $$(\cos\varphi+i.\sin\varphi)^n=\cos(n\varphi)+i.\sin(n\varphi).$$

Это уравненіе имѣетъ большія приложенія.

4. Пусть дано частное

$$\frac{r(\cos\varphi+i.\sin\varphi)}{r'(\cos\varphi'+i.\sin\varphi')};$$

помноживши дѣлимое и дѣлителя на $\cos\varphi'-i.\sin\varphi'$, имѣемъ

$$\frac{r(\cos\varphi+i.\sin\varphi)}{r'(\cos\varphi'+i.\sin\varphi')}=\frac{r(\cos\varphi+i.\sin\varphi)(\cos\varphi'-i.\sin\varphi')}{r'(\cos^2\varphi'+\sin^2\varphi')}$$

$$=\frac{r}{r'}[(\cos\varphi.\cos\varphi'+\sin\varphi.\sin\varphi')+(\sin\varphi.\cos\varphi'-\sin\varphi'.\cos\varphi).i];$$

но

$$\cos\varphi.\cos\varphi'+\sin\varphi.\sin\varphi'=\cos(\varphi-\varphi')$$

$$\sin\varphi.\cos\varphi'-\sin\varphi'.\cos\varphi=\sin(\varphi-\varphi');$$

поэтому

(4) $$\frac{r(\cos\varphi+i.\sin\varphi)}{r'(\cos\varphi'+i.\sin\varphi')}=\frac{r}{r'}[\cos(\varphi-\varphi')+i.\sin(\varphi-\varphi')].$$

Отсюда выводимъ правило: *чтобы раздѣлить одно выраженіе на другое, должно модуль дѣлимаго раздѣлить на модуль дѣлителя, и изъ дуги, соотвѣтствующей первому, вычесть дугу, соотвѣтствующую второму.*

Положивъ $\varphi=0$, будетъ $\cos\varphi=1$, $\sin\varphi=0$; отъ этого уравн. (4) обратится въ слѣдующее

$$\frac{r}{r'}\left(\frac{1}{\cos\varphi'+i.\sin\varphi'}\right)=\frac{r}{r'}[\cos(-\varphi')+i.\sin(-\varphi')]=\frac{r}{r'}(\cos\varphi'-i.\sin\varphi')$$

или

$$\frac{1}{\cos\varphi'+i.\sin\varphi'}=\cos\varphi'-i.\sin\varphi'.$$

5. Отыщемъ теперь всѣ значенія радикала

(5) $$x=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i.\sin\varphi)}.$$

Одно изъ этихъ значеній есть

(6) $$r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right)+i.\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right];$$

потому что, по ур. (3),

$$\left(r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right)+i.\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right]\right)^n=r\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}.n\right)+i.\sin\left(\frac{\varphi}{n}.n\right)\right]=r(\cos\varphi+i.\sin\varphi).$$

Прочія же значенія получатся по § 57, помноживши (6) на $n-1$ корней уравненія $y^n-1=o$, неравныхъ единицѣ.

И такъ отъищемъ всѣ корни уравненія

(7) $$y^n-1=o,$$

и положимъ для большей общности, что n какое нибудь цѣлое положительное число. Пусть

$$y=\varrho(\cos\theta+i.\sin\theta),$$

то

$$\varrho^n(\cos\theta+i.\sin\theta)^n=y^n=1,$$

или, по ур. (5),

$$\varrho^n[\cos(n\theta)+i.\sin(n\theta)]=1;$$

это равенство [см. Гл. II] разлагается на два другія:

$$\varrho^n\cos(n\theta)-1=o \text{ и } \sin(n\theta)=o,$$

которыя даютъ

$$\varrho=1,\ \cos(n\theta)=1,\ \sin(n\theta)=o;$$

для чего должно быть

$$\theta=\pm\frac{2k\pi}{n},$$

гдѣ k означаетъ какое нибудь цѣлое число, а π величину полуокружности радіуса $=1$. Слѣдовательно всѣ корни ур. (7) будутъ заключаться въ выраженіи

$$y=\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\pm i.\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

При $k=0$ будетъ $y=1$

. . $k=1$ . . . $=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\pm i.\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

. . $k=2$ . . . $=\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)\pm i.\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right)$

. . $k=3$ . . . $=\cos\left(\frac{6\pi}{n}\right)\pm i.\sin\left(\frac{6\pi}{n}\right)$

. . . .

. . $k=n-2$ . . $=\cos\left(\frac{(2n-4)\pi}{n}\right)\pm i.\sin\left(\frac{(2n-4)\pi}{n}\right)$

. . $k=n-1$ . . $=\cos\left(\frac{(2n-2)\pi}{n}\right)\pm i.\sin\left(\frac{(2n-2)\pi}{n}\right)$

. . $k=n$. . . . $=\cos\left(\frac{2n\pi}{n}\right)\pm i.\sin\left(\frac{2n\pi}{n}\right)=1;$

далѣе для $k=n+1$, $n+2, \ldots$ будутъ возвращаться прежнія выраженія въ томъ же порядкѣ.

Такъ какъ для $k=l$ и $k=n-l$,

$$\cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right)=\cos\left(\frac{2(n-l)\pi}{n}\right), \quad \sin\left(\frac{2l\pi}{n}\right)=-\sin\left(\frac{2(n-l)\pi}{n}\right);$$

то

$$\cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right)\pm i.\sin\left(\frac{2l\pi}{n}\right)=\cos\left(\frac{2(n-l)\pi}{n}\right)\mp i.\sin\left(\frac{2(n-l)\pi}{n}\right).$$

А потому:

1). Когда n *четное*, тогда предъидущія выраженія приведутся къ n значеніямъ:

$$(8)\left\{\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad 1, \\
\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i.\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right), \quad \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)-i.\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right), \\
\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)+i.\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right), \quad \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)-i.\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right), \\
\cos\left(\frac{6\pi}{n}\right)+i.\sin\left(\frac{6\pi}{n}\right), \quad \cos\left(\frac{6\pi}{n}\right)-i.\sin\left(\frac{6\pi}{n}\right), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\cos\left(\frac{(n-2)\pi}{n}\right)+i.\sin\left(\frac{(n-2)\pi}{n}\right), \quad \cos\left(\frac{(n-2)\pi}{n}\right)-i.\sin\left(\frac{(n-2)\pi}{n}\right), \\
\qquad\qquad\qquad -1.
\end{array}\right.$$

Здѣсь два корня дѣйствительные, а именно: первый и послѣдній.

2). Когда n *нечетное*, тогда корни ур. $y^n-1=o$ будутъ

$$(9)\left\{\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad 1, \\
\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i.\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right), \quad \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)-i.\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right), \\
\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)+i.\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right), \quad \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)-i.\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\cos\left(\frac{(n-3)\pi}{n}\right)+i.\sin\left(\frac{(n-3)\pi}{n}\right), \quad \cos\left(\frac{(n-3)\pi}{n}\right)-i.\sin\left(\frac{(n-3)\pi}{n}\right), \\
\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)+i.\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right), \quad \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)-i.\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right).
\end{array}\right.$$

Здѣсь только одинъ дѣйствительный корень, а именно—первый.

Эти тригонометрическія выраженія корней алгебраическаго уравненія $y^n-1=0$ не должны вводить въ заблужденіе, что y есть результатъ трансцендентнаго дѣйствія надъ 1. Здѣсь производятся два трансцендентныя дѣйствія, которыя могутъ быть замѣнены однимъ алгебраическимъ: выраженіе π есть трансцендентная функція относительно 1, а $\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+i.\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ есть трансцендентная функція относительно π; эти двѣ функціи замѣняются одною радикальною $\sqrt[n]{1}$.

Помощію предъидущихъ выраженій легко найти всѣ значенія радикала (5), т. е. корни мнимаго уравненія

$$(10) \qquad x^n=r(\cos\varphi+i.\sin\varphi).$$

Если n *четное*, то значенія x получатся, помноживъ выраженія (8) на (6); руководствуясь формулою (2), находимъ

$$x=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right)+i.\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right]$$

$$=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{n}\right)\pm i.\sin\left(\frac{\varphi+2\pi}{n}\right)\right]$$

$$=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\varphi+4\pi}{n}\right)\pm i.\sin\left(\frac{\varphi+4\pi}{n}\right)\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\varphi+(n-2)\pi}{n}\right)\pm i.\sin\left(\frac{\varphi+(n-2)\pi}{n}\right)\right]$$

$$=-r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right)+i.\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right].$$

Когда n *нечетное*, тогда всѣ значенія x получатся, помноживъ выраженія (9) на (6); они будутъ:

$$x=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right)+i.\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right]$$

$$=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{n}\right)\pm i.\sin\left(\frac{\varphi+2\pi}{n}\right)\right]$$

$$=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\varphi+4\pi}{n}\right)\pm i.\sin\left(\frac{\varphi+4\pi}{n}\right)\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$.=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\varphi+(n-3)\pi}{n}\right)\pm i.\sin\left(\frac{\varphi+(n-3)\pi}{n}\right)\right]$$

$$.=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\varphi+(n-1)\pi}{n}\right)\pm i.\sin\left(\frac{\varphi+(n-1)\pi}{n}\right)\right].$$

Чтобы получить корни уравненія

$$x^n=r(\cos\varphi-i.\sin\varphi),$$

стоитъ только въ предъидущихъ выраженіяхъ перемѣнить $\sin\varphi$ на $-\sin\varphi$ или φ на $-\varphi$; отъ того общее выраженіе для x будетъ

$$x=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{-\varphi+2\kappa\pi}{n}\right)\pm i.\sin\left(\frac{-\varphi-2\kappa\pi}{n}\right)\right]$$

$$.=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\varphi-2\kappa\pi}{n}\right)\mp i.\sin\left(\frac{\varphi-2\kappa\pi}{n}\right)\right].$$

Слѣдовательно всѣ корни уравненія

$$[x^n-r(\cos\varphi+i.\sin\varphi)][x^n-r(\cos\varphi-i.\sin\varphi)]=o$$

или

$$x^{2n}-2r\cos\varphi.x^n+r^2=o$$

будутъ заключаться въ формулѣ

$$x=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2\kappa\pi}{n}\right)\pm i.\sin\left(\frac{\varphi+2\kappa\pi}{n}\right)\right],$$

гдѣ κ какое нибудь цѣлое положительное или отрицательное число. Помощію этой формулы можно рѣшать уравненія вида

$$x^{2n}+a_n x^n+a_{2n}=o,$$

гдѣ a_n и a_{2n} дѣйствительныя количества; для этого должно положить

$$a_n=-2r\cos\varphi,\ a_{2n}=r^2.$$

Такъ какъ r всегда дѣйствительное и положительное количество, то a_{2n} должно быть также положительное, а a_n съ противнымъ знакомъ $\cos\varphi$.

6. Замѣчательнѣйшія слѣдствія этихъ тригонометрическихъ рѣшеній суть теоремы *Котеса* и *Муавра*.

1) Пусть a будетъ дѣйствительное количество; то корни уравненія $x^n-a^n=o$, по сказанному выше, будутъ заключаться въ выраженіи

$$(11)\qquad x=a\left[\cos\left(\frac{2\kappa\pi}{n}\right)\pm i.\sin\left(\frac{2\kappa\pi}{n}\right)\right]$$

и выведутся изъ него, давая κ значенія 0, 1, 2,....

Чтобы получить корни уравненія $x^n+a^n=o$ или

$$x^n=-a^n=a^n.-1,$$

должно положить въ уравненіи (10) $r=a^n$, $\cos\Phi=-1$, т. е. $\Phi=\pi$; отъ чего

$$x=a.\left[\cos\left(\frac{\pi+2\kappa\pi}{n}\right)\pm i.\sin\left(\frac{\pi+2\kappa\pi}{n}\right)\right]$$

(12)
$$=a.\left[\cos\left(\frac{(2\kappa+1)\pi}{n}\right)\pm i.\sin\left(\frac{(2\kappa+1)\pi}{n}\right)\right],$$

гдѣ $\kappa=0, 1, 2, 3,\ldots$

Формула (11) показываетъ, что биномъ x^n-a^n есть произведеніе множителей вида

$$\left\{x-a\left[\cos\left(\frac{2\kappa\pi}{n}\right)+i.\sin\left(\frac{2\kappa\pi}{n}\right)\right]\right\}\left\{x-a\left[\cos\left(\frac{2\kappa\pi}{n}\right)-i.\sin\left(\frac{2\kappa\pi}{n}\right)\right]\right\}$$

$$=\left[x-a.\cos\left(\frac{2\kappa\pi}{n}\right)\right]^2+a^2\sin^2\left(\frac{2\kappa\pi}{n}\right)=x^2+a^2-2ax.\cos\left(\frac{2\kappa\pi}{n}\right);$$

для *n четнаго* будетъ

(13)
$$x^n-a^n=$$

$$(x-a)\left[x^2+a^2-2ax\cos\frac{2\pi}{n}\right]\left[x^2+a^2-2ax\cos\frac{4\pi}{n}\right]\ldots\left[x^2+a^2-2ax\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\right](x+a),$$

а для *n нечетнаго*

(14)
$$x^n-a^n=$$

$$(x-a)\left[x^2+a^2-2ax\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]\left[x^2+a^2-2ax\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)\right]\ldots\left[x^2+a^2-2ax\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right].$$

Начертивши окружность радіусомъ $AO=a$, раздѣливши ее на 2^n равныхъ частей, отложивъ $PO=x$ и проведя изъ P во всѣ точки дѣленія прямыя PA, PM_1, PM_2, $PM_3,\ldots$, изъ треуг. (Фиг. 9) PM_2O, PM_4O, $PM_6O,\ldots$ имѣемъ

$$\overline{PM}_2^2=x^2+a^2-2ax\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\overline{PM}_4^2=x^2+a^2-2ax\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)$$

. . . . ;

притомъ $x-a=AP$.

Когда *n четное*, тогда $PM_n=x+a$, и ур. (13) даетъ

$$\overline{PO}^n-\overline{AO}^n=PA.\overline{PM}_2^2.\overline{PM}_4^2\ldots\overline{PM}_{n-2}^2.PM_n.$$

Для ***n нечетнаго,*** по ур. (14), будетъ

$$\overline{PO}^n-\overline{AO}^n=PA.\overline{PM}_2^2.\overline{PM}_4^2\ldots\overline{PM}_{n-1}^2.$$

Биномъ x^n+a^n, по формулѣ (12), состоитъ изъ множителей вида

$$\left\{x-a\left[\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)+i.\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)\right]\right\}\left\{x-a\left[\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)-i.\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)\right]\right\}$$

$$=x^2+a^2-2ax\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right).$$

Когда n *четное*, тогда

$$x^n+a^n=\left[x^2+a^2-2ax.\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]\left[x^2+a^2-2ax.\cos\left(\frac{3\pi}{n}\right)\right]\ldots\left[x^2+a^2-2ax.\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right]$$

а когда n *нечетное*, тогда

$$x^n+a^n=(x+a)\left[x^2+a^2-2ax\cos\frac{\pi}{n}\right]\left[x^2+a^2-2ax.\cos\frac{3\pi}{n}\right]\ldots\left[x^2+a^2-2ax.\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\right]$$

Изъ треугольниковъ PM_1O, PM_3O, PM_5O,... имѣемъ

$$\overline{PM}_1^2=x^2+a^2-2ax.\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\overline{PM}_3^2=x^2+a^2-2ax.\cos\left(\frac{3\pi}{n}\right)$$

. . . . ,

Итакъ для n *четнаго* будетъ

$$x^n+a^n=\overline{PO}^n+\overline{AO}^n=\overline{PM}_1^2.\overline{PM}_3^2.\overline{PM}_5^2\ldots\overline{PM}_{n-1}^2,$$

а для ***n нечетнаго,***

$$x^n+a^n=\overline{PO}^n+\overline{AO}=\overline{PM}_1^2.\overline{PM}_3^2.\overline{PM}_5^2\ldots\overline{PM}_{n-2}^2.\overline{PM}_n.$$

Изъ сказаннаго видно, что, какое бы нибыло n, всегда

(15) $$\overline{PO}^n-\overline{AO}^n=PA.PM_2PM_4\ldots PM_{2n-2}$$

(16) $$\overline{PO}^n+\overline{AO}^n=PM_1.PM_3.PM_5\ldots PM_{2n-1}.$$

Это геометрическое значеніе биномовъ $x^n\pm a^n$ открыто Англичаниномъ *Котсомъ* (Cotes), и было обнародовано послѣ его смерти *Шмитомъ* въ *Harmonia mensurarum.*

2) Выраженіе

$$x^{2n}-2a^nx^n.\cos\Phi+a^{2n}=o$$

состоитъ, по сказанному выше, изъ множителей вида

$$(17)\qquad x^2-2ax.\cos\left(\frac{\varphi+2\kappa\pi}{n}\right)+a^2$$

$$(18)\qquad x^2-2ax.\cos\left(\frac{\varphi-2\kappa\pi}{n}\right)+a^2,$$

гдѣ κ цѣлое положительное число; а выраженіе

$$x^{2n}+2a^n.x^n.\cos\varphi+a^{2n}=o,$$

какъ легко увѣриться будетъ состоять изъ множителей вида

$$(19)\qquad x^2-2ax.\cos\left(\frac{\varphi+(2\kappa+1)\pi}{n}\right)+a^2$$

$$(20)\qquad x^2-2ax.\cos\left(\frac{\varphi-(2\kappa+1)\pi}{n}\right)+a^2,$$

гдѣ κ также какое нибудь положительное цѣлое число. Отъищемъ геометрическое значеніе этихъ выраженій.

Пусть дуги $AC=\varphi$ и $AB=\frac{\varphi}{n}$ (фиг. 10) будутъ части окружности, описанной радіусомъ $AO=a$; начиная съ точки B, раздѣлимъ эту окружность на $2n$ равныхъ частей, отложимъ $PO=x$, и изъ точки P въ точки дѣленія B, M_1, M_2, M_3... проведемъ прямыя PB, PM_1, PM_2,..: множитель (17) при $\kappa=o$, 1, 2,... выражаетъ квадраты линій PB, PM_2, PM_4,..., а множитель (19) при $\kappa=o$, 1, 2,.. квадраты линій PM_1, PM_3, PM_5,... То же самое для множителей (18) и (20): первый выражаетъ квадраты линій PM_{2n-2}, PM_{2n-4},.., а второй квадраты линій PM_{2n-1}, PM_{2n-3},... Отсюда заключаемъ, что

$$x^{2n}-2a^n.\cos\varphi+a^{2n}=\overline{PO}^{2n}-2\overline{AO}^n\cdot\overline{PO}^n.\cos(AC)+\overline{AO}^{2n}=\overline{PB}^2.\overline{PM}_2^2...\overline{PM}_{2n-2}^2$$

$$x^{2n}+2a^n.\cos\varphi+a^{2n}=\overline{PO}^{2n}+2\overline{AO}^n.\overline{PO}^n.\cos(AC)+\overline{AO}^{2n}=\overline{PM}_1^2.\overline{PM}_3^2...\overline{PM}_{2n-1}^2.$$

Эта теорема дана *Муавромъ* и содержитъ *Котезову* какъ частный случай. Въ самомъ дѣлѣ, положивъ въ послѣднихъ уравненіяхъ $AC=0$, и извлекши изъ обѣихъ частей корень квадратный, мы получимъ уравненія (15) и (16).

IV.

1. Въ § 72 мы показали способъ вычислять мнимые корни всякаго уравненія вида

$$f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots a_{m-1}x+a_m=o,$$

гдѣ a_1, a_2,..a_m дѣйствительныя числа; но этотъ способъ весьма затруднителенъ въ приложеніи. Тригонометрическія свойства мнимыхъ выраженій даютъ другой способъ, болѣе удовлетворительный.

Вставивши вмѣсто x мнимое выраженіе

$$r(\cos\varphi+i.\sin\varphi),$$

имѣемъ

$$r^m(\cos+i.\sin.\varphi)^m+a_1r^{m-1}(\cos\varphi+i.\sin\varphi)^{m-1}+...+a_{m-1}r(\cos\varphi+i.\sin\varphi)+a_m=o$$

или, по ур. (3) приб III,

$$r^m(\cos m\varphi+i.\sin m\varphi)+a_1r^{m-1}[\cos(m-1)\varphi+i.\sin(m-1)\varphi]+...$$
$$+a_{m-1}r(\cos\varphi+i.\sin\varphi)+a_m=o.$$

Отдѣливъ дѣйствительную часть отъ мнимой, и положивъ для сокращенія

$$F(r,\varphi)=r^m\cos m\varphi+a_1r^{m-1}\cos(m-1)\varphi+a_2r^{m-2}\cos(m-2)\varphi+...+a_{m-1}r\cos\varphi+a_m$$
$$\Phi(r,\varphi)=r^m\sin m\varphi+a_1r^{m-1}\sin(m-1)\varphi+a_2r^{m-2}\sin(m-2)\varphi+...+a_{m-1}r\sin\varphi,$$

результатъ нашей вставки будетъ

$$f[r(\cos\varphi+i.\sin\varphi)]=F(r,\varphi)+i.\Phi(r,\varphi).$$

Чтобы выраженіе $r(\cos\varphi+i.\sin\varphi)$ было корнемъ даннаго уравненія, необходимо, чтобы

$$(1)\qquad F(r,\varphi)=o,\quad \Phi(r,\varphi)=o.$$

Помощію этихъ уравненій можно вычислить r и φ слѣдующимъ образомъ:

Пусть r_1 и φ_1 будутъ приближенныя значенія r и φ; положивъ $r=r_1+h$, $\varphi=\varphi_1+\kappa$, внесемъ это въ уравненія (1), и по малости h, станемъ въ разложеніяхъ

$$F(r_1+h,\varphi_1+\kappa),\quad \Phi(r_1+h,\varphi_1+\kappa)$$

пренебрегать степенями h^2, h^3, ... h^m, а по малости κ, положимъ

$$\cos m\kappa=\cos(m-1)\kappa=...=\cos\kappa=1$$
$$\sin m\kappa=m\kappa,\sin(m-1)\kappa=(m-1)\kappa,...\sin\kappa=\kappa;$$

отъ этого первое разложеніе будетъ

$$(r_1^m+mhr_1^{m-1})\cos m(\varphi_1+\kappa)+a_1[r_1^{m-1}+(m-1)hr_1^{m-2}]\cos(m-1)(\varphi_1+\kappa)+....$$
$$+a_{m-1}(r_1+h)\cos(\varphi_1+\kappa)+a_m = (r_1^m+mhr_1^{m-1})(\cos m\varphi_1-m\kappa.\sin m\varphi_1)$$
$$+a_1[r_1^{m-1}+(m-1)hr_1^{m-2}][\cos(m-1)\varphi_1-(m-1)\kappa.\sin(m-1)\varphi_1]$$
$$...+a_{m-1}(r_1+h)(\cos\varphi_1-\kappa.\sin\varphi_1)+a_m$$
$$=F(r_1,\varphi_1)+[mr_1^{m-1}\cos m\varphi_1+a_1(m-1)r_1^{m-2}\cos(m-1)\varphi_1+...+a_{m-1}\cos\varphi_1]h$$
$$-[mr_1^m\sin m\varphi_1+a_1(m-1)r_1^{m-1}\sin(m-1)\varphi_1+...+a_{m-1}r_1\sin\varphi_1]\kappa$$
$$-[(m^2)r_1^{m-1}\sin m\varphi_1+a_1(m-1)^2r_1^{m-2}\sin(m-1)\varphi_1+...+a_{m-1}\sin\varphi_1)]h\kappa.$$

Отбросивъ, по малости $hк$, послѣднюю строку, и положивъ для сокращенія

$$mr_1^{m-1}\cos m\varphi_1+(m-1)a_1r_1^{m-2}\cos(m-1)\varphi_1+....+a_{m-1}\cos\varphi_1=\mathrm{M}$$

$$mr_1^{m-1}\sin m\varphi_1+(m-1)a_1r_1^{m-2}\sin(m-1)\varphi_1+.....+a_{m-1}\ \sin\varphi_1=\mathrm{N},$$

наше разложеніе будетъ

$$(2)\qquad F(r_1,\varphi_1)+\mathrm{M}.h-r_1\mathrm{N}.к=o.$$

Сдѣлавъ то же самое въ разложеніи

$$\Phi(r_1+h,\varphi_1+к)=o,$$

находимъ

$$\Phi(r_1,\varphi_1)+[mr_1^{m-1}\sin m\varphi_1+a_1(m-1)r_1^{m-2}\sin(m-1)\varphi_1+...+a_{m-1}\sin\varphi_1]h$$
$$+[mr_1^{m}\cos m\varphi_1+a_1(m-1)r_1^{m-1}\cos(m-1)\varphi_1+...+r_1a_{m-1}\cos\varphi_1]к=o$$

или

$$(3)\qquad \Phi(r_1,\varphi_1)+\mathrm{N}.h+r_1\mathrm{M}.к=o.$$

Наконецъ изъ двухъ уравненій (2) и (3) получаемъ

$$(4)\qquad h=-\frac{F(r_1,\varphi_1).\mathrm{M}+\Phi(r_1,\varphi_1).\mathrm{N}}{\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2}$$

$$(5)\qquad к=\frac{F(r_1,\varphi_1).\mathrm{N}-\Phi(r_1,\varphi_1).\mathrm{M}}{r_1(\mathrm{M}^2+\mathrm{N}_2)}.$$

Такимъ образомъ будемъ имѣть новыя приближенныя значенія r и φ:

$$r_1+h=r_2,\quad \varphi_1+к=\varphi_2.$$

Желая продолжать приближеніе, должно поступать съ r_2 и φ_2 такъ же, какъ съ r_1 и φ_1.

Замѣтимъ, что здѣсь количество $к$ выражено въ доляхъ радіуса, а потому, если мы его хотимъ имѣть въ секундахъ, то должны его помножить на число секундъ въ радіусѣ.

Формулы (4) и (5) можно сдѣлать болѣе удобными для тригонометрическихъ вычисленій. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ право положить

$$\tan\!g\ \lambda=\frac{F(r_1,\varphi_1)}{\Phi(r_1,\varphi_1)},\quad R=\frac{F(r_1,\varphi_1)}{\sin\lambda}=\frac{\Phi(r_1,\varphi)}{\cos\lambda},$$

$$\tan\!g\mu=\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}},\quad \mathrm{S}=\frac{\mathrm{M}}{\sin\mu}=\frac{\mathrm{N}}{\cos\mu};$$

отъ чего будетъ

$$h=-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{S}}\cos(\lambda-\mu),\ к=\frac{\mathrm{R}}{r_1\mathrm{S}}\sin(\lambda-\mu).$$

Значенія M и N легко получить соотвѣтственно изъ $F(r_1, \phi_1)$ и $\Phi(r_1, \phi_1)$, а **именно:** ***помноживъ каждый членъ на показатель степени r_1 и уменьшивъ этотъ показатель единицею***; т. е. M и N суть производныя функціи отъ $F(r_1, \phi_1)$ и $\Phi(r_1 \phi_1)$ относительно r_1.

Формулы (4) и (5) даны *Симсономъ*. Чтобы ими пользоваться должно прежде знать приближенныя значенія искомыхъ количествъ r и ϕ, что составляетъ немаловажное затрудненіе. *Лежандръ* для этого предлагаетъ слѣдующій способъ:

2. Пусть данное уравненіе будетъ $f(x)=o$. Вставимъ въ него вмѣсто x произвольное мнимое выраженіе $\alpha+\beta\, i$, но такое, чтобы α и β не выходили изъ предѣловъ дѣйствительныхъ корней, и пусть результатъ этой вставки будетъ $P+Q.i$. Сдѣлаемъ ту же вставку въ производную $f'(x)$, и означимъ результатъ чрезъ $M+N.i$. Дадимъ потомъ выраженію $\alpha+\beta.i$ произвольное приращеніе ω, котораго бы модуль былъ весьма малъ относительно модуля $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$; вставимъ выраженіе $\alpha+\beta.i+\omega$ вмѣсто x въ $f(x)$, и пренебрежемъ степенями ω^2, ω^3,...; отъ того получимъ

$$f\left(\alpha+\beta.i+\omega\right)=P+Q.i+\omega\left(M+N.i\right).$$

Такъ какъ ω произвольное, то можно положить

$$\omega\left(M+N.i\right)=-n\left(P+Q.i\right),$$

гдѣ $n<1$; отсюда имѣемъ

$$\omega=-n\left(\frac{PM+QN}{M^2+N^2}\right)-n\, i.\left(\frac{QM-PN}{M^2+N^2}\right),$$

и результатъ, соотвѣтствующій поправленному выраженію, будетъ

$$f\left(\alpha+\beta.i+\omega\right)=\left(1-n\right)\left(P+Q.i\right);$$

онъ меньше предъидущаго результата въ отношеніи $1-n$ къ 1. Что же касается до дроби n, то она берется по произволу, но довольно малою относительно $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

Если P и Q довольно уже малы относительно M и N, то можно **положить $n=1$, и второе приближенное значеніе** $\alpha+\beta.i$ **будетъ согласно съ тѣмъ, которое получится по *Симсоновымъ* формуламъ. Но когда P и Q въ отношеніе M и N довольно еще** значительны, **тогда *для n* должно взять дробь <1, притомъ такую,** чтобы модуль ω содержался нѣсколько разъ **въ модулѣ $\alpha+\beta.i$. Съ новымъ** поправленнымъ выраженіемъ поступаемъ такъ же, какъ и съ предъидущимъ; отъ того результатъ $P+Q.i$ еще уменьшится. Такимъ образомъ продолжаемъ до тѣхъ поръ, какъ P и Q будутъ количества довольно малыя; послѣ чего, сдѣлавъ $n=1$, продолжаемъ приближеніе по *Симсоновымъ* формуламъ.

V.

Когда въ уравненіи третьей степени

$$x^3+px+q=o$$

будетъ удовлетворено условіе $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<o$; тогда, по § 100, всѣ корни даннаго уравненія дѣйствительные; но радикальныя выраженіе x:

$$x_1=\left\{\frac{q}{2}+\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}+\left\{\frac{q}{2}-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$x_2=\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)\left\{\frac{q}{2}+\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\left\{\frac{q}{2}-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$x_3=\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\left\{\frac{q}{2}+\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)\left\{\frac{q}{2}-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}},$$

выведенныя въ § 158, этого не показываютъ; потому что выраженіе подъ показателемъ $\frac{1}{3}$ принимаетъ мнимый видъ $a+b\sqrt{-1}$.

Этотъ случай былъ замѣченъ *Карданомъ*, и названъ *не разрѣшимымъ*. *Кенигъ* далъ геометрическое объясненіе этого случая, и показалъ возможность получить дѣйствительныя значенія корней посредствомъ дѣленія угла на 3 равныя части. *Лейбницъ* и *Николь* разложили выраженія x въ ряды, не содержащія мнимыхъ членовъ. Но самый простой способъ получить истинныя значенія x есть тригонометрическій, который мы здѣсь изложимъ.

Въ Кардановыхъ формулахъ выраженія

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) \text{ и } \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$$

суть корни уравненія $y^3-1=o$, не равные 1, и по формуламъ (9) приб. III, можно имъ дать видъ

$$\cos\frac{2\pi}{3}+i.\sin\frac{2\pi}{3},\quad \cos\frac{2\pi}{3}-i.\sin\frac{2\pi}{3};$$

такъ какъ выраженія

$$\frac{q}{2}+\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ и } \frac{q}{2}-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}$$

имѣютъ видъ $a\pm b\sqrt{-1}$, то можно положить ихъ равными соотвѣтственно выраженіямъ

$$\varrho(\cos\varphi+i.\sin\varphi) \text{ и } \varrho(\cos\varphi-i.\sin\varphi),$$

въ которыхъ ϱ, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ опредѣлятся по члену 2 приб. III; и такъ

$$x_1=\sqrt[3]{\varrho(\cos\varphi+i.\sin\varphi)}+\sqrt[3]{(\varrho\cos\varphi-i.\sin\varphi)},$$

$$x_2=\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i.\sin\frac{2\pi}{3}\right)\sqrt[3]{\varrho(\cos\varphi+i.\sin\varphi)}+\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i.\sin\frac{2\pi}{3}\right)\sqrt[3]{\varrho(\cos\varphi-i.\sin\varphi)}$$

$$x_3=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i.\sin\frac{2\pi}{3}\right)\sqrt[3]{\varrho(\cos\varphi+i.\sin\varphi)}+\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i.\sin\frac{2\pi}{3}\right)\sqrt[3]{\varrho(\cos\varphi-i.\sin\varphi)}.$$

По ур. 6 приб. III, эти выраженія обращаются въ слѣдующія:

$$x_1=\varrho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i.\sin\frac{\varphi}{3}\right)+\varrho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3}-i.\sin\frac{\varphi}{3}\right)$$

$$x_2=\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i.\sin\frac{2\pi}{3}\right).\varrho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i.\sin\frac{\varphi}{3}\right)+\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i.\sin\frac{2\pi}{3}\right)\varrho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3}-i.\sin\frac{\varphi}{3}\right)$$

$$x_3=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i.\sin\frac{2\pi}{3}\right).\varrho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i.\sin\frac{\varphi}{3}\right)+\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i.\sin\frac{2\pi}{3}\right)\varrho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3}-i.\sin\frac{\varphi}{3}\right)$$

или наконецъ, по уравненію (2) пр. III, въ слѣдующія:

$$x_1=2\varrho^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}$$

$$x_2=2\varrho^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi-2\pi}{3}\right)$$

$$x_3=2\varrho^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}\right),$$

выраженія всѣ три дѣйствительныя и довольно удобныя для вычисленія.

Неразрѣшимый случай уравненія 3-й степени служитъ примѣромъ невыгоды радикальнаго рѣшенія: если бы мы имѣли такія рѣшенія для всѣхъ уравненій; то мы не скоро бы съ ними справились, чтобы получить истинныя значенія корней.

VI.

1. При концѣ печатанія этой книги мнѣ сообщили 10-й номеръ Comtes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences par M. M. les sécrétaires perpetuels, 5 Septembre 1837, Paris, гдѣ помѣщенъ новый способъ рѣшенія численныхъ уравненій, предлагаемый Г-мъ *Коши*. Простота теоріи, легкость въ приложеніи и преимущество его предъ *Лагранжевымъ* способомъ заслуживаютъ вниманіе Геометровъ, и потому я надѣюсь доставить удовольствіе читателямъ, изложивъ его здѣсь и пояснивъ его примѣромъ.

Этотъ способъ основывается на слѣдующихъ теоремахъ:

1) Пусть $f(x)$ и $F(x)$ будутъ двѣ функціи, обращающіяся въ положительныя конечныя количества при $x=a$, непрерывныя и удовлетворяющія условію

$$(1)\qquad f(x)<F(x)$$

для x между предѣлами a и b. Если уравненіе $F(x)=o$ имѣетъ одинъ или нѣсколько дѣйствительныхъ корней между этими предѣлами, изъ которыхъ c есть ближайшій къ a; то уравненіе $f(x)=o$ будетъ имѣть по крайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный корень между a и c.

Въ самомъ дѣлѣ: такъ какъ $F(c)=o$, то по условію (1) будетъ $f(c)<o$; но по предположенію $f(a)>o$; слѣдовательно $f(x)$, съ переходомъ x отъ a къ c, переходитъ изъ положительнаго состоянія въ отрицательное; для чего она должна пройти чрезъ нуль.

Доказанная теорема справедлива, будетъ ли $b>a$ или $b<a$.

2) Пусть

$$f(x),\ F(x),\ \Phi(x),\ \theta(x),\ \psi(x)$$

будутъ непрерывныя функціи x между предѣлами x_0 и X, полагая, что $X > x_0$, и результаты $F(x_0)$ и $\Phi(x_0)$ имѣютъ одинакой знакъ съ $f(x_0)$, а $\theta(X)$ и $\psi(X)$ одинакой знакъ съ $f(X)$. Положимъ еще, что всѣ эти функціи, для x между данными предѣлами, удовлетворяютъ условіямъ

$$\frac{F(x)}{f(x_0)} < \frac{f(x)}{f(x_0)} < \frac{\Phi(x)}{f(x_0)} \tag{2}$$

$$\frac{\theta(x)}{f(X)} < \frac{f(x)}{f(X)} < \frac{\psi(x)}{f(X)}, \tag{3}$$

гдѣ знакъ $<$ можетъ быть замѣненъ иногда знакомъ $=$, въ условіи (2) для $x=x_0$, а въ условіи (3) для $x=X$. Наконецъ допустимъ, что уравненія

$$(4)\,f(x)=o,\quad (5)\,F(x)=o,\quad (6)\,\Phi(x)=o,\quad (7)\,\theta(x)=o,\quad (8)\,\psi(x)=o$$

имѣютъ дѣйствительные корни между x_0 и X, и что

ξ наименьшій изъ такихъ корней, а Ξ наибольшій для ур. (4)
$x_0+\mu$ наименьшій .... для ур. (5)
$x_0+\nu$ наименьшій .... для ур. (6)
$X-M$ наибольшій .... для ур. (7)
$X-N$ наибольшій .... для ур. (8).

Корни ξ и Ξ могутъ быть или различные или сливаться въ одинъ. Существованіе этихъ корней, по теоремѣ 1, предполагаетъ существованіе корней $x_0+\mu$ и $X-M$, которые должны удовлетворять условіямъ

$$(9)\,x_0+\mu<\xi \qquad (10)\,\Xi<X-M.$$

Существованіе корня $x_0+\nu$ предполагаетъ существованіе корней ξ и Ξ, а потому и существованіе корней $x_0+\mu$ и $X-M$, которые должны удовлетворять условіямъ:

$$(10)\ \text{и}\ (11)\ x_0+\mu<\xi<x_0+\nu.$$

Наконецъ существованіе корня $X-N$ предполагаетъ существованіе корней ξ и Ξ, слѣдовательно и существованіе корней $x_0+\mu$ и $X-M$, которые должны удовлетворять условіямъ:

$$(9)\ \text{и}\ (12)\ X-N<\Xi<X-M.$$

Если предѣлъ x_0 есть корень уравн. (4), то онъ долженъ быть также корень уравн. (5), и сказанное предъ этимъ будетъ справедливо, когда возьмемъ $x_0+\varepsilon$ вмѣсто x_0, гдѣ ε есть безконечномалое количество. Если же X есть корень ур. (4), то онъ долженъ быть корнемъ уравн. (7), и, чтобы сказанное было справедливо, должно X замѣнить $X-\varepsilon$, гдѣ ε есть безконечномалое количество.

3) Пусть будетъ уравненіе

(13) $$f(x)=o,$$

котораго первая часть есть непрерывная функція x между предѣлами x_0 и X. Положимъ, что эта функція разлагается на двѣ другія

$$\varphi(x) \text{ и } -\chi(x),$$

которыхъ производныя

$$\varphi'(x) \text{ и } -\chi'(x)$$

имѣютъ свойство, съ непрерывнымъ возрастаніемъ x между предѣлами x_0 и X, первая — всегда возрастать, а вторая — всегда уменьшаться.

Когда уравненіе (13) алгебраическое раціональное; тогда для $\varphi(x)$ можно взять сумму всѣхъ положительныхъ членовъ, а для $-\chi(x)$ сумму всѣхъ отрицательныхъ.

По извѣстнымъ формуламъ § 18, имѣемъ

$$\varphi(x)=\varphi(x_0)+(x-x_0)\varphi'[x_0+\theta(x-x_0)]$$
$$\chi(x)=\chi(x_0)+(x-x_0)\chi'[x\ +\theta'(x-x_0)]$$
$$\varphi(x)=\varphi(X)+(x-X)\varphi'[X+\theta_1(x-X)]$$
$$\chi(x)=\chi(X)+(x-X)\chi'[X+\theta_2(x-X)],$$

гдѣ θ, θ', θ_1 и θ_2 суть количества, заключающіяся между 0 и 1. Отсюда, замѣтивъ, что

$$f(x)=\varphi(x)-\chi(x),$$

имѣемъ

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\{\varphi'[x_0+\theta(x-x_0)]-\chi'[x_0+\theta'(x-x_0)]\}$$
$$f(x)=f(X)+(x-X)\{\varphi'[X+\theta_1(x-X)]-\chi'[X+\theta_2(x-X)]\}.$$

Такъ какъ, по принятымъ условіямъ,

$$\varphi'[x_0+\theta(x-x_0)],\ \varphi'[X+\theta_1(x-X)]$$

меньше $\varphi(X)$ и больше $\varphi'(x_0)$, а

$$\chi'[x_0+\theta'(x-x_0)],\ \chi'[X+\theta_2(x-X)]$$

меньше $\chi'(X)$ и больше $\chi'(x_0)$; то предъидущія уравненія даютъ слѣдующія неравенства:

$$f(x)<f(x_0)+(x-x_0)[\varphi'(X)-\chi'(x_0)]$$
$$f(x)>f(x_0)+(x-x_0)[\varphi'(x_0)-\chi'(X)]$$
$$f(x)>f(X)+(x-X)[\varphi'(X)-\chi'(x_0)]$$
$$f(x)<f(X)+(x-X)[\varphi'(x_0)-\chi'(X)],$$

или

$$(14)\quad f(x_0)+(x-x_0)[\varphi'(x_0)-\chi'(X)]<f(x)<f(x_0)+(x-x_0)[\varphi'(X)-\chi'(x_0)]$$

$$(15)\quad f(X)+(x-X)[\varphi'(X)-\chi'(x_0)]<f(x)<f(X)+(x-X)[\varphi'(x_0)-\chi'(X)].$$

Если результаты $f(x_0)$ и $f(X)$ положительные; то эти неравенства приводятся къ слѣдующимъ:

$$(16)\qquad 1+\frac{\varphi'(x_0)-\chi'(X)}{f(x_0)}(x-x_0)<\frac{f(x)}{f(x_0)}<1+\frac{\varphi'(X)-\chi'(x_0)}{f(x_0)}(x-x_0)$$

$$(17)\qquad 1+\frac{\varphi'(X)-\chi'(x_0)}{f(X)}(x-X)<\frac{f(x)}{f(X)}<1+\frac{\varphi'(x_0)-\chi'(X)}{f(X)}(x-X);$$

если же $f(x_0)$ и $f(X)$ отрицательные, то неравенства (14) и (15) обратятся въ слѣдующія:

$$(18)\qquad 1+\frac{\varphi'(X)-\chi'(x_0)}{f(x_0)}(x-x_0)<\frac{f(x)}{f(x_0)}<1+\frac{\varphi'(x)-\chi'(X)}{f(x_0)}(x-x_0)$$

$$(19)\qquad 1+\frac{\varphi'(x_0)-\chi'(X)}{f(X)}(x-X)<\frac{f(x)}{f(X)}<1+\frac{\varphi'(X)-\chi'(x_0)}{f(X)}(x-X).$$

Когда $f(x_0)$ положительный, а $f(X)$ отрицательный, тогда нер. (14) и (15) замѣняются неравенствами (16) и (19). Наконецъ когда $f(x_0)$ отрицательный, а $f(X)$ положительный; тогда вмѣсто (14) и (15) должно взять (17) и (18).

Вообще: какіе бы ни были результаты $f(x_0)$ и $f(X)$, означивъ чрезъ

$$-\frac{1}{\alpha}\ \text{и}\ -\frac{1}{\beta}$$

наименьшее и наибольшее изъ отношеній

$$\frac{\varphi'(x_0)-\chi'(X)}{f(x_0)},\quad \frac{\varphi'(X)-\chi'(x_0)}{f(x_0)},$$

а чрезъ

$$\frac{1}{A}\ \text{и}\ \frac{1}{B}$$

наибольшее и наименьшее изъ отношеній

$$\frac{\varphi'(x_0)-\chi'(X)}{f(X)},\quad \frac{\varphi'(X)-\chi'(x_0)}{f(X)},$$

мы имѣемъ неравенства:

$$(20)\qquad 1-\frac{(x-x_0)}{\alpha}<\frac{f(x)}{f(x_0)}<1-\frac{x-x_0}{\beta}$$

$$(21)\qquad 1+\frac{x-X}{A}<\frac{f(x)}{f(X)}<1+\frac{x-X}{B}.$$

Всѣ три части каждаго изъ этихъ условій, при $x=x_0$ или $x=X$, приводятся къ 1,— имѣютъ положительные результаты, а потому эти условія одинаковы съ условіями 2-й теоремы, и уравненія (5), (6), (7), (8) замѣняются слѣдующими:

$$(22)\quad 1-\frac{x-x_1}{\alpha}=o,\ (23)\ 1-\frac{x-x_0}{\beta}=o,\ (24)\ 1+\frac{x-X}{A}=o,\ (25)\ 1+\frac{x-X}{B}=o,$$

которыхъ корни

$$x_0+\alpha,\ x_0+\beta,\ X-A,\ X-B,$$

тогда только имѣютъ значенія корней

$$x_0+\mu,\ x+\nu,\ X-M,\ X-N;$$

когда они заключаются между предѣлами x_0 и X. Изъ сказаннаго въ этомъ членѣ вытекаетъ слѣдующая теорема:

Пусть будетъ уравненіе

$$f(x)=o,$$

котораго первая часть есть непрерывная функція x, между предѣлами x_0 и X, и разлагается на двѣ другія функціи

$$\varphi(x)\ \text{и}\ -\chi(x),$$

также непрерывныя между тѣми же предѣлами; производная первой всегда возрастаетъ, а производная второй всегда уменьшается съ возрастаніемъ x отъ x_0 до X. Означимъ чрезъ $-\frac{1}{\alpha}$ наименьшее, а чрезъ $-\frac{1}{\beta}$ наибольшее изъ отношеній

$$\frac{\varphi'(x_0)-\chi'(X)}{f(x_0)},\quad \frac{\varphi'(X)-\chi'(x_0)}{f(x_0)},$$

чрезъ $\frac{1}{A}$ наибольшее, а чрезъ $\frac{1}{B}$ наименьшее изъ отношеній

$$\frac{\varphi'(x_0)-\chi'(X)}{f(X)},\quad \frac{\varphi'(X)-\chi'(x_0)}{f(X)}.$$

Если данное уравненіе имѣетъ дѣйствительные корни между x_0 и X, то количества

$$x_0+\alpha\ \text{и}\ X-A$$

будутъ также заключать эти корни и сами заключаться между предѣлами x_0 и X.

Чтобы данное уравненіе имѣло дѣйствительные корни между x_0 и X достаточно, чтобы одно изъ количествъ

$$x_0+\beta\ \text{и}\ X-B$$

заключалось между x_0 и X. Пусть ξ будетъ наименьшій, а Ξ наибольшій изъ корней даннаго ур. заключающихся между x_0 и X (эти корни могутъ сливаться въ одинъ): если $x_0+\beta$ заключается между x_0 и X, то будемъ имѣть условія

$$x_0 < x_0 + \alpha < \xi < x_0 + \beta \text{ и } \Xi < X - A < X;$$

если же X—B заключается между x_0 и X, то будетъ

$$x_0 < x_0 + \alpha < \xi \text{ и } X - B < \Xi < X - A < X.$$

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ бываетъ и то и другое.

Вотъ теорема, служащая не только для приближенія къ корнямъ, но и для отдѣленія ихъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ. Способъ приближенія, на ней основанный, несравненно проще Лагранжева, и въ соединеніи съ нимъ можетъ принести большія выгоды.

Сравнимъ теперь предѣлы.

$$(26) \qquad x_0 + \alpha \text{ и } X - A$$

съ *Нютоновыми*, выведенными въ § 133.

2. Пусть a и b будутъ предѣлы, заключающіе одинъ только дѣйствительный корень уравненія $f(x)=o$ и удовлетворяющіе условіямъ § 132. Въ случаѣ (1) § 132 имѣемъ

$$(27) \qquad \alpha = \frac{f(a)}{\varphi'(b) - \chi'(a)}, \quad A = \frac{f(b)}{\varphi'(b) - \chi'(a)}$$

и предѣлы (26) будутъ

$$(28) \qquad a + \frac{-f(a)}{\varphi'(b) - \chi'(a)}, \quad b - \frac{f(b)}{\varphi'(b) - \chi'(a)}.$$

Нютоновы предѣлы суть

$$a + \frac{-f(a)}{f'(b)} = a + \frac{-f(a)}{\varphi'(b) - \chi'(b)}.$$

$$b - \frac{f(b)}{f'(b)} = b - \frac{f(b)}{\varphi'(b) - \chi'(b)}$$

Такъ какъ $\chi'(b) > \chi'(a)$, то $\varphi'(b) - \chi'(a) > \varphi'(b) - \chi'(b)$, а потому

$$a + \frac{-f(a)}{\varphi'(b) - \chi'(a)} < a + \frac{-f(a)}{f'(b)}$$

$$b - \frac{f(b)}{\varphi'(b) - \chi'(a)} > b - \frac{f(b)}{f'(b)};$$

слѣдовательно предѣлы (28) не столь близки къ корню, какъ Нютоновы. Тоже найдемъ и въ случаяхъ (2), (3), (4) § 132.

Отъищемъ теперь соотношеніе между разностью предѣловъ (28), которую назовемъ i_1, и разностью $b - a = i$. Мы имѣемъ

$$i_1 = b - a + \frac{f(a) - f(b)}{\varphi'(b) - \chi'(a)} = i + \frac{f(b-i) - f(b)}{\varphi'(b) - \chi'(a)} = \frac{i.\varphi'(b) - i.\chi'(b-i) + f(b-i) - f(b)}{\varphi'(b) - \chi'(a)}$$

$$= \frac{i.\varphi'(b) - i.\chi'(b) + i^2.\chi''(b - \theta i) + f(b) - i.f'(b) + \frac{i^2}{2} f''(b - \theta' i) - f(b)}{\varphi'(b) - \chi'(a)}$$

гдѣ θ и $\theta' > o$ и <1. Замѣтивъ, что $\varphi'(b)-\chi'(b)=f'(b)$, имѣемъ

$$i_1=\frac{i^2}{2}\cdot\frac{2\chi''(b-\theta i)+f''(b-\theta' i)}{\varphi'(b)-\chi'(a)}.$$

Но $\chi''(b)>\chi''(b-\varphi i)$ и $\varphi''(b)-\chi''(a)>f''(b-\varphi i)$ (*), слѣдовательно

$$(29)\qquad i_1<\frac{i^2}{2}\cdot\frac{2\chi''(b)+\varphi''(b)-\chi''(a)}{\varphi'(b)-\chi'(a)}.$$

Можно вывести другое выраженіе для i_1. Въ самомъ дѣлѣ: вставивши $a+i$ вмѣсто b, имѣемъ.

$$i_1=i+\frac{f(a)-f(a+i)}{\varphi'(b)-\chi'(a)}=\frac{i.\varphi'(a+i)-i.\chi'(a)+f(a)-f(a+i)}{\varphi'(b)-\chi'(a)}$$

$$=\frac{i.\varphi'(a)+i^2.\varphi''(a+\theta i)-i.\chi'(a)+f(a)-f(a)-if'(a)-\frac{i^2}{2}f''(a+\theta' i)}{\varphi'(b)-\chi'(a)}$$

гдѣ θ и $\theta' > o$ и <1. Такъ какъ $\varphi'(a)-\chi'(a)=f'(a)$; то

$$i_1=\frac{i^2}{2}\cdot\frac{2\varphi''(a+\theta i)-f''(a+\theta' i)}{\varphi'(b)-\chi'(a)};$$

но $\varphi''(b)>\varphi''(a+\theta i)$ и $\varphi''(a)-\chi''(b)<f''(a+\theta' i)$, а потому

$$(30)\qquad i_1<\frac{i^2}{2}\cdot\frac{2\varphi''(b)-\varphi''(a)+\chi''(b)}{\varphi'(b)-\chi'(a)}.$$

Выраженія подобныя (29) и (30) выведутся и въ случаяхъ (2) (3) (4) § 132.

Означивъ наименьшую изъ разностей

$$(31)\qquad 2\chi''(b)+\varphi''(b)-\chi''(a) \text{ и } 2\varphi''(b)-\varphi''(a)+\chi''(b)$$

чрезъ K, имѣемъ

$$(32)\qquad i_1<\frac{i^2}{2}\cdot\frac{K}{\varphi'(b)-\chi'(a)}.$$

Зная одинъ изъ предѣловъ (28) на пр. $b_1=b-\frac{f(b)}{\varphi'(b)-\chi'(a)}$, вмѣсто другаго можно взять

$$a_1=b_1-\frac{i^2}{2}\cdot\frac{K}{\varphi'(b)-\chi'(a)},$$

или, означивъ чрезъ $\left(\frac{1}{10}\right)^n$ единицу непосредственно-высшаго порядка разности i, а

(*) Я полагаю, что данное уравненіе алгебраическое, для котораго $\varphi''(x)$ есть сумма всѣхъ положительныхъ членовъ $f''(x)$, а $-\chi''(x)$ сумма всѣхъ отрицательныхъ членовъ; такъ, что $\varphi''(x)$ и $\chi''(x)$ возрастаютъ съ возрастаніемъ x.

чрезъ $\left(\frac{1}{10}\right)^{\kappa}$ единицу непосредственно-высшаго порядка частнаго $\frac{K}{2[\varphi'(b)-\chi'(a)]}$, вмѣсто a_1 можно взять

$$b_1-\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+\kappa};$$

Но для этого должно, чтобы было удовлетворено условіе $2n+k>n$ или $n=$ или $>1-\kappa$.

Если это условіе удовлетворено; то одно изъ частныхъ (27) вычисляемъ до $\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+\kappa}$ включительно (пользуясь сокращеннымъ дѣленіемъ), увеличиваемъ цыфру этого порядка единицей, и вычитаемъ его изъ b или придаемъ къ a, смотря по тому, будетъ ли это частное А или a. Такимъ образомъ найдемъ количество, которое отъ точнаго значенія искомаго корня будетъ разниться менѣе нежели $\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+\kappa}$. Назвавши его чрезъ β_1, результатъ $f(\beta_1)$ покажетъ, будетъ ли β_1 высшій или низшій предѣлъ; въ первомъ случаѣ низшій предѣлъ будетъ $\beta_1-\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+\kappa}$, а во второмъ высшій будетъ $\beta_1+\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+\kappa}$. Это все было объяснено въ § 159 для Ньютонова способа.

Для дальнѣйшаго приближенія вмѣсто того, чтобы снова опредѣлять $\left(\frac{1}{10}\right)^{\kappa}$, можно поступать слѣдующимъ образомъ:

Такъ какъ $\varphi'(b)-\chi'(a)>f'(a)$; то, изъ выр. (32), имѣемъ

$$i_1<\frac{i^2}{2}\cdot\frac{K}{f'(a)}. \tag{33}$$

опредѣливши единицу непосредственно-высшаго порядка частнаго $\frac{K}{2f'(a)}$, которую назовемъ $\left(\frac{1}{10}\right)^{\kappa'}$, имѣемъ

$$i_1<\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+\kappa'}. \tag{34}$$

если $2n+k'>n$, то послѣдовательное приближеніе можно производить совершенно такъ же, какъ и въ Ньютоновомъ способѣ, и число точныхъ цыфръ корня, получаемыхъ при каждомъ приближеніи, будетъ возрастать, какъ члены прогрессіи

$$n,\quad 2n+\kappa',\quad 4n+3\kappa',\quad 8\kappa+7\kappa',\ldots$$

Въ самомъ дѣлѣ: назвавъ чрезъ $\begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, \ldots \\ b_1, b_2, b_3, \ldots \end{Bmatrix}$ послѣдовательные предѣлы, чрезъ $i_1, i_2, i_3,$

соотвѣтственныя ихъ разности, чрезъ K_1, K_2, K_3,.. послѣдовательныя значенія выраженія K, имѣемъ

$$i_2 < \frac{i_1^2}{2} \cdot \frac{K_1}{f'(a_1)}$$

$$i_3 < \frac{i_2^2}{2} \cdot \frac{K_2}{f'(a_2)}.$$

. . . . ,

Такъ какъ $f'(a) < f'(a_1) < f'(a_2) < \ldots$, $K > K_1 > K_2 > \ldots$; то

$$\frac{K}{f'(a)} > \frac{K_1}{f'(a_1)} > \frac{K_2}{f'(a_2)} > \ldots,$$

а потому

$$i_1 < i^2\left(\frac{K}{2f'(a)}\right), \; i_2 < i^4\left(\frac{K}{2f'(a)}\right)^3, \; i_3 < i^8\left(\frac{K}{2f'(a)}\right)^7, \ldots$$

Взявши $\left(\frac{1}{10}\right)^n$ вмѣсто i и $\left(\frac{1}{10}\right)^{\varkappa'}$ вмѣсто $\left(\frac{K}{2f'(a)}\right)$, имѣемъ

$$i_1 < \left(\frac{1}{10}\right)^{2n+\varkappa'}, \; i_2 < \left(\frac{1}{10}\right)^{4n+3\varkappa'}, \; i^3 < \left(\frac{1}{10}\right)^{8n+7\varkappa'} \ldots$$

Можетъ случиться, что условіе $n \geq 1 - \varkappa'$ не удовлетворено, а условіе $n \geq 1 - \varkappa$ удовлетворено: тогда для приближенія должно пользоваться выраженіемъ (32).

Вставку послѣдовательныхъ предѣловъ $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ въ функціи

$$\varphi(x), \; \varphi'(x), \; \varphi''(x), \ldots \varphi^m(x)$$
$$\chi(x), \; \chi'(x), \; \chi''(x), \ldots \chi^m(x)$$

можно производить по правилу § 137. А результаты

$$(35) \qquad \begin{array}{l} f(a_n), \; f'(a_n), \; f''(a_n), \ldots f^m(a_n) \\ f(b_n), \; f'(b_n), \; f''(b_n), \ldots f^m(b_n) \end{array}$$

получатся чрезъ простое вычитаніе результатовъ

$$\chi(a_n), \chi'(a_n), \chi''(a_n), \ldots \chi^m(a_n), \chi(b_n), \chi'(b_n), \chi''(b_n), \ldots \chi^m(b_n)$$

соотвѣтственно изъ результатовъ

$$\varphi(a_n), \varphi'(a_n), \varphi''(a_n), \ldots \varphi^m(a_n), \varphi(b_n), \varphi'(b_n), \varphi''(b_n), \ldots \varphi^m(b_n)$$

Замѣтимъ, что выраженія (32) и (35) ни мало не предполагаютъ условія § 138,— чтобы $f'''(x)$ сохраняла свой знакъ между предѣлами a и b, — условія необходимаго для Нютонова способа. И такъ когда оно еще не удовлетворено, тогда съ выгодою можно воспользоваться способомъ *Коши.*

Приложимъ сказанное къ уравненію

$$x^4-x^3+5x^2+4x-1=o.$$

По способу Фурье *отдѣленія корней составляемъ таблицу*

	f^{IV}	f'''	f''	f'	f	
[—1]	+	—	+	—	+	одинъ дѣйствит. корень
[0]	+	—	+	+	—	три корня, изъ которыхъ
[+1]	+	+	+	+	+	одинъ дѣйствительный.

Корни, назначаемые предѣлами 0 и $+1$, отдѣлимъ по способу непрерывныхъ дробей (см. § 121). *Для* этого положимъ въ данномъ уравненіи $x=0+\frac{1}{y}=\frac{1}{y}$, и отдѣлимъ положительные корни преобразованнаго уравненія, превышающіе 1. Преобразованное уравненіе будетъ

$$\Phi(y)=y^4-4y^3-5y^2+y-1=o.$$

Вставивши 1 вмѣсто y въ рядъ функцій

$$\Phi^{IV}(y),\ \Phi'''(y),\ \Phi''(y),\ \Phi'(y),\ \Phi(y),$$

имѣемъ рядъ знаковъ

[+1]	+	$\overset{0}{+}$	—	—	—,

который показываетъ, что y имѣетъ только одно дѣйствительное значеніе >1; слѣдовательно данное уравненіе имѣетъ одинъ только дѣйствительный корень между 0 и 1. Вставляя въ $\Phi(y)$ вмѣсто y послѣдовательныя числа 1, 2, 3, найдемъ, что $4<y<5$, а потому дѣйствительный корень даннаго уравненія, назначаемый предѣлами 0 и 1, будетъ заключаться между $\frac{1}{5}=0,2$ и $\frac{1}{4}=0,25$, или между 0,2 и 0,3. Вставивши ихъ вмѣсто x въ функціи:

$$\varphi(x)=x^4+5x^2+4x \qquad \chi(x)=x^3+1$$
$$\varphi'(x)=4x^3+10x+4 \qquad \chi'(x)=3x^2$$
$$\varphi''(x)=12x^2+10 \qquad \chi''(x)=6x$$
$$\varphi'''(x)=24x \qquad \chi'''(x)=6$$
$$\varphi^{IV}(x)=24 \qquad \chi^{IV}(x)=0,$$

находимъ результаты:

	φ^{IV}	φ'''	φ''	φ'	φ
[0,2]	24	4,8	10,48	6,032	1,0016
[0,3]	24	7,2	11,08	7,108	1,6581
	χ^{IV}	χ'''	χ''	χ'	χ
[0,2]	0	6	1,2	0,12	1,008
[0,3]	0	6	1,6	0,27	1,027.

Вычтя члены послѣднихъ двухъ строкъ соотвѣтственно изъ членовъ первыхъ двухъ, получимъ результаты:

	f^{IV}	f'''	f''	f'	f
[0,2]	24	1,2	9,28	5,912	0,0064 (A)
	+	—	+	+	—
[0,3]	24	1,2	6,48	6,838	0,6311.
	+	+	+	+	+

Такъ какъ $f'''(x)$ имѣетъ дѣйствительный корень между 0,2 и 0,3; то нельзя продолжать приближеніе по *Ньютонову* способу. Положивъ $a=0,2$, и $b=0,3$, выраженія (31) будутъ 13,08 и 13,28; слѣдовательно $K=13,08$. Частное $\frac{K}{2f'(a)}=\frac{13,08}{11,824}$ имѣетъ единицею непосредственно-высшаго порядка: $\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$, а потому $\kappa'=-1$; разность i есть $\left(\frac{1}{10}\right)^{1}$ и $n=1$; слѣдовательно услов. $n\geqq 1-\kappa'$ не удовлетворено.

Но $\frac{K}{2[\varphi'(b)-\chi'(a)]}=\frac{13,08}{13,376}$ имѣетъ единицею непосредственно-высшаго порядка $\left(\frac{1}{10}\right)^{0}$; слѣд. $\kappa=0$, и условіе $n=1-\kappa$ удовлетворено. И такъ можно воспользоваться способомъ *Коши* для приближенія.

Частное $\frac{f(b)}{\varphi'(b)-\chi'(a)}$ вычисляемъ до $\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+\kappa}=0,01$ включительно, и увеличиваемъ послѣднюю цыфру единицей: получаемъ 0,10; слѣдовательно новый предѣлъ будетъ $0,3-0,10=0,20$, равный предъидущему низшему предѣлу, а высшій будетъ $0,2+0,01=0,21$; и такъ искомый корень заключается между 0,20 и 0,21. Вставивши 0,21 вмѣсто x, получаемъ

	φ^{IV}	φ'''	φ''	φ'	φ
[0,21]	**24**	**5,04**	**10,5292**	**6,137044**	**1,0624449**
	χ^{IV}	χ'''	χ''	χ'	χ
[0,21]	0	6	1,26	0,1323	1,009261
	f^{IV}	f'''	f''	f'	f
[0,21]	24	0,96	9,2692	6,004744	0,0531839
	+	—	+	+	+

Сравнивая этотъ рядъ съ рядомъ (A), видимъ, что $f'''(x)$ сохраняетъ свой знакъ для всѣхъ значеній x между 0,20 и 0,21, а потому можно продолжать приближеніе по Ньютонову способу. Но отъ того оно не будетъ быстрѣе. Въ самомъ дѣлѣ: частныя

$$\frac{f''(B)}{2f'(A)}=\frac{f''(0,2)}{2f'(0,2)}=\frac{9,28}{11,824} \text{ и } \frac{K}{\varphi'(b_1)-\chi'(a_1)}=\frac{11,8384}{12,034088}$$

имѣетъ единицею высшаго порядка $\left(\frac{1}{10}\right)^0$. Такъ, что по тому и по другому способу должно продолжать вычисленіе до $\left(\frac{1}{10}\right)^4$ включительно. Вычисливши такимъ образомъ предѣлъ

$$0,2-\frac{f(0,2)}{\varphi'(0,21)-\chi'(0,2)}=0,2+\frac{0,0064}{6,017044},$$

получаемъ 0,2011; вставивши его вмѣсто x, находимъ результаты:

$$\underbrace{[0,2011]}$$

$\varphi^{IV}=24$	$\chi^{IV}=0$	$f^{IV}=24$
$\varphi'''=4,8264$	$\chi'''=6$	$f'''=-1,1736$
$\varphi''=10,48529452$	$\chi''=1,2066$	$f''=9,27869452$
$\varphi'=6,043530909324$	$\chi'=0,12132363$	$f'=5,922207279324$
$\varphi=1,0082415414662641$	$\chi=1,00813232727331$	$f=0,0001088141352641$

Отсюда видимъ, что 0, 2011 есть высшій предѣлъ; слѣдовательно низшій есть 0, 2010, а результаты, ему соотвѣтствующіе, суть:

$$\underbrace{[0,2010]}$$

$\varphi^{IV}=24$	$\chi^{IV}=0$	$f^{IV}=24$
$\varphi'''=4,812$	$\chi'''=6$	$f'''=-1,176$
$\varphi''=10,484824$	$\chi''=1,206$	$f''=9,278812$
$\varphi'=6,042482404$	$\chi'=0,121203$	$f'=5,921279404$
$\varphi=1,007637240801$	$\chi=1,008120601$	$f=-0,000483360199.$

Теперь оба выраженія:

$$\frac{K}{2f'(a_2)}=\frac{11,69237704}{11,844414558648} \text{ и } \frac{f''(B)}{2f'(A)}$$

имѣютъ общую единицу высшаго порядка $\left(\frac{1}{10}\right)^0$, а потому дальнѣйшее приближеніе будетъ всегда давать одинакое число цыфръ, какъ по Ньютонову способу, такъ и по способу *Коши*.

Въ предъидущемъ приближеніи $\frac{K_2}{2f'(a_1)}$ имѣло единицею высшаго порядка $\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$, слѣд. $\kappa'=-1$, и условіе $n=1-\kappa'$ было удовлетворено; но $2n+\kappa'=3$, а потому приближеніе дало бы только 3 новыя десятичныя цыфры искомаго корня.

Нютоновъ способъ будетъ теперь имѣть ту выгоду предъ способомъ Коши, что при каждомъ приближеніи въ немъ правило § 137 употребляется только 2 раза; между тѣмъ, какъ въ способѣ Коши оно употребляется 4 раза, и сверхъ того послѣдній требуетъ еще $2m-1$ вычитаній для полученія результатовъ(35) и $\varphi'(b_n)-\chi'(a_n)$.

3. *Коши* предлагаетъ еще другой способъ для приближенія къ корнямъ, который такъ же, какъ и приближеніе втораго порядка, зависитъ отъ рѣшенія уравненія второй степени. Вотъ его теорія:

Пусть искомый корень будетъ наибольшій изъ всѣхъ положительныхъ корней меньшихъ b. Положимъ опять

$$\varphi(x)=\varphi(b)+(x-b).\varphi'[b+\theta(x-b)]$$

$$\chi(x)=\chi(b)+(x-b).\chi'[b+\theta'(x-b)]$$

и

$$\varphi(x)=\varphi(b)+(x-b)\varphi'(b)+\frac{(x-b)^2}{2}.\varphi''[b+\theta''(x-b)]$$

$$\chi(x)=\chi(b)+(x-b)\chi'(b)+\frac{(x-b)^2}{2}.\chi''[b+\theta'''(x-b)],$$

означая чрезъ θ, θ', θ'', θ''' количества >0 и <1. Если $\varphi'(x)$, $\chi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\chi''(x)$ остаются положительными и возрастаютъ съ возрастаніемъ x, начиная отъ θ до b, то

$$\varphi'(b)>\varphi'[b+\theta(x-b)]>0, \quad \chi'(b)>\chi'[b+\theta'(x-b)]>0$$

$$\varphi''(b)>\varphi''[b+\theta''(x-b)]>0, \quad \chi''(b)>\chi''[b+\theta'''(x-b)]>0,$$

а потому для $0<x<b$ будетъ

$$\varphi(x)>\varphi(b)+(x-b)\varphi'(b) \tag{36}$$

$$\varphi(x)<\varphi(b)+(x-b)\varphi'(b)+\frac{(x-b)^2}{2}\varphi''(b) \tag{37}$$

$$\chi(x)>\chi(b)+(x-b)\chi'(b) \tag{38}$$

$$\chi(x)<\chi(b)+(x-b)\chi'(b)+\frac{(x-b)^2}{2}\chi''(b). \tag{39}$$

Такъ какъ $f(x)=\varphi(x)-\chi(x)$ и $f'(x)=\varphi'(x)-\chi'(x)$, то, вычтя нерав. (39) изъ нерав. (36) и нерав. (38) изъ нерав. (37), находимъ

$$f(x)>f(b)+(x-b)f'(b)-\frac{(x-b)^2}{2}\chi''(b)$$

$$f(x)<f(b)+(x-b)f'(b)+\frac{(x-b)^2}{2}\varphi''(b) \tag{40}$$

Если результатъ $f(b)$ положительный, то по *тер.* 1 уравненіе

$$f(b)+(x-b).f'(x)-\frac{(x-b)^2}{2}\chi''(b)=o$$

должно имѣть дѣйствительные корни между искомымъ корнемъ и b, и наименьшій изъ нихъ съ выгодою будетъ служить новымъ приближеннымъ значеніемъ искомаго корня.

Если же $f(b)$ отрицательный; то, давши неравенству (40) видъ

$$-f(x)>-f(b)-(x-b).f'(b)-\frac{(x-b)^2}{2}\varphi''(b),$$

условіе теоремы 1, что меньшая изъ двухъ функцій при $x=b$ обращается въ положительное количество будетъ удовлетворено. А какъ искомый корень удовлетворяетъ уравненію $-f(x)=o$, то по теор. 1 заключаемъ, что уравненіе

$$-f(b)-(x-b)f'(b)-\frac{(x-b)^2}{2}\varphi''(b)=o$$

или

$$f(b)+(x-b)f'(b)+\frac{(x-b)^2}{2}\varphi''(b)=o$$

должно имѣть дѣйствительные корни между искомымъ корнемъ и b, и наименьшій изъ нихъ можно съ выгодою взять за новое приближенное значеніе искомаго корня.

И такъ, зная непосредственновысшій предѣлъ одного изъ дѣйствительныхъ корней даннаго уравненія, можно по изложенному способу вычислить рядъ новыхъ высшихъ предѣловъ b_1, b_2,..., которые болѣе и болѣе будутъ приближаться къ корню.

ПОГРѢШНОСТИ.

Стран.	Строк. Сверх.	Сниз.	Напечатано:	Вмѣсто:
3	2		сложная алгебраическая функція называется *ирраціональною*, когда содержитъ ирраціональные корни,	такая функція называется *радикальною*, когда содержитъ пятое основное дѣйствіе — извлеченіе,
4	2		(1)	(3)
ibid.	—	2	p_3	p''_3
12	7	—	$+\frac{a_1}{a_0}a$	$1+\frac{a_1}{a_0}a$
13	—	12	количествамъ x, y, z, . . .	количествамъ X, Y, Z, . .
14	6 и 7		F	T
15	—	4	пред. $\left(\frac{\psi\ (x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x}\right)$	пред. $\left(\frac{\phi(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x}\right)$
16	—	1	$F'=\psi(x).\ \xi'(x)+\psi(x).\ \psi'(x)$	$F'(x)=\psi(x).\ \xi'(x)+\xi(x).\ \psi'(x)$
17	6		$=z.\ F'(x)$	$+z.\ F(x)$
18	—	3	$a_0m(m-1)\ldots 4.3.x$ $+a_1(m-1)(m-2)\ldots\ 3.2$	$a_0m(m-1)\ldots 4.3.x^2+$ $a_1(m-1)\ldots 3.2.x+a_2(m-2)\ldots 3.2$
21	—	6	$(m-2)$	$(m-1)$
22	8		$(m-1)$	$(m-2)$
ibid.	9		$1.2\ (m-1)$	$1.2\ldots(m-1)$
23	1		Δy	Δx
28	9		$f^{m-1}(x)$	$f^{m-2}(x)$
ibid.	13		a_0x^{m-4}	a_2x^{m-4}
34	—	3	§ 22. Въ	Въ
37	15		$(r-r'^2)< R^2< (r-r'^2)^2$	$(r-r')^2<R^2<(r+r')^2$
39	8		$z'=\sqrt{\pm\beta}$	$z'=\sqrt[m]{\pm\beta}$
ibid.	—	14	ϱ	r
40	10		$R>r^m$	$R>r^m-\Re$ (см. § 23, 5)
ibid.	—	6	f_m	f_2
43	17		$a_1(t+u\sqrt{-1})^m$	$a_1(t+u\sqrt{-1})^{m-1}$
45	1		$(-1)^m\frac{[f(c)]^{m-1}}{[f'(c)]}\varepsilon^m$	$(-1)^m.\frac{[f(c)]^{m-1}}{[f'(c)]^m}.\ \varepsilon^m$
46	—	4	b_0x^{r-1}	b_1x^{r-1}
ibid.	—	ibid.	$b_{r-1}x+b_0$	$b_{r-1}x+b_r$
48	15		$x-(t_{m-1}+u_{m-1}\sqrt{-1})$	$x-(t_{m-2}+u_{m-2}\sqrt{-1})$
ibid.	16		$f_{m-1}(x)$	$f_{m-2}(x)$
49	—	4	$(t+u)^{m-1}$	$(t+u.i)^{m-1}$
50	10		$f(t+u)$	$f(t+u.i)$
ibid.	13		$f(t-u)$	$f(t+u.i)$
52	6		$+a_3+x^{m-3}$	$+a_3x^{m-3}$
54	11		,	+ и проч.,
ibid.	—	2	$r_1{}^{m-1}+r_2x^{m-2}$	$r_1x^{m-1}+r_2x^{m-2}$
56	11		x^3	x_1^3
ibid.	—	4	$a_1x_1^2+a_1x_1$	$a_1x_1^2+a_2x_1$
57	—	3	$a_1x^{m-2}+a_1x_1{}^{m-3}$	$a_1x_1^{m-2}+a_2x_1^{m-3}$
58	5		$(x_2{}^{m-1}$	$(x_1{}^{m-1}$
ibid.	6		a_1x^{m-2}	$a_1x_1{}^{m-2}$
ibid.	—	15	$x_2)+a_1$	$x_1)+a_2$
ibid.	—	13	R_3	R_1

Стран.	*Строк.* Сверх.	Сниз.	Напечатано:	Вмѣсто:
59	9	1	§ 37	§ 34
ibid.	10		$2x_1^2$	$2x_1$
ibid.	13		(x_1+x_2)	$-(x_1+x_2)$
ibid.	—	10	$-(3x_1^3+2x_1)$	$-3(x_1^3+2x_1)$
60	3		$+a_1x_1^2+a_1x_1$	$a_1x_1^2+a_2x_1$
ibid.	4		$a_1x_1^3+a_1x_1^2$	$a_1x_1^3+a_2x_1^2$
ibid.	10		$3x_1^3+3(x_1+a_1)x_2^2+$ $4(x_1^2+a_1x_1+a_2)x_2$	$3x_2^3+3(x_1+a_1)x_2^2+$ $3(x_1+a_1x_1+a_2)x_2$
ibid.	11		R_1	R_2
61	—	4	x_1	x_3
62	8 и 10		$a_1^2-3a_1a_3$	$a_2^2-3a_1a_3$
ibid.	14		x_2	x_1
63	3		x^{m-3}	$a_2x_1^{m-3}$
ibid.	—	17	Вмѣсто всей строки должно взять: $U=V[mx_1^{m-1}+(m-1)a_1x_1^{m-2}+\ldots a_{m-1}]^2=V[f'(x_1)]^2$	
64	—	5	$x_2^p+x_2^p$	$x_1^p+x_2^p$
65	11		$a_4x_1^{m-4}$	$a_3x_1^{m-4}$
ibid.	14		$a_{m-3}x_1$	$a_{m-3}x_1^2$
ibid.	—	6	$+_3^{m-1}$	$+x_3^{m-1}$
67	15		$S_4=a_1^4-4a_1^3a_2+4a_1a_3-4a_4$	$S_4=a_1^4-4a_1^2a_2+4a_1a_3+2a_2^2-4a_4$
68	2		a_3S_{m-4}	a_2S_{m-4}
ibid.	5		$Sa_{m-1}S_{-2}$	$a_{m-1}S_{-2}$
70	12		$-a_4S_1-5a_5$	$-a_4S_1$
ibid.	—	9	x^3-2x+5	x^3-2x-5
ibid	—	5	$S_3=-3a_3=-15$	$S_3=-3a_3=+15$
ibid.	—	5	$S_5=-a_2S-a_3S_2=-50$	$S_5=-a_2S_3-a_3S_2=+50$
ibid.	—	ibid.	$S_{-3}=-\frac{a_2}{a_3}S_{-2}=-\frac{8}{25}$	$S_{-3}=-\frac{a_2}{a_3}S_{-2}-\frac{3a_0}{a_3}=\frac{63}{125}$
71	—	5	$+_2^p$	$+x_2^p$
75	15		$\pm(x_1-x_2), \pm(x_1-x_2), \pm(x_1-x_3)$	$\pm(x_1-x_2), \pm(x_1-x_3), \pm(x_1-x_4)$
87	7		$y.$	y
88	—	2	$(b-t\times\ldots\times k-p)$	$(b-t)\times\ldots\times(k-p)$
91	17		коеффиціентовъ	соотвѣтственныхъ корней
ibid.	—	1	18-е	XI-е
99	—	5	$-2A^2CQS$	$-2ACQS$
ibid.	—	3	C^2BCR	C^2-BCR
ibid.	—	ibid.	CR^2BRS	CR^2-BRS
ibid.	—	14	$ABCPS$	$3ABCPS$
104	9		не удовлетворяющія	не удовлетворяющіе
105	3		$-y^5$	$+y^5$
ibid.	4		$-(2y^3-3y^2)x^2-y^2x$	$-(2y^3+3y^2)x^2+y^2x$
106.	13		$Y_2=(y^2-5y+3)$	$Y_2=(y^2-5y+3)^2$
ibid.	—	8	-10	-16
109	12		$a''+b'-1$	$a''x^{n'}+b''x^{n'-1}$
115	—	10	$+y=0$	$+y+1=0$
116	14		μ и ν	λ и μ
118	5		S^2	S_2
ibid.	—	2	$\varphi(a^{n\mid n-1}z)$	$\varphi(a_n^{n\mid n-1}z)$
120	—	11	$z=\sqrt[3]{\theta}$	$z=\sqrt[3]{\theta}$
122	16		$\sqrt{1+\sqrt[3]{x})}$	$\sqrt{(1+\sqrt[3]{x})}$
123	3		$\varphi(z)$	$''z)=o$

Стран.	Строк. Сверх.	Строк. Сниз.	Напечатано:	Вмѣсто:
123	14		гдѣ $\kappa<n$;	гдѣ $\kappa<$или$>n$;
ibid.	15		$\pm z^{\kappa}$	$+z^{\kappa}$
ibid.	16		$\mp z^{\kappa}$	$-z^{\kappa}$
ibid.	—	11	$A^{n}\pm\theta^{\kappa}$	$A^{n}\mp\theta^{\kappa}$
ibid.	—	7	$\sqrt{P}$	$\sqrt{Q}$
125	3		$f(x)=0$	$\phi(x)=0$
128	10		$t^{2}-2t$	t^{2}
131	—	1	$x_{m}^{2}x^{2-p^{2}}$	$x_{m}^{2}x^{2p-2}$
135	—	9	Формулы (7) (8)	Формулы (20), (22), (7) и (8)
136	15		которыхъ мы означили	которые означимъ
139	—	11	$\dfrac{f^{m-3}(-h)}{1.2\ldots(m-2)}$	$\dfrac{f^{m-3}(-h)}{1.2\ldots(m-3)}$
141	—	7	$\dfrac{a^{m-1}}{a_{0}}a_{0}{}^{m-1}y$	$\dfrac{a_{m-1}}{a_{0}}a_{0}^{m-1}y$
142	5		a_{m}	$a_{m}(py-\kappa)^{m}$
ibid.	—	9	(24)	(21)
ibid.	—	2	$\left(\frac{1}{x}\right)^{2}$	$\left(\frac{1}{x_{1}}\right)^{2}$
143	5		( )	(6)
ibid.	10		$\dfrac{my-a_{1}}{ma_{0}}$	$\dfrac{ma_{0}y-a_{1}}{ma_{0}}$
ibid.	12		$\dfrac{a^{m-1}}{a_{0}}$	$\dfrac{a_{m-1}}{a_{0}}$
ibid.	—	6	y^{m-1}	y^{m-2}
144	4		$x=\dfrac{z-a_{0}}{ma_{0}}$	$x=\dfrac{z-a_{1}}{ma_{0}}$
147	—	1	$(x-x_{2})^{r}$	$(x-x_{2})^{q}$
148	2		$(x-x_{1})^{t}$	$(x-x_{n})^{t}$
ibid.	9		$(x-x_{1})^{r}$	$(x-x_{3})^{r}$
ibid.	11		$q(x-x_{1})^{q-1}_{;}r(x-x_{1})^{r-1}$	$q(x-x_{2})^{q-1},\ r(x-x_{3})^{r-1}$
ibid.	14		$(x-x_{1})^{r}$	$(x-x_{3})^{r}$
ibid.	—	13	$(x-x_{1})^{q-1}$	$(x-x_{2})^{q-1}\ldots$
ibid.	—	5	D_{1}	D
149	2		частное;	частное
149 } 150 }	……..		$D_{\kappa-1}, D_{\kappa}, D_{\kappa+1}$	$D_{\kappa-3}, D_{\kappa-2}\, D_{\kappa-1}$
150 пропущено послѣ 3-й строки:				$\dfrac{D}{D_{1}}=X_{\kappa}X_{\kappa-1}\ldots X_{4}X_{3}X_{2}$
151	6		$+2x^{10}+10x^{9}-36x^{8}+16x^{7}$ $+6x^{6}-32x^{5}+29x^{4}$	$-7x^{11}+3x^{10}+13x^{9}-30x^{8}$ $+24x^{7}+9x^{6}-35x^{5}+27x^{4}$
ibid.	9		$+20x^{9}+90x^{8}-288x^{7}+112x^{6}$ $+36x^{5}-150x^{4}+116x^{3}$	$-77x^{10}+30x^{9}+117x^{8}-240x^{7}$ $+168x^{6}+54x^{5}-175x^{4}+108x^{3}$
ibid.	12		$-2x$	$+2x$
ibid.	14		-2	$+2$
ibid.	16		D	D_{1}
155	13 и 14		$f'(x)=x^{12}+16x^{11}+36x^{10}$ $+86x^{9}+121x^{8}+132x^{7}+48x^{6}$ $-144x^{5}-3x^{4}-72x^{3}+324x^{2}$ $+81x+243$	$f(x)=x^{12}+8x^{11}+36x^{10}$ $+101x^{9}+193x^{8}+128x^{7}+120x^{6}$ $-114x^{5}-213x^{4}-56x^{3}+324x^{2}$ $+405x+243$

Стран.	*Строк.* Сверх.	Сниз.	Напечатано:	Вмѣсто:
153	16 и 17		$176x^{10}+360x^9+801x^8+968x^7$ $+924x^6+288x^5-720x^4-12x^3$ $-146x^2+648x+81$	$88x^{10}+360x^9+909x^8+1544x^7$ $+896x^6+720x^5-570x^4-852x^3$ $-108x^2+648x+405$
ibid.	19		$58x^3+51x^2+36x$	$44x^3+63x^2+54x$
ibid.	—	8	$+6x$	$+12x$
ibid.	—	1	$+3x^3$	$-3x^3$
154	—	13	n	$\varkappa$
ibid.	—	1	члена съ x^2.	члена съ x^2, чтобы это уравненіе имѣло равные корни.
156	3		$u\ \Psi(t,\ u)$	и $\psi(t,u)$
ibid.	5		по t и u	по t
160	5		произведенія.	произведеніе
162	—	7	$-a_1 l^m$	$-a_1 l^{m-1}$
164	2		$f^n(l)$	$f^\varkappa(l)$
ibid.	11		$(m-1)(m-1)$	$(m-1)(m-2)$
166	7		$-4x^2-700$	$-4x^3-700x$
ibid.	8		7	5
ibid.	—	6	$a_r l^{m-r+1}$	$a_{r-1} l^{m-r+1}$
168	—	15	$1-\sqrt[2]{\frac{25}{2}}$	$1+\sqrt[2]{\frac{20}{5}}$
172	—	14	$\frac{1}{a_m}$	$\frac{1}{a_\mu}$
173	2		$\frac{2}{3}$	$\frac{40}{61}$
ibid.	ibid.		$-\frac{40}{61}$	$-\frac{2}{3}$
179	13		$\frac{\varepsilon^{m-3}-e^{m-2}}{a}$	$\frac{\varepsilon_{m-3}-e_{m-2}}{a}$
ibid.	—	8	$1+\sqrt{\frac{9}{4}}$	$1+\sqrt[5]{\frac{9}{4}}$
180	—	11	$\frac{a}{\beta^{m-2}}$	$\frac{a^{m-2}}{\beta^{m-2}}$
182	—	10	$+2$	$+3$
183	—	5	$n\Delta$ и $(n+1)\Delta$	$p\Delta$ и $(p+1)\Delta$
186	—	14	-16	$+16$
190	—	4	больше	единицею больше
193	—	13	$R_{n-1}=0$	$R_{n-2}=0$
195	—	10	$[-\infty]$	$[+\infty]$
198	9		$+1$	-1
ibid.	10		-47	-563
200	5		$[-10]$ $+\ +$	$[-10]$ $+\ -$
205	—	3	$f^{n-1}(a+\theta_i h)$	$f^{n+1}(a+\theta_i h)$
206	—	15 и 16	f^{n+1} и f^{n-i+1}	f^n и f^{n-i}
207	7 и 8		f^{n-i+1} и f^{n-i+1}	f^n и f^{n-i}
ibid.	—	19	$f^{j-1}(x)=0$	$f^{j-2}(a)=0$
211	4		$+\ +\ +\ +\ +\ -$	$+\ +\ +\ +\ +\ +$
212	—	4	$-12x$	$-24x$
216	—	15	$f(x)$ съ	$f(x)$ съ возрастаніемъ x отъ a до γ уменьшается, а съ

Стран.	Строк. Сверх.	Строк. Снизу	Напечатано:	Вместо:
216	—	6	для $x > \gamma$ и $< b$.	для $x < \gamma$ и $> a$, потомъ дѣлается отрицательною для $x > \gamma$ и $< b$
222	—	10	(2)	(1)
232	6		$-2x$	$-4x$
ibid.	7		$3x-2$	$6x-4$
ibid.	8		$+3$	$+6$
ibid.	—	2	f^{v}	f^{iv}
233	9		f''	$f^{v}(x)$
ibid.	—	7	$\frac{f(-0,5)}{-f'(-0,5)}+\frac{f(0)}{f(0)}$	$\frac{f'''(-0.5)}{-f^{iv}(-0,5)}+\frac{f'''(0)}{f^{iv}(0)}$
234	3		$f(x)=20x^3+12x^2+6x+4$	$f''(x)=20x^3+12x^2+6x-4$
239	15		$f'(b)$	$f'(x)$
242	7		γ_2, γ_3	γ_1, γ_2
245	—	4	$[+1]$	$[-1]$
246	11		$+6x^2$	$-6x^2$
250	10		$\frac{P_{i-1}}{Q_{-1}}$	$\frac{P_i}{Q_i}$
251	9		ct^{n-2}	ct^{m-2}
ibid.	—	9	$P_iQ_{i-1}P$	$P_i Q_{i-1}$
ibid.	—	ibid.	$\frac{(-1)^i}{Q_i}$	$\frac{(-1)^i}{Q_i^2}$
252	8		$P_{i+1}Q_{i-1}-P_{i-1}Q$	$P_iQ_{i-1}-P_{i-1}Q$
ibid.	10		$\frac{1}{\psi Q_i^2}$	$\frac{(-1)^i}{\psi Q_i^2}$
ibid.	— отъ 8 до 13		Δ	$\frac{\Delta}{Q_i^2}$
254	—	1	Когда $\kappa > t$	Когда $\kappa < t$
256	—	2	$C=D-\frac{1}{E+}$ и пр.	$t=D-\frac{1}{E+}$ и пр.
ibid.	—	1	$C-1+\frac{1}{D}$	$C-1+\frac{1}{1}$
260	8		Q_{i+1} и Q_{i+1}	Q_{i+1} и Q'_{i+1}
266	9		$[b]\ldots\ldots - - +$	$[b]\ldots\ldots - - -$
ibid.	12		$[b]\ldots\ldots + - +$	$[b]\ldots\ldots + - -$
267	6		$<\frac{-f(b)}{-f(b)}$	$<\frac{-f(b)}{-f'(b-\Phi h)}$
268	6		$a>a+\theta^k$	$a<a+\theta^k$
ibid.	7		$a -$	
ibid.	9		2	k
270	—	16	$i'=$	$i=-$
271	2 и 6		$\frac{f'(a+\Phi'i)}{f(a)}$	$-\frac{f'(a+\Phi'i)}{f'(a)}$
ibid.	—	5 и 8	$f(B)$	$f(A)$
272	После выраженій (14) пропущено:			которыхъ соотвѣтственныя разности будутъ:
277	12		$f''(b)\frac{h^2}{2}$	$f'''(b)\frac{h^2}{2}$

Стран.	*Строк.* Свер.	Сниз.	Напечатано:	Вмѣсто:
288.	—	11	$n-8$	$n=8$
ibid.	—	ibid.	f''	f'
296	8	—	$\theta\sigma z\tau$	$\theta^{\sigma} z^{\tau}$
297	—	1	будетъ:	будутъ:
302	—	1	ϕm_1	ϕ_m
ibid.	—	ibid.	χm_2	$\chi_{m'}$
303	2	—	*то же*	то же
311	7	—	два раза	три раза
ibid.	въ третьемъ		кружкѣ . . h l	e h
312	—	3	$v=v\left(\begin{matrix}A_r\\A_s\end{matrix}\right)$	$v=v\left(\frac{A_r}{A_s}\right)^0$
313	10	—	A	A_s
318	—	6	вмѣсто всей формулы должно взять слѣдующую	

$$\frac{P_0(A_{\mu\ 1}+A_{\mu-2}y_1+\ldots\ y_1^{\mu-1})+P_1(A_{\mu-2}+\ldots\ y_1^{\mu-2})+P_{\mu-2}(A_1+y_1)+P_{\mu-1}}{F(y_1)}$$

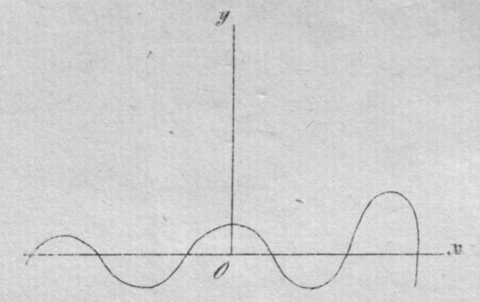
321	2	—	$A_1 y_1{}^{\mu-1}+y_1^{\mu}$	$A_1 y_1^{\mu-2}+y_1^{\mu-1}$
ibid	ibid.	—	$y_1^{\mu-1}$	$y_1^{\mu-2}$
ibid.	16	—	y_1	y_1^{P}
335	12	—	$4\theta^5$	$5\theta^4$

Погрѣшности въ прибавленіяхъ

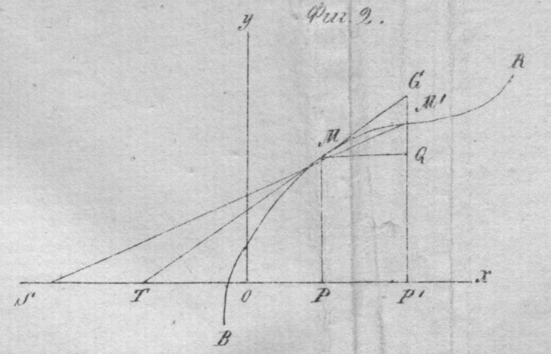
5	15	—	nb	nb'
ibid.	—	10	разстоянія $a'b'$	разстоянія $a'b'$ или равно ему.
8	—	4	$[f(a)]^2$	$[f'(a)]^2$
11	—	16	$\frac{fi}{f}$	$\frac{f^{i+1}}{f'}$
12	—	3	$f(b)$	$f''(b)$
13	10	—	$f(a)$	$f'(a)$
16	—	3	— — — —	— — + —
ibid.	—	2	— — + —	— — — —
24	7	—	$\frac{-\Phi-2k\pi}{n}$	$\frac{-\Phi+2k\pi}{n}$
25	—	8	2^n	2^n

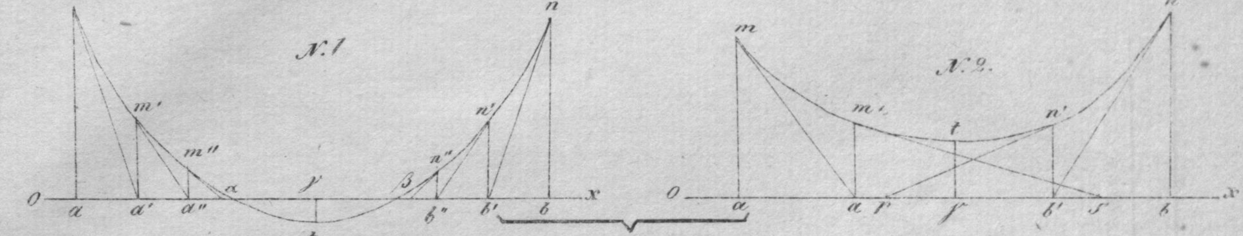
Отъ страницы 2 до страницы 110 слово *ирраціональный* должно замѣнить словомъ *радикальный.*

Фиг. 1.



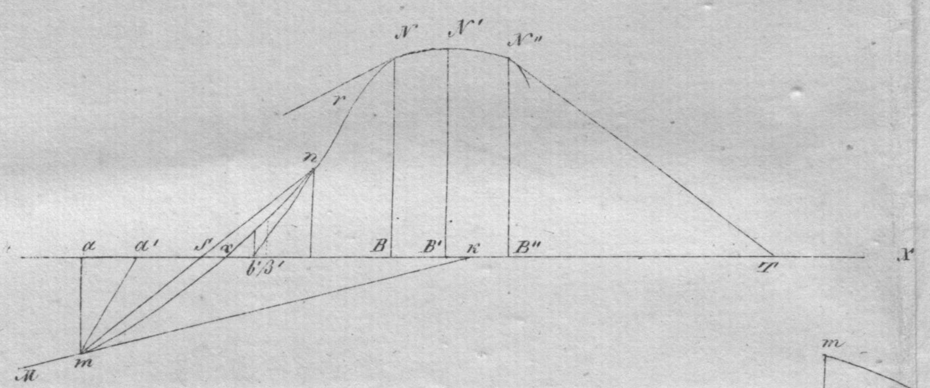
Фиг. 2.



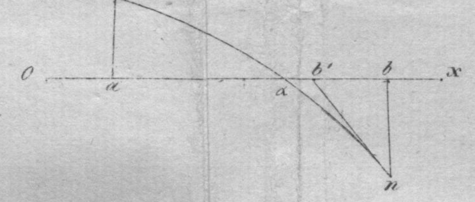


Фиг. 3.

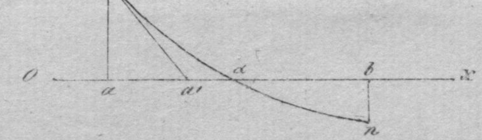
Фиг. 4.



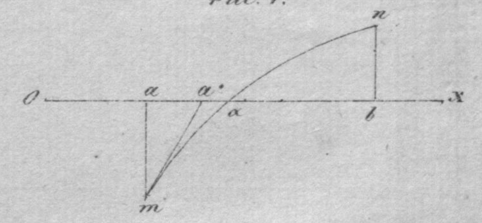
Фиг. 5.



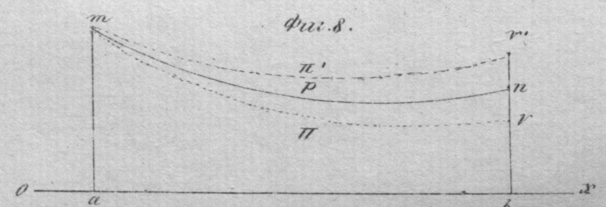
Фиг. 6.



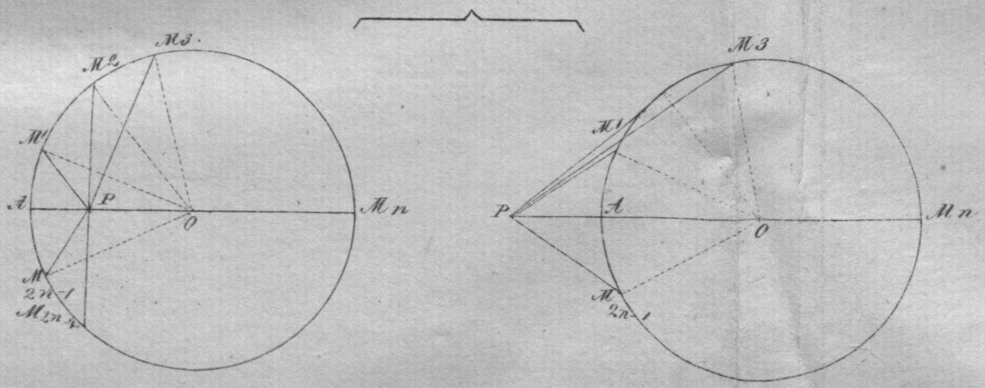
Фиг. 7.



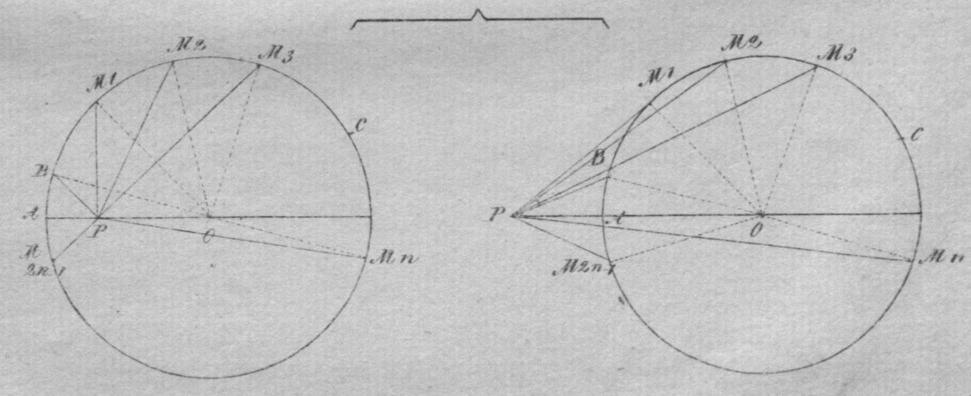
Фиг. 8.



Фиг. 9.



Фиг. 10.



Лит. Петера въ Москвѣ.