*H. Weber* и *I. Wellstein*

ПРОФЕССОРЪ УНИВЕРСИТЕТА ВЪ СТРАСБУРГѢ. ПРОФЕССОРЪ УНИВЕРСИТЕТА ВЪ ГИССЕНѢ.

# ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

РУКОВОДСТВО

для преподающихъ и изучающихъ элементарную математику.

ВЪ ТРЕХЪ ТОМАХЪ.

ПЕРЕВОДЪ СЪ НѢМЕЦКАГО ПОДЪ РЕДАКЦІЕЙ И СЪ ПРИМѢЧАНІЯМИ

В. КАГАНА

*Привать-доцента Императорскаго Новороссійскаго Университета.*

ТОМЪ II.

## ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРІИ.

КНИГА I.

## ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРІИ.

Второе изданіе.

*Цѣна 3 рубля.*

MATHESIS

ОДЕССА 1913.

ОДЕССА
Типографія подъ фирмою „Вѣстникъ Винодѣлія".
Большая Арнаутская, домъ № 38.
1913

# ЭНЦИКЛОПЕДІЯ
# ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРІИ.

СОСТАВИЛИ

*Г. Веберъ, І. Вельштейнъ и В. Якобсталь.*

КНИГА I.

## ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРІИ.

СОСТАВИЛЪ

*І. Вельштейнъ.*

# Предисловіе къ первому русскому изданію

Въ предисловіи автора къ первому изданію съ достаточной полнотой изложены планъ и содержаніе второго тома настоящаго сочиненія. Мы ограничимся, съ своей стороны, только слѣдующимъ замѣчаніемъ. Вопросы, относящіеся къ основаніямъ геометріи, въ настоящее время еще усиленно разрабатываются; но не только относительно тѣхъ проблемъ, которыя лежатъ на рубежѣ между математикой и философіей, еще не достигнуто соглашенія, не выработано болѣе или менѣе общей точки зрѣнія, но и возникающія здѣсь задачи чисто математическаго характера вызываютъ еще не мало споровъ. Съ этой, именно, точки зрѣнія мы можемъ рекомендовать читателю отнестись къ излагаемымъ въ настоящей книгѣ разсужденіямъ. Во многихъ своихъ частяхъ это — не установившіяся прочно истины, это — взгляды, которые можно раздѣлять въ большей или меньшей степени. Съ нѣкоторыми взглядами автора мы, напримѣръ, рѣшительно не можемъ согласиться; такъ мы не можемъ усвоить точки зрѣнія автора на „натуральную геометрію". Но авторъ тонко изучилъ обширную литературу, относящуюся къ основаніямъ геометріи. Въ тѣхъ случаяхъ, когда по тому или иному вопросу мнѣнія особенно расходятся, онъ съ достаточной объективностью излагаетъ различныя точки зрѣнія. Во всякомъ случаѣ это наиболѣе полное изложеніе предмета въ элементарной литературѣ. Если, однако, читатель не всегда выноситъ полное удовлетвореніе, то это должно быть отнесено, главнымъ образомъ, къ трудности самого предмета.

Какъ и въ первомъ томѣ, мы старались облегчить читателю чтеніе болѣе трудныхъ мѣстъ сочиненія, выясняя таковыя въ подстрочныхъ примѣчаніяхъ. Два вопроса, именно, теорія безконечно удаленныхъ элементовъ и теорія площадей, требовали, на нашъ взглядъ, болѣе подробныхъ объясненій, вслѣдствіе чего мы и посвятили имъ особыя дополненія въ концѣ книги.

Наибольшее затрудненіе представилъ для насъ переводъ философскихъ частей книги, такъ какъ здѣсь серьезныя сомнѣнія возникали также относительно терминологіи. Сомнѣнія эти усиливались еще тѣмъ обстоятельствомъ, что авторъ, на нашъ взглядъ, не всегда твердо выдерживаетъ значеніе употребляемыхъ имъ философскихъ терминовъ. Такъ, напримѣръ, терминъ „Anschaung" авторъ употребляетъ, на нашъ взглядъ, частью въ томъ особомъ значеніи этого слова, которое передается на русскомъ языкѣ обыкновенно словомъ „воззрѣніе", частью въ смыслѣ „интуиція". Сохраняя въ текстѣ вездѣ первый изъ этихъ терминовъ, мы не вполнѣ увѣрены, что поступали правильно. Во всякомъ случаѣ термины выбирались съ большою осторожностью, и мы надѣемся, что философы простятъ математику допущенные имъ промахи.

Въ виду того, что второй томъ значительно больше перваго, мы нашли цѣлесообразнымъ выпустить отдѣльно первую книгу II-го тома.

***В. Каганъ.***

# Предисловіе автора къ первому изданію

Второй томъ „Энциклопедіи элементарной математики", появленіе котораго, къ сожалѣнію, нѣкоторыми внѣшними обстоятельствами было замедлено, посвященъ исключительно геометріи. При большомъ объемѣ элементарной математики съ ея безчисленными теоремами и теоремками объ окружностяхъ, тетраэдрахъ и сферахъ, которыя представляютъ собой лишь различныя видоизмѣненія и частные случаи немногихъ общихъ идей проективной геометріи, мы вынуждены были ограничиться самымъ необходимымъ матеріаломъ, тѣмъ болѣе, что намъ необходимо было, отчасти въ интересахъ третьяго тома, удѣлить мѣсто также коническимъ сѣченіямъ, сферической тригонометріи и основаніямъ аналитической геометріи.

Собрать весь цѣнный матеріалъ въ этой научной области и, по возможности, снабдить его литературными указаніями, какъ это дѣлается въ выходящей въ настоящее время „Большой энциклопедіи математическихъ наукъ", не соотвѣтствуетъ плану настоящаго сочиненія. Напротивъ, мы имѣли въ виду устранить весь тотъ матеріалъ, который въ настоящее время остается изолированнымъ, а потому неплодотворнымъ, и сохранить лишь то, что оказывается полезнымъ въ примѣненіи къ механикѣ и къ физикѣ и сохраняетъ свое значеніе также въ высшей математикѣ.

Въ этой болѣе тѣсной области мы старались достигнуть возможнаго углубленія и оживленія матеріала, — углубленія путемъ подробнаго критическаго изслѣдованія основъ этой науки съ точки зрѣнія логики и теоріи познанія, тщательной разработкой всего того, что касается знаковъ величины, понятій „направо" и „налѣво", направленія и т. п.; оживленія — путемъ приложеній, которыя найдутъ себѣ мѣсто въ третьемъ томѣ. Первый томъ раздѣленъ на три части. Не безъ страха публикую я первую книгу, посвященную основаніямъ науки, т. е. той промежуточной области, которая требуетъ не только математическихъ, но и философскихъ разсужденій. При общемъ низкомъ уровнѣ нашего философскаго образованія, въ чемъ мы можемъ спокойно сознаться, и при большомъ отвращеніи широкихъ круговъ ко всѣмъ вопросамъ, относящимся къ этой области, необходимо было прежде всего показать, что мы здѣсь имѣемъ дѣло съ серьезными вопросами, которые могутъ интересовать также математика. Если и не всѣ разсужденія автора встрѣтятъ сочувствіе, то онъ во всякомъ случаѣ будетъ удовлетворенъ и будетъ считать свою цѣль достигнутой, если ему удастся вызвать интересъ къ самой постановкѣ вопроса. Авторъ знаетъ по своему собственному опыту, въ какой мѣрѣ чувствуетъ себя не на мѣстѣ молодой преподаватель, только что сошедшій съ университетской скамьи и занимавшійся наиболѣе глубокими и новѣйшими вопросами высшей математики, когда ему приходится излагать начала геометріи въ младшихъ классахъ. Но лишь тотъ, кто старался проникнуть въ гносеологическія основы геометріи, можетъ вполнѣ оцѣнить, до какой степени это дѣйствительно трудная и отвѣтственная задача, требующая не только основательнаго научнаго образованія, но и значительнаго педагогическаго искусства. Ничто не возвышаетъ внутренне учителя въ такой мѣрѣ, ничто не подымаетъ въ немъ въ такой мѣрѣ сознанія величія его призванія, какъ ясное пониманіе, что обоснованіе геометріи представляетъ собой задачу, почти непреодолимую по своей трудности, — задачу, съ разрѣшеніемъ которой ему придется бороться всю свою жизнь, постоянно примиряя требованія строгой логики съ развивающейся только способностью учениковъ къ воспріятію, научную строгость съ наивнымъ воззрѣніемъ, развитіе и укрѣпленіе которой, по мнѣнію преподавателей, имѣющихъ большой научный и педагогическій опытъ, составляетъ первую цѣль обученія геометріи. Мы считаемъ здѣсь же нужнымъ указать, что строго формальную, логическую постановку современной геометріи въ преподаваніи мы совершенно отвергаемъ.

Такъ какъ въ первой книгѣ поставлены вопросы, относящіеся къ теоріи познанія, и она можетъ, такимъ образомъ, найти читателей, быть можетъ, менѣе интересующихся остальнымъ матеріаломъ этого тома, то мы считали необходимымъ дать здѣсь же выводы всѣхъ предложеній, необходимыхъ для пониманія, кромѣ наиболѣе элементарныхъ, въ самомъ узкомъ смыслѣ этого слова. Для выясненія сущности проективнаго взгляда на пространство было необходимо вплести въ этотъ отдѣлъ также и проективную геометрію. Къ этому примыкаетъ планиметрія, въ которой особенно подробно разобрана теорія связки окружностей; какъ мы указываемъ въ текстѣ, слѣдуя Цейтену (Zeuthen, Poncelet), эта теорія представляетъ удобный путь къ теоріи коническихъ сѣченій.

Вторая книга содержитъ плоскую и сферическую тригонометрію, при изложеніи которой мы, слѣдуя Студи (Study), съ одной стороны, выдвигаемъ на первый планъ понятіе о группѣ, а, съ другой стороны, принимаемъ во вниманіе требованія практики.

Въ третьей книгѣ, посвященной аналитической геометріи и стереометріи, развивается аналитическая теорія коническихъ сѣченій, при чемъ излагается также ученіе о кривизнѣ, въ особенности въ цѣляхъ теоріи проектированія, которая будетъ изложена въ третьемъ томѣ. Цѣльное изложеніе теоріи коническихъ сѣченій вышло бы за предѣлы нашей книги, но зато мы старались эту изящнѣйшую и высшую часть элементарной геометріи освѣтить съ возможно болѣе разнообразныхъ точекъ зрѣнія: чисто синтетически, съ точки зрѣнія геометріи круговъ, а въ третьемъ томѣ также съ точки зрѣнія начертательной геометріи и теоріи перспективы. Въ небольшомъ параграфѣ кратко разсмотрѣны также коническія сѣченія на сферѣ. Глава, посвященная стереометріи, содержитъ, кромѣ общихъ основъ геометріи пространства, еще ученіе объ объемѣ.

Разработку сферической тригонометріи, а также аналитическую геометрію на сферѣ взялъ на себя В. Якобсталь (W. Jacobsthal). Остальной матеріалъ былъ распредѣленъ между двумя издателями сочиненія, какъ указано въ сочиненіи.

*Страсбургъ, августъ 1905 г.*

***І. Вельштейнъ.***

## Предисловіе автора ко второму изданію

Отъ обѣщанной въ предыдущемъ предисловіи главы въ третьемъ томѣ, посвященной перспективѣ, мы вынуждены были отказатся за недостаткомъ мѣста. Зато ученіе о кривизнѣ коническихъ сѣченій разработано болѣе подробно.

Настоящее изданіе отличается отъ перваго только рядомъ небольшихъ измѣненій.

*Страсбургъ, октябрь 1907 г.*

***І. Вельштейнъ.***

# ОГЛАВЛЕНІЕ

Глава III.

## Обоснованіе проективной геометріи.



Глава IV.

## Планиметрія.



## Дополненія.

## Книга I

# ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРІИ

# Введенiе.

1. Если математика гордо возвысилась на степень наиболѣе совершеннаго образца чистой науки, то она обязана этимъ не столько господствующему въ ней дедуктивному методу, сколько тому обстоятельству, что она въ состоянiи указать предпосылки, на которыхъ она покоится, что она имѣетъ возможность установить „основныя понятiя“ и „основныя положенiя“, служащiя фундаментомъ всего построенiя, и ясно освѣтить значенiе каждаго изъ нихъ путемъ построенiя системъ, въ которыхъ то или иное положенiе не оправдывается. Основы ариѳметики (см. т. I, кн. I) мы построили, опираясь, главнымъ образомъ, на одно свойство нашего духа, на его способность къ ассоцiацiи, или сопряженiю. Основы геометрiи, которыя мы намѣрены подвергнуть здѣсь тщательному анализу, насколько это осуществимо элементарными средствами, имѣютъ гораздо болѣе сложный характеръ. Мы встрѣчаемъ здѣсь понятiя „точка“, „прямая“, „плоскость“, „параллельно“, „между“ и т. д.; мы знаемъ, скажемъ, такiя простыя предложенiя: черезъ двѣ точки всегда проходитъ одна и только одна прямая; черезъ три точки, не расположенныя на одной прямой, всегда проходитъ одна и только одна плоскость; изъ трехъ точекъ, расположенныхъ на одной прямой, одна и только одна лежитъ „между“ двумя другими и т. д. Эти предложенiя кажутся очень простыми, такъ какъ они очевидны по своей наглядности и не могутъ быть доказаны при помощи болѣе простыхъ предложенiй; легко принять, что они понятны сами собой. Но ничто не поддается съ такимъ трудомъ болѣе глубокому познанiю, какъ тѣ именно предложенiя, которыя на первый взглядъ кажутся понятными сами собой. Въ то время, когда математики всѣхъ временъ стремились, главнымъ образомъ, къ расширенiю своей науки путемъ открытiя новыхъ истинъ, лишь немногiе изъ нихъ, правда, наиболѣе выдающiеся, были заинтересованы углубленiемъ геометрiи, выясненiемъ взаимной связи и значенiя отдѣльныхъ посылокъ: большинство считало, очевидно, недостойнымъ тратить трудъ и время на то, чтобы собирать и углубляться въ эти простыя и тривiальныя предложенiя, ясныя, какъ день Божiй, не обѣщающiя славы

изслѣдователю. И все-таки во всей геометріи врядъ ли есть что-либо болѣе заманчивое, какъ занятіе этими именно невзрачными предложеніями, которыя въ немногихъ словахъ выражаютъ такое обширное содержаніе, которыя in nuce содержатъ всю геометрію. Путемъ ихъ изслѣдованія для геометріи были завоеваны болѣе широкія области, чѣмъ разработкой высшихъ ея теорій.

**2.** Въ дальнѣйшемъ мы не имѣемъ въ виду слѣдовать примѣру Евклида; мы не имѣемъ въ виду развивать шагъ за шагомъ систему геометріи изъ ряда предпосланныхъ и допущенныхъ посылокъ, потому что въ такомъ изложеніи значеніе этихъ посылокъ, каждой въ отдѣльности, недостаточно выясняется. Напротивъ, мы отдадимъ предпочтеніе другому изложенію, въ которомъ критика обычной точки зрѣнія на основы геометріи должна подготовить читателя къ строго логическому ея пониманію; эта критика должна выяснить, какъ мало факты чувственнаго воспріятія пригодны для того, чтобы служить краеугольными камнями наукѣ, желающей оперировать совершенно опредѣленными понятіями.

# ГЛАВА I.

# Критика основныхъ понятій.

## § 1. Историческія свѣдѣнія.

**1.** Какъ свидѣтельствуетъ исторія, геометрія имѣетъ эмпирическое происхожденіе. По крайней мѣрѣ, относительно древнѣйшаго культурнаго народа, вліяніе котораго на развитіе геометріи на западѣ вполнѣ доказано, какъ греческіе историки, такъ и современные египтологи, согласно удостовѣряютъ, что тамъ геометрія возникла вслѣдствіе необходимости ежегодно возстановлять границы полей, которыя смывались разлитіемъ Нила. Сообразно этому наиболѣе древнія геометрическія формулы, извѣстныя намъ изъ папируса Эйзенлора*), относятся къ измѣренію площадей; задача эта, впрочемъ, разрѣшается здѣсь только приближенно. Такъ, напримѣръ, площадь равнобедреннаго треугольника со сторонами $a$, $a$, $c$ признается равной $\frac{1}{2}\,ac$ вмѣсто $\frac{1}{2}\,ac\sqrt{1-(c/2a)^2}$; эта приближенная формула согласуется, однако, съ истинной тѣмъ больше, чѣмъ больше равныя стороны по сравненію съ третьей стороной. Всѣ остальные геометрическіе факты, содержащіеся въ этомъ папирусѣ, имѣютъ непосредственно практическое значеніе; ни доказательствъ, ни указаній на таковыя мы нигдѣ не находимъ. Вообще съ большимъ довѣріемъ къ свѣдѣніямъ древнихъ египтянъ въ этой области относиться нельзя, ихъ мудрость въ древности значительно переоцѣнивалась.

**2.** Греки освободили геометрію отъ узкаго кругозора египетскихъ ремесленниковъ и строителей; занимаясь геометріей ради ея самой, они развили ее въ теченіе двухъ столѣтій гораздо больше, нежели египтяне въ теченіе двухъ тысячелѣтій. Вначалѣ и здѣсь наглядность играла рѣшающую роль, но скоро установилась потребность въ логическихъ доказательствахъ. Изъ простыхъ предложеній выводились болѣе трудныя, все болѣе широкіе отдѣлы геометріи приводились во взаимную связь. Это и послужило импульсомъ къ тому, чтобы дойти до послѣднихъ посылокъ, изъ которыхъ вытекаетъ все остальное. Этотъ неизмѣримо огромный умственный трудъ выполнилъ Евклидъ, жившій около 300 г. до Р. Хр. въ Александріи при Птолемеѣ I. Онъ завершилъ то, что было сдѣлано его предшественниками въ дѣлѣ обоснованія геометріи въ теченіе слишкомъ столѣтія; 13 книгъ его „Началъ", содержащія въ геометрической формѣ также основанія ариѳметики, вытѣснили совершенно сочиненія его пред-

*) A. Eisenlohr. „Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter". Leipzig. 1877.

шественниковъ. Во главѣ своей книги („*στοιχεῖα*“) Евклидъ полагаетъ опредѣленіе (*ὅροι*), постулаты (*αἰτήματα*) и аксіомы (*κοιναὶ ἔννοιαι*), на которыхъ, по его мнѣнію, покоится геометрія. Важнѣйшія опредѣленія слѣдующія:

| | |
|---|---|
| I. *Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.* | Точка есть то, что не имѣетъ частей. |
| II. *Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.* | Линія есть длина безъ толщины *). |
| III. *Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.* | Прямая есть линія, которая одинаково расположена относительно всѣхъ своихъ точекъ. |
| IV. *Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.* | Поверхность есть то, что имѣетъ только длину и ширину. |

Эти предложенія первоначально ставились, очевидно, въ обратномъ порядкѣ: поверхность имѣетъ длину и ширину, линія только длину, точка же не имѣетъ никакого протяженія.

| | |
|---|---|
| V. *Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.* | Плоскость есть поверхность, которая одинаково расположена по отношенію ко всѣмъ прямымъ, на ней лежащимъ. |
| VI. *Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τά μέρη ἐπί μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.* | Параллельныя прямыя суть такія, которыя расположены въ одной плоскости и при неограниченномъ продолженіи въ обѣ стороны не пересѣкаются. |

Изъ постулатовъ мы приведемъ только пятый, который въ нѣкоторыхъ изданіяхъ Евклида приводится въ качествѣ XI или XIII аксіомы и извѣстенъ подъ названіемъ „аксіомы о параллельныхъ линіяхъ“.

| | |
|---|---|
| *(Ἠιτήσθω) καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσίν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.* | (Нужно потребовать), чтобы всякій разъ, какъ прямая при пересѣченіи съ двумя другими прямыми образуетъ съ ними внутренніе односторонніе углы, сумма которыхъ меньше двухъ прямыхъ, эти прямыя пересѣкались съ той стороны, съ которой эта сумма меньше двухъ прямыхъ. |

Аксіомы 1, 2, 3 и 8 содержатъ основанія ариѳметики, хотя здѣсь онѣ отнесены непосредственно къ пространственнымъ величинамъ. Аксіома 7 содержитъ понятіе о конгруэнтности.

| | |
|---|---|
| *καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.* | (образы), которые покрываютъ другъ друга, равны. |

---

*) Точнѣе: „безъ ширины“; ср. *ἀπλατές* въ II и *πλάτος* въ IV. Евклидъ, очевидно, представляетъ себѣ линію начерченной на плоскости.

3. За Евклидомъ въ древности послѣдовалъ цѣлый рядъ выдающихся математиковъ, какъ Аполлоній, Архимедъ, Геронъ (I стол. до Р. Хр.), Геминусъ, Никомахъ (I стол. по Р. Хр.), Паппусъ (около 300 г. по Р. Хр.), Ѳеонъ и Проклъ (V стол. по Р. Хр.), изъ которыхъ одни старались разъяснить книгу Евклида комментаріями и исправить его въ отдѣльныхъ пунктахъ, другіе старались превзойти его собственными трудами. Ихъ работы относились, главнымъ образомъ, къ аксіомѣ о параллельныхъ линіяхъ, къ выбору посылокъ, къ построенію первой книги, а также къ устраненію нѣкоторыхъ противорѣчій между шестью первыми и тремя послѣдними книгами. Въ цѣломъ же система Евклида оставалась неприкосновенной, только аксіома о параллельныхъ систематически встрѣчала серьезныя осужденія со стороны авторовъ. Причина этого заключалась въ томъ, что при наличности гораздо болѣе простыхъ предложеній, которыя Евклидъ все же счелъ необходимымъ доказывать, содержаніе этой аксіомы казалосъ недостаточно простымъ, чтобы ее постулировать.

Когда въ VI вѣкѣ послѣ Р. X. угасла греческая культура, геометрія вновь опустилась на степень орудія въ рукахъ ремесленниковъ, какимъ она была въ Египтѣ; даже древняя приближенная формула для площади треугольника (см. п. 1) опять заняла почетное мѣсто. Въ средніе вѣка книги Евклида были вновь призваны къ жизни благодаря арабамъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ математики съ новымъ усердіемъ занялись загадочнымъ постулатомъ о параллельныхъ линіяхъ. Первое средневѣковое изданіе Евклида на латинскомъ языкѣ представляетъ собой переводъ съ арабскаго (1482). Лишь съ началомъ возрожденія вновь появились на свѣтъ греческіе кодексы Евклида и его комментаторовъ. Въ 1533 году появилось первое изданіе греческаго текста Евклида, выполненное Симономъ Гринаемъ (Simon Grynaeus). Изъ попытокъ средневѣковыхъ математиковъ доказать пятый постулатъ (аксіома о параллельныхъ) самымъ старымъ является доказательство Насиръ Эддина (Nasir Eddin, XIII ст.); въ XVI столѣтіи Клавій (Clavius) опровергъ доказательства Прокла подобно тому, какъ Проклъ обнаружилъ неправильность аналогичныхъ доказательствъ своихъ предшественниковъ. Трудность этой задачи становилась все яснѣе и привлекала многочисленныхъ математиковъ устранить это „пятно“ Евклидовой системы. Однако, доказательства эти либо просто содержатъ неправильные выводы, либо же явно или неявно принимаютъ другое предложеніе, которое на первый взглядъ никакихъ сомнѣній не вызываетъ. „То, что еще остается послѣ этого доказать, говоритъ по этому поводу Ламбертъ (Lambert), сначала представляется ничтожной мелочью, и въ этой именно мелочи, если хочешь ее со всею строгостью обосновать, по тщательномъ размышленіи, оказывается вся суть дѣла. Обыкновенно она предполагаетъ либо то предложеніе, которое нужно доказать, либо равносильное ему предложеніе“. Та же неудача постигла основателя неевклидовой геометріи — Іеронима

Саккери (Hieronymus Saccheri, 1667—1733), издавшаго сочиненіе „Euclides ab omni naevo vindicatus“, въ которомъ онъ съ необычайнымъ остроуміемъ строитъ геометрію, отвергающую постулатъ о параллельныхъ линіяхъ. Впрочемъ, Саккери былъ далекъ отъ того, чтобы дѣйствительно усумниться въ справедливости этой аксіомы и ея зависимости отъ остальныхъ посылокъ. Напротивъ, онъ разсчитывалъ придти этимъ путемъ къ противорѣчію и такимъ образомъ доказать ненавистную гипотезу. Въ тѣсной связи съ идеями Саккери и, повидимому, также и въ фактической зависимости отъ нихъ стоитъ теорія параллельныхъ линій Ламберта, которую Іоаннъ Бернулли послѣ смерти этого великаго человѣка опубликовалъ въ 1786 году въ журналѣ „Magazin für reine und angewandte Mathematik“.

**4.** Слишкомъ 2000 лѣтъ наиболѣе выдающіеся умы, твердо убѣжденные въ абсолютной справедливости предложенія, что изъ точки, лежащей внѣ прямой, можно провести одну и только одну параллельную ей прямую, тщетно напрягали усилія къ тому, чтобы вывести это предложеніе, какъ слѣдствіе остальныхъ посылокъ. Но вотъ почти одновременно не одинъ, а четыре математика независимо другъ отъ друга разрушили эти цѣпи, сковывавшіе умы математиковъ. Первымъ нужно назвать Гаусса, который, однако, ничего по этому предмету не опубликовалъ. Однако, изъ оставшихся послѣ него бумагъ съ несомнѣнностью явствуетъ, что онъ уже во всякомъ случаѣ въ 1799 году сомнѣвался въ возможности логически доказать аксіому о параллельности и не позже 1816 года располагалъ уже основаніями гиперболической геометріи *). Независимо отъ него къ тому же результату около 1818 года пришелъ юристъ К. Швейкартъ (Schweikart) въ Марбургѣ. Но и эта работа не была опубликована. Выступить въ печати съ этимъ новымъ ученіемъ впервые рѣшились русскій профессоръ Н. И. Лобачевскій (Докладъ физико-математическому факультету Казанскаго Университета 12-го февраля 1826 года) и Іоаннъ Больэ (Johann Bolyai) въ 1832 году въ приложеніи къ сочиненію своего отца. Однако, ни тотъ ни другой не встрѣтили ни пониманія, ни сочувствія. Новое сочиненіе было встрѣчено частью съ полнымъ равнодушіемъ, частью съ издѣвательствомъ и въ качествѣ „Метагеометріи“ **) было поставлено на одну доску съ метафизикой, которая пользовалась дурной славой. Лишь работы Бельтрами, Римана, Гельмгольца, Ли и др. до нѣкоторой степени разсѣяли предубѣжденіе, съ которымъ къ неевклидовой геометріи относились даже спеціалисты математики. Однако, новыя воззрѣнія на основы геометріи, вѣроятно, еще долго оставались бы непризнанными,

*) Gauss. Werke, Bd. 8. Тамъ приведены также указанія относительно „Звѣздной“ геометріи Швейкарта. См. также Engel und Stäckel. „Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss“. Leipzig, 1895.

**) Самое слово „метагеометрія“ принадлежитъ Лейбницу.

если бы развитіе современной теоріи функцій и ученія о комплексахъ не привело къ необходимости произвести также пересмотръ основныхъ понятій ариѳметики. Открытіе непрерывныхъ функцій, не имѣющихъ производныхъ (Вейерштрассъ, Weierstrass), которымъ въ аналитической геометріи отвѣчаютъ непрерывныя кривыя, не имѣющія касательныхъ, доказательство возможности изобразить кривую на сплошной площадкѣ, становящаяся все болѣе ясной недостаточность стараго взгляда на числа, въ особенности на ирраціональныя числа, развитіе понятія о непрерывности и ученія о сходимости рядовъ, а также цѣлый рядъ другихъ обстоятельствъ, привели къ тому, что подорвали въ корнѣ слѣпую вѣру въ надежность нашихъ чувственныхъ представленій и создали въ математикѣ критическое направленіе, оказавшее услуги и геометріи.

## § 2. Понятія „точка", „линія", „поверхность".

1. Развитіе современной теоріи функцій обнаружило, что критика основаній должна была бы начаться не съ пятаго постулата, а еще съ перваго опредѣленія:

*σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν* *).

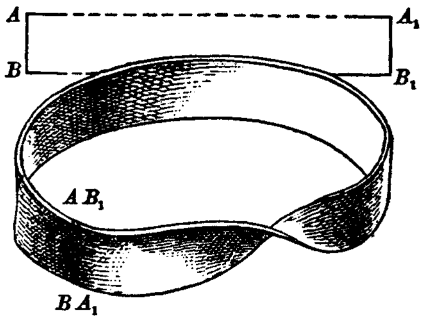
Это понятіе возникаетъ изъ понятія — дѣйствительнаго или воображаемаго — о матеріальной точкѣ путемъ предѣльнаго процесса, т. е. путемъ дѣятельности нашего духа, ставящей опредѣленную цѣль ряду представленій, который самъ по себѣ неограниченъ. Представимъ себѣ, напримѣръ, песчинку или пылинку, которая непрестанно становится все меньше и меньше. При этомъ выдѣленіе отдѣльныхъ частей внутри этой песчинки становится все менѣе и менѣе возможнымъ, и такимъ образомъ возникаетъ, какъ говорятъ, съ постоянно возрастающей опредѣленностью представленіе о точкѣ, какъ объ опредѣленномъ мѣстѣ въ пространствѣ, единомъ, не имѣющемъ частей. Однако, такая точка зрѣнія несостоятельна: мы, пожалуй, можемъ до нѣкоторой степени представить себѣ, что песчинка становится все меньше и меньше, но лишь до того момента, пока она, по своей малости, не ускользаетъ вовсе отъ нашего глаза. Съ этого же момента процессъ становится совершенно темнымъ, и дальнѣйшаго уменьшенія мы не можемъ видѣть, мы не можемъ себѣ его представлять. Что этотъ процессъ закончится, этого мы себѣ не можемъ представить; но, съ другой стороны, что ему соотвѣтствуетъ опредѣленная цѣль, за которую онъ не можетъ перейти и которой онъ никогда не

*) Хотя нижеслѣдующія разсужденія непосредственно и связаны съ дословнымъ текстомъ евклидовыхъ опредѣленій, но они имѣютъ въ виду не евклидовы, а обыкновенныя воззрѣнія. Взглядамъ Евклида болѣе соотвѣтствуетъ соображенія, изложенныя въ §§ 7 и далѣе.

можетъ достичь, этому мы должны вѣрить, или иначе, мы должны это постулировать. Не слѣдуетъ обманывать самого себя: если мы и можемъ себѣ представить, что песчинка неограниченно уменьшается, то мы съ такимъ же успѣхомъ можемъ себѣ вообразить, что мы разсматриваемъ ее въ микроскопъ, увеличительная сила котораго наростаетъ въ такомъ же отношенiи, въ какомъ песчинка уменьшается. Въ такомъ случаѣ мы не замѣтимъ никакого измѣненiя въ песчинкѣ и становится очевиднымъ, какъ это впрочемъ ясно и безъ того, что процессъ уменьшенiя въ нашемъ представленiи никогда не можетъ окончиться. Если мы все же хотимъ отнести этому процессу понятiе о точкѣ, „которая имъ однозначно опредѣляется", то нужно относиться къ этому сознательно и понимать, что это есть лишь проявленiе нашей воли, а не нашего ума,— что такого рода „точка" нашему представленiю недоступна, а есть лишь нѣчто, прiуроченное къ ряду представленiй. Такимъ образомъ, къ первому опредѣленiю во всякомъ случаѣ долженъ быть присоединенъ и первый постулатъ, заключающiйся въ томъ, что точки вообще существуютъ. Пространственнаго существованiя они не имѣютъ. Если бы мы въ повседневномъ своемъ опытѣ вращались столь же часто въ царствѣ объектовъ, представляющихся ничтожно малыми, какъ мы вращаемся въ средѣ большихъ, то мы относились бы къ понятiю о точкѣ съ гораздо меньшимъ довѣрiемъ. Если подумать о богатой и многообразной жизни микрокосмоса, доступнаго нашимъ чувствамъ только благодаря микроскопу, о жизни водорослей и бактерiй, о жизни растительныхъ и животныхъ клѣтокъ съ ихъ удивительно тонкой структурой; если подумать, что въ человѣческомъ зародышѣ заложено существо съ высокой организацiей, съ тѣми или иными особенностями тѣлосложенiя, характера и ума; если все это взвѣсить, то мы не можемъ отдѣлаться отъ представленiя, что все, кажущееся намъ малымъ, является таковымъ только относительно нашихъ чувствъ, что разумъ, устроенный нѣсколько иначе, нежели человѣческiй, могъ бы легко отрѣшиться отъ чувственнаго различiя между большимъ и малымъ.

**2.** Подобно тому, какъ точка является предѣльнымъ понятiемъ, которое мы связываемъ съ безпредѣльно убывающей песчинкой, мы соединяемъ понятiе о (кривой) линiи и (кривой) поверхности съ представленiемъ о матерiальной линiи или поверхности, которая становится все тоньше и тоньше безъ конца. Мы можемъ себѣ представить, напримѣръ, линiю въ видѣ тонкой нити, поверхность въ видѣ тонкаго листа, которые становятся все тоньше,—или какъ острый край, или гладкая поверхность, которые становятся все острѣе и глаже. При образованiи понятiя о поверхности нельзя исходить только отъ границы, отдѣляющей два тѣла; эта точка зрѣнiя не охватываетъ всѣхъ случаевъ. Если мы, напримѣръ, возьмемъ такъ называемый листъ Мёбiуса (Möbius) (фиг. 1), который получимъ изъ прямоугольника $AA_1BB_1$, если склеимъ края $AA_1$ и

$BB_1$, изогнувъ предварительно прямоугольникъ надлежащимъ образомъ,— и попытаемся покрыть его съ одной стороны слоемъ воска или матеріей, то, въ концѣ концовъ, вся поверхность окажется обернутой матеріей, потому что она имѣетъ только одну сторону [1]). Процессъ предѣльнаго перехода, который приводитъ къ понятіямъ о линіи и поверхности, вызываетъ тѣ же сомнѣнія, что и относительно точки. Точнаго представленія объ абсолютной гладкой поверхности не существуетъ: мы не можемъ представить себѣ поверхность глаже и тоньше матеріальныхъ поверхностей, которыя мы наблюдаемъ. И, наоборотъ, относительно двухъ матеріальныхъ поверхностей мы не въ состояніи указать, которая изъ нихъ тоньше, если обѣ очень тонки и разница въ толщинѣ незначительна; тоже справедливо и о гладкости. Даже поверхности жидкостей не абсолютно гладки, потому что жидкости непрерывно испускаютъ въ воздухъ безчисленное множество частичекъ; мы называемъ это испареніемъ. Жидкость имѣетъ, такимъ образомъ, столь же мало опредѣленную поверхность, какъ пчелинный рой. И вотъ отъ этихъ расплывчатыхъ представленій процессъ предѣльнаго перехода долженъ привести къ чему-то совершенно точному и опредѣленному. Это нѣчто не можетъ быть доступно нашему представленію; это должно быть чистое понятіе,




Фиг. 1.

[1]) Когда мы разсматриваемъ обыкновенную поверхность, какъ границу двухъ тѣлъ, то мы себѣ всегда представляемъ, что поверхность имѣетъ двѣ стороны, изъ которыхъ одна прилегаетъ къ одному тѣлу, вторая къ другому. Вмѣстѣ съ тѣмъ пространство можно раздѣлить на двѣ части, общей границей которыхъ служитъ наша поверхность. Этого нельзя сдѣлать, когда мы имѣемъ дѣло съ поверхностью объ одной сторонѣ — съ поверхностью Мёбіуса. Если мы представимъ себѣ нормаль къ обыкновенной поверхности, направленную въ одну сторону, скажемъ, внѣшнюю нормаль, и будемъ непрерывно передвигать ея основаніе по поверхности, такъ что и направленіе нормали будетъ мѣняться непрерывно, то при возвращеніи въ точку исхода нормаль совпадетъ съ первоначальнымъ своимъ направленіемъ. Точки нормали, прилежащія къ основанію, все время будутъ оставаться въ одномъ изъ двухъ тѣлъ, разграничиваемыхъ поверхностью. Одно изъ двухъ тѣлъ, соприкасающихся на поверхности, можетъ быть опредѣлено, какъ геометрическое мѣсто, которое образуютъ точки нормали (скажемъ, внѣшней), прилежащія къ ея основанію, когда нормаль, непрерывно мѣняя направленіе, своимъ основаніемъ обходитъ всю поверхность. Между тѣмъ на поверхности Мёбіуса этого не будетъ. Здѣсь, непрерывно мѣняя направленіе нормали, какъ это видно на чертежѣ, мы можемъ привести ее, при возвращеніи въ точку исхода, къ совпаденію съ противоположнымъ направленіемъ.

которое мы относимъ (ассоціируемъ) процессу, какъ нѣчто имъ опредѣляемое. Пространственнаго существованія „линія“ и „поверхность“ не имѣютъ, какъ его не имѣетъ „точка“.

## § 3. Понятія „прямая“, „плоскость“, „параллельность“.

1. Трудности и противорѣчія еще наростаютъ, когда мы отъ (кривой) линіи и поверхности восходимъ къ прямой линіи и плоскости. Чтобы выяснить эти понятія или представленія, на которыхъ они основываются, намъ предлагаютъ обыкновенно представить себѣ сначала матеріальную прямую, напримѣръ, острое ребро кристалла, натянутую нить или лучъ свѣта,—а затѣмъ провести процессъ предѣльнаго перехода, о которомъ была рѣчь въ предыдущемъ параграфѣ. Грубое представленіе о прямой линіи можно составить и такимъ путемъ, что между двумя тѣлами $A$ и $B$ мы располагаемъ рядъ тѣлъ такимъ образомъ, чтобы они при визированіи покрывали другъ друга („взять направленіе“, какъ говорятъ военные). Этому соотвѣтствуетъ Платоново опредѣленіе прямой линіи, какъ такой, „которой середина заслоняетъ края“, т. е. какъ путь свѣтового луча. Нѣтъ нужды повторять, что съ матеріальной линіей мы не связываемъ точнаго представленія, на которомъ было бы возможно построить геометрическое понятіе; и свѣтовой лучъ не представляетъ собой чего-либо недѣлимаго въ своемъ направленіи; да и самыя поперечныя колебанія обусловливаетъ боковое протяженіе. Еще менѣе пріемлемо опредѣленіе прямой, какъ того, что остается въ покоѣ при вращеніи тѣла вокругъ двухъ неподвижныхъ точекъ, ибо это опредѣленіе самымъ кореннымъ образомъ вводитъ въ геометрію движеніе съ его загадочными свойствами; къ тому же съ этимъ опять нельзя соединять никакихъ опредѣленныхъ представлѐній, изъ этого опредѣленія нельзя извлечь никакого вывода, цѣннаго для геометріи. Приписываемое обыкновенно Архимеду опредѣленіе прямой, какъ кратчайшаго разстоянія между двумя точками, предполагаетъ понятіе о длинѣ, по крайней мѣрѣ, о линейномъ элементѣ и, слѣдовательно, содержитъ уже въ себѣ понятіе о прямой линіи.

2. Какъ и ея модель, прямая (въ грубомъ представленіи) сначала представляется конечной, затѣмъ должна быть продолжаема безконечно; это дѣлается, главнымъ образомъ, въ угоду понятію о параллельности, потому что опредѣленіе параллелизма гласитъ, что двѣ прямыя, расположенныя въ одной плоскости, называются параллельными, если онѣ не пересѣкаются, когда мы ихъ продолжаемъ до безконечности. Между тѣмъ это требованіе для такой прямой, которую мы себѣ можемъ представить, слѣдовательно, для прямой матеріальной, совершенно невыполнимо, потому что оно выходитъ за предѣлы того, что доступно нашему опыту и представленію; основываясь на этихъ опредѣленіяхъ, совершенно невозможно

убѣдиться, дѣйствительно ли данныя двѣ прямыя параллельны или нѣтъ. Понятіе о параллелизмѣ очень охотно связываютъ съ двумя линіями рельсоваго пути, которыя поддерживаются шпалами всегда на одинаковомъ разстояніи одна отъ другой и которыя никогда не могутъ пересѣчься при неограниченномъ продолженіи этого пути. Но здѣсь прежде всего нужно было бы доказать, что при этихъ условіяхъ, если бы одна линія дѣйствительно была строго прямой, другая также оказалась бы таковой; далѣе здѣсь предполагается понятіе о перпендикулярѣ и о равенствѣ. Относительно грубыхъ линій, къ которымъ исключительно относятся наши представленія и нашъ опытъ, было бы наиболѣе разумно вовсе не высказывать ничего такого, что необходимо заставляетъ выйти за предѣлы, въ которые поставлены наши чувства; если же мы съ этимъ не считаемся, то мы должны быть готовы къ тому, чтобы наткнуться на противорѣчія и неясности.

**3.** Всѣ высказанныя здѣсь замѣчанія относятся, конечно, и къ плоскости; еще разъ къ этому возвращаться нѣтъ, конечно, надобности,— но на одно обстоятельство необходимо обратить вниманіе. Если мы натянемъ между двумя (грубыми) точками $A$ и $B$ нить, или вставимъ между ними промежуточныя точки путемъ визированія подобно тому, какъ мы направляемъ ружье на центръ цѣли, помѣщая его между мушкой и прицѣломъ ружья,—то мы убѣждаемся экспериментально, что между двумя матеріальными точками проходитъ только одна матеріальная прямая. Если мы опредѣляемъ, далѣе, плоскость, какъ поверхность, которую описываетъ прямая, проходящая черезъ точку $P$ и скользящая по прямой $p$, то точка $P$ и двѣ точки прямой $p$, которая, впрочемъ, не должна проходить черезъ точку $P$, вполнѣ опредѣляютъ плоскость. Опредѣляется ли эта плоскость также и другими тремя своими точками или, что сводится къ тому же, содержитъ ли плоскость всякую прямую, проходящую черезъ двѣ ея точки, этотъ вопросъ можетъ быть разрѣшенъ только опытомъ. Такой опытъ мы можемъ произвести, напримѣръ, на поверхности стола, къ которой мы прикладываемъ линейку во всѣхъ направленіяхъ, если мы не претендуемъ на очень большую точность. Но сохранятся ли эти свойства, когда мы отъ матеріальной прямой или плоскости перейдемъ къ точнымъ геометрическимъ образамъ? Можно ли, какъ это дѣлаетъ Евклидъ, постулировать, что прямая вполнѣ опредѣляется двумя своими точками, или это уже заключается въ самомъ понятіи о прямой? Отвѣтить на эти вопросы нетрудно. Черезъ двѣ точки можно визировать на третью только до тѣхъ поръ, пока эти точки видны. Если въ процессѣ предѣльнаго перехода, которой мы должны предпринять, эти точки становятся невидимыми, то мы оказываемся совершенно безпомощными, такъ какъ вставить промежуточныя точки становится невозможнымъ; если мы воспользуемся зрительной трубой, то и она, конечно, не долго можетъ быть намъ полезной. Не меньше затрудненій доставитъ намъ натянутая нить, если мы захотимъ произвести процессъ предѣльнаго перехода; въ самомъ дѣлѣ, вѣдь натянутая нить должна оставаться матеріальной, а это находится въ неизбѣжномъ противорѣчіи съ задачей предѣльнаго процесса. Выводъ изъ всего этого тотъ, что съ матеріальной прямой, какъ бы мы ее ни воспроизводили, точнаго предѣльнаго перехода осуществить невозможно. Если же мы все-таки хотимъ придти къ опредѣленному понятію, то нужно ввести въ опредѣленіе этого понятія такой рядъ свойствъ матеріальной прямой, чтобы мы могли при помощи этого опредѣленія (а не представленія) получить все то, что дастъ утонченная матеріальная прямая. Такимъ образомъ, мы уже здѣсь видимъ, что евклидовы опредѣленія совершенно непригодны для логическихъ доказательствъ. Къ числу тѣхъ свойствъ матеріальной прямой, которыя нужно ввести въ опредѣленіе точнаго понятія, принадлежитъ именно то, что прямая опредѣляется двумя точками; аналогично этому въ опредѣленіе плоскости, которое также нельзя установить при помощи предѣльнаго перехода, необходимо ввести либо непосредственно то свойство, что она содержитъ всякую прямую, проходящую черезъ двѣ ея точки, либо эквивалентное этому свойство. Итакъ, прямая и плоскость могутъ быть опредѣлены и вообще призваны къ существованію не путемъ предѣльнаго перехода отъ объектовъ нашего созерцанія, а помощью опредѣленныхъ свойствъ.

## § 4. Движеніе и конгруэнтность.

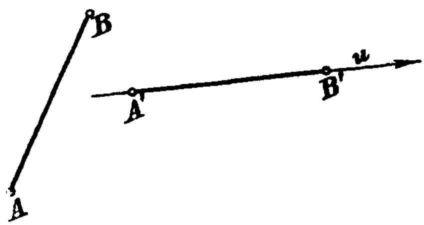
1. На разборѣ понятія „между“, которое непосредственно сюда же примыкаетъ, мы не будемъ останавливаться, чтобы не утомлять читателя; но трудности, съ которыми связано понятіе о движеніи, мы считаемъ необходимымъ выяснить, такъ какъ на этомъ понятіи покоится все ученіе о конгруэнтности. „Два отрѣзка считаются равными или конгруэнтными, если ихъ можно наложить одинъ на другой“. Оставаясь на этомъ извѣстномъ опредѣленіи, мы можемъ рѣшить вопросъ о равенствѣ двухъ отрѣзковъ только эмпирическимъ путемъ, непосредственно налагая одинъ отрѣзокъ на другой. Съ этимъ можно было бы еще мириться, если бы позже мы нашли другія средства, которыя давали бы возможность рѣшить тотъ же вопросъ непосредственно при помощи геометрическихъ образовъ, существованіе которыхъ мы признаемъ*). Такія средства дѣйствительно существуютъ, какъ это мы увидимъ ниже; но элементарная геометрія никогда не старалась воспользоваться ими для устраненія эмпирическихъ

---

*) Прямыя, окружности и т. п. образы мы будемъ называть „существующими“, если они есть въ пространствѣ или если мы ихъ таковыми мыслимъ, такъ что нѣтъ надобности предварительно ихъ „проводить“, какъ это обыкновенно дѣлается въ школьной геометріи.

пріемовъ. Между тѣмъ это необходимо еще и по другой причинѣ. Установить, что два отрѣзка могутъ покрыть другъ друга, возможно только на матеріальныхъ прямыхъ. Къ геометрическимъ прямымъ вышеприведенное опредѣленіе, такимъ образомъ, вовсе не относится. Точно такъ же два угла мы называемъ равными или конгруэнтными, если они могутъ быть наложены одинъ на другой такимъ образомъ, что стороны ихъ совпадаютъ. Здѣсь мы можемъ, конечно, вновь сдѣлать то же возраженіе, что объекты чистаго мышленія, которые мы называемъ геометрическими прямыми, не могутъ быть передвигаемы; такимъ образомъ, это опредѣленіе также падаетъ. Или, быть можетъ, мы и движеніе должны себѣ только представлять? Но что же такое движеніе?

**2.** Понятіе о равенствѣ матеріальныхъ прямыхъ мы можемъ все же основывать на движеніи; но въ геометрію это опредѣленіе безъ дальнѣйшаго развитія войти не можетъ. Если бы, такимъ образомъ, тѣ, которые утверждаютъ, что геометрія безъ движенія обойтись не можетъ, были правы, то мы стояли бы передъ непреодолимымъ препятствіемъ. Точная геометрія была бы въ такомъ случаѣ невозможна. Дѣло, однако, обстоитъ не такъ.



Фиг. 2.

Разберемся сначала въ томъ, что намъ, собственно, даетъ движеніе въ томъ случаѣ, который мы разобрали выше!

1) Если данъ (матеріальный) отрѣзокъ $AB$, прямая $u$ и точка $A'$ на ней, то движеніе совершенно опредѣленнымъ образомъ относитъ точкамъ $AB$ и $A'$ въ данномъ направленіи на прямой $u$ нѣкоторую точку $B'$, и мы говоримъ, что отрѣзокъ $A'B'$ конгруэнтенъ отрѣзку $AB$, символически $A'B' \cong AB$. Въ частности, въ этомъ смыслѣ $AB \cong AB$. Далѣе, относительно движенія мы можемъ сказать:

2) Если движеніе относитъ отрѣзку $AB$ два отрѣзка $A'B'$ и $A''B''$, какъ конгруэнтные ему, то отрѣзки $A'B'$ и $A''B''$ также соотвѣтствуютъ другъ другу, какъ конгруэнтные.

Далѣе:

3) Если на одной и той же прямой $a$ или на двухъ различныхъ прямыхъ $a$, $a'$ тремъ точкамъ $A$, $B$, $C$, изъ которыхъ $B$ лежитъ между $A$ и $C$, соотвѣтствуютъ три точки $A'$, $B'$, $C'$, при чемъ $B'$ лежитъ между $A'$ и $C'$, если при этомъ $AB \cong A'B'$ и $BC \cong B'C'$, то $AC \cong A'C'$.

Можно было бы установить еще цѣлый рядъ предложеній того же рода. Аналогичныя услуги оказываетъ движеніе и по отношенію къ угламъ.

4) Пусть въ плоскости $\alpha$ данъ уголъ со сторонами $h$, $k$, а въ плоскости $\alpha'$ (которая можетъ совпадать съ плоскостью $\alpha$) пусть будутъ даны

лучъ $h'$ и опредѣленная сторона плоскости $\alpha'$ относительно $h'$; въ такомъ случаѣ движенiе совершенно опредѣленно относитъ даннымъ образамъ нѣкоторый лучъ $k'$ въ плоскости $\alpha'$, проходящiй черезъ вершину луча $h'$, и мы говоримъ, что уголъ $h'k'$ конгруэнтенъ углу $hk$. Въ частности, въ этомъ смыслѣ уголъ $hk$ конгруэнтенъ самому себѣ. Предложенiю 2) соотвѣтствуетъ слѣдующее:

5) Если два угла конгруэнтны третьему, то они конгруэнтны между собой.

Такимъ образомъ можно было бы указать еще много свойствъ отрѣзковъ и угловъ, которыя проистекаютъ только отъ движенiя; къ этому нужно было бы присоединить далѣе свойства конгруэнтныхъ треугольниковъ, но Гильбертъ въ своемъ знаменитомъ сочиненiи „Основанiя геометрiи“ *) показалъ, что къ этимъ пяти свойствамъ движенiя нужно присоединить еще только одно, чтобы собрать все то, что движенiе даетъ намъ при доказательствѣ предложенiй о конгруэнтности; все остальное вытекаетъ уже строго дедуктивно. Это шестое предложенiе заключается въ слѣдующемъ:

6) Если въ треугольникахъ $ABC$ и $A'B'C'$

$$AB \cong A'B', \quad AC \cong A'C', \quad \sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C',$$

то

$$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C' \quad \text{и} \quad \sphericalangle ACB \cong \sphericalangle A'C'B'.$$

Гильбертъ при опредѣленiи конгруэнтности дѣлаетъ даже такое ограниченiе, что онъ сначала не опредѣляетъ этого свойства, какъ взаимное, такъ что, напримѣръ, въ предложенiи 1) онъ принимаетъ только, что отрѣзокъ $AB$ конгруэнтенъ отрѣзку $A'B'$ и не дѣлаетъ предположенiя, что отрѣзокъ $A'B'$, въ свою очередь, конгруэнтенъ $AB$. Взаимность этого соотношенiя уже вытекаетъ изъ предложенiй 2) и 5). Относящiяся сюда детали, а также прежде всего доказательства предложенiй о конгруэнтности можно найти непосредственно у Гильберта **).

**3.** То обстоятельство, что всякое предложенiе, касающееся конгруэнтности, можно доказать съ помощью посылокъ 1) — 6), не обращаясь болѣе къ движенiю, ведетъ къ слѣдующему замѣчательному выводу: если бы мы имѣли такой конструктивный прiемъ,— назовемъ его, скажемъ, идеальнымъ движенiемъ,— который не имѣлъ бы съ обыкновеннымъ движенiемъ ничего общаго, кромѣ свойствъ 1) — 6), то на этомъ идеальномъ движенiи можно было бы основать понятiе объ идеальной конгруэнтности и строго логически доказать основныя предложенiя о конгруэнтности

*) D. Hilbert. „Die Grundlagen der Geometrie“. Leipzig 1903 (2. Auflage) § 5 и 6.

**) Нашимъ предложенiямъ 1) — 6) у Гильберта соотвѣтствуютъ точно положенiя $III_1 - III_6$.

треугольниковъ[2]). Конгруэнтность, какъ мы ее понимаемъ, представляла бы собой лишь частный случай идеальной конгруэнтности. Такіе идеально конгруэнтные образы могли бы вовсе не быть конгруэнтными въ обычномъ смыслѣ слова. Такая идеальная конгруэнтность дѣйствительно возможна. Чтобы таковую установить въ нѣкоторой плоскости $\eta$, выберемъ произвольно другую плоскость $\eta'$ и точку $P$ внѣ обѣихъ плоскостей; два отрѣзка $A_1B_1$ и $A_2B_2$ въ плоскости $\eta$ мы условимся называть „идеально конгруэнтными", если ихъ проекціи $A_1'B_1'$, $A_2'B_2'$ изъ точки $P$ на плоскость $\eta'$, опредѣляемыя лучами $PA_1$, $PA_2$, $PB_1$, $PB_2$, конгруэнтны въ обычномъ смыслѣ этого слова[3]). Конечно, эта псевдоконгруэнтность зависитъ отъ обыкновенной конгруэнтности; но она во всякомъ случаѣ доказываетъ, что не всякая идеальная конгруэнтность необходимо тождественна съ обыкновенной и что построеніе этого понятія вообще допустимо. На этой именно точкѣ зрѣнія стоитъ Гильбертъ, который **опредѣляетъ** идеальную конгруэнтность свойствами 1)—6), т. е. опредѣляетъ ее постольку, поскольку она именно этими свойствами характеризуется. Въ предѣлахъ опредѣленнаго геометрическаго разсужденія нужно всегда предполагать, что мы имѣемъ дѣло съ одной опредѣленной формой осуществленія этой идеальной конгруэнтности[4]).

**4.** Если этотъ пріемъ и не можетъ никогда вести къ противорѣчію, то онъ все же вызываетъ слѣдующія соображенія.

[2]) Авторъ хочетъ сказать слѣдующее: если бы имѣлось правило (или рядъ правилъ), которое давало бы намъ возможность чисто геометрически, при помощи ряда построеній, безъ пособія движенія, отличать конгруэнтные и неконгруэнтные образы въ согласіи съ положеніями 1)—6), то такой пріемъ содержалъ бы уже въ себѣ точное опредѣленіе конгруэнтности.

[3]) Необходимо себѣ вполнѣ уяснить, что устанавливаемая этимъ соглашеніемъ „псевдоконгруэнтность" обладаетъ свойствами, выраженными въ предложеніяхъ 1)—6), какъ и обыкновенная конгруэнтность. Если, напримѣръ, отрѣзки $A_1B_1$ и $A_2B_2$ въ этомъ смыслѣ конгруэнтны отрѣку $A_3B_3$, то это означаетъ, что проекціи $A_1'B_1'$ и $A_2'B_2'$ этихъ отрѣзковъ на плоскость $\eta'$ дѣйствительно конгруэнтны проекціи $A_3'B_3'$ отрѣзка $A_3B_3$. Но въ такомъ случаѣ отрѣзки $A_1'B_1'$ и $A_2'B_2'$ дѣйствительно конгруэнтны между собой, а потому отрѣзки $A_1B_1$ и $A_2B_2$ псевдоконгруэнтны.

Нужно, однако, сказать, что нѣкоторое затрудненіе здѣсь возникаетъ вслѣдствіе того, что нѣкоторыя точки плоскости $\eta$ могутъ не имѣть проекцій на плоскость $\eta'$. Это затрудненіе устраняется, какъ мы увидимъ ниже, если мы оперируемъ въ т. н. проективномъ пространствѣ (правильнѣе даже, въ эллиптическомъ пространствѣ).

[4]) Иными словами, съ точки зрѣнія Гильберта за конгруэнтность можно принять всякое соотношеніе между геометрическими образами, обладающее свойствами 1)—6). Въ каждомъ частномъ случаѣ, однако, это соотношеніе должно быть фиксировано; и на этой именно точкѣ зрѣнія, что установлено нѣкоторое соотношеніе между геометрическими образами, удовлетворяющее требованіямъ 1)—6), и что это именно соотношеніе принимается за конгруэнтность, и стоитъ Гильбертъ.

Первое. Если существуетъ пріемъ сопряженія отрѣзковъ и угловъ, который выполняетъ условія идеальной конгруэнтности, то можно признать вполнѣ справедливымъ требованіе, чтобы такой пріемъ былъ дѣйствительно указанъ, чтобы мы дѣйствительно могли геометрію развивать геометрически, ибо, пока такого пріема нѣтъ, до тѣхъ поръ мы не можемъ производить построеній.

Второе. Такой пріемъ, какъ и вообще идеальная конгруэнтность, не можетъ изгнать изъ геометріи обычную несовершенную конгруэнтность, если онъ самъ, какъ въ указанномъ выше случаѣ, зависитъ отъ обыкновенной конгруэнтности. Движеніе было бы тогда въ геометріи однимъ изъ неизбѣжныхъ золъ. Необходимо ли, такимъ образомъ, втиснуть въ геометрію, въ видѣ понятія о конгруэнтности, начало, имѣющее эмпирическое происхожденіе, совершенно чуждое остальнымъ ея основнымъ понятіямъ и посылкамъ, или мы можемъ безъ этого обойтись,—должны ли мы идеальную конгруэнтность просто предполагать, какъ нѣчто данное, отъ обычной конгруэнтности независящее, или мы можемъ это понятіе сами построить,—это въ системѣ Гильберта остается недостаточно выясненнымъ. Какое значеніе имѣетъ увѣренность, что идеальная конгруэнтность никогда не можетъ привести къ противорѣчію, если мы не въ состояніи ея осуществить, не прибѣгая къ обыкновенной конгруэнтности? Идеальная конгруэнтность, безъ пособія эмпирическихъ и физическихъ средствъ (циркуль, линейка), существуетъ только тогда, когда она установлена тѣмъ самымъ, чѣмъ установлены всѣ точки, линіи и поверхности. Такимъ образомъ должно быть возможно:

A) воспроизводить равные отрѣзки и углы посредствомъ „имманентнаго геометрическаго построенія", т. е. такого построенія, которое не прибѣгаетъ къ матеріальнымъ инструментамъ ни непосредственно, ни даже въ представленіи; построеніе это должно, такимъ образомъ, заключаться въ томъ, чтобы мы, предполагая существованіе въ пространствѣ точекъ, поверхностей и линій *), вызывали въ нашемъ сознаніи тѣ изъ нихъ, при посредствѣ которыхъ устанавливается соотвѣтствіе отрѣзковъ, именуемыхъ конгруэнтными. Для того же, чтобы движеніе все таки, въ концѣ концовъ, не появлялось въ геометріи, необходимо, чтобы

B) на этомъ именно „имманентномъ построеніи" можно было основать также „имманентное опредѣленіе конгруэнтности", т. е. нужно, чтобы мы, исходя изъ этого построенія, никоимъ образомъ не прибѣгая къ конгруэнтности, могли предварительно чисто логически доказать, что условія 1)—6) соблюдены; тогда можно было бы конгруэнтность просто опредѣлить этимъ построеніемъ. Такимъ образомъ, вопросъ о томъ, есть ли въ строго логической геометріи мѣсто конгруэнтности, зависитъ отъ дру-

---

*) См. примѣчаніе на страницѣ 14.

гого вопроса: существуетъ ли „имманентное построеніе“ конгруэнтныхъ отрѣзковъ и угловъ, относительно котораго, не прибѣгая къ обычнымъ предложеніямъ о конгруэнтности, можно доказать, что оно допускаетъ требуемое предложеніями 1)—6) однозначное сопряженіе?[5])

## § 5. Построеніе Штейнера.

**1.** Существуетъ построеніе, которое удовлетворяетъ, по крайней мѣрѣ, требованію А) предыдущаго параграфа. Як. Штейнеръ въ знаменитомъ небольшомъ своемъ сочиненіи*), которое должно быть отнесено къ перламъ элементарной математики, чрезвычайно простыми средствами обнаружилъ, что всякое построеніе, которое можетъ быть произведенно циркулемъ и линейкой, можетъ быть выполнено одной только линейкой, если намъ дана одна окружность и ея центръ. Такъ какъ линейка служитъ здѣсь исключительно для проведенія прямыхъ линій, то намъ достаточно представить себѣ или, лучше, мыслить эту окружность и всѣ прямыя, какъ уже существующія, и мы получимъ требуемое имманентное построеніе. Конечно, понятія прямая и окружность должны быть безукоризненно опредѣлены; здѣсь мы должны предварительно допустить, что это сдѣлано. Штейнеръ въ своихъ построеніяхъ пользуется свойствами трапеціи, которыя легко доказать:

Предложеніе 1. Прямая, соединяющая точку пересѣченія непараллельныхъ сторонъ трапеціи съ точкой пересѣченія ея діагоналей, дѣлитъ параллельныя стороны трапеціи пополамъ.

Предложеніе 2. Если прямая, соединяющая точку пересѣченія двухъ противоположныхъ сторонъ четыреугольника съ точкой пересѣченія діагоналей, дѣлитъ одну изъ двухъ другихъ сторонъ пополамъ, то она дѣлитъ и четвертую сторону пополамъ, и послѣднія двѣ стороны параллельны [6]).

Если, слѣдовательно, даны двѣ параллельныя прямыя $u$ и $v$ и на одной изъ нихъ, скажемъ, на прямой $v$, данъ отрѣзокъ $AB$, то мы можемъ помощью одной линейки раздѣлить этотъ отрѣзокъ пополамъ (фиг. 3).

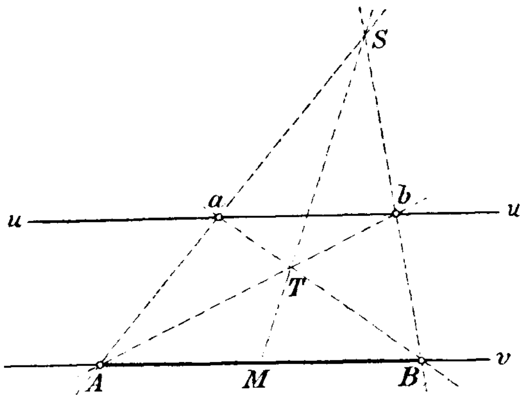
---

[5]) Нужно сознаться, что эти идеи изложены здѣсь крайне неясно. Какъ ихъ понимаетъ авторъ, выясняется отчасти въ слѣдующемъ параграфѣ, — а главнымъ образомъ, въ слѣдующей главѣ, гдѣ дѣйствительно устанавливаются въ различныхъ случаяхъ критеріи конгруэнтности.

*) Jacob Steiner. „Geometrische konstruktionen“. Ostwalds klassiker der exakten Wissenschaften. № 60.

[6]) Если мы себѣ представимъ, что на фиг. 3 въ четырехугольникѣ $ABba$ стороны $AB$ и $ab$ пересѣкаются въ нѣкоторой точкѣ $N$, то точки $N$ и $M$ дѣлятъ гармонически отрѣзокъ $AB$ по свойствамъ полнаго четырехугольника. Если поэтому точка $N$ уходитъ въ безконечность, то $M$ представляетъ собой середину отрѣзка $AB$ — и обратно. Таковы соображенія Штейнера; но предложеніе можно доказать, и не прибѣгая къ гармоническому дѣленію.

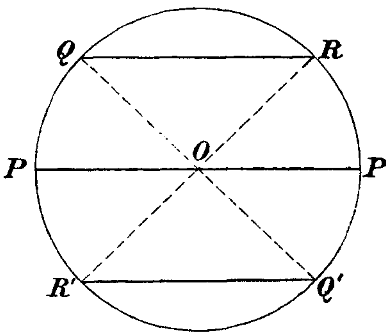
Для этого выберемъ на прямой $u$ произвольно двѣ точки $a$ и $b$ и точку пересѣченія $S$ прямыхъ $Aa$ и $Bb$ соединимъ съ точкой пересѣченія $T$ прямыхъ $Ab$ и $Ba$. Эта прямая $ST$ дѣлитъ пополамъ не только отрѣзокъ $AB$, но и отрѣзокъ $ab$. (Построеніе 1).



Фиг. 3.

Наоборотъ, если дана середина $M$ отрѣзка $AB$ и точка $a$ внѣ прямой $AB$, то мы можемъ провести черезъ точку $a$ прямую, параллельную $AB$. Для этого на прямой $Aa$ выбираемъ произвольно точку $S$, отличную отъ $A$ и $a$, и проводимъ прямыя $SA$, $SM$, $SB$ и $aB$. Прямыя $aB$ и $SM$ опредѣляютъ точку пересѣченія $T$, а прямая $AT$ встрѣчаетъ прямую $SB$ въ точкѣ $b$ такимъ образомъ, что прямая $ab$ параллельна прямой $AB$. (Построеніе 2).

Если теперь на нашей плоскости начерчена окружность K съ центромъ $O$ (фиг. 4), то точка $O$ дѣлитъ пополамъ каждый діаметръ $PP'$. Слѣдовательно, при помощи построенія 2., мы можемъ черезъ любую точку $Q$ окружности (какъ и черезъ любую другую точку) провести прямую, параллельную $PP'$. Если $R$ есть вторая точка пересѣченія этой параллели съ окружностью K, то діаметры $QO$ и $RO$ опредѣляютъ на нашей окружности двѣ другія точки $Q'$ и $R'$ такимъ образомъ, что прямыя $QR$, $PP'$ и $Q'R'$ параллельны и отстоятъ другъ отъ друга на одно и то же разстояніе. Эти три прямыя встрѣчаютъ всякую прямую $g$, имъ не параллельную, въ трехъ точкахъ, изъ которыхъ двѣ точки также отстоятъ на равныхъ разстояніяхъ отъ средней точки. Слѣдовательно, при помощи построенія 2. можно черезъ любую точку провести прямую, параллельную прямой $g$. При помощи же построенія 1. мы теперь можемъ на прямой $g$ раздѣлить любой отрѣзокъ пополамъ. Такъ какъ діаметръ $PP'$ всегда можно выбрать такъ, чтобы онъ не былъ параллеленъ заданной прямой $g$, то мы получимъ теорему:



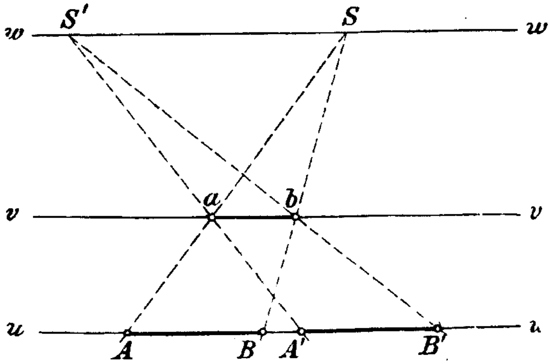
Фиг. 4.

Предложеніе 3. Если начерчена окружность и данъ ея центръ, то съ помощью линейки, безъ циркуля, возможно:

1) къ данной прямой черезъ данную точку провести параллельную прямую;

2) раздѣлить данный отрѣзокъ пополамъ.

**2.** Послѣ этихъ предварительныхъ разсужденій мы можемъ прежде всего указать пріемъ Штейнера для „передвиженія" отрѣзка вдоль по своей прямой. Чтобы на прямой $u$ отложить отъ точки $A'$ отрѣзокъ, равный $AB$, въ томъ же направленіи (фиг. 5) проведемъ, согласно предложенію 3, двѣ прямыя $v$ и $w$, параллельныя прямой $u$. Далѣе, произвольную точку $S$ на прямой $w$ соединимъ прямыми съ точками $A$ и $B$. Пусть $a$ и $b$ будутъ точки пересѣченія прямой $v$ съ прямыми $SA$ и $SB$; тогда прямая $A'a$ опредѣляетъ на прямой $w$ точку $S'$ такимъ образомъ, что прямая $S'b$ встрѣчаетъ прямую $u$ въ требуемой точкѣ $B'$, т. е. $A'B' = AB$.



Фиг. 5.

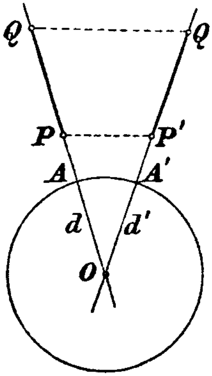
Легко уяснить себѣ, какъ произвести то же построеніе, если отрѣзокъ $A'B'$ долженъ имѣть направленіе, противоположное $AB$. Заданную точку, отъ которой нужно произвести отложеніе, лучше всего въ этомъ случаѣ обозначить черезъ $B'$ и затѣмъ указаннымъ выше построеніемъ опредѣлить точку $A'$. Доказательство основывается на подобіи треугольниковъ $aSb$ и $ASB$, съ одной стороны, и треугольниковъ $aS'b$ и $A'S'B'$, съ другой стороны. Такъ какъ три параллели отсѣкаютъ на любыхъ двухъ прямыхъ пропорціональныя части, то

$$AB : ab = SA : Sa = S'A' : S'a = A'B' : ab,$$

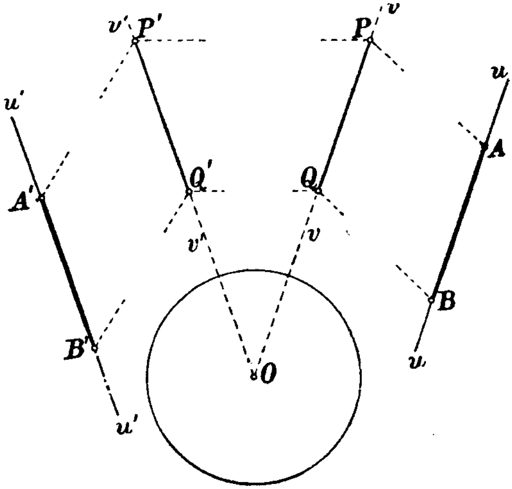
слѣдовательно, $AB = A'B'$.

Къ этому построенію мы присоединимъ еще одно, которое даетъ возможность произвести поворотъ отрѣзка, расположеннаго на діаметрѣ данной окружности $\varkappa$, вокругъ ея центра $O$. Положимъ, что діаметръ $d$, на которомъ лежитъ отрѣзокъ $PQ$, нужно повернуть такимъ образомъ, чтобы онъ занялъ положеніе $d'$ (фиг. 6). Прямая $d'$ пересѣкаетъ окружность $\varkappa$ въ двухъ точкахъ; мы можемъ еще произвольно выбрать изъ нихъ точку $A'$, въ которую должна упасть точка окружности $A$, лежащая между $O$ и $P$. Если мы теперь черезъ точки $P$ и $Q$ проведемъ прямыя, параллельныя $AA'$ (предложеніе $3,_1$), то онѣ встрѣтятъ прямую $d'$ въ двухъ точкахъ $P'$ и $Q'$, при чемъ, какъ легко показать, $P'Q'$ равно $PQ$.

Положимъ, наконецъ, что намъ нужно произвольный отрѣзокъ $AB$ на прямой $u$ перенести на любую другую прямую $u'$, при чемъ конечная точка новаго отрѣзка и его направленіе намъ заданы. Въ такомъ случаѣ,

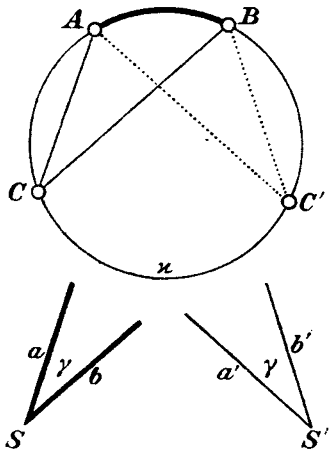



Фиг. 6.




Фиг. 7.

очевидно, нужно только изъ центра $O$ провести двѣ прямыя $v$ и $v'$ (фиг. 7), параллельныя даннымъ, перенести отрѣзокъ $PQ = AB$ на прямую $v$ посредствомъ построенія параллелограмма $PQAB$, далѣе повернуть отрѣзокъ $PQ$ въ положеніе $P'Q'$ на прямой $v'$ и, наконецъ, перенести отрѣзокъ $PQ'$ на прямую $u'$ путемъ построенія параллелограмма $P'Q'A'B'$; тогда $A'B' = AB$. Смотря потому, отмѣчена ли **данная** конечная точка $E$ отрѣзка $A'B'$ буквою $A'$ или $B'$, искомая точка (соотвѣтственно $B'$ или $A'$) расположена на прямой $u'$ справа или слѣва отъ точки $E$.




Фиг. 8.

**3.** Основная задача измѣренія угловъ, заключающаяся въ томъ, чтобы отложить данный уголъ $(a, b)$ отъ данной прямой $a'$ въ данной на ней точкѣ $S'$, допускаетъ слѣдующее простое рѣшеніе*).

Черезъ произвольную точку $C$ окружности $\varkappa$ (фиг. 8) мы проводимъ къ $a$ и $b$ параллельныя; онѣ встрѣтятъ $\varkappa$ въ двухъ точкахъ $A$ и $B$. Черезъ $A$ мы проводимъ параллельную линіи $a'$, которая встрѣтитъ $\varkappa$ въ нѣкоторой точкѣ $C'$. Если теперь черезъ $S'$ мы про-

*) Это рѣшеніе избавляетъ отъ необходимости проводить двѣ параллельныя, что необходимо выполнить въ построеніи Штейнера.

ведемъ линію $b'$, параллельную $C'B$, то $\sphericalangle(a',b') = \sphericalangle AC'B = \sphericalangle ACB = \sphericalangle (a, b)$, что и требовалось.

Въ цѣляхъ большей доступности мы изложили процессъ откладыванія отрѣзковъ и угловъ на языкѣ элементарной геометріи, въ которой каждая разсматриваемая прямая сперва „проводится". Если мы примемъ окружность и всѣ прямыя просто, какъ данныя, что въ строго логической геометріи сдѣлать необходимо, то намъ остается только послѣдовательно представлять себѣ вспомогательныя линіи и точки. Въ этомъ и будетъ состоять требуемое формальное (имманентное) построеніе.

## § 6 Натуральная геометрія.

1. Идеализація при посредствѣ предѣльнаго перехода, которая обыкновенно производится надъ сырымъ матеріаломъ геометріи — матеріальными точками, прямыми и плоскостями, чтобы освободить его отъ неопредѣленности и всякой произвольности, вызвала такой рядъ сомнѣній, что возникаетъ какъ бы даже вопросъ объ истинности всей геометріи. Съ другой стороны, какъ мы увидимъ ниже, аналитическая геометрія, если развивать ее, какъ чистый анализъ трехмѣрнаго линейнаго численнаго многообразія [7]) безъ всякаго отношенія къ пространственнымъ представленіямъ, обнаруживаетъ, что элементарная геометрія никогда не можетъ привести къ логическому противорѣчію. И все же наши критическія указанія, что такъ называемыя „геометрическія" точки, плоскости и прямыя не имѣютъ пространственнаго существованія, что обыкновенное опредѣленіе конгруэнтности относится только къ матеріальнымъ, совершенно неизмѣннымъ образамъ и т. д., остаются въ полной силѣ. Содержащееся въ этомъ кажущееся противорѣчіе разрѣшается слѣдующимъ образомъ.

Евклидъ, конечно, предпосылаетъ своей системѣ сомнительныя опредѣленія, и многіе учебники, даже такой прекрасный, какъ Бальцера [8]), повторяютъ то же еще и по настоящее время. Но при дальнѣйшемъ развитіи системы изъ этихъ опредѣленій не дѣлается никакихъ выводовъ, потому что къ этому не представляется повода. Что, собственно, худого даже въ томъ, что окружность или другая линія имѣютъ въ толщину нѣсколько десятыхъ миллиметра? Лишь въ теоріи функцій сказывается надобность въ точкахъ, не имѣющихъ протяженія, и линіяхъ, не имѣющихъ толщины, именно, когда мы относимъ въ комплексной числовой плоскости каждому числу точку и обратно. Несогласія, вызываемыя недопустимой идеализаціей основныхъ понятій, издавна возникали лишь въ ученіи о параллельныхъ линіяхъ и

7) Это понятіе выяснится ниже.

8) R. Baltzer. „Elemente der Mathematik", въ двухъ томахъ. Въ шестидесятыхъ годахъ это было наиболѣе распространенное въ Германіи сочиненіе по элементарной математикѣ. Во второмъ изданіи этого сочиненія, появившемся въ 1867 г., была впервые изложена для широкой публики сущность идей Н. И. Лобачевскаго.

вообще повсюду, гдѣ играетъ роль понятіе о безконечности. Если поэтому элементарная геометрія можетъ остаться въ силѣ, какъ геометрія созерцаемаго, то она должна быть построена, безъ всякой идеализаціи.

**2.** Возникаетъ вопросъ, нельзя ли построить геометрію — ее можно было бы назвать натуральной геометріей, — которая категорически отказалась бы отъ всякаго предѣльнаго перехода и придерживалась бы только того, что наши чувства дѣйствительно воспринимаютъ, или, по крайней мѣрѣ, того, что мы представляемъ себѣ доступнымъ нашимъ чувствамъ, т. е. матеріальныхъ точекъ, линій и поверхностей въ конечной части пространства, которая доступна нашему обозрѣнію, въ предѣлахъ которой мы можемъ даже подвергнуть провѣркѣ всѣ наши сужденія и выводы. Научная система натуральной геометріи должна была бы прежде всего въ вводной главѣ собрать сырой матеріалъ геометріи въ фактахъ и представленіяхъ методами естествознанія. Такого рода глава, какъ мы себѣ ее представляемъ, составила бы прекрасный матеріалъ для пропедевтическаго обученія геометріи, чтобы пробудить и укрѣпить пространственныя представленія, чтобы развить способность къ геометрическому созерцанію — этому первоисточнику геометрическаго творчества. Чего бы только нельзя было сказать о (матеріальной) прямой. Натянутая нить, не слишкомъ большой длины, какъ мы уже указывали выше, могла бы пробудить представленіе о прямой. Мы можемъ вытянуть проволоку такимъ образомъ, чтобы она плотно прилегала къ натянутой нити, это была бы болѣе устойчивая модель. Визируя вдоль этой проволоки, мы какъ бы сводимъ ее къ точкѣ: „внутренняя ея часть заслоняется наружной“ (Платонъ). Мы подопремъ проволоку въ двухъ точкахъ, она остается неподвижной, между тѣмъ при одной подпертой точкѣ (за исключеніемъ середины) она не могла бы оставаться въ покоѣ. Мы далѣе сдвигаемъ прутъ, сохраняя тѣ же двѣ точки опоры и въ то же время визируемъ: прямая опять-таки сводится къ точкѣ и какъ будто остается въ покоѣ. Такимъ образомъ устанавливается, что прямая (отрѣзокъ) можетъ быть продолжена, а также и тотъ фактъ, что посредствомъ двухъ точекъ она можетъ быть, какъ механически построена, такъ и формально опредѣлена. Затѣмъ можно было бы выяснить провѣшиваніе [9]) прямыхъ линій въ полѣ путемъ послѣдовательнаго визированія, упомянуть о прицѣлѣ и о многомъ другомъ, на чемъ эмпирически осуществляется понятіе о прямой. Наконецъ, линейка была бы наиболѣе совершенной реализаціей прямой линіи, но взглядъ въ увеличительное стекло предостерегалъ бы насъ отъ иллюзій, что это осуществленіе прямой дѣйствительно достигаетъ совершенства [*]).

[9]) Подъ „провѣшиваніемъ“ прямой линіи въ геодезіи разумѣютъ послѣдовательное нанесеніе въ полѣ точекъ, расположенныхъ на одной прямой.

См. Э. Вихертъ „Введеніе въ геодезію“, „Mathesis“, стр. 13.

*) Ср. также P. du Bois-Reymond, „Die allgemeine Funktionentheorie“. Tübingen 1882.

3. Наблюденія становятся обильнѣе, когда мы восходимъ къ понятію о натуральной (матеріальной) плоскости. Зеркальная поверхность спокойной жидкости можетъ послужить прототипомъ; мы тотчасъ замѣчаемъ, что мы можемъ прикладывать къ ней остріе линейки во всѣхъ направленіяхъ. Это свойство мы сейчасъ же замѣчаемъ и на рядѣ другихъ поверхностей, которыя мы непосредственно приложимъ для испытанія къ поверхности жидкости. Такимъ образомъ мы получимъ въ видѣ, напримѣръ, тонкой пластинки прочную модель плоскости. Она механически устанавливается на трехъ своихъ точкахъ, не расположенныхъ на одной прямой (за исключеніемъ прямыхъ, проходящихъ черезъ центръ тяжести, которыя достаточно подпереть въ двухъ точкахъ); по תремъ точкамъ опоры пластинку можно свободно передвигать, при чемъ при визированіи она не двигается: плоскость опредѣляется тремя точками. Далѣе было бы интересно показать, какъ различнаго рода ремесленники изготовляютъ (ограниченную) плоскость, какъ они ее затѣмъ продолжаютъ во всѣхъ направленіяхъ. Тѣ особенныя прямыя, которыя достаточно закрѣпить, чтобы механически привести плоскость въ равновѣсіе, перемѣщаются при ея продолженіи, какъ и центръ тяжести; они представляютъ собой, такимъ образомъ, перемѣнныя свойства натуральной плоскости, тогда какъ способность ея опредѣляться тремя точками, не лежащими на одной прямой, представляетъ собой существенное свойство плоскости. Нѣтъ, конечно, необходимости выдвигать это различіе: плоскость во всякомъ случаѣ имѣетъ центръ тяжести, какъ бы мы ее ни продолжали. Здѣсь только ясно выражается произвольность, которая проявляется въ построеніи понятія о плоскости. Если бы при продолженіи плоскости мы придавали больше значенія тому, что она осуществляется спокойной поверхностью воды, то она превратилась бы въ то, что мы теперь называемъ сферой *), конечно, необозримо большой. Здѣсь нѣтъ мѣста возраженію, что на такой плоскости не можетъ умѣститься прямая. Вѣдь эту прямую мы должны были бы получить лишь путемъ продолженія сравнительно небольшого прямолинейнаго отрѣзка на плоскости, напримѣръ, при помощи визированія. Если бы при этомъ послѣ большого труда было обнаружено нѣкоторое уклоненіе, то достаточно было бы этотъ опытъ повторить, чтобы навѣрное получить другое уклоненіе; къ тому же сколько-нибудь гладкихъ плоскостей значительнаго протяженія вовсе не существуетъ, такъ что экспериментальному рѣшенію вопроса вовсе нѣтъ мѣста. Мимоходомъ намѣтимъ здѣсь вопросъ: что стало бы съ геометріей, если бы ея „плоскости“ въ „дѣйствительности“ были бы большими „сферами“? Отвѣтъ на этотъ вопросъ могъ бы поразить того, кто стоитъ далеко отъ математическихъ соображеній этого рода; мы могли бы, какъ мы увидимъ ниже, въ

*) Строго говоря, геоидомъ.

этомъ предположенiи получить всѣ предложенiя нашей геометрiи; такая постановка вопроса для физики имѣла бы даже нѣкоторыя преимущества.

**4.** Однако, довольно! Изъ этого очерка достаточно ясно, какъ, на нашъ взглядъ, можно было бы провести первое наглядное обученiе эмпирической геометрiи; это могло бы быть очень полезно! Мы позволимъ себѣ только еще указать, какой богатый матерiалъ представило бы наблюденiе симметрiи въ предметахъ природы. Прежде всего мы грубо воспроизведемъ симметрiю относительно оси въ плоскости такимъ образомъ, что мы на листѣ бумаги чернымъ мѣломъ нарисуемъ какую-либо фигуру, напримѣръ, каштановый листъ, а затѣмъ, перегнувъ бумагу по оси симметрiи и плотно сложивъ оба полулиста, оттиснемъ фигуру по другую сторону оси. Это даетъ уже намъ переходъ отъ обыкновенной, чисто созерцательной геометрiи къ чертежной. Легко усмотрѣть и доказать на основанiи опредѣленiя, что окружность, центръ которой лежитъ на оси симметрiи, при копированiи переходитъ сама въ себя. Пользуясь двумя окружностями такого рода, можно непосредственно дать построенiе точки, сопряженной съ данной[10]). Это приводитъ къ рѣшенiю цѣлаго ряда конструктивныхъ задачъ.

Когда эмпирическiй матерiалъ геометрiи такимъ образомъ въ достаточной мѣрѣ собранъ, когда простыя заключенiя уже привели къ сознанiю возможности логической разработки, когда намъ удалось уже пробудить вкусъ къ тонкимъ логическимъ выводамъ, которые раскрываютъ намъ глубоко сокрытыя свойства фигуръ, то слѣдующая глава „натуральной" геометрiи должна точно разграничить тѣ свойства геометрическихъ фигуръ, которыя могутъ быть доказаны, отъ тѣхъ, которыя нужно заимствовать непосредственно изъ опыта. Тогда обнаружится, что одно и то же предложенiе иногда можетъ оказаться доказуемымъ, а иногда недоказуемымъ, смотря по тому, какiя положенiя мы приняли безъ доказательства. Въ концѣ концовъ, является, такимъ образомъ, въ значительной мѣрѣ дѣломъ произвола и вкуса, что принять за основныя положенiя: нужно только, чтобы основныя посылки легко познавались эмпирически, безъ сложныхъ экспериментовъ.

**5.** Но теперь возникаетъ коренной вопросъ. Можно ли изъ этого сырого матерiала, изъ этихъ грубо эмпирическихъ точекъ, линiй и поверхностей построить науку? На этотъ вопросъ можетъ дать отвѣтъ лишь успѣхъ такого начинанiя, и въ этомъ смыслѣ вопросъ нужно считать уже рѣшеннымъ. Сочиненiе Паша „Лекцiи по новой геометрiи"[11]) даетъ такого

[10]) Если мы черезъ данную точку проведемъ двѣ окружности, центры которыхъ расположены на оси, то вторая точка пересѣченiя этихъ окружностей есть точка, симметричная данной относительно оси.

[11]) M. Pasch. „Vorlesungen über Neuere Geometrie". Leipzig, 1882. Мы рѣшительно не можемъ согласиться съ тѣмъ, что книга Паша воспроизводитъ ту

рода разработку геометрической, въ узкомъ смыслѣ этого слова, части геометріи, той части, которую мы выше называли „натуральной геометріей“. Чтобы охарактеризировать эту прекрасную книгу, которую каждому слѣдовало бы прочитать, такъ какъ она имѣетъ цѣлью болѣе интенсивное углубленіе внутрь науки, чѣмъ экстенсивное ея расширеніе, мы приведемъ слѣдующую выдержку изъ предисловія.

„Съ геометріей можно, конечно, связывать самыя разнообразныя соображенія спекулятивнаго характера; но плодотворныя примѣненія, которыя геометрія постоянно находитъ въ естествознаніи и въ практической жизни, во всякомъ случаѣ, основаны на томъ, что геометрическія понятія первоначально строго соотвѣтствовали эмпирическимъ объектамъ, хотя постепенно онѣ и были обвиты сѣтью искусственныхъ понятій для содѣйствія теоретическому ея развитію; и поскольку мы напередъ ограничиваемъ себя этимъ эмпирическимъ ядромъ, геометрія сохраняетъ характеръ естественной науки, которая отличается отъ другихъ вѣтвей естествознанія только тѣмъ, что она заимствуетъ изъ опыта лишь небольшое число понятій и законовъ“.

Сообразно этой точкѣ зрѣнія, „точками“ у Паша являются не мистическіе туманные объекты нашего мышленія, а матеріальныя тѣла, „дѣленіе которыхъ падаетъ за предѣлы нашего наблюденія“; такимъ образомъ, это не вещи, „не имѣющія частей“ (Евклидъ), а такія, частями которыхъ приходится пренебречь. Если по Пашу мы также должны представлять себѣ точки, линіи, поверхности очень тонкими, то это, собственно, совершенно несущественно; у Паша (ограниченная) прямая имѣетъ, строго говоря, конечное число такихъ точекъ; двѣ точки даже не должны быть слишкомъ близки одна отъ другой, если онѣ должны опредѣлять прямую (l. c. стр. 17); ничего худого не произошло бы и отъ того, что мы нѣсколько увеличили бы точки, линіи и поверхности; но только область того, что мы на объектахъ непосредственно наблюдаемъ и изучаемъ, нѣсколько бы сократилась. Если кто-либо опасается, что эта натуральная точка зрѣнія, возвращающая насъ на тотъ путь, по которому геометрія исторически достигла современнаго своего развитія, вводитъ въ геометрію реализмъ и грубыя чувственныя представленія, то мы совѣтуемъ прочитать основные параграфы книги Паша. Нужно имѣть чрезвычайно тонкое чутье, чтобы оцѣнить всѣ эти незначительные, даже ничтожные объекты, изъ которыхъ геометрія дѣлаетъ свои великіе выводы. Каждый, повидимому,

„натуральную“ геометрію, о которой говоритъ авторъ. Мы очень цѣнимъ это сочиненіе, но главную заслугу автора усматриваемъ именно въ томъ, что онъ первый далъ аксіомы, которыя даютъ возможность формально обосновать расположеніе точекъ на прямой. (См. сочиненіе В. Каганъ. „Основанія геометріи“, т. II, гл. 35)

Вообще, эти разсужденія относительно „натуральной геометріи“ представляются намъ очень шаткими; ихъ значеніе въ дальнѣйшемъ крайне ограничено.

знаетъ, что значитъ „между", но кто сумѣлъ такъ точно указать свойства, которыми это понятіе опредѣляется? [12])

**6.** Мы не имѣемъ въ виду излагать здѣсь идей Паша; мы хотѣли бы только подчеркнуть одно обстоятельство: было бы совершенно невозможно установить какія-либо общія предложенія, если бы мы оставили эмпирическія прямыя и плоскости во всемъ ихъ несовершенствѣ, если бы мы даже не устранили ихъ ограниченности въ пространствѣ. Но это осуществляется не путемъ недопустимыхъ операцій надъ объектами чувственнаго воспріятія, вошедшими въ геометрію, — это осуществляется на понятіяхъ.

Совокупность прямыхъ, проходящихъ черезъ одну и ту же точку $A$, называютъ связкой лучей; лучи, образующіе связку, обладаютъ той особенностью, что любые два изъ нихъ (которые расположены не слишкомъ близко другъ къ другу) опредѣляютъ плоскость. Всѣ эти образы нужно, конечно, представлять себѣ пространственно ограниченными. Если мы въ такой плоскости возьмемъ два луча связки $u$ и $v$, на прямой $u$ выберемъ двѣ точки $B$ и $B'$, на прямой $v$ двѣ точки $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$, такъ что прямыя $B\mathfrak{B}$ и $B'\mathfrak{B}'$ пересѣкутся въ точкѣ $S$, прямыя $B\mathfrak{B}'$ и $B'\mathfrak{B}$ въ точкѣ $T$, то прямая $ST$ встрѣтитъ прямую $u$ въ точкѣ $A'$ *), положеніе которой, какъ мы увидимъ ниже, зависитъ только отъ первоначально выбранныхъ точекъ $A$, $B$ и $B'$ и не зависитъ отъ $v$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$, $S$, $T$. Если мы теперь проведемъ черезъ прямую $u$ произвольную плоскость, выберемъ въ ней произвольную точку $S$, соединимъ ее съ точками $B$, $B'$ и $A'$ — на прямой $SA'$ возьмемъ вторую точку $T$, которую также соединимъ съ $B$ и $B'$, то прямая $BT$ встрѣчаетъ прямую $SB'$ и прямая $B'T$ прямую $SB$ соотвѣтственно въ точкахъ $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ такимъ образомъ, что прямая $x = \mathfrak{B}\mathfrak{B}'$ проходитъ черезъ точку $A$. При всѣхъ этихъ построеніяхъ мы вовсе не пользовались точкой $A$. Если теперь $u$ и $v$ суть двѣ прямыя въ плоскостяхъ, о которыхъ мы не можемъ утверждать, что онѣ пересѣкаются, то мы все же можемъ указаннымъ выше пріемомъ построить произвольное число прямыхъ $x$, по одной черезъ каждую точку пространства. Относительно двухъ такихъ прямыхъ мы опять таки не можемъ сказать, пересѣкаются ли онѣ или нѣтъ; но можно показать, что каждые два такихъ луча опредѣляютъ плоскость

[12]) Мы считаемъ нужнымъ еще разъ сказать, что чтеніе книги Паша насъ къ этимъ заключеніямъ не привело. Сила Паша обнаруживается именно тамъ, гдѣ онъ становится на почву строго теоретическихъ разсужденій, къ числу которыхъ и принадлежитъ хврактеристика понятія „между". Но этимъ сбивчивымъ эмпирическимъ разсужденіямъ мы придаемъ столь же мало цѣны здѣсь, какъ и у Паша; и въ настоящемъ сочиненіи большую цѣну имѣютъ лишь дальнѣйшія строгія разсужденія, а не эти неясныя соображенія о конечномъ числѣ „натуральныхъ" точекъ на „натуральной" прямой и т. д.

*) Четвертая гармоническая къ точкамъ $A$ и $B$, $B'$.

совершенно такъ же, какъ два луча связки. И вотъ, по Пашу, такая система лучей также называется „связкой“ и именно „несобственной связкой“, и ей приписывается „несобственная“ точка, черезъ которую „проходятъ“ всѣ лучи связки. Это, такимъ образомъ, не болѣе, какъ форма выраженія. Такимъ же образомъ опредѣляются „несобственныя“ сѣченія плоскостей, которыя „въ дѣйствительности“ не пересѣкаются. Трудности понятія о конгруэнтности также преодолѣваются здѣсь не путемъ неосуществимыхъ представленій, а помощью надлежащихъ понятій. Очень интересенъ параграфъ (§ 9, l. c.), въ которомъ расширяется понятіе „между“. Соображенія, которыя необходимы, чтобы выяснить, что мы дѣйствительно можемъ говорить объ этихъ несобственныхъ прямыхъ и плоскостяхъ, какъ о дѣйствительно существующихъ, въ высшей степени интересны. Въ результатѣ же получается стройная система натуральной геометріи, свободная отъ противорѣчій. Она выясняетъ и оправдываетъ всѣ геометрическія системы, которыя относятся къ образамъ, дѣйствительно доступнымъ нашему представленію, къ точкамъ, линіямъ и поверхностямъ, локализированнымъ въ пространствѣ [13]).

---

13) Понятіе о „несобственныхъ“ или „идеальныхъ“ точкахъ, прямыхъ, плоскостяхъ и т. д., введенное Клейномъ и развитое Пашемъ, принадлежитъ къ числу наиболѣе трудныхъ понятій въ абстрактной геометріи; мы удивляемся, что авторъ, упоминая о немъ здѣсь лишь вскользь, аппелируетъ къ нему ниже неоднократно. Мы не считаемъ возможнымъ выяснить это понятіе въ предѣлахъ подстрочнаго примѣчанія, а потому посвятили ему особое дополненіе въ концѣ книги: „О безконечно удаленныхъ элементахъ“. Было бы полезно ознакомиться съ этимъ дополненіемъ до чтенія дальнѣйшаго. Разсчитывая на это, мы не входимъ уже въ поясненіе того, что изложено ниже въ § 7.

ГЛАВА II.

# Натуральная геометрія, какъ одна изъ безчисленныхъ формъ проявленія строго отвлеченной геометріи (метагеометріи).

## § 7 Натуральная геометрія и приближенная геометрія. Annalysis situs. Метагеометрія.

Изложенныя выше соображенія о натуральной геометріи должны были достаточно выяснить сущность основныхъ ея понятій. Они представляютъ своеобразную смѣсь эмпиризма и формализма. Понятія „точка", „прямая" и т. д., имѣющія эмпирическое происхожденіе, должны быть „расширены" за предѣлы узкой области, къ которой они собственно относятся, если мы хотимъ получать общія предложенія. Этотъ процессъ расширенія совершается чисто формально, путемъ введенія особаго способа выраженія, позволяющаго, напримѣръ, трактовать прямыя въ плоскости, не пересѣкающіяся въ доступной нашему созерцанію области, такъ же, какъ тѣ, которыя пересѣкаются. Эта игра фиктивными фактами должна была бы привести къ дурнымъ результатамъ, если бы въ основѣ ихъ не лежала истина болѣе глубокая, которая недостаточно объективно выражается этимъ искусственнымъ языкомъ. Такъ, въ разсмотрѣнномъ примѣрѣ есть нѣчто, что всегда существуетъ, когда двѣ прямыя расположены въ одной плоскости; это есть связка лучей, ими опредѣляемая, т. е. совокупность лучей, которые вмѣстѣ съ данными двумя прямыми обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что любые два изъ нихъ опредѣляютъ плоскость. Связка существуетъ всегда, общей же точки всѣхъ лучей можетъ и не быть,— по крайней мѣрѣ, мы воздерживаемся отъ опредѣленнаго сужденія въ этомъ отношеніи. Необходимость введенія искусственнаго понятія „несобственной" точки пересѣченія сказывается тогда, когда мы желаемъ получить возможность присвоить и случайное свойство (существованіе точки пересѣченія) также и общему понятію. Пашъ совершенно справедливо утверждаетъ, что понятіе „точка" можно было бы вовсе устранить, замѣнивъ его связкой, конечно, не съ самаго начала. Но это слишкомъ удалило бы насъ отъ обычной точки зрѣнія на геометрическія предложенія и создало бы большія затрудненія въ словесномъ ихъ выраженіи.

**2.** Къ тому же этотъ шагъ необходимо повлекъ бы за собой слѣдующій. Двѣ плоскости (въ предѣлахъ доступной намъ части пространства) имѣютъ прямую пересѣченія лишь случайно, между тѣмъ какъ содержащая ее связка существуетъ всегда. Чтобы избѣжать понятія о „несобственной" прямой, было бы, такимъ образомъ, необходимо устранить изъ геометріи также понятіе о „собственной" прямой и вмѣсто этого ввести понятіе о пучкѣ плоскостей. Разсмотрѣнному въ пунктѣ 1. случаю двухъ прямыхъ, расположенныхъ въ одной плоскости, здѣсь соотвѣтствовали бы два пучка плоскостей, имѣющихъ общую плоскость; они опредѣляютъ тогда связку плоскостей, т. е. такую систему пучковъ (плоскостей), изъ которыхъ каждые два имѣютъ общую плоскость. Основными образами геометріи при такой постановкѣ служили бы плоскость, пучекъ плоскостей и связка плоскостей. Напротивъ, точки и прямыя были бы въ такомъ случаѣ лишь вспомогательными образами, которые служили бы лишь для построенія основныхъ образовъ. Если принять, такимъ образомъ, что существуютъ всѣ пучки и связки плоскостей, то можно было бы вовсе обойтись безъ точекъ и прямыхъ; но это уже не была бы натуральная геометрія. Уже самый тотъ фактъ, что предложенія этой геометріи трактовали бы исключительно о пучкахъ и связкахъ плоскостей, представлялся бы въ достаточной мѣрѣ ненатуральнымъ; но попробуйте выразить въ этой формѣ понятіе объ отрѣзкѣ, объ углѣ, попробуйте формулировать предложенія о конгруэнтности! Мы предпочтемъ поэтому остаться при понятіяхъ о „несобственныхъ" точкахъ и прямыхъ, хотя и онѣ не вполнѣ соотвѣтствуютъ дѣйствительному положенію вещей. Здѣсь нужно остерегаться еще одной логической ошибки: если логически расширенное понятіе о точкѣ, охватывающее какъ собственныя, такъ и несобственныя точки, не можетъ вести къ противорѣчію, то это имѣетъ наиболѣе глубокія причины не въ томъ, что въ дѣйствительности мы въ каждомъ случаѣ можемъ считать существующими*) только „собственныя" точки; для такого заключенія мы не имѣемъ никакихъ основаній. Когда мы говоримъ о „несобственныхъ" элементахъ, то это отнюдь не исключаетъ возможности въ расширенной области, въ которой мы оперируемъ, во многихъ случаяхъ замѣщать эти „несобственные" элементы при продолженіи разсматриваемыхъ прямыхъ и плоскостей „собственными" элементами; эта постановка вопроса въ скромномъ самоограниченіи старается лишь избѣгать всякаго заключенія, если мы не имѣемъ возможности провѣрить на объектахъ, справедливо ли оно или нѣтъ.

*) См. примѣчаніе на стр. 14.

**3.** Въ этомъ заключается извѣстный произволъ или, если угодно, нерѣшительность, мало удовлетворяющая умъ, стремящійся къ ясности и къ опредѣленности. То обстоятельство, что мы должны представлять себѣ прямыя и плоскости ограниченными, создаетъ неспокойное состояніе нашей фантазіи: мы можемъ представлять себѣ границы прямой то шире, то уже, границы плоскости — расположенными то такъ, то иначе. Къ этимъ неопредѣленностямъ присоединяются еще другія, болѣе глубокія. Такъ какъ прямыя, плоскости и точки имѣютъ извѣстную толщину, безъ чего мы ихъ реально вовсе не можемъ себѣ представить, то можно вообразить себѣ цѣлый рядъ геометрій $G_1$, $G_2$, $G_3$, . . . такимъ образомъ, что основные образы въ каждой послѣдующей системѣ тоньше, чѣмъ въ предыдущей; скажемъ, напримѣръ, въ $G_1$ они имѣютъ 1 mm. въ толщину, въ $G_2$ только 0,1 mm., въ $G_3$ только 0,01 и т. д.; врядъ ли нужно говорить, что и самый миллиметръ не имѣетъ абсолютно точной величины, а опредѣленъ лишь въ предѣлахъ нѣкотораго интервала, правда, весьма незначительнаго *). То, что въ системѣ $G_1$ представляетъ собой линію, въ системѣ $G_2$ есть тѣло, которое можно заполнить многочисленными линіями этой системы, обвести многочисленными касательными линіями. Если мы, обратно, отъ системы $G_2$ возвратимся къ системѣ $G_1$, то многія тонкости, которыя еще доступны въ системѣ $G_2$, здѣсь совершенно отпадаютъ: отрѣзокъ длиною въ 1 m. въ системѣ $G_1$ будетъ имѣть тотъ же видъ, взятъ ли онъ отъ прямой линіи или отъ окружности съ радіусомъ въ 300 m. Внутри (пустой) прямой системы $G_1$ можно помѣстить много линій системы $G_2$ и, подавно, системы $G_3$, которыя даже могутъ и не быть непремѣнно прямыми; это могутъ быть, напримѣръ, узкія синусоиды или части кривыхъ третьяго порядка. И отсюда, повторимъ это попутно, вновь вытекаетъ, что натуральное понятіе о прямой или о плоскости не можетъ быть абсолютно опредѣленнымъ. Между тѣмъ математическая мысль, можно сказать, съ непреодолимой силой стремится къ абсолютнымъ понятіямъ, свободнымъ отъ всякаго произвола и неопредѣленности, стремится къ опредѣленности, хотя бы даже за счетъ эмпирической правильности. Чѣмъ глубже мы занимаемся натуральной геометріей, тѣмъ тверже становится наша вѣра въ возможность геометріи, свободной отъ всего случайнаго, геометріи, которая о п р е д ѣ л я е т ъ свои образы свойствами, оказавшимися плодотворными въ примѣненіи къ основнымъ образамъ натуральной геометріи, — геометріи, которая изъ этихъ опредѣленій, быть можетъ, съ помощью постулатовъ, раскрываетъ свои истины строго дедуктивно, независимо отъ ихъ осуществленія, доступнаго нашимъ чувствамъ. Конечно, безъ произвола при опредѣленіи основныхъ образовъ нельзя обойтись и здѣсь, ибо a priori нельзя рѣшить, какія свойства эмпирическихъ прямыхъ нужно считать су-

*) Ср. Дю-Буа Реймондъ, 1. с.

щественными и ввести въ опредѣленіе идеальныхъ прямыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, мы вѣдь видѣли (стр. 25), что, исходя изъ представленія о плоскости, какъ о поверхности неподвижной жидкости, мы могли бы собственно придти при продолженіи этой ограниченной поверхности къ представленію очень большой сферы; и съ этими „сферическими" плоскостями можно было бы столь же хорошо построить нашу обыкновенную геометрію, какъ и съ „дѣйствительными" плоскостями[1]); „сферы" этой своеобразной геометріи были бы также сферами въ обыкновенномъ смыслѣ; экспериментально никогда нельзя было бы рѣшить, которая изъ двухъ геометрій отвѣчаетъ „дѣйствительности", хотя бы уже по той причинѣ, что безконечныя прямыя и плоскости могутъ имѣть только абстрактное, а не дѣйствительное существованіе[2]).

**4.** Наша оцѣнка натуральной геометріи сложится, однако, совершенно иначе, если мы будемъ развивать ее не въ томъ направленіи, которое отвлекается отъ ея несовершенствъ, а напротивъ, сдѣлаемъ предметомъ своего изслѣдованія именно ея неточности, — если мы будемъ руководиться при этомъ принципомъ, — не искать въ ея построеніяхъ большей точности, нежели та, которую можно ожидать при неточности ея точекъ, линій и поверхностей. Это будетъ тогда „приближенная геометрія", часть той „приближенной математики", которая въ настоящее время составляетъ предметъ горячихъ желаній, которая оказала бы величайшую пользу во всѣхъ приложеніяхъ математики. Но и въ чистой математикѣ, напримѣръ, въ теоріи функцій, когда мы разсматриваемъ функцію въ предѣлахъ опредѣленной полосы, она нашла бы себѣ мѣсто; мы имѣемъ здѣсь въ виду указанія и изслѣдованія Клейна; но въ предѣлахъ элементарнаго учебника, которому еще нужно выработать понятіе о функціи (см. ниже, въ тригонометріи), этого нельзя достаточно выяснить. Но къ элементарнымъ частямъ приближенной геометріи отнюдь нельзя относиться пренебрежительно, особенно въ виду практическаго ея значенія. Мы указывали выше, что въ натуральной геометріи при извѣстной толщинѣ точекъ, линій и поверхностей нѣкоторые образы, которые абстрактно различны, эмпирически не могутъ быть отличены одинъ отъ другого, какъ

---

[1]) Это утвержденіе здѣсь представляется столь же голословнымъ, какъ и неяснымъ; но это будетъ выяснено въ слѣдующей главѣ.

[2]) Итакъ, мысль автора заключается въ томъ, что строго научной является не „натуральная" геометрія, а геометрія абстрактная, которая развивается изъ цѣлесообразно, но все-таки условно установленныхъ опредѣленій и постулатовъ; натуральная же геометрія представляетъ собой лишь примѣненіе этой абстрактной геометріи къ реальнымъ объектамъ, какъ теперь часто говорятъ „реальное осуществленіе абстрактной геометріи", — осуществленіе, которое никогда не бываетъ совершеннымъ.

Это — основная мысль, которую авторъ проводитъ черезъ все сочиненіе и выясненіе которой, строго говоря, и составляетъ цѣль самаго сочиненія.

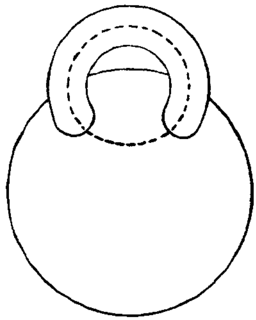
напримѣръ, части прямой и окружности весьма большого радіуса. Задача приближенной геометріи, согласно руководящимъ ея принципамъ, здѣсь заключалась бы въ томъ, чтобы составить образы, абстрактно опредѣленные или заданные какъ-либо иначе, скажемъ, кривыя, изъ болѣе простыхъ образовъ настолько точно, насколько это возможно при принятой толщинѣ точекъ и т. д. Чтобы разсмотрѣть опредѣленный случай, вообразимъ эллипсъ съ заданными осями $2a$ и $2b$. Построеніе эллипса не представляетъ затрудненій, но все же довольно сложно; положимъ, что его нужно начертить штрихомъ въ 0,5 mm. толщиною. При такой толщинѣ штриха нѣкоторыя тонкости точнаго построенія необходимо теряются. Такимъ образомъ возникаетъ вопросъ: нельзя ли составить изъ болѣе простыхъ кривыхъ, которыя было бы удобно чертить, напримѣръ, изъ дугъ окружностей, кривую, которая въ указанныхъ предѣлахъ погрѣшности замѣняла бы эллипсъ? Это была бы типичная задача геометріи, о которой идетъ рѣчь; рѣшеніе этой задачи будетъ приведено въ отдѣлѣ „Начертательная геометрія" (въ III томѣ); для этой дисциплины весьма важно имѣть возможность съ помощью циркуля и линейки чертить болѣе сложныя кривыя. Окружности, которыми мы при этомъ пользуемся, называются „окружностями кривизны", потому что онѣ по кривизнѣ въ соотвѣтствующемъ мѣстѣ настолько сливаются съ кривой, что въ предѣлахъ извѣстнаго разстоянія могутъ совершенно ее замѣнять. Точнѣе это, конечно, расплывчатое понятіе устанавливается только въ дифференціальной геометріи [3]).

**5.** Намъ пришлось въ понятіяхъ прямой и плоскости обыкновенной геометріи столь многое отвергнуть, что именно здѣсь, прежде чѣмъ мы постараемся подняться до геометріи, болѣе чистой, будетъ умѣстно поставить вопросъ, возможна ли геометрія, которая вовсе обходится безъ этихъ понятій, безъ понятія о математическихъ линіяхъ и поверхностяхъ вообще, которая высказываетъ только то, что вообще можно сказать о кривыхъ линіяхъ и поверхностяхъ. Есть ли въ такой геометріи предложенія, имѣющія

---

[3]) Выясненная здѣсь вкратцѣ идея „приближенной геометріи", какъ и приближенной математики вообще, принадлежитъ профессору Ф. Клейну (F. Klein, Göttingen) и проводится въ его сочиненіи: „Anwendung der Differential und Integralrechnung auf die Geometrie. Eine Revision der Prinzipien". Leipzig, 1901 (второе изданіе въ 1907 г.). Литографированныя лекціи. Нужно сказать, однако, что взгляды, высказываемые Клейномъ въ названномъ сочиненіи, отнюдь не получили всеобщаго признанія. Противники этихъ взглядовъ указывали, что математика можетъ быть только точная; что задача тѣхъ дисциплинъ и пріемовъ, которые Клейнъ называетъ приближенной математикой, можетъ заключаться лишь въ томъ, чтобы съ точностью оцѣнивать предѣлы ошибокъ, которыя мы получимъ, если будемъ замѣнять одни выраженія другими, болѣе простыми. Клейнъ, однако, твердо проводитъ свою точку зрѣнія, что отражается и на его взглядахъ на задачи математики въ средней школѣ. См. F. Klein und E. Riecke. „Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen". Leipzig, 1904.

дѣйствительно интересъ? Возьмемъ шарообразную поверхность, пустую внутри, скажемъ, тыкву, изъ которой вырѣзана сердцевина. Если мы гдѣ-либо на этой поверхности воткнемъ ножъ и поведемъ его по какой угодно линіи, пока концы разрѣза не сойдутся, то поверхность распадется на два куска. „Совершенно тривіальный фактъ", скажетъ нематематикъ. Но именно нематематикъ будетъ склоненъ утверждать, что такъ будетъ всегда, что разрѣзъ, концы котораго сойдутся („кольцевой" разрѣзъ), всегда раздѣлитъ поверхность на части. Если мы, однако, къ этой поверхности, которую мы представляемъ себѣ тонкостѣнной, придѣлаемъ „ушко" изъ согнутой тонкостѣнной трубки (см. фиг. 9), то разрѣзъ, который начинается на первоначальной поверхности, переходитъ на ушко, огибаетъ его и затѣмъ вновь по первоначальной поверхности безъ поворота возвращается въ точку исхода, не дѣлитъ поверхности на двѣ части. Точно такъ же, если мы, не снимая ушка, разрѣжемъ его поперекъ, то мы не получимъ двухъ кусковъ. Можно даже оба эти разрѣза произвести совмѣстно, они все-таки не раздѣлятъ поверхности; но послѣ этого, какъ легко себѣ уяснить, каждый кольцевой разрѣзъ уже раздѣлитъ поверхность на куски.



Фиг. 9.

Если мы къ первоначальной поверхности придѣлаемъ $p$ такихъ ушекъ, то можно будетъ произвести $2p$ такихъ разрѣзовъ, которые не раздѣляютъ такой поверхности на куски, но сообщаютъ ей то свойство, что каждый слѣдующій кольцевой разрѣзъ уже раздѣлитъ ее на куски. Можно показать, что на такого рода поверхности можно разнообразно провести такія не раздѣляющія ея сѣченія, такую „систему поперечныхъ сѣченій" и другими способами; можно это выполнить даже такъ, что они разрѣжутъ нѣсколько ушекъ. Но и въ этомъ случаѣ имѣются $2p$ сѣченій, которыя сообщаютъ поверхности свойства такъ называемой односвязности, заключающейся въ томъ, что всякій кольцевой разрѣзъ уже раздѣляетъ поверхность на куски. Если мы вообразимъ себѣ двѣ такихъ системы поперечныхъ разрѣзовъ, то разрѣзы одной системы въ нѣкоторыхъ точкахъ будутъ встрѣчать разрѣзы другой системы. Можно ли что-либо сказать относительно числа точекъ пересѣченія? Конечно, можно, но выводъ этихъ предложеній настолько труденъ, что для этого обыкновенно прибѣгали къ интегрированію въ комплексной области и къ высшимъ трансцендентнымъ функціямъ *). Совершенно ясно такимъ образомъ, что

*) Чисто геометрическое доказательство предложено авторомъ, Mathem. Annalen. Bd. 54.

мы имѣемъ здѣсь своеобразную геометрію, которая ведетъ не только къ интереснымъ, но и весьма труднымъ задачамъ. Это такъ называемый analysis situs *), твореніе Римана, развитое главнымъ образомъ Клейномъ и Дикомъ (Dyck). Эта дисциплина представляетъ одно изъ наиболѣе дѣйствительныхъ орудій теоріи функцій, и все же она оперируетъ только общимъ понятіемъ о линіи и поверхности (въ приближенномъ смыслѣ слова) и связности, а потому она гораздо проще обыкновенной геометріи. Въ полномъ учебно-научномъ планѣ геометріи analysis situs долженъ былъ бы занять мѣсто до элементарной геометріи.

## § 8. Евклидова геометрія въ параболической сѣти сферъ.

1. Прежде, чѣмъ мы рѣшимся противопоставить натуральной геометріи со всѣми ея недостатками чисто идеальную систему, необходимо прежде всего вполнѣ выяснить себѣ, какія свойства основныхъ геометрическихъ образовъ являются носителями геометрическихъ истинъ. Мы видѣли, что процессъ предѣльнаго перехода, который долженъ замѣстить натуральныя точки, линіи и поверхности чѣмъ-то вполнѣ опредѣленнымъ, не только недопустимъ, но и ненуженъ. При всемъ томъ могло бы казаться, что точка необходимо представляетъ собой нѣчто такое, размѣрами котораго можно пренебрегать, линія — есть образъ съ преобладающимъ линейнымъ протяженіемъ и т. д. Слѣдующія соображенія имѣютъ въ виду преодолѣть глубоко внѣдрившійся предразсудокъ, будто видъ, форма геометрическихъ образовъ что-либо вноситъ въ существо геометрическихъ предложеній, обусловливаетъ ихъ правильность. Мы увидимъ, что можно безчисленнымъ множествомъ способовъ замѣнить объекты, соотвѣтствующіе понятіямъ „точка, прямая и плоскость“, другими, отъ нихъ совершенно отличными объектами; и если мы будемъ эти послѣдніе называть соотвѣтственно точками, прямыми и плоскостями, то мы осуществимъ обычную геометрію [4]).

Простѣйшій примѣръ такого рода заключается въ слѣдующемъ: въ пространствѣ $R$ Евклидовой геометріи **) мы выберемъ точку $O$ и подъ

*) Терминъ принадлежитъ Лейбницу, который въ письмѣ къ Гюйгенсу (1679), точно по предчувствію, называетъ этимъ именемъ то, что мы теперь называемъ исчисленіемъ отрѣзковъ (кватерніоны, ученіе о протяженіи, Ausdehnungslehre); вмѣсто analysis situs было бы правильнѣе называть эту дисциплину ученіемъ о связности (Zusammenhangslehre). См. Leibniz, Mathematische Schriften, herausgegeben von C. J. Gerhardt, I, 19.

**) Такъ называютъ обычную геометрію, въ отличіе отъ другихъ геометрическихъ системъ, съ которыми мы вскорѣ познакомимся.

[4]) Авторъ выясняетъ эту идею на примѣрѣ, къ которому онъ сейчасъ и переходитъ. Этотъ примѣръ, указанный Пуанкарэ и развитый авторомъ настоящаго сочиненія, онъ называетъ простѣйшимъ. Это, однако, далеко не такая простая идея, и мы считаемъ цѣлесообразнымъ предпослать дѣйствительно простой примѣръ.

$R'$ будемъ разумѣть пространство, которое будетъ имѣть всѣ тѣ же точки, что и пространство $R$, кромѣ точки $O$. Совокупность всѣхъ сферъ и окружностей пространства $R$, которыя проходятъ черезъ точку $O$, называютъ

---

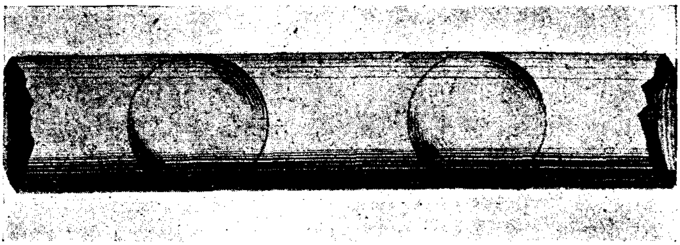
Всякій шаръ, діаметръ котораго равенъ нѣкоторой постоянной длинѣ $r$, мы условимся называть точкой геометріи фигуръ.

Всякій безконечный цилиндръ, діаметръ поперечнаго сѣченія котораго также равенъ $r$, будемъ называть прямой линіей геометріи фигуръ.

Плоскостью геометріи фигуръ мы условимся называть ограниченный двумя параллельными плоскостями слой, толщиною въ $r$.

Если шаръ лежитъ цѣликомъ внутри цилиндра, касаясь его по большому кругу, мы будемъ говорить, что въ геометріи фигуръ точка лежитъ на прямой.

Если шаръ лежитъ цѣликомъ внутри слоя, касаясь его границъ въ двухъ діаметрально противоположныхъ точкахъ, то мы будемъ говорить, что въ геометріи фигуръ точка лежитъ въ плоскости или плоскость проходитъ черезъ точку.



Фиг. а.

Точно такъ же, если цилиндръ лежитъ цѣликомъ внутри слоя, касаясь его границъ по двумъ діаметрально противоположнымъ образующимъ, то мы будемъ говорить, что въ геометріи фигуръ прямая лежитъ въ плоскости или плоскость проходитъ черезъ прямую.

Очевидно, что въ нашей геометріи фигуръ всякія двѣ точки опредѣляютъ собой прямую: вѣдь вокругъ двухъ шаровъ діаметра $r$ можно всегда описать цилиндръ, касающійся ихъ внѣшне; и діаметромъ поперечнаго сѣченія этого цилиндра будетъ служить $r$.

Точно такъ же убѣждаемся, что всякія три точки геометріи фигуръ опредѣляютъ собой одну и только одну плоскость: ибо къ tремъ шарамъ діаметра $r$ можно всегда построить одну и только одну пару внѣшне-касательныхъ плоскостей, которыя и опредѣляютъ собой слой толщиною въ $r$.

Далѣе, мы условимся считать двѣ прямыя геометріи фигуръ пересѣкающимися только тогда, когда онѣ имѣютъ общую точку; двѣ плоскости — если онѣ имѣютъ общую прямую; плоскость и прямую — если имъ принадлежитъ общая точка.

Поэтому, когда два цилиндра, изображающихъ прямыя геометріи фигуръ, пересѣкаются въ обычномъ значеніи этого слова, то эти прямыя въ геометріи фигуръ еще отнюдь не должны непремѣнно пересѣкаться. Только въ томъ случаѣ, когда оси нашихъ цилиндровъ пересѣкаются, мы можемъ вписать въ нихъ шаръ,

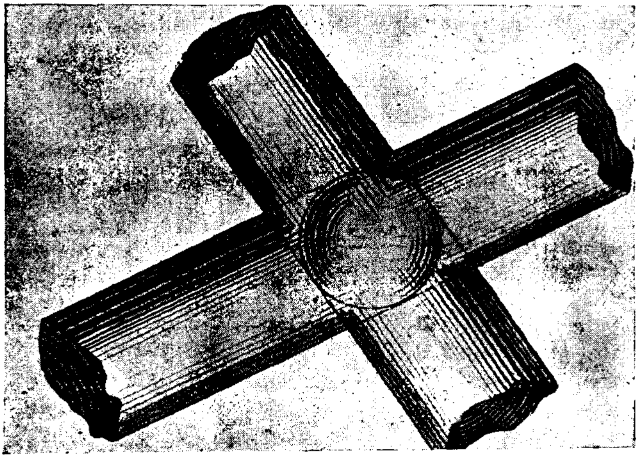
„сферической сѣтью" и притомъ параболическаго типа, въ отличіе отъ другихъ видовъ сѣтей, съ которыми мы познакомимся ниже. Плоскости и прямыя пространства $R$, проходящія черезъ точку $O$, также принадлежатъ

---

изображающій собой точку геометріи фигуръ; а потому только въ этомъ случаѣ мы будемъ считать прямыя геометріи фигуръ пересѣкающимися.

Покажемъ, что въ нашей геометріи фигуръ имѣетъ мѣсто аксіома о параллельныхъ, т. е. во всякой плоскости изъ любой ея точки можно провести къ любой ея прямой, черезъ точку не проходящей, одну и — только одну параллельную.

Возьмемъ въ обыкновенномъ пространствѣ (фиг. е) ограниченный двумя параллельными плоскостями слой толщиною въ $r$ и впишемъ въ него цилиндръ, діаметръ сѣченія котораго тоже равенъ $r$. По опредѣленіямъ, эти образы дадутъ намъ то, что мы называемъ плоскостью и лежащей на ней прямою геометріи фигуръ. Затѣмъ впишемъ въ слой шаръ діаметра $r$; при чемъ центръ шара выберемъ не



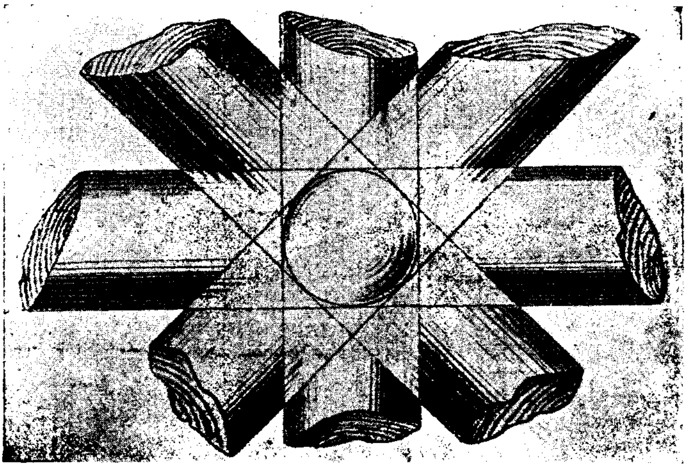
Фиг. b.

лежащимъ на центральной линіи построеннаго цилиндра. Шаръ этотъ будетъ, очевидно, изображать въ геометріи фигуръ лежащую въ построенной плоскости точку, черезъ которую построенная прямая не проходитъ. Опишемъ теперь вокругъ нашего шара касающійся его по большому кругу цилиндръ такъ, чтобы образующія этого цилиндра были параллельны образующимъ цилиндра, построеннаго выше. Цилиндръ этотъ, очевидно, также будетъ вписанъ въ слой, т. е. онъ представитъ собой прямую, лежащую въ плоскости геометріи фигуръ и параллельную первой прямой; вѣдь общей точки у этихъ прямыхъ быть не можетъ: чтобы въ два цилиндра можно было вписать общій шаръ, касающійся ихъ поверхностей, необходимо, чтобы ихъ центральныя прямыя пересѣкались. Итакъ, въ геометріи фигуръ изъ точки плоскости, лежащей внѣ любой прямой этой плоскости, можно провести къ послѣдней параллельную. Теперь покажемъ, что эта параллельная единственная. Дѣйствительно, если мы вокругъ нашего шара діаметра $r$ опишемъ любой касающійся его цилиндръ такъ, чтобы онъ лежалъ внутри нашего слоя толщины $r$, и если его образующія не параллельны образующимъ перваго цилиндра, то и центральныя прямыя этихъ цилиндровъ будутъ непараллельны другъ сѣти въ качествѣ „предѣльныхъ сферъ“ и „предѣльныхъ окружностей“ (съ безконечно большимъ радіусомъ) — точка зрѣнія, которая вообще оказывается полезной въ сферической геометріи. Теперь примемъ за „прямыя“

---

другу; но такъ какъ оба цилиндра эти вписаны въ одинъ и тотъ же слой, то центральныя линіи ихъ лежатъ въ одной плоскости; итакъ, онѣ пересѣкаются. Описавъ изъ точки ихъ пересѣченія шаръ діаметра $r$, получимъ шаръ, одновременно вписанный въ оба цилиндра; т. е. эти цилиндры изображаютъ въ геометріи фигуръ пересѣкающіяся прямыя. Этимъ аксіома параллельныхъ доказана для всякой плоскости нашей геометріи фигуръ.

Покажемъ теперь, что въ геометріи фигуръ точки расположены на прямыхъ, а прямыя въ плоскостяхъ и, наконецъ, плоскости въ трехмѣрномъ пространствѣ точно такъ же, какъ обыкновенныя точки на обыкновенныхъ прямыхъ, обыкновенныя прямыя на обыкновенныхъ плоскостяхъ и послѣднія въ обык-



Фиг. c.

новенномъ пространствѣ трехъ измѣреній. Для этого мы установимъ слѣдующее однозначное соотвѣтствіе между образами геометріи фигуръ и обыкновеннаго пространства.

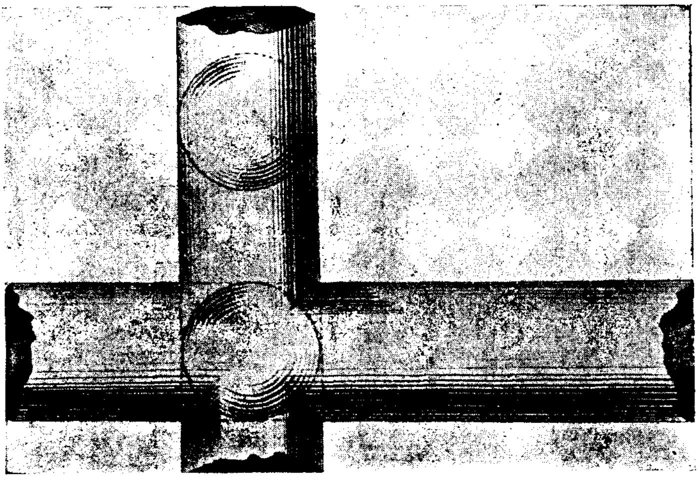
Пусть всякой плоскости обыкновеннаго пространства соотвѣтствуетъ та плоскость геометріи фигуръ, которая получится, если провести къ первой по обѣ ея стороны двѣ параллельныя плоскости на разстояніи обыкновенной прямой $\frac{r}{2}$. Пусть, далѣе, всякой обыкновенной прямой соотвѣтствуетъ та прямая геометріи фигуръ, которая получится, если мы вокругъ первой, какъ вокругъ центральной прямой, опишемъ цилиндръ діаметра $r$. Наконецъ, всякой точкѣ обыкновеннаго пространства пусть соотвѣтствуетъ та точка геометріи фигуръ, которая получится, если мы вокругъ первой, какъ центра, опишемъ діаметромъ $r$ шаръ.

Нетрудно убѣдиться въ томъ, что соотвѣтствіе, установленное такимъ образомъ, однозначно, т. е. каждому образу геометріи фигуръ соотвѣтствуетъ одинъ и только одинъ образъ обыкновеннаго пространства, и наоборотъ.

и „плоскости“ пространства $R'$ окружности и сферы пространства $R$, принадлежащія нашей сѣти. Чтобы избѣжать путанницы, мы будемъ упо-

Но что еще важнѣе — это соотвѣтствіе такого рода, что при немъ распредѣленіе элементовъ какой-либо фигуры въ обыкновенномъ пространствѣ переносится безъ измѣненія на соотвѣтствующую фигуру нашей геометріи фигуръ. Такъ, напримѣръ, ряду точекъ нѣкоторой прямой обыкновеннаго пространства соотвѣтствуетъ рядъ точекъ, лежащихъ на соотвѣтствующей прямой и притомъ въ томъ же порядкѣ.

Читатель, безъ сомнѣнія, уже видитъ, что наша геометрія фигуръ, съ формальной точки зрѣнія, ничѣмъ не отличается отъ геометріи обыкновеннаго пространства. Для полнаго совпаденія необходимо еще установить, что мы будемъ въ



Фиг. d.

геометріи фигуръ понимать подъ разстояніемъ и угломъ. Но послѣ сказаннаго выше это не можетъ представить затрудненія.

Подъ разстояніемъ двухъ точекъ геометріи фигуръ мы будемъ понимать разстояніе между центрами тѣхъ шаровъ обыкновеннаго пространства, которые изображаютъ собой эти точки геометріи фигуръ; т. е. мы выбираемъ опредѣленіе разстоянія такъ, чтобы въ вышеприведенномъ соотвѣтствіи разстояніе между любыми двумя точками геометріи фигуръ было бы равно разстоянію соотвѣтствующихъ имъ обыкновенныхъ точекъ.

Аналогично этому опредѣляемъ и уголъ въ геометріи фигуръ: подъ угломъ двухъ прямыхъ геометріи фигуръ мы будемъ понимать уголъ, образуемый центральными прямыми цилиндровъ, служащихъ изображеніемъ этихъ прямыхъ геометріи фигуръ.

Изъ всего вышесказаннаго мы можемъ теперь безъ труда заключить, что, съ формальной точки зрѣнія, наша геометрія фигуръ есть не что иное, какъ Евклидова геометрія трехъ измѣреній. Это многообразіе, какъ и обыкновенное пространство, даетъ намъ систему объектовъ, подходящую подъ логическую схему Евклидовой геометріи.

треблять для этихъ „прямыхъ“ и „плоскостей“ термины „псевдо-прямыя“ и „псевдо-плоскости“ [5]). Тогда будутъ справедливы слѣдующія предложенія.

$I_1$. Двѣ различныя точки $A$ и $B$ пространства $R'$ постоянно опредѣляютъ псевдо-прямую.

$I_2$. Та же псевдо-прямая опредѣляется также любыми двумя другими различными своими точками.

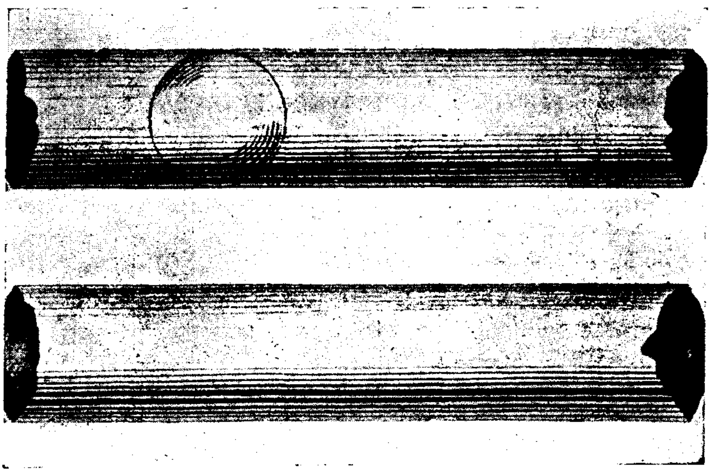
$I_3$. На каждой псевдо-прямой всегда имѣются по меньшей мѣрѣ двѣ точки, на каждой псевдо-плоскости по меньшей мѣрѣ три точки, не расположенныя на одной псевдо-прямой.

$I_4$. Три точки, не лежащія на одной псевдо-прямой, всегда опредѣляютъ псевдо-плоскость.

$I_5$. Эта псевдо-плоскость опредѣляется также любыми тремя другими своими точками, не расположенными на одной псевдо-прямой.

---

Фигура *a* поясняетъ, что двѣ точки опредѣляютъ прямую въ нашей геометріи фигуръ. Фигура *b* изображаетъ двѣ прямыя, пересѣкающіяся въ одной точкѣ. Фигура *c* поясняетъ, что черезъ одну точку проходитъ безчисленное множество прямыхъ. Фигура *d* поясняетъ, что черезъ точку внѣ прямой можно къ



Фиг. е.

ней провести одинъ и только одинъ перпендикуляръ; наконецъ, фигура *e* поясняетъ, что черезъ точку внѣ прямой можно къ ней провести только одну параллельную прямую.

Д. Шоръ, „Геометрія фигуръ“. „Вѣстникъ Оп. Физики“, № 386.

[5]) Итакъ, значитъ: подъ псевдо-прямой въ пространствѣ $R'$ мы будемъ разумѣть любую окружность (конечнаго радіуса или безконечно большого — прямую) въ пространствѣ $R$, проходящую черезъ точку $O$. Точно такъ же подъ псевдо-плоскостью въ пространствѣ $R'$ — любую сферу (конечнаго радіуса или безконечно большого — плоскость) въ пространствѣ $R$, проходящую черезъ точку $O$.

$I_6$. Если двѣ точки псевдо-прямой лежатъ въ псевдо-плоскости, то всѣ точки этой псевдо-прямой лежатъ въ этой плоскости.

$I_7$. Если двѣ псевдо-плоскости имѣютъ общую точку, то онѣ имѣютъ еще по крайней мѣрѣ одну общую точку.

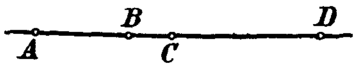
$I_8$. Существуютъ по крайней мѣрѣ четыре точки, не расположенныя въ одной псевдо-плоскости.

Число этихъ предложенiй можно было бы легко увеличить; мы привели здѣсь первыя восемь основныхъ положенiй Гильбертовой системы евклидовой геометрiи, именно его „аксiомы сопряженiя"; мы будемъ имѣть еще случай говорить о нихъ ниже. Доказательства крайне просты, если мы будемъ разсматривать предложенiя этой псевдо-геометрiи въ пространствѣ $R'$ съ точки зрѣнiя евклидовой геометрiи въ пространствѣ $R$. Такъ, напримѣръ, двѣ точки, о которыхъ идетъ рѣчь въ предложенiи $I_1$, вмѣстѣ съ точкой $O$ всегда опредѣляютъ окружность[6]); точка $O$ всегда опредѣляетъ съ тремя точками, о которыхъ идетъ рѣчь въ предложенiи $I_4$, сферу, включая сюда и предѣльный случай, когда четыре точки расположены въ одной плоскости. Въ случаѣ $I_7$ сферы имѣютъ, конечно, общую линiю пересѣченiя.

**2.** Образы нашей псевдо-геометрiи обладаютъ также всѣми тѣми свойствами, которыя въ евклидовой геометрiи можно высказать относительно понятiя „между". Мы приведемъ только тѣ предложенiя, которыя по Гильберту служатъ основными положенiями (аксiомами). Эти „аксiомы расположенiя", какъ ихъ называетъ Гильбертъ, въ нашемъ случаѣ гласятъ:

$II_1$. Если $A$, $B$, $C$ суть точки псевдо-прямой, при чемъ точка $B$ лежитъ между точками $A$ и $C$, то точка $B$ лежитъ также между $C$ и $A$.

$II_2$. Если $A$ и $C$ суть двѣ точки псевдо-прямой, то на ней всегда существуетъ по крайней мѣрѣ одна точка $B$, лежащая между $A$ и $C$, и по крайней мѣрѣ одна такая точка $D$, что точка $C$ лежитъ между $A$ и $D$.



Фиг. 10.

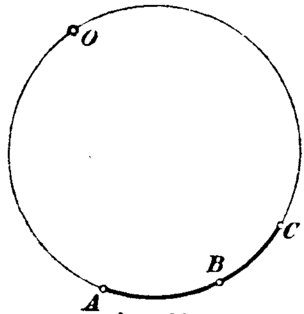
$II_3$. Изъ трехъ точекъ псевдо-прямой всегда одна и только одна лежитъ между двумя другими.

$II_4$. Пусть $A$, $B$ и $C$ будутъ три точки, не лежащiя на одной псевдо-прямой, а $u$ псевдо-прямая въ псевдо-плоскости $ABC$, не проходящая ни черезъ одну изъ точекъ $A$, $B$, $C$. Если прямая $u$ имѣетъ общую точку съ одной изъ сторонъ псевдо-треугольника $ABC$, лежащую

[6]) Предложенiе $I_1$ утверждаетъ, что въ пространствѣ $R'$ черезъ двѣ псевдоточки $A$ и $B$ проходитъ одна псевдо-прямая. При переводѣ на обыкновенный языкъ это означаетъ, что въ евклидовомъ пространствѣ $R$ черезъ двѣ точки $A$ и $B$ проходитъ одна и только одна окружность, проходящая въ то же время черезъ постоянную точку $O$. Это хорошо извѣстное предложенiе евклидовой геометрiи. Такимъ

между крайними точками этой стороны, то она встрѣчаетъ также одну изъ другихъ сторонъ треугольника въ точкѣ, лежащей между крайними точками этой стороны.

Замѣтимъ, что эти предложенія имѣютъ мѣсто въ пространствѣ $R'$, которое точки $O$ не содержитъ, а не въ пространствѣ $R$; въ самомъ дѣлѣ въ пространствѣ $R$ соотношеніе „между" относительно двухъ точекъ $A$ и $C$ на окружности вовсе не установлено, потому что точка на окружности можетъ перейти изъ $A$ въ $C$ какъ движеніемъ въ одну сторону, такъ и движеніемъ въ другую сторону; но, выключая точку $O$, мы дѣлаемъ это невозможнымъ. (См. фиг. 11)[7]).



Фиг. 11.

**3.** Особенно интересно, что въ нашей псевдо-геометріи справедлива также аксіома параллельности. „Параллельными" мы должны называть двѣ псевдо-прямыя, если въ евклидовомъ пространствѣ $R$ онѣ представляютъ собой двѣ окружности, соприкасающіяся въ точкѣ $O$[8]). Точно такъ же двѣ псевдо-плоскости мы должны считать параллельными, если въ пространствѣ $R$ онѣ представляютъ собой сферы, соприкасающіяся въ точкѣ $O$. Эти „параллели" обладаютъ всѣми свойствами обыкновенныхъ параллелей и, въ частности, удовлетворяютъ аксіомѣ параллельности, обозначенной у Гильберта номеромъ IV:

IV. Черезъ точку, лежащую внѣ прямой, можно провести къ ней только одну параллельную прямую.

Чтобы установить теперь въ пространствѣ $R'$ также понятіе о конгруэнтности, мы воспользуемся, за отсутствіемъ наглядной аналогіи, построеніями Штейнера при помощи линейки. „Псевдо-середину" $M$ „псевдоотрѣзка" $AB$ мы установимъ построеніемъ помощью трапеціи (§ 5,1)[9]). Однако, чтобы этотъ пріемъ можно было признать правильнымъ, нужно доказать, что положеніе точки $M$ не зависитъ отъ выбора опредѣляющихъ ее вспомогательныхъ линій[10]). Прежде, чѣмъ приводить доказательство,

---

же образомъ переводятся на языкъ обыкновенной геометріи остальныя предложенія и легко доказываются.

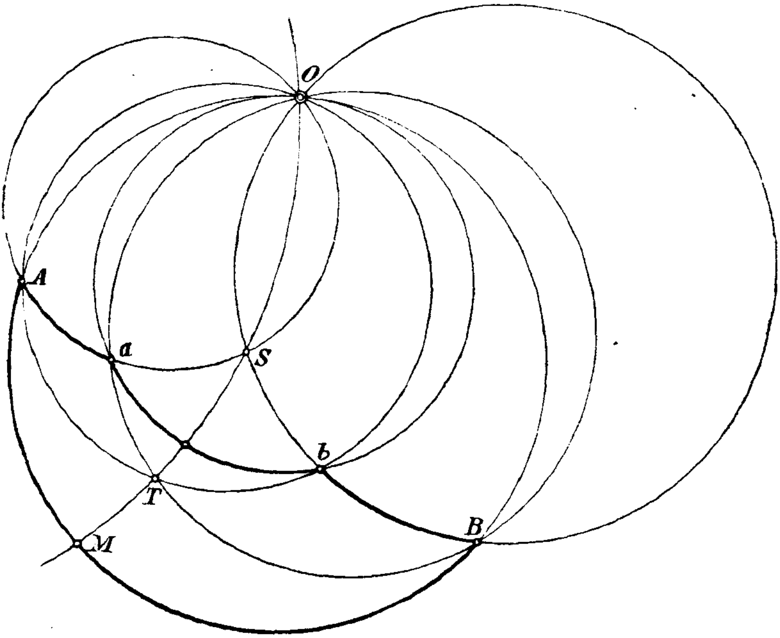
[7]) Эта терминологія принадлежитъ Пашу. Если мы выключаемъ точку $O$ и тѣмъ дѣлаемъ невозможнымъ непрерывное движеніе по окружности черезъ точку $O$ (фиг. 12), то отъ точки $A$ къ точкѣ $C$ можно перейти, непрерывно передвигаясь по окружности только черезъ точку $B$. Въ этомъ смыслѣ, при выключенной точкѣ $O$, точка $B$ лежитъ между точками $A$ и $C$.

[8]) Ибо только въ этомъ случаѣ онѣ въ пространствѣ $R'$ не имѣютъ общей точки.

[9]) Иными словами, мы въ нашей псевдо-плоскости по даннымъ псевдоточкамъ $A$ и $B$ произведемъ то построеніе, которое указано на фиг. 3.

[10]) Т. е. отъ выбора прямой $ab$ и точки $S$.

мы хотимъ довести до конца самую идею. Раздѣливъ „пополамъ“ псевдо-отрѣзокъ $AB$, мы будемъ, обратно, имѣть возможность, какъ указано въ § 5, проводить черезъ каждую точку параллель къ прямой $AB$; это можно непосредственно видѣть на фиг. 12, обозначенія которой совершенно совпадаютъ съ обозначеніями на фиг. 3 въ § 5 [11]). Мы можемъ перенести также въ нашу геометрію указанный въ § 5 пріемъ, посредствомъ котораго любой отрѣзокъ можно передвинуть вдоль по его прямой на произвольное разстояніе. Съ точки зрѣнія обычной геометріи отрѣзокъ




Фиг. 12.

будетъ становиться тѣмъ меньше, чѣмъ болѣе онъ приближается къ выключенной точкѣ $O$. Чтобы осуществить также вращеніе отрѣзковъ, мы должны имѣть еще въ каждой плоскости „окружность“. Для этого мы возьмемъ нѣкоторую шаровую поверхность $k$ въ пространствѣ $R$ и ее будемъ разсматривать также, какъ „сферу“ въ пространствѣ $R'$, а ея сѣ-

[11]) Это значитъ, намъ дана псевдо-прямая $AB$, на ней отрѣзокъ $AB$ и его псевдо-середина $M$; кромѣ того, дана точка $a$. Мы проведемъ псевдо-прямыя $Aa$ и $Bb$, которыя пересѣкаются въ точкѣ $S$. Далѣе проводимъ псевдо-прямыя $MS$ и $aB$, которыя пересѣкаются въ точкѣ $T$. Теперь проводимъ псевдо-прямую $AT$, которая пересѣкаетъ псевдо-прямую $BS$ въ точкѣ $b$. Псевдо-прямая $ab$ параллельна $AB$.

ченія съ псевдо-плоскостями примемъ за „окружности“ на нихъ. Какъ опредѣлять „псевдо-центры“ этихъ „окружностей“ (и „сферъ“), мы покажемъ ниже, въ пунктѣ 9; такимъ образомъ на всѣхъ псевдо-плоскостяхъ, которыя пересѣкаютъ сферу $k$, мы имѣемъ нужныя намъ окружности и ихъ центры. Чтобы имѣть возможность производить также построенія въ псевдо-плоскости $\eta$, которая не сѣчетъ сферы $k$, нужно только спроектировать псевдо-плоскость $\eta$ при помощи параллельныхъ псевдо-прямыхъ на параллельную ей псевдо-плоскость $\eta'$, встрѣчающую сферу $k$; затѣмъ выполняемъ построеніе въ плоскости $\eta'$ и проектируемъ весь чертежъ обратно на плоскость $\eta$.

Если мы будемъ теперь называть два „псевдо-отрѣзка“ или „псевдоугла“ конгруэнтными, если они переходятъ одинъ въ другой при помощи этого построенія, однозначность котораго мы сейчасъ докажемъ, то на этомъ опредѣленіи можно легко построить теорію конгруэнтности и равенства площадей [12]).

**4.** Что наша псевдо-геометрія въ пространствѣ $R'$ совпадаетъ съ евклидовой геометріей, совершенно ясно; но полное доказательство этого мы воспроизведемъ такимъ образомъ, что укажемъ способъ отображенія, который превращаетъ „псевдо-плоскости“ и „псевдо-прямыя“ пространства $R'$ въ дѣйствительныя плоскости и прямыя пространства $R$. Это отображеніе заключается въ инверсіи (или обращеніи).

„Инверсія“ въ плоскости, или „круговое сопряженіе“, предполагаетъ постоянную окружность $\omega$, „окружность инверсіи“, центръ и радіусъ которой мы будемъ обозначать черезъ $O$ и $r$. Различаютъ два вида инверсіи — „гиперболическую“ и „эллиптическую“. Каждой точкѣ $P$ въ плоскости постоянной окружности $\omega$ гиперболическая инверсія относитъ

[12]) Построенія Штейнера даютъ возможность въ обыкновенной геометріи построить на плоскости при помощи прямыхъ линій фигуру, конгруэнтную данной прямолинейной фигурѣ въ любомъ другомъ положеніи.

Эти Штейнеровы построенія могутъ быть выполнены и въ нашихъ псевдоплоскостяхъ, если въ каждой изъ нихъ дана „псевдо-окружность“. Авторъ и устанавливаетъ прежде всего „псевдо-окружность“ въ каждой псевдо-плоскости, какъ указано въ текстѣ, и при помощи ея производитъ построенія Штейнера. Вмѣстѣ съ тѣмъ онъ опредѣляетъ „конгруэнтныя“ фигуры въ своей псевдо-геометріи, какъ такія, которыя могутъ быть преобразованы одна въ другую посредствомъ Штейнерова построенія. Но здѣсь возникаетъ вопросъ, не приведетъ ли такое опредѣленіе конгруэнтности къ противорѣчію въ самой системѣ. Авторъ доказываетъ, что это не можетъ случиться, при помощи метода инверсіи. Этотъ методъ играетъ во всѣхъ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ какъ здѣсь, такъ и ниже очень важную роль. Между тѣмъ теоріи самаго метода посвящены только немногія строки въ слѣдующемъ пунктѣ и въ § 24. Мы сочли поэтому необходимымъ изложить подробнѣе въ особомъ дополненіи теорію инверсіи. Читатель найдетъ тамъ же и поясненія того примѣненія, которое эта теорія находитъ здѣсь въ п. 4-омъ.

„обратную“ или „гиперболически инвертированную“ точку $P'$; именно, точка $P'$ лежитъ на лучѣ $OP$, выходящемъ изъ точки $O$, такимъ образомъ, что $OP.\ OP' = r^2$ [13]). Точка $P$, въ свою очередь, является, такимъ образомъ, обратной точкой относительно $P'$; инверсія есть сопряженіе взаимное или инволюторное. То же относится и къ эллиптической инверсіи, которая отличается отъ гиперболической только тѣмъ, что взаимно обратныя точки, будучи также расположены на прямой, проходящей черезъ точку $O$, лежатъ, однако, по разныя стороны точки $O$; поэтому теперь отрѣзкамъ $OP$ и $OP''$, произведеніе которыхъ по абсолютной величинѣ попрежнему равно $r^2$, присваиваются противоположные знаки. Такимъ образомъ, при эллиптической инверсіи $OP.\ OP'' = -r^2$. Если поэтому $P'$ и $P''$ суть двѣ точки, обратныя $P$ въ гиперболической и эллиптической инверсіи, то онѣ расположены симметрично относительно точки $O$, какъ центра симметріи.

Предложеніе 1. Эллиптическая инверсія относительно окружности $\omega$ получается, такимъ образомъ, изъ гиперболической инверсіи относительно той же окружности путемъ симметрическаго преобразованія относительно точки $O$, какъ центра симметріи.

Намъ будетъ поэтому достаточно остановиться подробнѣе на гиперболической инверсіи.

**5.** Построеніе точки $P'$, гиперболически обратной къ точкѣ $P$, производится непосредственно по формулѣ, которой она опредѣляется: $OP.\ OP' = r^2$. Если точка $P$ лежитъ внѣ окружности $\omega$ (фиг. 13), то мы строимъ окружность на отрѣзкѣ $OP$, какъ на діаметрѣ; она пересѣкаетъ окружность $\omega$ въ двухъ точкахъ $U$ и $V$; прямая $UV$ пересѣкаетъ отрѣзокъ $OP$ въ искомой точкѣ $P'$. Дѣйствительно, въ прямоугольномъ треугольникѣ $OUP$, согласно Пиѳагоровой теоремѣ,

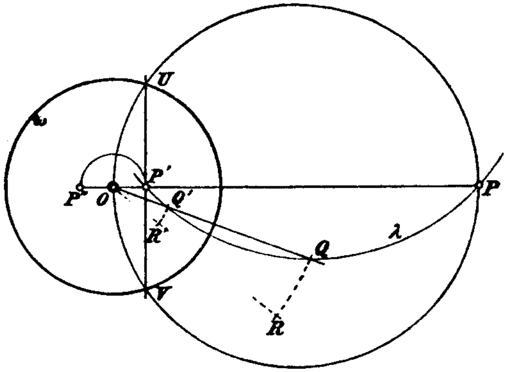
$$OP'.\ OP = OU^2 = r^2.$$

Если же данная точка лежитъ внутри окружности $\omega$ и совпадаетъ, скажемъ, съ точкой $P'$ (фиг. 13), то мы возставляемъ изъ точки $P'$ перпендикуляръ $P'U$, который встрѣтитъ окружность $\omega$ въ точкѣ $U$. Изъ точки $U$ проводимъ перпендикуляръ къ прямой $OU$ (это будетъ касательная къ окружности $\omega$), который пересѣкаетъ прямую $OP'$ въ искомой точкѣ $P$.

---

[13]) Точка $P'$ лежитъ, слѣдовательно, на прямой $OP$ по ту же сторону точки $O$, что и точка $P$ (фиг. 13).

Если $\lambda$ есть окружность, проходящая черезъ взаимно обратныя точки $P$, $P'$ (фиг. 13), и нѣкоторый лучъ $OQ$, выходящій изъ точки $O$, встрѣчаетъ окружность $\lambda$ въ точкахъ $Q$ и $Q'$, то, по извѣстному свойству сѣкущихъ, $OQ \,.\, OQ' = OP \,.\, OP' = r^2$; иными словами, $Q$ и $Q'$ также суть взаимно обратныя точки въ гиперболичеcкой инверсіи относительно окружности $\omega$.



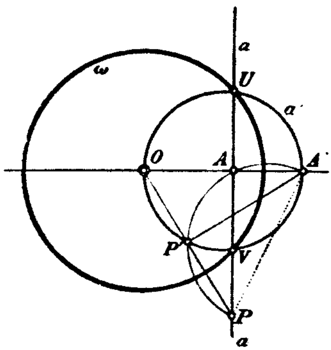

Фиг. 13.

Предложеніе 2. Каждая окружность, проходящая черезъ двѣ взаимно-обратныя точки, инвертируется въ себя самое.

Благодаря этому, если уже построены двѣ взаимно обратныя точки и окружность $\omega$, то можно очень просто находить точку $R'$, обратную любой данной точкѣ $R$ (фиг. 13), для этого проводимъ изъ точки $O$, какъ изъ центра, окружность, проходящую черезъ точку $R$; она встрѣтитъ окружность $\lambda$ въ точкѣ $Q$; пусть $Q'$ будетъ вторая точка пересѣченія прямой $OQ$ съ окружностью $\lambda$; тогда изъ точки $O$, какъ изъ центра, проведемъ окружность, проходящую черезъ точку $Q'$; она встрѣчаетъ прямую $OR$ въ искомой точкѣ $R'$.

**6.** Пусть $A$ и $A'$ будутъ двѣ взаимно-обратныя точки. Черезъ одну изъ нихъ, скажемъ черезъ $A$, проведемъ перпендикуляръ $a$, къ прямой $OA$ (фиг. 14); пусть $P'$ будетъ точка, обратная нѣкоторой точкѣ $P$ прямой $a$. Такъ какъ

$$OA \,.\, OA' = OP \,.\, OP' = r^2,$$




Фиг. 14.

то четыре точки $A$, $A'$, $P$, $P'$ лежатъ на одной окружности, а потому $\sphericalangle A'P'P$ есть прямой уголъ, какъ и уголъ $A'AP$. Поэтому $A'P'O$ есть прямой уголъ, и точка $P'$ лежитъ на окружности $a'$, имѣющей діаметромъ отрѣзокъ $OA'$.

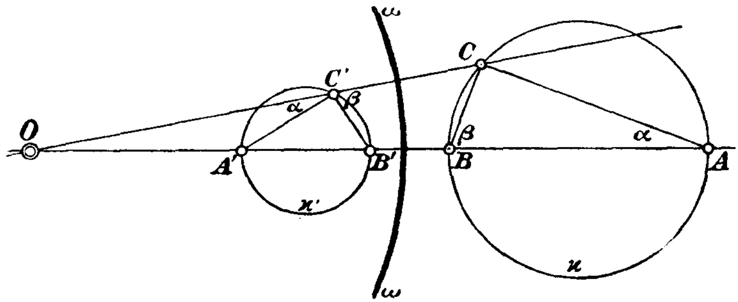
Если точка $P$ перемѣщается по прямой $a$, то точка $P'$ занимаетъ другія положенія на окружности $a'$; иными словами, $a'$ есть геометрическое мѣсто точекъ, обратныхъ точкѣ $a$. Итакъ:

Предложеніе 3. Если точка $P$ описываетъ прямую, то обратная ей точка $P'$ описываетъ окружность, проходящую черезъ центръ инверсіи $O$, и обратно[14]).

Точкѣ $O$ окружности $a'$ на прямой $a$ естественно отвѣчаетъ безконечно удаленная ея точка; плоскость по отношенію къ инверсіи имѣетъ какъ бы только одну безконечно удаленную точку, черезъ которую проходятъ всѣ ея прямыя.

**7.** Предложеніе 4. Если точка $P$ описываетъ окружность $\varkappa$, не проходящую черезъ центръ инверсіи, то и обратная точка $P$ описываетъ окружность[15]).

Діаметръ окружности $\varkappa$, проходящій черезъ точку $O$ (фиг. 15), встрѣчаетъ послѣднюю въ точкахъ $A$ и $B$; пусть $A'$ и $B'$ будутъ соот-




Фиг. 15.

вѣтственно обратныя точки; пусть, наконецъ, $C'$ будетъ точка, обратная произвольной третьей точкѣ $C$ окружности $\varkappa$. Въ такомъ случаѣ

$$OA \,.\, OA' = r^2 = OC \,.\, OC'; \quad OA : OC = OC' : OA'.$$

Поэтому треугольникъ $OAC \sim OC'A'$ и $\measuredangle OC'A' = \measuredangle OAC = \alpha$. Такимъ же образомъ:

$$OB \,.\, OB' = OC \,.\, OC', \ OB : OC = OC' : OB';$$

$$OBC \sim OC'B', \ \measuredangle OC'B' = \measuredangle OBC = 2d - \beta.$$

Такъ какъ въ прямоугольномъ треугольникѣ $ACB$ углы $\alpha$ и $\beta$ дополняютъ другъ друга до прямого, то

$$\measuredangle A'C'B' = 2d - \alpha - \beta = d.$$

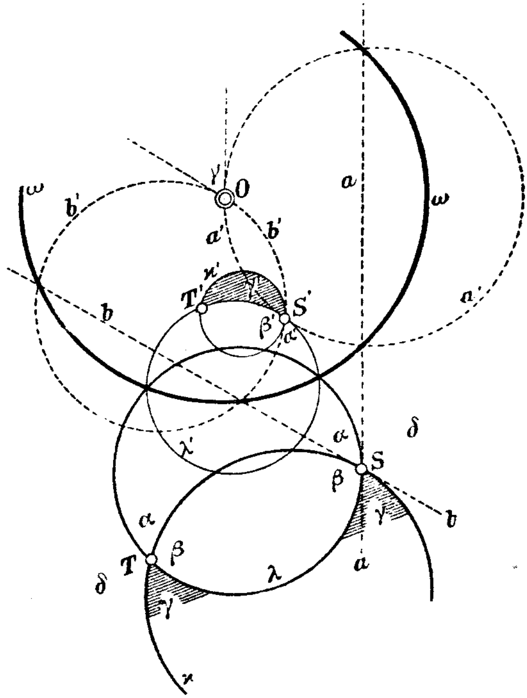
[14]) Если прямая, которую пробѣгаетъ точка $P$, проходитъ черезъ центръ инверсіи, то обратная точка, по самому ея опредѣленію, пробѣгаетъ ту же прямую. Иными словами: прямая, проходящая черезъ центръ инверсіи, инвертируется въ себя самое. Это предложеніе содержится въ предыдущемъ, если мы будемъ смотрѣть на прямую, какъ на окружность безконечно большого радіуса.

[15]) Это предложеніе въ томъ предположеніи, что на прямую мы смотримъ, какъ на окружность безконечно большого радіуса, представляетъ собой развитіе предыдущаго: окружность, проходящая черезъ центръ инверсіи, обращается въ прямую,

Отсюда слѣдуетъ, что точка $C'$ лежитъ на окружности $\varkappa'$, имѣющей своимъ діаметромъ отрѣзокъ $A'B'$, что и требовалось доказать. Однако, центры окружностей $\varkappa$ и $\varkappa'$ не обратны другъ другу.

Всѣ эти предложенія, по способу ихъ вывода, относятся къ гиперболической инверсіи; но въ виду соображеній, изложенныхъ въ концѣ п. 4., они остаются въ силѣ и для эллиптической инверсіи.

**7.** Если двѣ окружности $\varkappa$ и $\lambda$ пересѣкаются въ точкѣ $S$, то подъ ихъ угломъ въ точкѣ $S$ разумѣютъ уголъ, который въ точкѣ $S$ образуютъ ихъ касательныя. Впрочемъ, это понятіе остается еще многозначнымъ, какъ и уголъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ; его легко, однако, установить однозначно (фиг. 16). Именно, окружности $\varkappa$ и $\lambda$ раздѣляютъ плоскость на четыре области $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, ограниченныя дугами окружностей, на такъ называемые „круговые двуугольники"; самыя дуги ограничиваются точками $S$ и $T$ пересѣченія окружностей $\varkappa$ и $\lambda$. За уголъ двуугольника въ точкѣ $S$ мы принимаемъ тотъ изъ угловъ между касательными въ точкѣ $S$, который цѣликомъ содержитъ сходящійся въ точкѣ $S$ вырѣзокъ[16]). Это уголъ вполнѣ опредѣленный, и въ этомъ именно смыслѣ двуугольникъ имѣетъ одинаковые углы при обѣихъ вершинахъ.




Фиг. 16.

Предложеніе 5. Характеристическая особенность инверсіи заключается въ томъ, что опредѣленные такимъ образомъ углы кругового двуугольника не мѣняются при инверсіи.

---

т. е. также въ окружность, но безконечно большого радіуса. Вотъ почему преобразованіе, состоящее изъ одной или нѣсколькихъ инверсій, относится къ круговымъ преобразованіямъ (Kreisverwandschaft).

[16]) Это опредѣленіе трудно признать вполнѣ точнымъ. Такъ, напримѣръ, уголъ $\gamma$, къ которому относятся дальнѣйшія разсужденія, не только не содержитъ цѣликомъ

Это значитъ, точкамъ двуугольника $\gamma$ отвѣчаютъ при инверсіи точки, заполняющія другой двуугольникъ $\gamma'$, и оба двуугольника имѣютъ одинаковые углы. Въ самомъ дѣлѣ, уголъ двуугольника $\gamma$ въ точкѣ $S$ содержится между двумя лучами $a$ и $b$, которымъ въ обратной фигурѣ отвѣчаютъ двѣ круговыя дуги $Oa'S'$ и $Ob'S'$; касательныя къ этимъ дугамъ въ точкѣ $O$, а вслѣдствіе этого и въ точкѣ $S'$, параллельны лучамъ $a$ и $b$ [17]); иными словами, эти двѣ дуги образуютъ двуугольникъ, углы котораго равны угламъ двуугольника $\gamma$. Но касательныя въ точкѣ $S'$ касаются также окружностей $\varkappa'$ и $\lambda'$, обратныхъ окружностямъ $\varkappa$ и $\lambda$. Эти окружности образуютъ такимъ образомъ 4 двуугольника, одинъ изъ которыхъ соотвѣтствуетъ двуугольнику $\gamma$ и имѣетъ тѣ же углы.

Какъ и при прямолинейныхъ углахъ, здѣсь представляетъ особенный интересъ тотъ случай, когда двуугольники $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ прямоугольны; въ этомъ случаѣ говорятъ, что окружности $\varkappa$ и $\lambda$ пересѣкаются подъ прямыми углами или ортогонально. На фиг. 20 окружности $M$ и $C$ пересѣкаются ортогонально; радіусы обѣихъ окружностей, проведенные въ точку пересѣченія, взаимно перпендикулярны, и каждый изъ нихъ касается другой окружности. Это свойство ортогональнаго пересѣченія инверсія переноситъ также на обратныя окружности.

Если общая хорда двухъ окружностей проходитъ черезъ центръ одной изъ нихъ, то говорятъ, что эта послѣдняя пересѣкается второй окружностью діаметрально или по діаметру или, что она дѣлится второй окружностью пополамъ. Это свойство, однако, не сохраняется при инверсіи. Окружность разсѣкается своимъ діаметромъ одновременно какъ ортогонально, такъ и діаметрально [18]).

**8.** Всѣ эти соображенія легко переносятся на пространство. Инверсія въ пространствѣ предполагаетъ постоянную сферу $\omega$ — „сферу инверсіи“, центръ которой называется „центромъ инверсіи“. Опредѣленіе гиперболической и эллиптической инверсіи остается то же, что и на плоскости (п. 4). Предложеніе 1 также остается въ силѣ, при чемъ только подъ $\omega$ нужно разумѣть сферу инверсіи. Если мы будемъ разсматривать фиг. 13-ую, какъ сѣченіе сферы инверсіи одной изъ ея діаметральныхъ плоскостей, то мы получимъ слѣдующее предложеніе, аналогичное предложенію 2.

---

соотвѣтствующаго двуугольника, но не содержитъ, строго говоря, даже конца этого двуугольника въ точкѣ $S$, какъ это, повидимому, разумѣетъ авторъ. Уголъ двуугольника есть уголъ между лучами, выходящими изъ точки $S$ въ направленіи дугъ, ограничивающихъ двуугольникъ, и касающимися этихъ дугъ въ точкѣ $S$.

[17]) Изъ построенія, указаннаго на чертежѣ 14, видно, что касательная въ точкѣ $O$ къ окружности $a'$, обратной прямой $a$, параллельна прямой $a$. Касательныя въ точкѣ $S'$ обыкновенно не параллельны лучамъ $a$ и $b$, но заключаютъ тотъ же уголъ.

[18]) При этомъ діаметръ данной окружности, въ свою очередь, разсматривается, какъ окружность безконечно большого радіуса.

Предложеніе 6. Каждая сфера, проходящая черезъ двѣ взаимно обратныя точки, инвертируется въ себя самое.

Если мы будемъ вращать фигуры 14 и 15 вокругъ оси $OA$, то мы получимъ:

Предложеніе 7. Плоскость превращается инверсіей въ сферу, проходящую черезъ центръ инверсіи, и обратно.

Предложеніе 8. Каждая сфера инвертируется также въ сферу.

Обѣ сферы имѣютъ точку $O$ центромъ подобія; при гиперболической инверсіи это будетъ внѣшній центръ подобія, а при эллиптической — внутренній. Предложеніе 5-ое съ соотвѣтствующими измѣненіями также переносится въ пространство.

**9.** Если мы теперь примѣнимъ инверсію къ псевдо-прямымъ и къ псевдо-плоскостямъ пространства $R'$ (п. 1—4), принимая точку $O$ за центръ и при совершенно произвольной степени инверсіи $\pm r^2$, то онѣ превращаются въ прямыя и плоскости пространства $R$. Напротивъ, вспомогательная сфера, которой мы воспользовались для производства Штейнеровыхъ построеній, переходитъ въ сферу пространства $R$; всѣмъ указаннымъ выше „псевдо-построеніямъ" отвѣчаютъ обыкновенныя Штейнеровы построенія, если псевдо-центры псевдо-окружностей (и псевдо-сферы) представляютъ собой обращенія дѣйствительныхъ центровъ обратныхъ имъ окружностей (и обращенной сферы)[19]. Этимъ не только доказана допустимость этихъ построеній для опредѣленія конгруэнтности, но вмѣстѣ съ тѣмъ обнаружено, что псевдо-геометрія никогда не можетъ привести къ логическимъ противорѣчіямъ; въ самомъ дѣлѣ, всякое про-

[19]) Въ пунктѣ 3. авторъ выяснилъ, какъ онъ устанавливаетъ конгруэнтность въ своемъ „псевдо-пространствѣ". Точкой отправленія для него служатъ Штейнеровы построенія, для осуществленія которыхъ въ пространствѣ $R'$ ему нужно имѣть „сферу" и „окружность" въ каждой псевдо-плоскости. Въ п. 3 выяснено, какъ онъ этого достигаетъ. Но кромѣ сферы и окружности въ каждой плоскости, для производства Штейнеровыхъ построеній нужно еще знать центръ этой сферы и центръ каждой окружности. Что же принять за „псевдо-центръ" этой псевдо-сферы и за „псевдо-центръ" каждой псевдо-окружности въ псевдо-пространствѣ $R'$? Авторъ обѣщаетъ установить это въ п. 9. Вотъ какъ онъ здѣсь это осуществляетъ. Онъ производитъ нѣкоторую инверсію относительно точки $O$. Эта инверсія превращаетъ псевдо-сферу $\sigma$ псевдо-пространства $R'$ въ нѣкоторую сферу $\sigma'$ въ пространствѣ $R$; пусть $C'$ будетъ центръ сферы $\sigma'$ въ пространствѣ $R$, а $C$ точка, обратная относительно $C'$; эту точку $C$ авторъ принимаетъ за псевдо-центръ псевдо-сферы $\sigma$ въ псевдо-пространствѣ $R'$; эту псевдо-точку онъ принимаетъ за „равноотстоящую" отъ всѣхъ точекъ псевдо-сферы въ $R'$. Только при этомъ соглашеніи между Штейнеровыми построеніями въ псевдо-пространствѣ $R'$ и аналогичными построеніями въ пространствѣ $R$ устанавливается то соотвѣтствіе, которое автору нужно: если псевдо-прямая проходитъ черезъ псевдо-центръ нѣкоторой псевдо-окружности, то соотвѣтствующая прямая въ пространствѣ $R$ проходитъ черезъ центръ соотвѣтствующей окружности.

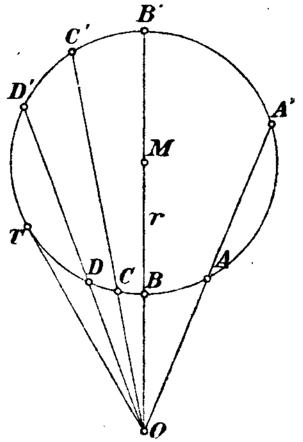
тиворѣчіе въ этой системѣ путемъ инверсіи привело бы къ противорѣчію въ Евклидовой геометріи, которая, какъ мы увидимъ ниже, можетъ быть абстрактно обоснована, такъ что отсутствіе въ ней противорѣчія становится очевиднымъ. Сейчасъ мы имѣли въ виду только обнаружить, что можно построить геометрію, которая въ словесномъ выраженіи ея предложеній буквально совпадаетъ съ обычной геометріей, между тѣмъ какъ ея „плоскости“ и „прямыя“ совершенно отличаются отъ обыкновенныхъ.

## § 9. Сферическая сѣть.

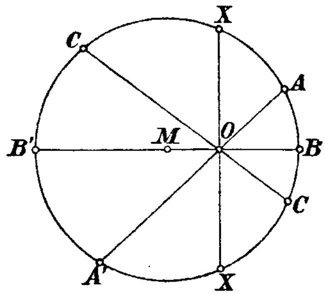
**1.** Если лучи пучка $O$[20]) встрѣчаютъ окружность $M$ соотвѣтственно въ точкахъ $A$ и $A'$, $B$ и $B'$, $C$ и $C'$ (см. фиг. 17 и 18), то, согласно извѣстному предложенію,

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = \ldots,$$

независимо отъ того, расположена ли точка $O$ внѣ или внутри окружности. Въ первомъ случаѣ это постоянное произведеніе, такъ называемая



Фиг. 17.



Фиг. 18.

„степень точки $O$ относительно окружности“, можетъ быть опредѣлена, какъ квадратъ касательной $OT$, во второмъ случаѣ, какъ квадратъ полухорды $OX$, перпендикулярной къ прямой $OM$. Если прямая $OM$ встрѣчаетъ окружность въ точкахъ $B$ и $B'$, то мы можемъ также положить въ первомъ случаѣ:

$$OB \cdot OB' = (OM - r)\ (OM + r) = OM^2 - r^2,$$

во второмъ случаѣ:

$$OB \cdot OB' = (r - OM)\ (r + OM) = r^2 - OM^2 = -(OM^2 - r^2),$$

[20]) Подъ **пучкомъ** лучей разумѣютъ совокупность прямыхъ, расположенныхъ въ одной плоскости и проходящихъ черезъ общую точку, **центръ** пучка.

гдѣ $M$ означаетъ центръ, а $r$ радіусъ круга. Это выраженіе степени точки относительно окружности $\pm(OM^2-r^2)$ дѣлаетъ цѣлесообразнымъ присвоить этой „степени" также знакъ; именно, считать степень точки $O$ относительно окружности положительной, если она лежитъ внѣ окружности, и отрицательной въ противоположномъ случаѣ; это можно обосновать еще и тѣмъ, что въ первомъ случаѣ оба отрѣзка сѣкущей всегда расположены по одну сторону точки $O$, во второмъ случаѣ—по разныя стороны точки $O$; если этимъ отрѣзкамъ въ первомъ случаѣ приписать одинаковые знаки, то во второмъ они естественно получаютъ различные знаки. Такимъ образомъ, степень точки $O$ относительно окружности $M$

на фиг. 17 есть $+(OM^2-r^2)=+OT^2$,

на фиг. 18 „ $-(r^2-OM^2)=-OX^2$ [21]).

Эти понятія можно также распространить и на сферу. Если лучи связки $O$ [22]) встрѣчаютъ сферу центра $M$ въ точкахъ $A$ и $A'$, $B$ и $B'$, $C$ и $C'$ . . ., то плоскость, опредѣляемая лучами $OAA'$ и $OBB'$, сѣчетъ сферу по окружности, для которой $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$; точно такъ же въ плоскости лучей $OBB'$ и $OCC'$ степень точки $O$ относительно сѣченія есть $OC \cdot OC' = OB \cdot OB'$. Такъ что и здѣсь соотношеніе

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' \ldots$$

справедливо для всѣхъ лучей связки $O$. Это постоянное произведеніе называется „степенью точки $O$ относительно сферы", его берутъ со знакомъ $+$ или $-$, смотря по тому, лежитъ ли точка $O$ внѣ сферы или внутри ея; въ томъ и другомъ случаѣ степень равна $+(OM^2-r^2)$.

Задача 1. Каково геометрическое мѣсто точекъ, имѣющихъ одинаковую степень $p^2$ (или $-p^2$) относительно данной окружности?

Задача 2. Построить всѣ точки, степень которыхъ относительно окружности $M_1$ есть $\pm p_1^2$, а относительно окружности $M_2$ есть $\pm p_2^2$.

Задача 3. Распространить тѣ же задачи на сферу.

**2.** Положимъ, что точка $P$ (фиг. 19) имѣетъ одинаковую степень (съ однимъ и тѣмъ же знакомъ) относительно двухъ окружностей, произвольно расположенныхъ въ одной плоскости, такъ что

$$PM_1^2-r_1^2=PM_2^2-r_2^2.$$

[21]) Такимъ образомъ, степень точки относительно окружности всегда выражается разностью $OM^2-r^2$.

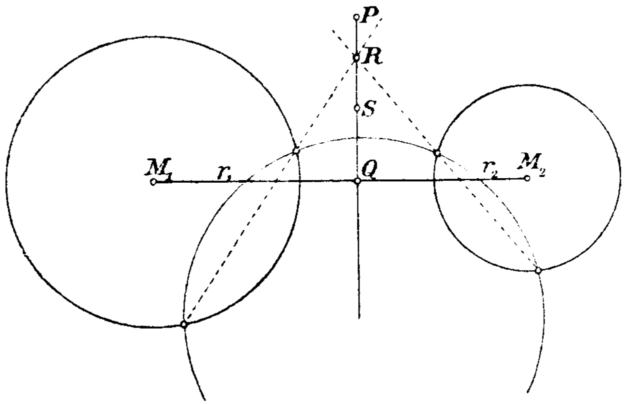
[22]) Подъ связкой лучей разумѣютъ совокупность прямыхъ въ пространствѣ, выходящихъ изъ одной точки.

Если $Q$ есть основанiе перпендикуляра, опущеннаго изъ точки $P$ на прямую $M_1 M_2$, то, вычитывая изъ обѣихъ частей предыдущаго равенства $PQ^2$, мы получимъ:

$$(PM_1^2 - PQ^2) - r_1^2 = (PM_2^2 - PQ^2) - r_2^2,$$
$$QM_1^2 - r_1^2 = QM_2^2 - r_2^2.$$

Но въ такомъ случаѣ точка $Q$ также имѣетъ одинаковую степень относительно обѣихъ окружностей; если мы теперь къ обѣимъ частямъ послѣдняго равенства прибавимъ $QS^2$, гдѣ $S$ есть произвольная точка прямой $PQ$, то

$$(QM_1^2 + QS^2) - r_1^2 = (QM_2^2 + QS^2) - r_2^2,$$
$$SM_1^2 - r_1^2 = SM_2^2 - r_2^2.$$




Фиг. 19.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что и точка $S$ имѣетъ одинаковую степень относительно обѣихъ окружностей. Съ другой стороны, на центральной оси $M_1M_2$ есть только одна точка $Q$, въ которой имѣетъ мѣсто соотношенiе

$$QM_1^2 - r_1^2 = QM_2^2 - r_2^2,$$

или

$$QM_1^2 - QM_2^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $QM_1 + QM_2 = M_1M_2 = c$, то предыдущее соотношенiе даетъ:

$$c\,[QM_1 - (c - QM_1)] = r_1^2 - r_2^2,$$

откуда мы получаемъ для $QM_1$ значенiе:

$$QM_1 = \frac{1}{2}\,\frac{r_1^2 - r_2^2 + c^2}{c}.$$

Изъ этого слѣдуетъ:

Предложеніе I. Точки, имѣющія одинаковую степень относительно двухъ окружностей, расположенныхъ въ одной плоскости, образуютъ прямую, перпендикулярную къ ихъ линіи центровъ.

Степень точки относительно двухъ окружностей, естественно, имѣетъ въ различныхъ точкахъ этой прямой, такъ называемой „радикальной оси двухъ окружностей", различныя значенія.

Если окружности пересѣкаются, то радикальной осью служитъ общая хорда (теорема объ отрѣзкахъ хорды) [23]). Чтобы найти по крайней мѣрѣ одну точку, имѣющую одинаковую степень относительно двухъ окружностей въ томъ случаѣ, когда послѣднія не пересѣкаются, прибѣгаютъ къ третьей окружности, которая пересѣкаетъ обѣ данныя окружности; точка пересѣченія двухъ общихъ хордъ этой третьей окружности съ двумя данными удовлетворяетъ требованію. Тѣмъ же способомъ можно построить и другую такую же точку. Прямая, соединяющая эти двѣ точки или перпендикуляръ, опущенный изъ первой точки на линію центровъ, и будетъ радикальной осью двухъ окружностей.

Если мы будемъ вращать обѣ окружности вокругъ линіи центровъ, то мы получимъ двѣ сферы. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы приходимъ къ слѣдующему выводу:

Предложеніе II. Геометрическое мѣсто точекъ, имѣющихъ одну и ту же степень относительно двухъ сферъ, есть плоскость, такъ называемая „радикальная плоскость" этихъ сферъ; эта плоскость перпендикулярна къ линіи центровъ двухъ сферъ, а въ томъ случаѣ, когда послѣднія пересѣкаются, она содержитъ окружность, по которой это пересѣченіе происходитъ.

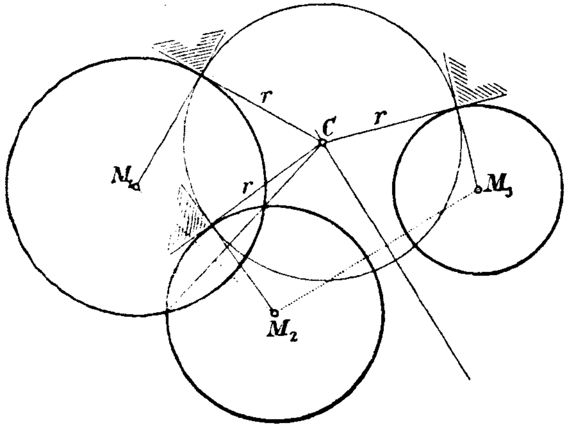
Задача 4. Построить радикальную плоскость двухъ непересѣкающихся сферъ $k_1$ и $k_2$ при помощи двухъ вспомогательныхъ сферъ, которыя пересѣкаютъ данныя сферы $k_1$ и $k_2$.

**3.** Если три окружности расположены въ одной плоскости, и ихъ центры $M_1$, $M_2$, $M_3$ образуютъ треугольникъ, то радикальныя оси этихъ окружностей $p_{12}$, $p_{23}$, $p_{31}$ пересѣкаются въ одной точкѣ $C$, въ такъ называемомъ „радикальномъ центрѣ" этихъ окружностей; въ самомъ дѣлѣ, точка пересѣченія прямыхъ $p_{12}$ и $p_{23}$ имѣетъ одинаковую степень относительно всѣхъ трехъ окружностей; поэтому черезъ эту точку необходимо должна пройти также третья радикальная ось $p_{31}$. Въ томъ же случаѣ, когда точки $M_1$, $M_2$, $M_3$ расположены на одной прямой, прямыя $p_{12}$,

[23]) Согласно тому, что сказано выше, чтобы найти радикальную ось двухъ окружностей, нужно на линіи центровъ найти точку $Q$, имѣющую одинаковую степень относительно обѣихъ окружностей, и изъ нея возставить перпендикуляръ къ линіи центровъ. Если окружности пересѣкаются, то точкой $Q$ служитъ пересѣ-

$p_{23}$, $p_{31}$ либо различны — и въ такомъ случаѣ онѣ параллельны, либо онѣ совпадаютъ. Въ первомъ случаѣ говорятъ о такъ называемомъ „несобственномъ" радикальномъ центрѣ [24]); послѣдній же случай имѣетъ мѣсто тогда, когда двѣ изъ радикальныхъ осей совпадаютъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ точка пересѣченія двойной оси съ линіей центра имѣетъ одинаковую степень относительно всѣхъ трехъ окружностей; а мы видѣли, что такая точка на линіи центровъ двухъ окружностей можетъ быть только одна.

Если три окружности $M_1$, $M_2$, $M_3$ имѣютъ несобственный радикальный центръ [25]), то линія центровъ сѣчетъ ортогонально и діаметрально всѣ три окружности; вмѣстѣ съ тѣмъ помимо этой прямой нѣтъ ни одной окружности, которую пересѣкали бы ортогонально или діаметрально всѣ три окружности, ибо центръ такой окружности имѣлъ бы одинаковую степень относительно трехъ данныхъ окружностей. Напротивъ, если $C$ есть конечная точка и $\pm r^2$ есть ея степень относительно трехъ окружностей, и мы проведемъ изъ центра $C$ окружность радіуса $r$, то она, согласно п. 2., разсѣкается окружностями $M_1$, $M_2$, $M_3$ ортогонально (фиг. 20) или діаметрально (фиг. 21), смотря по тому, имѣетъ ли степень положительное или отрицательное значеніе [26]).




Фиг. 20.

Аналогичныя предложенія справедливы и относительно трехъ сферъ. Если ихъ радикальныя плоскости $\pi_{1,2}$ и $\pi_{2,3}$ пересѣкаются по прямой линіи, то каждая точка этой прямой имѣетъ одинаковую степень относительно трехъ сферъ; слѣдовательно, и третья радикальная плоскость $\pi_{3,1}$ должна проходить черезъ эту прямую.

---

ченіе общей хорды съ линіей центровъ, такъ какъ ея степень относительно обѣихъ окружностей равна квадрату общей полухорды.

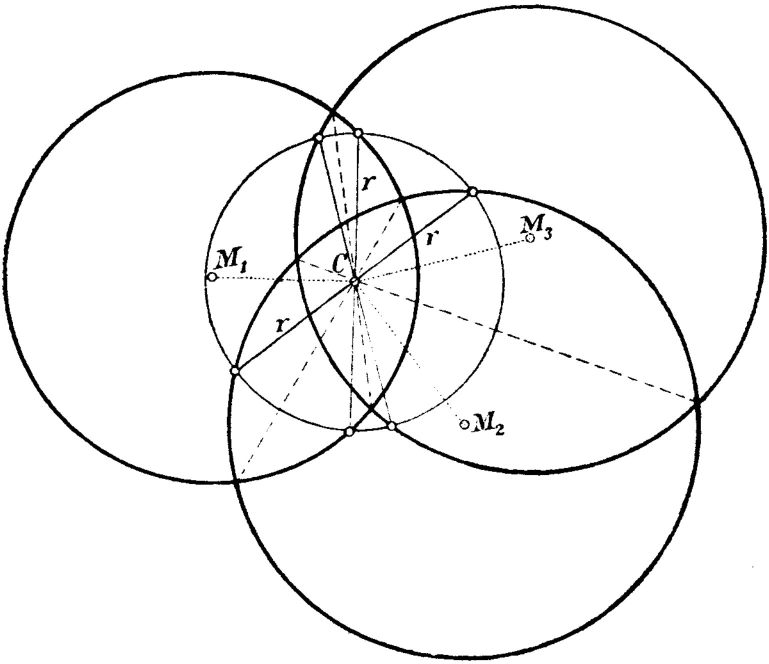
[24]) Каковымъ служитъ принимаемая въ проективной геометріи безконечно удаленная точка пересѣченія этихъ параллельныхъ линій. См. дополненіе I въ концѣ книги (ср. также стр. 29).

[25]) Т. е. если три радикальныя оси параллельны.

[26]) Если степень радикальнаго центра $C$ относительно окружностей равна $+r^2$, то точка $C$ лежитъ внѣ окружностей, и степень представляетъ собой квадратъ касательной, проведенной изъ точки $C$ къ любой изъ трехъ окружностей. Касатель-

Предложенiе III. Если изъ трехъ радикальныхъ плоскостей трехъ сферъ двѣ пересѣкаются по прямой линiи $a_{1,2,3}$, то послѣдняя лежитъ также и въ третьей плоскости; эта прямая называется „радикальной осью" трехъ сферъ.

Предложенiе IV. Если каждыя три изъ четырехъ сферъ опредѣляютъ радикальную ось, то эти три оси пересѣкаются въ одной точкѣ, въ „радикальномъ центрѣ" этихъ четырехъ сферъ. Въ самомъ дѣлѣ, каждыя двѣ радикальныя оси расположены въ одной плоскости, а потому должны пересѣкаться.




Фиг. 21.

Предложенiе V. Радикальный центръ $C$ четырехъ сферъ служитъ центромъ нѣкоторой сферы $k$, которая разсѣкается всѣми четырьмя сферами ортогонально или дiаметрально, смотря по тому, имѣетъ ли общая степень положительное или отрицательное значенiе.

ными служатъ поэтому радiусы окружности $C$, которая, такимъ образомъ, сѣчетъ данныя окружности ортогонально (фиг. 20).

Если степень радикальнаго центра $C$ относительно окружностей есть $-r^2$, то онъ лежитъ внутри трехъ окружностей, и полухорда каждой окружности, перпендикулярная къ ея дiаметру въ точкѣ $C$, равна $r$. Окружность $C$ сѣчетъ три окружности дiаметрально (фиг. 21).

> Только въ томъ случаѣ, когда точка $C$ уходитъ въ безконечность и сфера $k$ вырождается въ плоскость, пересѣченіе становится одновременно ортогональнымъ и діаметральнымъ.

Кромѣ того, нужно упомянуть еще о томъ предѣльномъ случаѣ, когда степень равна нулю, т. е. сферы касаются другъ друга въ точкѣ $C$; общая діаметральная или ортогональная сфера вырождается въ этомъ случаѣ въ точку $C$. Врядъ ли нужно перечислять частности, которыя могутъ имѣть мѣсто, если одна изъ данныхъ сферъ неограниченно возрастаетъ или убываетъ. Мы приведемъ еще нѣсколько задачъ; предварительно, однако, сдѣлаемъ еще слѣдующее общее замѣчаніе.

Въ то время, какъ построеніе обыкновенной элементарной геометріи въ ея догматическомъ изложеніи производитъ впечатлѣніе тяжеловѣсности, и отдѣльныя теоремы часто оказываются изолированными, часто поражаютъ своими неожиданными особенностями, — сферическая геометрія даетъ намъ возможность въ первый разъ заглянуть въ богатую область новой геометріи, факты которой разматываются естественно изъ немногихъ плодотворныхъ основныхъ понятій и внимательному изслѣдователю являются сами собой.

Задача 5. Найти геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ выходятъ равныя касательныя къ двумъ сферамъ.

Задача 6. Найти точки, которыя имѣютъ относительно данныхъ трехъ сферъ $k_1$, $k_2$, $k_3$ данныя степени $P_1$, $P_2$, $P_3$ $(P_i = \pm d_i^2,\ i = 1, 2, 3)$.

Задача 7. Найти геометрическое мѣсто центровъ всѣхъ сферъ, пересѣкающихъ данную сферу $k$ подъ даннымъ угломъ.

Задача 8. Найти геометрическое мѣсто центровъ всѣхъ сферъ, которыя пересѣкаютъ данныя двѣ плоскости подъ данными углами.

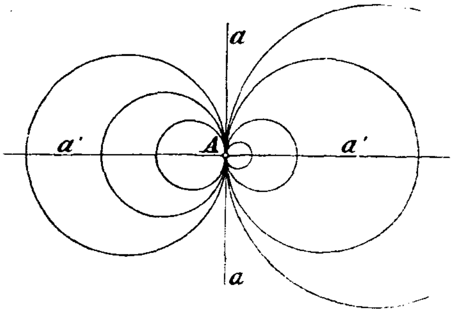
Задача 9. Найти геометрическое мѣсто центровъ всѣхъ сферъ, которыя пересѣкаютъ двѣ данныя пересѣкающіяся сферы подъ данными углами.

**4.** Подъ „пучкомъ окружностей“ разумѣютъ совокупность окружностей, расположенныхъ въ одной плоскости и имѣющихъ общую радикальную ось. Если двѣ окружности такого пучка имѣютъ общую точку, то степень послѣдней относительно окружности равна нулю; она лежитъ на радикальной оси, и всѣ окружности пучка черезъ нее необходимо проходятъ, потому что каждая точка оси имѣетъ одинаковую степень относительно всѣхъ окружностей пучка. Въ зависимости отъ того, сколько общихъ точекъ имѣютъ окружности пучка, различаютъ пучки трехъ типовъ:

1. Гиперболическіе пучки, въ которыхъ окружности вовсе не имѣютъ общихъ точекъ;
2. Параболическіе, въ которыхъ окружности имѣютъ одну общую точку;

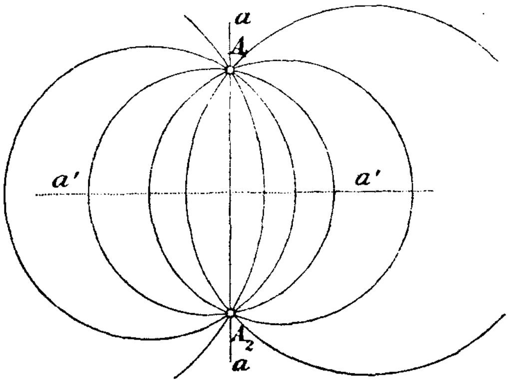
3. Эллиптическіе, въ которыхъ окружности имѣютъ двѣ общія точки.

Окружности параболическаго пучка касаются другъ друга по общей радикальной оси $a$ въ одной и той же точкѣ $A$; центры ихъ расположены на одной прямой $a'$, перпендикулярной къ $a$ въ точкѣ $A$ (фиг. 22). Окружности пучка, „ортогональнаго“ къ этому, центры которыхъ расположены на прямой $a$, а радикальной осью которыхъ служитъ прямая $a'$, пересѣкаютъ окружности даннаго пучка подъ прямыми углами.



Фиг. 22.

Эллиптическій пучекъ (фиг. 23) также очень легко построить: его окружности проходятъ черезъ двѣ неподвижныя точки $A_1$ и $A_2$ („основныя точки“), центры же ихъ расположены на прямой $a'$, перпендикулярной къ $A_1 A_2$ въ серенѣ отрѣзка $A_1 A_2$. Самой большой окружностью пучка, какъ и въ параболическомъ пучкѣ, служитъ радикальная ось $a$; самая же малая окружность пучка имѣетъ діаметромъ отрѣзокъ $A_1A_2$, такъ что всѣ остальныя окружности пучка пересѣкаютъ ее діаметрально. И здѣсь каждая точка радикальной оси имѣетъ одинаковую степень относительно всѣхъ окружностей пучка. Въ точкахъ $P$ оси $a$, которыя лежатъ внѣ отрѣзка $A_1 A_2$, степень имѣетъ положительныя значенія $p^2$, такъ что изъ точки $P$ всегда можно провести ко всѣмъ окружностямъ пучка касательныя, имѣющія общую длину $p$. Окружность радіуса $p$, имѣющая центръ въ точкѣ $P$, сѣчетъ такимъ образомъ ортогонально всѣ окружности пучка. Если $M_1$ и $M_2$ суть центры двухъ окружностей пучка (см. фиг. 24), $r_1$ и $r_2$ ихъ радіусы, то $M_1$ имѣетъ относительно окружности $P$ степень $r_1^2$, точка $M_2$ — степень $r_2^2$. Если $Q$ есть другая окружность, относительно которой мы предположимъ только, что она сѣчетъ ортогонально окружности $M_1$ и $M_2$, то относительно нея точка $M_1$ также имѣетъ степень $r_1^2$, а точка $M_2$ — степень $r_2^2$. Слѣдовательно, прямая $a'$, соединяющая точки

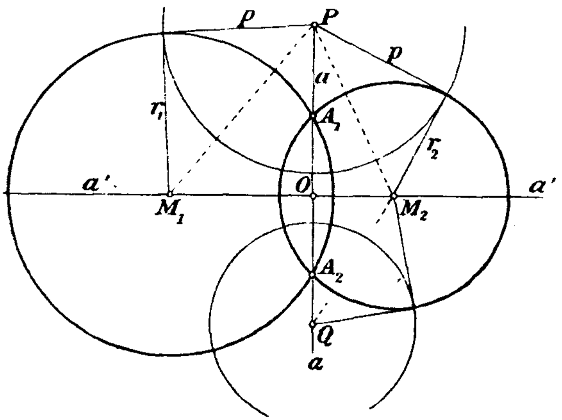


Фиг. 23.

$M_1$ и $M_2$, есть общая радикальная ось всѣхъ окружностей, которыя сѣкутъ ортогонально окружности даннаго пучка. Такъ какъ, съ другой стороны, прямая $a$ сама также принадлежитъ первому пучку, то центры ортогональныхъ окружностей расположены на прямой $a$; ортогональныя окружности также образуютъ пучекъ, „ортогональный“ къ первому пучку; осью второго пучка служитъ прямая $a'$. Но второй пучекъ будетъ гиперболическимъ. Въ самомъ дѣлѣ, если $O$ есть середина отрѣзка $A_1A_2$, то въ первомъ эллиптическомъ пучкѣ

$$PM_1^2 = p^2 + r_1^2 = M_1O^2 + PO^2.$$

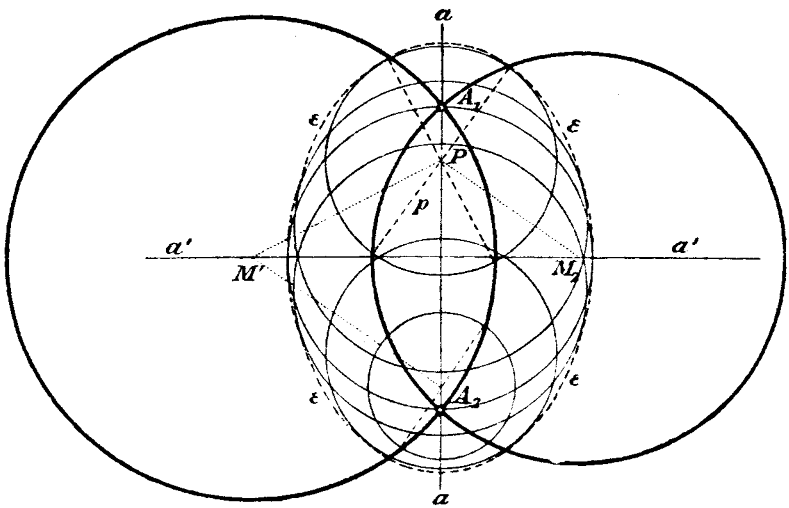
Такъ какъ $M_1O < r_1$, то отсюда слѣдуетъ, что $p < PO$, иными словами, окружность $P$ не встрѣчаетъ прямой $a'$; а такъ какъ $a'$ принадлежитъ второму пучку въ качествѣ предѣльной окружности, то окружности этого пучка не пересѣкаются. Эта зависимость двухъ пучковъ взаимная, потому что окружности второго пучка, въ свою очередь, пересѣкаютъ ортогонально окружности перваго пучка; если мы, такимъ образомъ, исходимъ отъ гиперболическаго пучка, то тѣмъ же путемъ придемъ къ ортогональному эллиптическому пучку. Такъ какъ внутри каждой окружности гиперболическаго пучка расположены меньшія окружности пучка, то эти окружности съ каждой стороны пучка приближаются къ нѣкоторой точкѣ. Эти двѣ точки $A_1$ и $A_2$ расположены симметрично относительно радикальной оси и называются „нулевыми окружностями“ гиперболическаго пучка, или „основными точками“ соотвѣтствующаго ортогональнаго эллиптическаго пучка. Эллиптическій пучекъ вовсе не имѣетъ нулевыхъ окружностей, параболическій имѣетъ одну, а гиперболическій имѣетъ двѣ (см. также фиг. 25).



Фиг. 24.

Чтобы перейти отъ эллиптическаго пучка къ ортогональному гиперболическому, мы исходили изъ точки $P$, расположенной внѣ отрѣзка, соединяющаго основныя точки. Теперь интересно взять точку $P$ внутри этого отрѣзка (фиг. 25); въ такомъ случаѣ степень точки $P$ относительно окружностей пучка имѣетъ отрицательное значеніе $-p^2$; окружность $P$, имѣющая центръ въ точкѣ $P$ и радіусъ $p$, въ этомъ случаѣ разсѣкается діаметрально всѣми окружностями пучка [27]). Если точка $P$ пробѣгаетъ весь отрѣзокъ $A_1A_2$, то окружность $P$ измѣняется по величинѣ и положенію, но при этомъ постоянно касается эллипса $\varepsilon$, имѣющаго точки $A_1$ и $A_2$ своими фокусами и малую ось, равную $A_1A_2$. Впрочемъ, послѣднимъ фактомъ намъ ниже не придется пользоваться, вслѣдствіе чего мы и ограничиваемся этимъ указаніемъ.

**5.** Совокупность окружностей на плоскости, относительно которыхъ нѣкоторая точка $P$ имѣетъ одну и ту же степень, называется „связкой окружностей". Такъ какъ всѣ окружности, проходящія черезъ одну и ту же

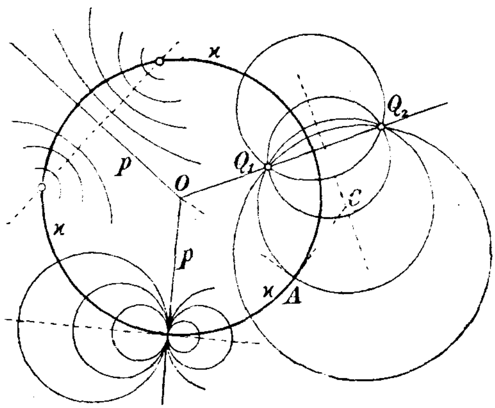



Фиг. 25.

точку плоскости, сообщаютъ послѣдней одну и ту же степень 0, то онѣ образуютъ предѣльный случай связки, такъ называемую „параболическую" связку. Связка называется „гиперболической" или „эллиптической", если общій радикальный центръ имѣетъ соотвѣтственно положительную или отрицательную степень относительно окружностей связки. Если въ гиперболической связкѣ значеніе степени есть $+p^2$, то окружность $\varkappa$, имѣющая центръ въ точкѣ $O$ и радіусъ $p$, пересѣкаетъ ортогонально всѣ окружности связки. Связка можетъ быть въ этомъ случаѣ опредѣлена, какъ совокупность окружностей, пересѣкающихъ ортогонально окружность $\varkappa$. Это соображеніе даетъ также способъ для построенія окружностей связки (фиг. 26): въ произвольной точкѣ $A$ окружности $\varkappa$ проводимъ къ ней

[27]) Если степень точки $P$ относительно окружности $M'$ (фиг. 26) есть $-p^2$, то $p$ есть полухорда окружности $M'$, перпендикулярная къ $M'P$ въ точкѣ $P$, какъ это изображено на чертежѣ. Поэтому окружность $M'$ сѣчетъ окружность $P$ діаметрально.

касательную и изъ произвольной точки $C$ этой касательной проводимъ окружность, проходящую черезъ точку $A$; такъ какъ точка $O$ имѣетъ относительно этой окружности степень $+p^2$, то послѣдняя принадлежитъ нашей связкѣ. Нашей связкѣ принадлежитъ также каждый пучекъ, опредѣляемый двумя окружностями связки. Нулевые круги всѣхъ гиперболическихъ пучковъ расположены на окружности $\varkappa$; основныя точки каждаго эллиптическаго пучка взаимно обратны другъ другу при инверсіи, центромъ которой служитъ точка $O$, а степенью $p^2$. Обратно, всякая окружность, проходящая черезъ двѣ взаимно обратныя въ этой инверсіи точки, принадлежитъ пучку. Вообще, каждая прямая, проходящая черезъ точку $O$, пересѣкаетъ каждую окружность связки, которую она встрѣчаетъ въ двухъ точкахъ, взаимно обратныхъ въ этой инверсіи; такія двѣ точки называются „парой точекъ связки". Поэтому черезъ двѣ точки плоскости, не взаимно обратныя, проходитъ только одна окружность связки, которую можно построить, опредѣляя точку, обратную одной изъ данныхъ. Вообще эта инверсія преобразовываетъ связку въ себя самое [28]).



Фиг. 26.

[28]) Нужно помнить, что въ гиперболической связкѣ касательная изъ центра къ каждой окружности связки равна $p$.

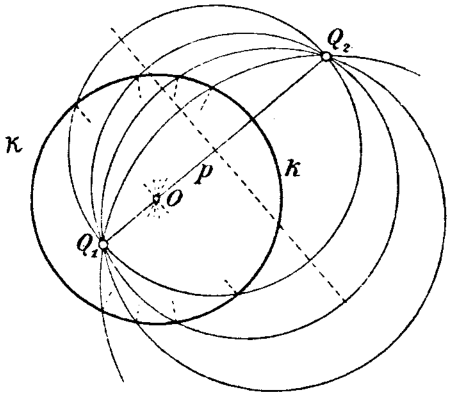
На фиг. 26 изображены три пучка, принадлежащіе связкѣ ортогональной окружности $\varkappa$: слѣва гиперболическій, внизу параболическій, справа эллиптическій. Нулевыя окружности гиперболическаго пучка, какъ и всѣ окружности пучка, пересѣкаютъ окружность $\varkappa$ (ортогонально), т. е. попросту лежатъ на этой окружности. Обратно, если мы возьмемъ произвольныя двѣ точки на окружности $\varkappa$ и построимъ гиперболическій пучекъ, для котораго эти двѣ точки служатъ нулевыми окружностями, то всѣ окружности пучка имѣютъ (какъ и нулевыя) относительно точки $O$ степень $p^2$, сѣкутъ окружность $\varkappa$ ортогонально, а потому принадлежатъ связкѣ $(O)$.

Если двѣ окружности связки $(O)$ пересѣкаются въ точкахъ $Q_1$ и $Q_2$, то произведеніе $OQ_1 \,.\, OQ_2$ равно квадрату касательной, проведенной изъ $O$ къ каждой изъ этихъ двухъ окружностей, т. е. равно $p^2$. Поэтому точки $Q_1$ и $Q_2$ взаимно обратны при инверсіи, имѣющей центръ $O$ и степень $p^2$. Обратно, если точки $Q_1$ и $Q_2$ взаимно обратны въ этой инверсіи, т. е. $OQ_1 \,.\, OQ_2 = p^2$, то касательная изъ точки $O$ къ любой окружности, проходящей черезъ точки $Q_1$ и $Q_2$, имѣетъ длину $p$; иначе говоря, всѣ окружности, проходящія черезъ точки $Q_1$ и $Q_2$, принадлежатъ нашей связкѣ $(O)$. Если поэтому $Q_1$ и $Q'_1$ суть двѣ взаимно обратныя въ нашей инверсіи точки, то черезъ нихъ проходитъ безчисленное множество окружностей связки, онѣ

Задача 10. Найти общую окружность двухъ пучковъ, принадлежащихъ одной связкѣ [29]).

Задача 11. Превратить эллиптическій пучекъ окружностей путемъ инверсіи въ пучекъ лучей. Во что обратится въ этомъ случаѣ ортогональный пучекъ?

Эллиптическая связка отличается бóльшимъ единообразіемъ, нежели гиперболическая. Такъ какъ общій радикальный центръ имѣетъ въ этомъ случаѣ отрицательную степень $-p^2$ относительно всѣхъ окружностей связки, то послѣднія всѣ пересѣкаютъ діаметрально окружность $k$, имѣющую центръ въ точкѣ $O$ и радіусъ $p$. Между тѣмъ, какъ ортогональная окружность $\varkappa$ гиперболической связки не принадлежитъ самой связкѣ, такъ какъ точка $O$ имѣетъ относительно нея отрицательную степень, — „діаметральная окружность" $k$ эллиптической связки входитъ въ составъ послѣдней. И здѣсь весь пучекъ, опредѣляемый двумя окружностями связки, принадлежитъ связкѣ; но такъ какъ въ этомъ случаѣ точка $O$ находится внутри всѣхъ окружностей связки, то послѣднія попарно пересѣкаются въ двухъ точкахъ. Такимъ образомъ, въ составъ связки въ этомъ случаѣ входятъ исключительно эллиптическіе пучки (см. фиг. 27 и 28; на фигурѣ 28 основныя точки эллиптическаго пучка расположены на діаметральной окружности); основныя точки этихъ пучковъ естественно и въ этомъ случаѣ взаимно обратны относительно центра $O$ при степени инверсіи $-p^2$. Вообще, какъ и въ гиперболической связкѣ, каждая прямая, проходящая черезъ точку $O$, встрѣчаетъ каждую окружность связки въ двухъ точкахъ, взаимно обратныхъ въ этой инверсіи, — въ „парѣ точекъ связки".



Фиг. 27.

Задача 12. Построить общую окружность двухъ пучковъ связки.

Задача 13. Черезъ любыя двѣ не-обратныя точки проходитъ окружность связки. Построить ее [30]).

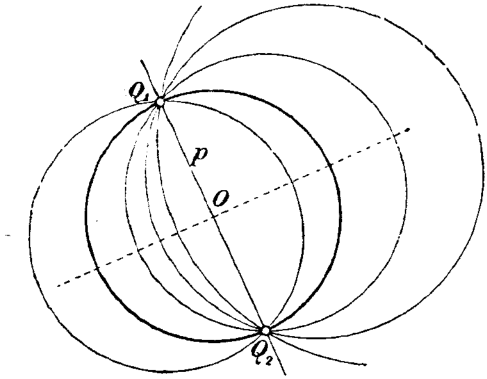
---

не опредѣляютъ окружности связки. Но если онѣ не взаимно обратны, то мы построимъ точку $Q_2$, обратную $Q_1$, и проведемъ окружность, проходящую черезъ точки $Q_1$, $Q'_1$ и $Q_2$; это будетъ окружность связки и притомъ единственная, проходящая черезъ точки $Q_1$ и $Q'_1$. Если точки $Q_1$, $Q'_1$ и $Q_2$ лежатъ на одной прямой, то окружность вырождается въ прямую, проходящую черезъ точку $O$.

[29]) Центръ искомой окружности лежитъ въ пересѣченіи осей обоихъ пучковъ.

[30]) Въ виду важности, которую имѣютъ эти двѣ задачи для дальнѣйшаго, мы приведемъ ихъ рѣшеніе.

Если даны двѣ связки съ совпадающими или различными центрами $O_1$ и $O_2$, а $P_1$ и $P_2$ суть точки, обратныя въ этихъ связкахъ относительно одной и той же точки $P$, то окружность $\pi$, проходящая черезъ точки $P, P_1, P_2$, принадлежитъ обѣимъ связкамъ. Если $\tau$ есть другая такая же окружность, то $O_1O_2$ есть радикальная ось этихъ двухъ окружностей, и опредѣляемый ими пучекъ принадлежитъ обѣимъ связкамъ [31]). Если точка $O_2$ совпадаетъ съ точкой $O_1$, то этотъ пучекъ вырождается въ совокупность прямыхъ, проходящихъ черезъ точку $O_1$. Если мы будемъ разсматривать этотъ пучекъ лучей, какъ предѣльный случай эллиптическаго пучка окружностей, въ который онъ къ тому же можетъ быть превращенъ методомъ инверсіи, то мы получимъ теорему: общія окружности двухъ связокъ образуютъ пучекъ окружностей.




Фиг. 28.

**6.** Намъ остается только распространить эти результаты на сферы. Прежде всего, вращая пучекъ окружностей вокругъ линіи центровъ, мы получимъ „пучекъ сферъ", т. е. совокупность сферъ, имѣющихъ общую радикальную плоскость. Если окружности, принадлежащія связкѣ (не относя сюда ортогональнаго круга, когда онъ существуетъ) вращаются каждая вокругъ своего центра, то онѣ описываютъ сферы, которыя въ сово-

---

Для рѣшенія задачи 12 замѣтимъ, что пучекъ въ эллиптической связкѣ опредѣляется либо двумя его основными точками, либо двумя его окружностями; въ послѣднемъ случаѣ эти двѣ окружности своимъ пересѣченіемъ опять таки опредѣляютъ основныя точки пучка. Линія центровъ пучка есть перпендикуляръ, возставленный къ отрѣзку, соединяющему основныя точки, изъ его середины. Если даны два пучка связки, то ихъ линіи центровъ своимъ пересѣченіемъ опредѣляютъ центръ окружности, принадлежащей обоимъ пучкамъ. Если линіи центровъ параллельны, то основныя точки обоихъ пучковъ лежатъ на одной прямой, въ которую въ этомъ случаѣ и вырождается общая окружность.

Для рѣшенія задачи 13 строимъ точку, обратную относительно одной изъ данныхъ, и проводимъ окружность черезъ данныя двѣ точки и вновь построенную точку. Если эти три точки лежатъ на одной прямой, то въ нее вырождается искомая окружность.

[31]) Какъ мы видѣли въ п. 5, всякая окружность, проходящая черезъ двѣ точки, взаимно обратныя въ инверсіи связки, принадлежитъ этой связкѣ; поэтому окружность $\pi$ принадлежитъ какъ связкѣ $O_1$, такъ и связкѣ $O_2$. Радикальная ось

купности образуютъ „связку сферъ“, т. е. совокупность сферъ, имѣющихъ общую радикальную ось; эта радикальная ось перпендикулярна къ плоскости вращающейся связки окружностей въ радикальномъ центрѣ послѣдней. Итакъ, центры сферъ, образующихъ пучекъ, въ совокупности составляютъ прямую линію; центры же сферъ, образующихъ связку, составляютъ плоскость. Сферы, принадлежащія связкѣ, либо проходятъ всѣ черезъ двѣ точки, либо это не имѣетъ мѣста [32]). Въ первомъ случаѣ прямая, соединяющая эти двѣ точки, есть общая радикальная ось; всѣ сферы такой связки пересѣкаютъ діаметрально нѣкоторую сферу, имѣющую центръ въ точкѣ пересѣченія $S$ плоскости центровъ съ радикальной осью. Во второмъ случаѣ точка $S$ служитъ центромъ сферы, которая пересѣкаетъ ортогонально всѣ сферы, принадлежащія пучку. Радіусъ сферы въ томъ и въ другомъ случаѣ равенъ корню квадратному изъ абсолютной величины степени точки $S$ относительно сферъ связки.

Легко видѣть, что каждой связкѣ сферъ отвѣчаетъ пучекъ сферъ, сѣкущихъ ортогонально всѣ сферы связки, и обратно [33]).

Совокупность сферъ, относительно которыхъ нѣкоторая точка $O$ имѣетъ одну и ту же степень, называется „сѣтью сферъ“. Такую сѣть образуютъ прежде всего сферы, проходящія черезъ одну точку, — частный случай, съ которымъ мы уже познакомились выше подъ названіемъ „параболической сѣти“; ея степень равна нулю. Сѣти, степени которыхъ отличны отъ нуля, называются гиперболическими или эллиптическими, смотря по тому, имѣетъ ли соотвѣтствующая степень положительное значеніе $(+p^2)$

---

окружностей $\pi$ и $\tau$ должна проходить черезъ радикальный центръ каждой связки, а потому совпадаетъ съ прямой $O_1 O_2$.

[32]) Какъ и въ случаѣ пучка окружностей на плоскости, радикальная ось либо встрѣчаетъ всѣ сферы связки въ одной и той же парѣ точекъ, либо вовсе ихъ не встрѣчаетъ.

[33]) Если $P$ есть точка на радикальной оси связки, то она имѣетъ одну и ту же степень относительно всѣхъ сферъ связки. Если эта степень положительная, скажемъ $p^2$, то всѣ касательныя изъ точки $P$ къ каждой сферѣ имѣютъ длину $p$. Поэтому сфера $\pi$, имѣющая центръ въ точкѣ $P$ и радіусъ $p$, сѣчетъ ортогонально всѣ сферы связки.

Итакъ, всѣ сферы $\pi$ имѣютъ центры на радикальной оси связки. Нетрудно обнаружить, что плоскость, въ которой лежатъ центры всѣхъ сферъ связки, есть общая радикальная плоскость сферъ $\pi$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $S$ будетъ произвольная точка этой плоскости, $\sigma$ — сфера связки, имѣющая центръ въ точкѣ $S$. Сфера $\sigma$ сѣчетъ ортогонально всѣ сферы $\pi$, а потому имѣетъ относительно нихъ одну и ту же степень (ср. п. 4). Сферы $\pi$ образуютъ, такимъ образомъ, пучекъ, сѣкущій ортогонально всѣ сферы связки.

Если радикальная ось связки пересѣкаетъ ея сферы въ двухъ точкахъ $A_1$ и $A_2$, то ортогональный пучекъ будетъ гиперболическій, $A_1$ и $A_2$ будутъ его предѣльныя точки. Между точками $A_1$ и $A_2$ нѣтъ центровъ сферъ, принадлежащихъ пучку.

или отрицательное ($-p^2$). Сфера, имѣющая центръ въ радикальномъ центрѣ $O$ гиперболической сѣти и радіусъ $p$, пересѣкаетъ ортогонально всѣ сферы сѣти, но сама ей не принадлежитъ. Въ эллиптической же сѣти эта сфера разсѣкается всѣми сферами діаметрально и представляетъ собой особенную сферу сѣти, которая при построеніяхъ часто бываетъ очень полезной. Прямая, проходящая черезъ точку $O$, встрѣчаетъ каждую сферу сѣти, которую она пересѣкаетъ, въ двухъ точкахъ, взаимно обратныхъ при инверсіи, центромъ которой служитъ точка $O$, а степенью — степень сѣти [34]). Каждая сфера сѣти при этой „инверсіи сѣти" переходитъ въ себя самое [35]). Если двѣ сферы сѣти пересѣкаются, то окружность сѣченія, плоскость которой, конечно, проходитъ черезъ точку $O$, обратна самой себѣ; такую окружность называютъ „окружностью сѣти", а двѣ взаимно обратныя точки называютъ короче „парой точекъ сѣти" [36]). Черезъ двѣ пары точекъ сѣти всегда проходитъ одна и только одна окружность сѣти, черезъ три пары — одна и только одна сфера [37]). Относительно двухъ сѣтей $(O_1)$ и $(O_2)$ можно построить точки $P_1$ и $P_2$, обратныя любой данной точкѣ $P$. Всѣ сферы, проходящія черезъ точки $P$, $P_1$ и $P_2$, принадлежатъ какъ одной, такъ и другой сѣти и имѣютъ прямую $O_1O_2$ общей радикаль-

---

[34]) Это основное свойство сѣти вытекаетъ изъ того, что степень точки $O$ относительно сферы равна произведенію изъ любой сѣкущей на ея внѣшнюю часть въ гиперболической сѣти и произведенію отрѣзковъ хорды въ эллиптической сѣти. Нужно имѣть въ виду, что въ гиперболической сѣти предполагается гиперболическая инверсія, а въ эллиптической — эллиптическая.

[35]) Согласно предыдущему замѣчанію, двѣ точки $M$ и $M'$, въ которыхъ прямая $MOM'$, проходящая черезъ центръ сѣти $O$, встрѣчаетъ сферу этой сѣти, взаимно обратны при инверсіи сѣти. Иными словами, эта инверсія замѣщаетъ точки $M$ и $M'$ другъ другомъ, и сфера переходитъ въ себя самое (см. предл. 6 въ § 8).

[36]) Если сфера проходитъ черезъ двѣ точки $A$ и $A'$, взаимно обратныя относительно точки $O$ при степени инверсіи $\pm p^2$, то степень точки $O$ относительно этой сферы есть $\pm p^2$. Иными словами, сфера принадлежитъ сѣти, имѣющей центръ въ точкѣ $O$ и степень $\pm p^2$.

[37]) Пусть $A$ и $A'$, $B$ и $B'$ будутъ двѣ пары точекъ сѣти, такъ что

$$OA' . OA = OB' . OB = \pm p^2.$$

Тогда окружность, проходящая черезъ точки $A, A'$ и $B$, въ виду предыдущаго соотношенія, проходитъ также черезъ точку $B'$. Если точки $A, A'$ и $B$ лежатъ на одной прямой, то на той же прямой въ силу инверсіи лежитъ и точка $B'$; эта прямая и представляетъ собой въ этомъ случаѣ окружность сѣти, проходящую черезъ двѣ пары точекъ (см. прим. 30).

Если теперь $A$ и $A'$, $B$ и $B'$, $C$ и $C'$ суть три пары точекъ сѣти, не лежащія на одной окружности сѣти, то мы проведемъ окружность, опредѣляемую двумя парами точекъ $A$ и $A'$, $B$ и $B'$, и сферу, проходящую черезъ эту окружность и точку $C$; эта сфера проходитъ также черезъ точку $C'$; это есть сфера сѣти, опредѣляемая двумя парами точекъ.

ной осью[38]); мы получаемъ такимъ образомъ безчисленное множество пучковъ, принадлежащихъ сѣтямъ $(O_1)$ и $(O_2)$, которые въ совокупности образуютъ связку съ общей радикальной осью $O_1O_2$. Нѣтъ возможности исчерпать обширный матеріалъ, который отсюда легко разматывается, и мы вынуждены указать на спеціальныя сочиненія *). Для нашего изслѣдованія объ основаніяхъ геометріи изложеннаго вполнѣ достаточно.

## § 10. Частичное осуществленіе евклидовой геометріи въ сѣти сферъ. Двѣ неевклидовы геометріи.

**1.** Если осуществленіе евклидовой геометріи въ параболической сѣти все еще можетъ поддерживать убѣжденіе, что „точка" есть нѣчто недѣлимое, то мы располагаемъ теперь средствомъ построить геометрическія системы, въ которыхъ „точками" служатъ то сферы, то окружности, то пары взаимно обратныхъ точекъ гиперболической или эллиптической сѣти.

A) Если мы подъ „псевдо-точками" будемъ разумѣть сферы сѣти $(O)$, подъ „псевдо-прямыми" пучки этой сѣти, подъ „псевдо-плоскостями" ея связки, то мы можемъ высказать относительно этихъ образовъ всѣ положенія группы I Гильбертовыхъ аксіомъ, съ которыми мы познакомились въ § 8. Въ частности, имѣетъ мѣсто слѣдующее предложеніе.

Двѣ псевдо-точки всегда опредѣляютъ псевдо-прямую; три псевдо-точки, не лежащія на одной псевдо-прямой, всегда опредѣляютъ псевдо-плоскость.

Въ самомъ дѣлѣ, двѣ сферы сѣти опредѣляютъ пучекъ; три сферы, о которыхъ идетъ рѣчь, опредѣляютъ связку, всѣ сферы которой принадлежатъ сѣти[39]). Можно было бы также распространить на „точки" нашихъ псевдо-прямыхъ вторую группу Гильбертовыхъ аксіомъ, характе-

---

[38]) Такъ какъ каждая такая сфера проходитъ черезъ точки $P$ и $P_1$, то она принадлежитъ сѣти $(O_1)$ (см. прим. 36); такъ какъ она проходитъ черезъ точки $P$ и $P_2$, то она принадлежитъ сѣти $(O_2)$. Такимъ образомъ, какъ точка $O_1$, такъ и точка $O_2$ имѣетъ каждую одну и ту же степень относительно всѣхъ сферъ, проходящихъ черезъ точки $P$, $P_1$, $P_2$. Поэтому $O_1O_2$ есть общая радикальная ось этихъ сферъ.

*) Лучше всего изучить геометрію сѣти сферъ конструктивнымъ методомъ, т. е. рѣшеніемъ многихъ задачъ. Мы можемъ указать задачникъ Милиновскаго (Milinowski, II Th.), въ которомъ свойства сѣти подробно разработаны. Изящное изложеніе сферической геометріи, выполненное элементарными средствами, можно найти въ книгѣ Райэ: Th. Reye, „Synthetische Geometrie der Kugel". Leipzig, 1879.

[39]) Если мы возьмемъ двѣ сферы сѣти, то совокупность сферъ, имѣющихъ съ ними общую радикальную плоскость, образуетъ пучекъ сферъ, принадлежащій сѣти.

Три сферы сѣти, не принадлежащія одному пучку, имѣютъ общую радикальную ось; совокупность сферъ, имѣющихъ ту же радикальную ось, образуетъ связку, принадлежащую сѣти.

ризующихъ понятіе „между“, въ той модификаціи, впрочемъ, которую устанавливаетъ Пашъ (l. c. § 1, 18), вводя понятіе о „выключенной“ точкѣ; здѣсь рѣчь идетъ собственно о томъ, чтобы установить значеніе выраженія: двѣ пары точекъ „раздѣляютъ“ или „нераздѣляютъ“ другъ друга. Къ этому мы возратимся ниже.

B) Другое осуществленіе группъ I и II Гильбертовыхъ аксіомъ (въ указанной выше модификаціи), болѣе доступное конструктивной обработкѣ въ чертежѣ, основывается на томъ, что мы принимаемъ за „псевдо-точки“, „псевдо-прямыя“ и „псевдо-плоскости“ окружности, пучки и связки окружностей на нѣкоторой плоскости $\eta$. Посредствомъ инверсіи можно превратить плоскость $\eta$ въ сферу и такимъ образомъ перенести „псевдо-пространство“ нашей всевдо-геометріи на сферу. Двѣ различныя псевдо-точки всегда опредѣляютъ псевдо-прямую; псевдо-точки, не расположенныя на одной псевдо-прямой, всегда опредѣляютъ псевдо-плоскость. Было бы очень полезно и поучительно провѣрить всѣ предложенія Гильбертовой группы I и ея слѣдствія помощью соотвѣтствующихъ построеній. Чтобы, по крайней мѣрѣ, указать всю плодотворность такого рода аналогій, мы выведемъ предложеніе, которое соотвѣтствуетъ здѣсь теоремѣ Дезарга.

Предложеніе Дезарга разсматриваетъ два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ въ двухъ пересѣкающихся плоскостяхъ $\eta_1$ и $\eta_2$, расположенные такимъ образомъ, что прямыя $A_1B_1$ и $A_2B_2$, $B_1C_1$ и $B_2C_2$, $A_1C_1$ и $A_2C_2$ пересѣкаются соотвѣтственно въ трехъ точкахъ $X$, $Y$, $Z$, лежащихъ на пересѣченіи $S$ плоскостей $\eta_1$ и $\eta_2$. Въ такомъ случаѣ эти три пары прямыхъ опредѣляютъ три плоскости, пересѣкающіяся въ нѣкоторой точкѣ $S$; такимъ образомъ прямыя $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$, соединяющія соотвѣтственныя вершины треугольниковъ, проходятъ черезъ одну точку $S$. Если мы теперь возьмемъ еще одинъ треугольникъ $A_1'A_2'A_3'$ въ той же плоскости $\eta_1$, стороны котораго проходятъ соотвѣтственно черезъ точки $X$, $Y$, $Z$, то прямыя $A_1'A_2$, $B_1'B_2$, $C_1'C_2$ также проходятъ черезъ одну точку $S'$. Вмѣстѣ съ тѣмъ плоскости $A_1A_1'A_2$, $B_1B_1'B_2$, $C_1C_1'C_2$ содержатъ прямыя $A_1A_2$ и $A_1'A_2$, $B_1B_2$ и $B_1'B_2$, $C_1C_2$ и $C_1'C_2$, а потому онѣ содержатъ также точки $S$ и $S'$; слѣдовательно, эти три плоскости образуютъ пучекъ съ осью $SS'$. Этотъ пучекъ пересѣкается плоскостью $\eta_1$ по прямымъ $A_1A_1'$, $B_1B_1'$, $C_1C_1'$, проходящимъ черезъ точку $\Sigma$, въ которой прямая $SS'$ пересѣкаетъ плоскость $\eta_1$. Теорема Дезарга, такимъ образомъ, гласитъ:

Если два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ расположены въ одной или въ различныхъ плоскостяхъ такимъ образомъ, что соотвѣтственныя стороны $A_1B_1$ и $A_2B_2$, $B_1C_1$ и $B_2C_2$, $C_1A_1$ и $C_2A_2$ пересѣкаются въ трехъ точкахъ, расположенныхъ на одной прямой $s$, то вершины $A_1$ и $A_2$, $B_1$ и $B_2$, $C_1$ и $C_2$ расположены на трехъ прямыхъ, проходящихъ черезъ одну точку $S$.

Это предложеніе остается также въ силѣ въ псевдо-геометріяхъ A) и B). Такъ, напримѣръ, на обычномъ языкѣ геометріи круговъ это предложеніе въ системѣ B) гласитъ:

Возьмемъ въ одной плоскости 6 окружностей $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$, изъ которыхъ какъ первыя три, такъ и вторыя три не принадлежатъ одному пучку; положимъ далѣе, что пучки, опредѣляемые окружностями

$B_1$ и $C_1$, $B_2$ и $C_2$ имѣютъ общую окружность $X$,
$C_1$ „ $A_1$, $C_2$ „ $A_2$ „ „ „ $Y$,
$A_1$ „ $B_1$, $A_2$ „ $B_2$ „ „ „ $Z$;

если связки, опредѣляемыя окружностями $A_1, B_1, C_1$ и $A_2, B_2, C_2$ совпадаютъ, а три окружности $X, Y, Z$ принадлежатъ одному пучку, то три пучка $(A_1, A_2)$, $(B_1, B_2)$, $(C_1, C_2)$ имѣютъ общую окружность $S$.

Если связки $(A_1, B_1, C_1)$ и $(A_2, B_2, C_2)$ различны, то окружности $X$, $Y$, $Z$ также принадлежатъ одному пучку. Эта теорема легко допускаетъ обращеніе. Кто знакомъ съ проективной геометріей, тотъ легко усмотритъ, что теорема о совершенномъ четырехугольникѣ также справедлива въ нашей геометріи B), и это приводитъ къ опредѣленію гармоническаго расположенія четырехъ псевдо-точекъ на псевдо-прямой; это, въ свою очередь, даетъ непосредственно понятіе о проективной зависимости двухъ псевдо-прямыхъ, и мы можемъ, такимъ образомъ, построить образъ, аналогичный кривымъ второго порядка. Однако, здѣсь еще мы не предполагаемъ знакомства съ проективной геометріей, и потому не станемъ останавливаться на дальнѣйшемъ развитіи этихъ фактовъ.

**2.** Гораздо подробнѣе мы разовьемъ другое осуществленіе двухъ группъ Гильбертовыхъ аксіомъ I и II (см. § 8), которое такъ же, какъ система A), разматывается въ гиперболической или эллиптической сѣти сферъ. Пусть $O$ будетъ радикальный центръ, $+r^2$ или $-r^2$ степень сѣти. Будемъ теперь разумѣть подъ „псевдо-точкой“ пару точекъ въ инверсіи сѣти, подъ „псевдо-прямой“ окружность сѣти, подъ „псевдо-плоскостью“ сферу этой сѣти; въ такомъ случаѣ и здѣсь черезъ двѣ псевдо-точки всегда проходитъ псевдо-прямая и при томъ только одна; черезъ три псевдо-точки, опредѣляющія три различныя псевдо-прямыя, проходитъ одна и только одна псевдо-плоскость, при чемъ послѣдняя содержитъ упомянутыя три псевдо-прямыя. Въ самомъ дѣлѣ, двѣ пары точекъ, соотвѣтствующія двумъ псевдо-точкамъ, опредѣляютъ окружность, которая устанавливается уже собственно тремя изъ этихъ четырехъ точекъ и проходитъ черезъ четвертую точку. Три псевдо-точки содержатъ шесть точекъ, которыхъ, собственно, было бы слишкомъ много для опредѣленія сферы; но, въ силу теоремы объ отрѣзкахъ сѣкущей, сфера, проходящая черезъ четыре изъ этихъ точекъ, необходимо должна также пройти черезъ остальныя двѣ [40]). Теперь легко видѣть, что въ нашей псевдо-геометріи имѣютъ мѣсто аксіомы Гильбертовой группы I.

Въ этой псевдо-геометріи имѣется только одна связка псевдо-прямыхъ, которая въ то же время представляетъ собой связку прямыхъ и въ обычномъ смыслѣ слова; это совокупность прямыхъ, проходящихъ черезъ радикальный центръ $O$ [41]). Съ другой стороны, каждая „дѣйствительная", а слѣдовательно, и псевдо-прямая, проходящая черезъ точку $O$, пересѣкаетъ каждую окружность и каждую сферу сѣти, которыя она встрѣчаетъ, въ парѣ взаимно обратныхъ точекъ, т. е. пересѣкаетъ каждую псевдо-прямую и псевдо-плоскость въ одной псевдо-точкѣ; поэтому на псевдо-плоскости и на псевдо-прямой остаются въ силѣ всѣ свойства, которыя высказываются относительно понятія „между" въ дѣйствительной связкѣ прямыхъ. Такъ, напримѣръ, изъ четырехъ лучей связки $a$, $b$, $c$, $d$, расположенныхъ въ одной плоскости, всегда два и только два раздѣляютъ два другихъ,— скажемъ, $a$, $b$ и $c$, $d$, — между тѣмъ какъ при другомъ распредѣленіи двѣ пары лучей другъ друга не раздѣляютъ; точно такъ же четыре псевдоточки на псевдо-прямой однимъ и только однимъ способомъ разбиваются на двѣ пары, раздѣляющія другъ друга [42]). Другія предложенія этого рода приведены у Паша (l. c. § 1, 18). Такимъ образомъ, вторая группа Гильбертовыхъ аксіомъ остается въ силѣ въ нашей геометріи въ той модифи-

---

[40]) См. примѣчаніе 37.

[41]) Что плоскости и прямыя, проходящія черезъ точку $O$, могутъ быть разсматриваемы, какъ сферы и окружности безконечно большого радіуса, — это ясно, такъ какъ на это неоднократно уже указывалось. Ясно также, что въ параболической сѣти онѣ входятъ въ составъ послѣдней, такъ какъ точка $O$ и относительно нихъ имѣетъ степень 0. Можетъ показаться страннымъ, что онѣ входятъ въ составъ сѣти, когда $r \neq 0$, такъ какъ эти плоскости и прямыя и въ этомъ случаѣ, какъ сферы и окружности безконечно большого радіуса, повидимому, сообщаютъ точкѣ $O$ степень 0. Но возьмемъ для примѣра въ эллиптической сѣти, нѣкоторую плоскость, проходящую черезъ центръ сѣти $O$; эта плоскость служитъ радикальной плоскостью пучка, входящаго въ составъ сѣти; всѣ сферы этого пучка въ эллиптической сѣти пересѣкаются по одной окружности (п. 6 § 9), плоскость которой и есть наша радикальная плоскость. Центры сферъ этого пучка лежатъ на прямой, перпендикулярной къ нашей плоскости въ центрѣ общей окружности. Когда радіусъ сферы пучка неограниченно возрастаетъ, послѣднія приближаются къ радикальной плоскости, которая входитъ такимъ образомъ въ составъ сѣти, какъ предѣльная сфера этого пучка. Когда радіусъ сферы возрастаетъ, то степень точки $O$ относительно нея все время остается равной $r^2$. Точка $O$ дѣлитъ хорду сферы на два отрѣзка, изъ которыхъ одинъ можетъ неограниченно убывать, другой же возрастаетъ такъ, что ихъ произведеніе будетъ равно $r^2$. Разсматривая поэтому нашу плоскость, какъ предѣльную сферу пучка, мы сообщаемъ точкѣ $O$ и относительно нея степень $r^2$.

[42]) Т. е. мы будемъ принимать, что двѣ пары псевдо-точекъ раздѣляютъ другъ друга, если соотвѣтствующіе лучи попарно другъ друга раздѣляютъ; этимъ опредѣляется расположеніе псевдо-точекъ на псевдо-прямой въ согласіи съ Гильбертовыми аксіомами расположенія (въ проективномъ пространствѣ).

каціи, которую мы уже указывали въ пунктѣ 1 и которую разовьемъ подробнѣе въ главѣ III.

**3.** Чтобы теперь занять также опредѣленную позицію относительно аксіомы о параллельности, мы должны различать два типа сферическихъ сѣтей, имѣющихъ степень, отличную отъ нуля. Въ эллиптической сѣти всѣ окружности и всѣ сферы содержатъ радикальный центръ внутри себя; поэтому всѣ сферы, а также всѣ окружности на одной и той же сферѣ необходимо пересѣкаются. Перенося это на соотвѣтствующее „эллиптическое пространство“ [43]), мы получимъ: всякія двѣ псевдо-плоскости въ эллиптическомъ пространствѣ всегда имѣютъ общую псевдо-прямую; любыя двѣ псевдо-прямыя на одной псевдо-плоскости имѣютъ общую псевдо-точку. Такимъ образомъ, въ эллиптической геометріи аксіома о параллельности не имѣетъ мѣста: двѣ прямыя въ одной плоскости всегда встрѣчаются.

Напротивъ, въ гиперболической сѣти всегда имѣется безчисленное множество сферъ, которыя не встрѣчаютъ данной сферы. Здѣсь можно, не впадая въ противорѣчіе, развить систему выраженія такого рода, что двѣ не пересѣкающіяся сферы имѣютъ мнимую окружность пересѣченія. Гиперболическій пучекъ сферъ (происходящій путемъ вращенія гиперболическаго пучка окружностей вокругъ линіи центровъ) можно тогда разсматривать, какъ совокупность сферъ, имѣющихъ общую мнимую окружность, которая „лежитъ“ въ радикальной плоскости пучка. Каждая прямая, проходящая черезъ точку $O$ въ этой плоскости, „встрѣчаетъ“ мнимую окружность въ двухъ взаимно обратныхъ мнимыхъ точкахъ. Эта пара точекъ въ совокупности образуетъ „идеальную“ точку пересѣченія; мнимой окружности соотвѣтствуетъ, такимъ образомъ, „идеальная“ прямая.

Итакъ, двѣ не пересѣкающіяся псевдо-плоскости имѣютъ „идеальную“ прямую пересѣченія: мы получаемъ, такимъ образомъ, пучки и связки псевдо-плоскостей съ идеальной общей псевдо-прямой или соотвѣтственно съ идеальной общей псевдо-точкой. Онѣ, очевидно, составляютъ аналогію съ несобственными точками и прямыми въ натуральной геометріи [44]).

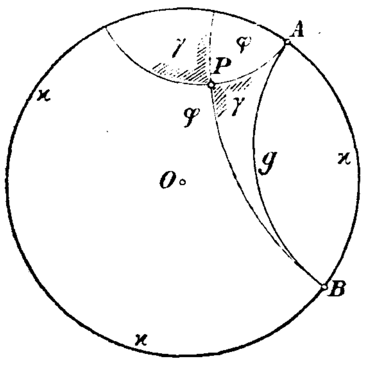
Промежуточное мѣсто между этими двумя случаями, когда сферы и окружности гиперболической сѣти пересѣкаются, и когда онѣ не пересѣкаются, занимаетъ третій случай, когда онѣ соприкасаются. Такъ какъ точка соприкосновенія должна быть обратной самой себѣ, то она необходимо должна быть расположена на ортогональной сферѣ $\omega$ этой сѣти. Каждая окружность сѣти встрѣчаетъ сферу $\omega$ въ двухъ точкахъ $A$ и $B$. Если $P$

[43]) Т. е. пространство, которое представляетъ эллиптическая сѣть, если „псевдоточки“, „псевдо-прямыя“ и „псевдо-плоскости“ имѣютъ установленныя выше значенія.

[44]) Какъ уже было сказано въ своемъ мѣстѣ, объ идеальныхъ образахъ будетъ рѣчь въ особомъ дополненіи.

есть произвольная точка, а $P'$ обратная ей точка, то окружности, проходящія черезъ точки $A$, $P$, $P'$ и $B$, $P$, $P'$, будутъ касаться каждая данной окружности соотвѣтственно въ точкѣ $A$ или $B$; вообще, всѣ окружности, проходящія черезъ точку ортогональной сферы, соприкасаются въ этой точкѣ [45]). Если мы хотимъ теперь въ нашей гиперболической псевдо-геометріи имѣть нѣчто подобное параллелизму, то нужно опредѣлить „пространство“ этой геометріи, какъ то, что мы получаемъ, если мы изъ обыкновеннаго пространства геометріи сферъ устранимъ ортогональную сферу $\omega$. Въ остающемся такимъ образомъ гиперболическомъ пространствѣ имѣетъ мѣсто предложеніе, что къ псевдо-прямой $AB$ черезъ псевдо-точку $P$ всегда проходятъ двѣ псевдо-параллели. Чтобы изобразить это наглядно на рисункѣ, припомнимъ, что плоскости, проходящія черезъ точку $O$, принадлежатъ сѣти въ качествѣ предѣльныхъ сферъ и въ такомъ смыслѣ тоже могутъ считаться псевдо-плоскостями. Въ такого рода псевдо-плоскости мы выберемъ псевдо-прямую $g$ и черезъ точку $P$ проведемъ параллели $PA$ и $PB$. Сѣченіе псевдо-плоскости съ ортогональной сферой обозначимъ черезъ $\varkappa$ (см. фиг. 29).

Двѣ параллели образуютъ въ точкѣ $P$ четыре угла; одинъ изъ нихъ содержитъ псевдо-прямую $g$, мы его обозначимъ черезъ $\gamma$; это такъ называемый уголъ параллельности, играющій важную роль въ геометріи Больэ и Лобачевскаго. Въ двухъ углахъ $\varphi$, $\varphi$, смежныхъ съ $\gamma$, проходятъ тѣ псевдо-прямыя, которыя встрѣчаютъ прямую $g$ въ идеальныхъ точкахъ, между тѣмъ какъ внутри угла параллельности $\gamma$ проходятъ тѣ псевдо-прямыя, которыя дѣйствительно встрѣчаютъ псевдо-прямую $g$. Соединяя такимъ образомъ все сказанное, мы приходимъ къ слѣдующему выводу: въ гиперболической геометріи аксіома о параллельности также не имѣетъ мѣста: напротивъ, къ данной прямой всегда можно провести двѣ параллели, которыя опредѣляютъ два вертикальныхъ угла $\varphi$, $\varphi$ такимъ образомъ, что всѣ прямыя, проходящія внутри этихъ угловъ, вовсе не имѣютъ дѣйствительныхъ точекъ пересѣченія съ данной прямой *).




Фиг. 29.

[45]) Онѣ будутъ имѣть общей касательной проходящій черезъ эту точку радіусъ ортогональной сферы.

*) Строго говоря, всѣ эти прямыя можно было бы считать параллельными данной прямой; но (ассимптотическія) параллели $PA$ и $PB$ имѣютъ больше сходства съ Евклидовыми параллелями.

**4.** Мы имѣемъ, такимъ образомъ, двѣ геометріи; въ каждой изъ нихъ черезъ двѣ точки всегда проходитъ одна и только одна прямая, черезъ три точки, опредѣляющія три различныя прямыя, всегда проходитъ одна и только одна плоскость; вообще, всѣ предложенія евклидовой геометріи, которыя относятся къ пересѣченію прямыхъ и плоскостей, справедливы въ обѣихъ этихъ геометріяхъ, за исключеніемъ только аксіомы о параллельности. Это приводитъ, такимъ образомъ, къ безупречному и совершенно наглядному доказательству того, что попытки доказать аксіому о параллельности или, какъ было бы правильнѣе ее назвать, пятый постулатъ Евклида, попытки вывести это предложеніе изъ остальныхъ посылокъ, не прекращавшіяся въ теченіе двухъ тысячелѣтій, необходимо должны были потерпѣть крушеніе. Аксіома о параллельности не представляетъ собой логическаго слѣдствія изъ остальныхъ основныхъ положеній геометріи. Мы можемъ даже сказать: Если бы обѣ геометріи, въ которыхъ аксіома о параллельности не имѣетъ мѣста, когда-либо привели къ противорѣчіямъ, то и евклидова геометрія необходимо содержала бы противорѣчія; въ самомъ дѣлѣ, было бы достаточно перевести эти противорѣчія неевклидовой геометріи на языкъ обыкновенной геометріи сферъ въ евклидовомъ пространствѣ, и мы получили бы здѣсь противорѣчія. Что же касается того, что евклидова геометрія опирается на посылки, не содержащія никакого противорѣчія, то это мы будемъ имѣть возможность обнаружить въ одномъ изъ слѣдующихъ параграфовъ. Однако, это относится, конечно, только къ идеальной геометрической системѣ.

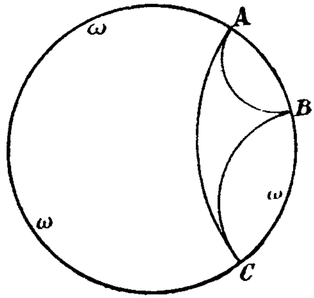
Изъ независимости аксіомы о параллельности, съ одной стороны, и изъ недопустимости понятія о параллельности въ натуральной геометріи, съ другой стороны, слѣдуетъ, что средствами натуральной геометріи вопросъ о трехъ возможныхъ допущеніяхъ въ теоріи параллельности никогда не можетъ быть рѣшенъ въ пользу какого-либо одного изъ нихъ. Фактически и Пашъ въ своихъ „лекціяхъ", о которыхъ мы неоднократно упоминали, вынужденъ былъ оставить этотъ вопросъ открытымъ; въ небольшой области, въ предѣлахъ которой остаются плоскости и прямыя, доступныя нашему наблюденію, можно очень хорошо описать всѣ факты натуральной геометріи независимо отъ того, проходятъ ли черезъ данную точку двѣ параллели къ данной прямой, одна или ни одной. Можно даже сказать больше: эмпирически никогда не будетъ возможно рѣшить, представляетъ ли собой то, что мы называемъ прямыми и плоскостями, „дѣйствительныя" прямыя и плоскости или псевдо-прямыя и псевдо-плоскости сферической сѣти съ чрезвычайно большой степенью. Если бы, напримѣръ, солнце было радикальнымъ центромъ, а ортогональная или соотвѣтственно діаметральная сфера была бы столь велика, что всѣ планеты были бы расположены внутри ея, то псевдо-плоскости и псевдо-прямыя, т. е. сферы и окружности сѣти въ предѣлахъ нашей земли такъ мало отличались бы отъ прямыхъ и плоскостей натуральной геометріи, что этого различія невозможно было бы обнаружить. Если мы себѣ представимъ касательную къ одной изъ этихъ окружностей, то она на протяженіи 11 километровъ отъ точки касанія была бы удалена отъ окружности всего на 0,001 миллиметра. Различіе между обѣими линіями существовало бы только въ нашемъ воображеніи, эмпирически установить его было бы невозможно.

Можно было бы указать еще многочисленныя другія системы, осуществляющія три геометріи, которыя отличаются одна отъ другой только аксіомой о параллельности, а въ области, доступной нашему эмпирическому изслѣдованію, вполнѣ совпадаютъ съ натуральной геометріей: но элементарныхъ средствъ, которыми мы располагаемъ, для этого недостаточно.

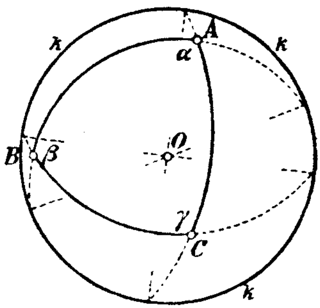
Мы должны еще указать названія, присвоенныя этимъ тремъ геометріямъ. Геометрія, въ которой имѣетъ мѣсто аксіома о параллельности, называется евклидовой или параболической. Именно поэтому мы назвали связку сферъ съ нулевой степенью, вполнѣ осуществляющую эту геометрію, также параболической. Двѣ другія геометріи называются *κατ' ἐξοχὴν* неевклидовыми. Строго говоря, подъ этимъ названіемъ слѣдовало бы разумѣть всякую геометрію, посылки которой не вполнѣ совпадаютъ съ Евклидовыми. Та неевклидова геометрія, въ которой параллелизма вовсе нѣтъ, которая иллюстрируется эллиптической сѣтью сферъ, называется эллиптической геометріей, а вторая гиперболической; послѣдняя осуществляется въ гиперболической сѣти сферъ. Гиперболическую геометрію открыли Больэ и Лобачевскій, эллиптическая была позже открыта Риманомъ. Характерное различіе этихъ трехъ геометрій можетъ быть также выражено слѣдующимъ образомъ:

Въ параболической геометріи сумма угловъ въ треугольникѣ равна двумъ прямымъ, въ эллиптической она больше двухъ прямыхъ, въ гиперболической она меньше двухъ прямыхъ, при чемъ въ послѣднихъ двухъ случаяхъ она не имѣетъ постояннаго значенія.

Чтобы обнаружить это также въ обоихъ типахъ сферическихъ сѣтей, мы будемъ измѣрять углы между псевдо-прямыми, т. е. углы, которые окружности образуютъ въ точкѣ пересѣченія, углами между соотвѣтствующими касательными. Однако, здѣсь, нѣсколько иначе, чѣмъ въ § 8, 7, мы будемъ подъ угломъ $A$ въ треугольникѣ $ABC$ разумѣть тотъ изъ четырехъ угловъ при вершинѣ $A$, внутри котораго расположена сторона $BC$. Если мы возьмемъ теперь въ гиперболической сѣти для удобства псевдо-плоскость, проходящую черезъ радикальный центръ (см. фиг. 30), то каждый треугольникъ, вершины котораго $A$, $B$, $C$ лежатъ на окружности $\omega$, обладаетъ той особенностью, что три прямыя образуютъ другъ съ другомъ во всѣхъ трехъ точкахъ $A$, $B$ и $C$ углы, равные нулю. Сумма угловъ такого треугольника, такимъ образомъ, также равна нулю. Стороны его, согласно предыдущимъ опредѣленіямъ, попарно параллельны. Что въ другихъ треугольникахъ въ этой геометріи сумма угловъ всегда меньше $2d$, этого нельзя доказать безъ довольно сложныхъ тригонометрическихъ вычисленій. Возможность треугольниковъ съ нулевыми углами была уже извѣстна творцамъ неевклидовой геометріи; противники же ихъ оспаривали это, какъ нѣчто, совершенно противорѣчащее очевидности. Если, однако, мы представимъ себѣ, какъ было указано выше, ортогональную сферу настолько большой, что въ ней заключены всѣ планеты, то въ нашихъ псевдо-плоскостяхъ въ областяхъ, доступныхъ нашему созерцанію, не могутъ быть расположены отрѣзки, принадлежащіе всѣмъ тремъ сторонамъ такого треугольника; никакого противорѣчія съ опытомъ мы бы не имѣли. Отсутствіе нагляднаго воплощенія неевклидовой геометріи служило большимъ препятствіемъ для ея уясненія. Указанная Бельтрами въ 1868 г. реализація элементарной геометріи на поверхностяхъ постоянной отрицательной кривизны недостаточно элементарна и не можетъ быть доказана безъ помощи высшей математики. Риманъ указалъ, что эллиптическая геометрія плоскости осуществляется на сферѣ, если двѣ ея полярныя точки принимать за одну „точку". Однако, авторы не указывали достаточно опредѣленно, что при этомъ осуществленіи эллиптической геометріи подъ „точкой" необходимо разумѣть совокупность двухъ различныхъ обыкновенныхъ точекъ; это привело къ цѣлому ряду недоразумѣній, сводившихся, главнымъ образомъ, къ тому, что геометрію Римана не признавали тождественной съ геометріей сферы. Правильно понимая это осуществленіе эллиптической „плоскости" на сферѣ, мы безъ труда узнаемъ въ ней нашу псевдо-плоскость эллиптической сѣти: Риманова сфера есть діаметральная сфера сѣти; двѣ полярныя ея точки взаимно обратны и потому дѣйствительно образуютъ одну псевдо-точку. Поэтому не было, собственно, необходимости присваивать такую исключительную роль двумъ конечнымъ точкамъ діаметра. За псевдо-точку можно было бы также принять двѣ конечныя точки каждой хорды, проходящей черезъ постоянную точку, расположенную внутри сферы. Если мы возьмемъ точку $O$ внѣ сферы, то мы получимъ гиперболическую плоскость *).



Фиг. 30.



Фиг. 31.

---

*) Этотъ именно путь привелъ автора пять лѣтъ тому назадъ къ осуществленію неевклидовой геометріи въ сферической сѣти (Вступительная лекція въ лѣтнемъ

Въ заключеніе мы хотѣли бы показать, по крайней мѣрѣ, на одной фигурѣ (см. фиг. 31), что въ эллиптической геометріи сумма угловъ въ треугольникѣ больше $2d$; общее доказательство этого предложенія требуетъ сложныхъ тригонометрическихъ выкладокъ. Псевдо-плоскостью служитъ плоскость чертежа, проходящая черезъ радикальный центръ $O$; $k$ есть сѣченіе діаметральной сферы; начерченный здѣсь треугольникъ, очевидно, имѣетъ три тупыхъ угла *).

## § 11. Метрика неевклидовыхъ геометрій.

**1.** Какъ мы видѣли, геометрія сѣти сферъ, степень которой отлична отъ нуля, какъ и евклидова, удовлетворяетъ группѣ I Гильбертовыхъ аксіомъ, а также и группѣ II съ небольшой проективной модификаціей, о которой будетъ рѣчь ниже. Чтобы теперь дополнить доказательство, что геометрія сферической сѣти отличается отъ евклидовой только аксіомой о параллельности и проистекающими изъ нея логическими выводами, намъ остается еще обнаружить, что группы III и V Гильбертовыхъ аксіомъ здѣсь остаются въ силѣ. По существу дѣло здѣсь сводится къ аксіомамъ о конгруэнтности, на которыхъ основывается измѣреніе геометрическихъ образовъ и связанныя съ этимъ соотношенія — „метрика". Лишь въ томъ случаѣ, если обѣ неевклидовы геометріи дѣйствительно въ этихъ предѣлахъ не отличаются отъ евклидовой, мы можемъ утверждать, что онѣ характеризуются суммой угловъ въ треугольникѣ. Напротивъ, если мы устранимъ въ евклидовой геометріи, напримѣръ, Архимедову аксіому (Гильбертъ, l. c. § 8, V), то можно построить геометрію, въ которой сумма угловъ треугольника постоянно равна $2d$, между тѣмъ какъ аксіома о параллельности не имѣетъ мѣста **). Однако, мы не будемъ выводить теоремъ, касающихся конгруэнтности съ точки зрѣнія обѣихъ неевклидовыхъ геометрій, изъ аксіомъ конгруэнтности, потому что Гильбертовы доказательства этихъ теоремъ составлены такимъ образомъ, что они не опираются на теорему о параллельности и потому сохраняютъ свою силу не только въ параболической геометріи, но также въ эллиптической и гиперболической.

---

семестрѣ 1898 г. въ Страсбургѣ, въ которой была также развита и метрика этой системы).

*) Извѣстныя доказательства предложенія, что сумма угловъ въ треугольникѣ не можетъ быть больше двухъ прямыхъ, основываются на неявномъ допущеніи, что прямая имѣетъ безконечную длину, или что она раздѣляетъ плоскость на двѣ отдѣльныя части. Ни то ни другое, однако, въ эллиптической геометріи не имѣетъ мѣста. Поэтому въ эллиптической плоскости и выраженіе аксіомы о параллельности ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν (съ той стороны, съ которой . . . ) теряетъ смыслъ, такъ какъ прямая не дѣлитъ этой плоскости на двѣ стороны. См. Gauss, Werke Bd. 7 стр. 190.

**) Ср. M. Dehn, Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. Math. Ann. 53.

Вообще, привлекательность, которую представляетъ необычное осуществленіе той или иной геометріи, заключается не въ томъ, что мы смотримъ на нее съ точки зрѣнія этой именно геометрической системы, а въ томъ, что мы ее созерцаемъ съ точки зрѣнія другой геометріи. Напримѣръ, гиперболическая геометрія, осуществленная въ гиперболической сѣти, какъ таковая, не отличается ни однимъ предложеніемъ отъ любого другого осуществленія той же геометріи; но ея предложенія тотчасъ пріобрѣтаютъ величайшій интересъ, если мы вновь переводимъ ихъ на языкъ евклидовой геометріи. Сравните, напримѣръ, теорему Дезарга съ ея оригинальнымъ переводомъ, приведеннымъ въ § 10, 1. Обратно, иногда можетъ быть также интересно разсмотрѣть систему геометрическихъ образовъ съ точки зрѣнія той или иной неевклидовой геометріи. Такъ, напримѣръ, въ дисциплинѣ, лежащей, на первый взглядъ, далеко отъ геометріи, въ современной теоріи функцій, именно въ теоріи аутоморфныхъ функцій, оказывается полезнымъ изслѣдовать въ комплексной числовой плоскости нѣкоторые криволинейные многоугольники, сторонами которыхъ служатъ дуги окружностей, ортогональныхъ къ нѣкоторой окружности $k$; обращенія этихъ многоугольниковъ относительно сторонъ, какъ круговъ инверсіи, называютъ „отраженіями" ихъ. Стороны многоугольника, очевидно, принадлежатъ связкѣ окружностей, ортогональной окружностью которой служитъ $k$. Наименьшая сфера $O$, проходящая черезъ окружность $k$, представляетъ собою въ такомъ случаѣ также ортогональную сферу гиперболической сѣти, которой принадлежитъ также числовая плоскость вмѣстѣ съ лежащей въ ней связкой. Наши криволинейные многоугольники съ точки зрѣнія гиперболической геометріи, осуществляемой сферой $O$, оказываются прямолинейными многоугольниками[46]), и, что особенно изящно, такъ называемыя отраженія плоскости отъ сторонъ многоугольника, какъ мы сейчасъ увидимъ, обращаются въ дѣйствительныя отраженія, т. е. представляютъ собой отображенія плоскости въ самой себѣ при помощи симметріи относительно оси. Здѣсь, такимъ образомъ, дѣйствительно оказывается цѣлесообразнымъ предпочесть Евклидовымъ пространственнымъ представленіямъ точку зрѣнія гиперболической геометріи, которая въ этомъ случаѣ даетъ наиболѣе простое, наиболѣе цѣлесообразное выраженіе фактовъ.

**2.** Относительно инверсіи сѣти сферъ имѣетъ мѣсто слѣдующее основное предложеніе:

I. Сѣть сферъ при гиперболической инверсіи относительно одной изъ нихъ всегда переходитъ въ себя самое.

---

[46]) Потому что дуги, изъ которыхъ составлены эти многоугольники, съ точки зрѣнія гиперболической геометріи суть прямолинейные отрѣзки.

Въ самомъ дѣлѣ, гиперболическая сѣть состоитъ изъ всѣхъ сферъ, пересѣкающихъ ортогонально нѣкоторую сферу $k$. Если $\lambda$ есть одна изъ сферъ этой сѣти, то ея центръ $L$ имѣетъ относительно сферы $k$ степень $+l^2$, гдѣ $l$ есть радіусъ сферы $\lambda$. Поэтому каждая прямая, которая проходитъ черезъ точку $L$ и встрѣчаетъ сферу $k$, пересѣкаетъ ее въ двухъ точкахъ $A$ и $A'$ такимъ образомъ, что $LA \,.\, LA' = l^2$; иными словами, инверсія относительно сферы $\lambda$ преобразовываетъ сферу $k$ въ себя самое [47]). Такъ какъ, съ другой стороны, инверсія не мѣняетъ угла, подъ которымъ пересѣкаются двѣ сферы, то всѣ сферы, ортогональныя относительно сферы $k$, вновь переходятъ въ сферы того же типа. Иными словами, инверсія относительно сферы $\lambda$ перетасовываетъ только сферы этой сѣти между собой, самая сѣть, какъ цѣлое, преобразовывается въ себя самое.

Если $\varkappa$ есть сфера эллиптической сѣти, и намъ нужно произвести относительно нея гиперболическую (не эллиптическую) инверсію, то нужно только обратить вниманіе на то, что сфера $\varkappa$ пересѣкаетъ каждую сферу $\lambda$, принадлежащую сѣти; пусть окружность сѣченія будетъ $\gamma$. При гиперболической инверсіи относительно $\varkappa$ каждая точка этой окружности переходитъ въ себя самое [48]); вмѣстѣ съ тѣмъ сфера $\lambda$, проходящая черезъ окружность $\gamma$, переходитъ въ сферу $\lambda'$, которая также принадлежитъ сѣти, такъ какъ она проходитъ черезъ окружность этой сѣти (см. § 9, 6, прим. 36); это и требовалось доказать. На простѣйшемъ случаѣ параболической сѣти намъ не стоитъ останавливаться. Вмѣстѣ съ тѣмъ наша теорема доказана во всемъ ея объемѣ, и мы можемъ перевести ее теперь на языкъ соотвѣтствующей неевклидовой геометріи. Она гласитъ:

II. Гиперболическая инверсія сѣти сферъ относительно одной изъ нихъ $\varkappa$ съ точки зрѣнія, соотвѣтствующей неевклидовой геометріи, представляетъ собой отраженіе отъ псевдо-плоскости $\varkappa$.

Въ самомъ дѣлѣ, гиперболическая инверсія относительно сферы $\varkappa$ прежде всего представляетъ собой съ точки зрѣнія этой псевдо-геометріи коллинеацію, т. е. непрерывное отображеніе пространства въ себѣ самомъ, которое относитъ каждой псевдо-точкѣ $P$ нѣкоторую псевдо-точку $P'$ такимъ образомъ, что каждой псевдо-плоскости, которую пробѣгаетъ $P$, отвѣчаетъ псевдо-плоскость (вообще говоря, другая), которую пробѣгаетъ точка $P'$; если поэтому $P$ пробѣгаетъ прямую, то $P'$ также пробѣгаетъ прямую. Эта коллинеація обладаетъ, однако, слѣдующими спеціальными свойствами:

a) Точки псевдо-плоскости $\varkappa$ и только эти точки отвѣчаютъ каждая самой себѣ.

---

47) Ибо точка $A$ переходитъ въ $A'$, и обратно.

48) Гиперболическая инверсія относительно сферы $\varkappa$ превращаетъ каждую точку этой сферы въ себя самое.

b) Псевдо-прямыя, перпендикулярныя къ $\varkappa$, — какъ окружности, пересѣкающія ортогонально сферу $k$, — также переходятъ каждая въ себя самое, но такимъ образомъ, что каждой точкѣ $P$ такой прямой $g$ отвѣчаетъ точка $P'$ той же прямой, которая, однако, совпадаетъ съ точкой $P$ только въ томъ случаѣ, если послѣдняя лежитъ на псевдо-плоскости $\varkappa$.

Но такого рода коллинеація обращается въ отраженіе отъ псевдоплоскости $\varkappa$, если она въ то же время при преобразованіи сохраняетъ углы, какъ это дѣйствительно имѣетъ мѣсто при инверсіи [49]).

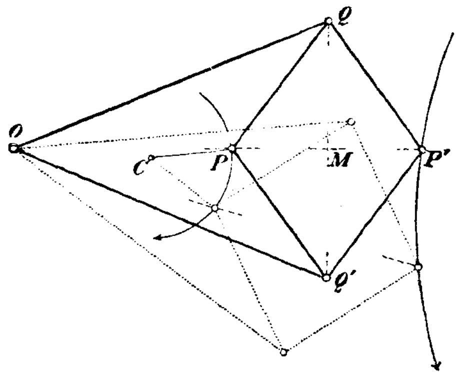
**3.** Это предложеніе вмѣстѣ съ симметріей въ пространствѣ устанавливаетъ также въ плоскости симметрію относительно оси. Изъ симметріи же въ плоскости извѣстнымъ способомъ получаются предложенія о конгруэнтности. Доказательство, по существу, основывается на томъ, что два конгруэнтныхъ треугольника, расположенные въ одной плоскости, всегда могутъ быть превращены одинъ въ другой при помощи отраженій, число которыхъ не превосходитъ трехъ; если при этомъ мы имѣемъ два одностороннe-конгруэнтныхъ треугольника (совмѣщеніе которыхъ возможно безъ поворота плоскости), то для этого нужно четное число отраженій; если же треугольники разносторонне-конгруэнтны, то для осуществленія этого нужно нечетное число отраженій. Въ самомъ дѣлѣ, если мы имѣемъ два разносторонне-конгруэнтныхъ треугольника, которые еще не расположены симметрично относительно нѣкоторой оси, то, отражая одинъ изъ нихъ относительно любой прямой нашей плоскости, мы дѣлаемъ его односторонне-конгруэнтнымъ со вторымъ. Чтобы теперь привести въ совмѣщеніе два односторонне-конгруэнтныхъ треугольника $ABC$ и $A'B'C'$, возьмемъ отраженіе треугольника $A'B'C'$ относительно перпендикуляра, возставленнаго изъ середины отрѣзка $AA'$, если точки $A$, $A'$ не совпадали уже и безъ того. Отраженный треугольникъ $AB''C''$ теперь необходимо имѣетъ общую вершину съ треугольникомъ $ABC$. Вмѣстѣ съ тѣмъ треугольники $ABC$ и $AB''C''$ теперь разносторонне-конгруэнтны, и отраженіе одного изъ нихъ относительно биссектрисы угла $BAC''$ или $CAB''$ приводитъ ихъ въ совмѣщеніе [50]).

---

[49]) Пусть $P$ будетъ произвольная псевдо-точка, не лежащая на псевдо-плоскости $\varkappa$. Пусть $PK$ будетъ псевдо-прямая, выходящая изъ $P$ перпендикулярно къ псевдо-плоскости $\varkappa$ и встрѣчающая послѣднюю въ точкѣ $K$. Такъ какъ точка $K$, какъ и вся псевдо-плоскость $\varkappa$, инвертируется въ себя самое, а углы сохраняются, то и псевдо-прямая $PK$ инвертируется въ себя самое. Если точка $P$ переходитъ въ точку $P'$, а $L$ есть точка на псевдо-плоскости $\varkappa$, то уголъ $PLK$ равенъ углу $P'LK$. Теперь ясно, что эта инверсія есть не что иное, какъ отраженіе всѣхъ точекъ отъ псевдо-плоскостей $\varkappa$.

[50]) Авторъ недостаточно подчеркиваетъ выводъ, который онъ отсюда дѣлаетъ, конгруэнтными въ псевдо-пространствѣ являются тѣ образы, которые могутъ быть приведены въ совмѣщеніе путемъ отраженій отъ псевдо-плоскостей (т. е. путемъ

Если въ нѣкоторой геометріи, какъ въ разсматриваемомъ случаѣ, отраженіе задано непосредственно, то мы можемъ, какъ показываютъ эти соображенія, откладывать отрѣзки и углы, совершенно не прибѣгая къ помощи циркуля. Однако, съ точки зрѣнія неевклидовой геометріи въ сферической сѣти, гдѣ всѣ псевдо-прямыя суть окружности, нельзя сказать, что въ этой геометріи планиметрія обходится однимъ только циркулемъ безъ пособія линейки, ибо циркуль евклидовой геометріи съ точки зрѣнія неевклидовой не есть циркуль. Не менѣе важенъ, чѣмъ циркуль, былъ бы для обѣихъ неевклидовыхъ геометрій инверсоръ, т. е. инструментъ, который—выражаясь языкомъ евклидовой геометріи — при данныхъ центрѣ и радіусѣ инверсіи даетъ точку, обратную каждой данной точкѣ. Наиболѣе извѣстный инверсоръ принадлежитъ Поселье (Peaucellier) *); это первый механическій приборъ, посредствомъ




Фиг. 32.

котораго былъ рѣшенъ вопросъ о проведеніи прямой линіи путемъ превращенія кругового движенія въ прямолинейное. Онъ состоитъ изъ ромба $PQP'Q'$, стороны котораго сочленены въ вершинахъ (фиг. 32); изъ двухъ противоположныхъ вершинъ $Q$ и $Q'$ идутъ два равныхъ стержня $QO$ и $Q'O$, которые также могутъ вращаться вокругъ точекъ $Q$, $Q'$ и $O$. Если $M$ есть центръ ромба, то

$$\begin{aligned} OP \,.\, OP' &= (OM - MP)\ (OM + MP) = \\ &= OM^2 - MP^2 = \\ &= (OQ^2 - QM^2) - (QP^2 - QM^2) = \\ &= OQ^2 - QP^2 = \text{const.}; \end{aligned}$$

это произведеніе зависитъ, такимъ образомъ, отъ неизмѣняющихся длинъ стержней, а не отъ перемѣннаго разстоянія $OP$. Если теперь мы закрѣпимъ точку $O$, и точка $P$ будетъ описывать нѣкоторую фигуру, то точка $P'$ опишетъ обратную фигуру при центрѣ инверсіи $O$ и степени инверсіи $r^2 = OQ^2 - OP^2$. Если присоединить къ инструменту еще седьмой стержень $CP$, длина котораго равна $OC$, то при неподвижности точекъ $O$ и $C$,

инверсій относительно сферъ сѣти). Если мы желаемъ отличить конгруэнтность отъ симметріи, то мы должны считать конгруэнтными тѣ образы, которые могутъ быть приведены въ совмѣщеніе четнымъ числомъ отраженій.

*) Nouvelles Annales, II série, 3 (1864), p. 344 и II série 12 (1873), p. 71.

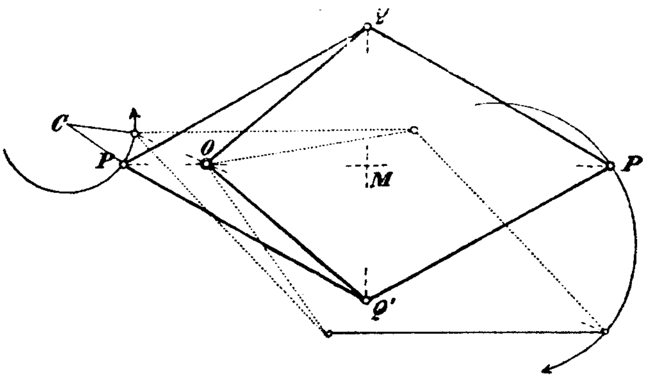
точка $P$ можетъ еще описывать окружность, проходящую черезъ центръ инверсіи $O$; обратная точка $P'$ описываетъ при этомъ прямолинейный отрѣзокъ; если же условіе $CP = CO$ не выполнено, то точки $P$ и $P'$ описываютъ взаимно обратныя окружности.

Чтобы инверсоръ осуществлялъ эллиптическую инверсію, нужно, очевидно, только сдѣлать равные стержни $OQ$ и $OQ'$ меньше, чѣмъ $PQ$ (см. фиг. 33); тогда:

$$\begin{aligned} OP \,.\, OP' &= (PM - OM)\ (PM + OM) = \\ &= PM^2 - OM^2 = \\ &= (PQ^2 - QM^2) - (OQ^2 - QM^2) = \\ &= PQ^2 - OQ^2 = \text{const.}; \end{aligned}$$

вмѣстѣ съ тѣмъ точка $O$ лежитъ между точками $P$ и $P'$. Условіе прямолинейнаго движенія точки $P'$ такое же, какъ и для гиперболическаго инверсора.

**4.** Конечно, не будетъ лишено интереса познакомиться съ важнѣйшими элементарными построеніями обѣихъ неевклидовыхъ геометрій. Прежде




Фиг. 33.

всего спросимъ, какой видъ имѣютъ въ этихъ псевдо-геометріяхъ окружность и сфера? Мы опредѣляемъ оба образа, какъ геометрическое мѣсто точекъ (соотвѣтственно, линію или поверхность), равноотстоящихъ отъ нѣкоторой опредѣленной точки, — псевдо-центра. Такъ какъ псевдо-отрѣзки равны, когда они переходятъ другъ въ друга путемъ отраженія, то мы можемъ опредѣлить сферы съ псевдо-центромъ $C$, какъ поверхности, которыя переходятъ въ самихъ себя при отраженіи отъ всякой псевдо-плоскости, проходящей черезъ точку $C$. Точно такъ же окружность можно опредѣлить, какъ кривую, которая переходитъ въ себя самое при отраженіи отъ любого діаметра. Но псевдо-плоскости, проходящія черезъ точку $C$, образуютъ связку, которая при отраженіи отъ одной изъ своихъ плоскостей, какъ цѣлое, переходитъ въ себя самое. Теперь ясно, что сферы пучка, ортогональнаго этой связкѣ, образуютъ систему поверхностей, которыя не мѣняются при упомянутомъ отраженіи; это гиперболическій пучекъ, ось котораго $C'C''$ проходитъ черезъ центръ $O$ всей нашей сѣти сферъ; $C'$ и $C''$ суть составныя точки псевдо-точки $C$ и въ то же время нулевыя точки гиперболическаго пучка[51]). Мы приходимъ такимъ образомъ къ слѣдующему выводу:

III. Псевдо-сферы и псевдо-окружности обѣихъ неевклидовыхъ геометрическихъ системъ также съ точки зрѣнія евклидовой геометріи представляютъ собой соотвѣтственно сферы и окружности. Не нужно только удивляться тому, что при этомъ осуществленіи двухъ неевклидовыхъ геометрій псевдосфера состоитъ изъ двухъ евклидовыхъ сферъ взаимно обратныхъ относительно сѣти[52]). Обратно, каждая пара сферъ, взаимно обратныхъ относительно сѣти, представляетъ собой

---

[51]) Что псевдо-сфера въ нашемъ псевдо-пространствѣ есть поверхность, которая переходитъ въ самое себя при отраженіи отъ любой псевдо-плоскости, проходящей черезъ псевдо-центръ $C$ (подобно тому, какъ это имѣетъ мѣсто въ обыкновенномъ пространствѣ),—это, полагаемъ, ясно вытекаетъ изъ п. 3 и примѣчанія 50. Совокупность псевдо-плоскостей, проходящихъ черезъ псевдо-точку $C$, съ точки зрѣнія обыкновенной геометріи, есть совокупность сферъ, проходящихъ черезъ точки $C'$ и $C''$, составляющія псевдо-точку $C$. Всѣ эти сферы имѣютъ общую хорду $C'C''$, а стало-быть, и общую радикальную ось $C'C''$, проходящую также черезъ центръ сѣти $O$; иными словами, онѣ образуютъ эллиптическую связку (п. 6, § 9 и прим. 32). Связка эта при отраженіи отъ любой изъ ея сферъ (псевдо-плоскостей) переходитъ въ самое себя; въ самомъ дѣлѣ, отраженіе есть гиперболическая инверсія (п. 2) относительно этой сферы; такъ какъ эта инверсія оставляетъ точки $C'$ и $C''$ въ покоѣ, то она превращаетъ всякую сферу, проходящую черезъ $C'$ и $C''$, въ другую сферу, также проходящую черезъ эти двѣ точки, т. е. превращаетъ всякую сферу связки въ сферу той же связки. Согласно п, 6 § 9 (см. также прим. 33) этой связкѣ соотвѣтствуетъ гиперболическій пучекъ сферъ, сѣкущихъ сферы связки ортогонально. При отраженіи (инверсіи) каждая изъ этихъ сферъ, перейдетъ въ сферу того же ортогональнаго пучка. Но окружность, по которой сфера пучка сѣчетъ ту сферу, относительно которой производится инверсія, остается безъ измѣненія; а такъ какъ черезъ эту окружность проходитъ только одна сфера ортогональнаго пучка, то каждая сфера ортогональнаго пучка переходитъ въ себя самое. Этотъ пучекъ и представляетъ собой, такимъ образомъ, совокупность поверхностей, которыя не мѣняются при отраженіи отъ любой псевдо-плоскости, проходящей черезъ псевдо-точку $C$.

[52]) Тѣ сферы, которыя служатъ псевдо-сферами въ нашей псевдо-геометріи, сѣкутъ ортогонально сферы сѣти, а потому не принадлежатъ сѣти. Если $\lambda'$ есть одна изъ такихъ сферъ и $L'$ любая ея точка, а $L''$ есть точка, обратная $L'$ въ инверсіи сѣти, то точка $L''$ не принадлежитъ сферѣ $\lambda'$, ибо всякая сфера, проходящая черезъ двѣ взаимно обратныя точки, принадлежитъ сѣти. Между тѣмъ точки $L'$ и $L''$ образуютъ одну псевдо-точку и не могутъ быть отдѣляемы въ нашемъ

**псевдо-сферу** [53]**). Псевдо-центръ псевдо-сферы или псевдо-окружности обыкновенно не совпадаетъ съ центромъ Евклидовымъ. Къ псевдо-сферамъ принадлежатъ также всѣ образы, которые въ смыслѣ евклидовой геометрiи должны называться плоскостями, если онѣ не проходятъ черезъ центръ сѣти.**

Въ частности, ортогональная сфера гиперболической сѣти представляетъ собой псевдо-сферу, такъ называемую „абсолютную" сферу гиперболической геометрiи; между тѣмъ дiаметральная сфера эллиптической сѣти представляетъ собой псевдо-плоскость эллиптическаго пространства. Если мы будемъ усматривать существенный признакъ сферы въ томъ, что она сѣчетъ ортогонально всѣ плоскости и лучи связки ея дiаметровъ, то въ гиперболической геометрiи придется признать псевдо-сферами также два типа своеобразныхъ образовъ, именно ортогональныя сферы всѣхъ содержащихся въ сѣти параболическихъ и гиперболическихъ связокъ. Мы изучимъ эти соотношенiя сначала на окружностяхъ, такъ какъ здѣсь легче сдѣлать ихъ наглядными при помощи чертежа.

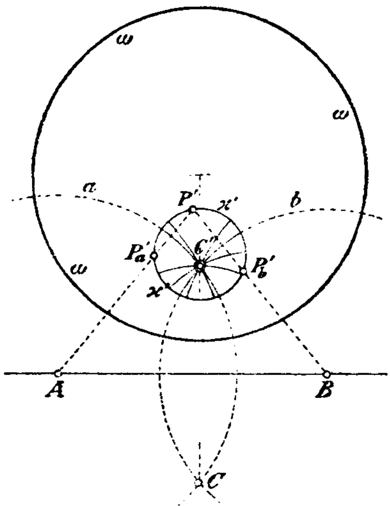
**5.** Какъ мы это уже неоднократно дѣлали, мы возьмемъ плоскость чертежа $\zeta$, проходящую черезъ центръ сѣти, такъ что она будетъ также служить псевдо-плоскостью $\zeta$ соотвѣтствующей неевклидовой геометрiи, и

псевдо-пространствѣ. Когда точка $L'$ сбѣгаетъ всю сферу $\lambda'$, то точка $L''$ обѣгаетъ сферу $\lambda''$, обратную $\lambda'$ въ инверсiи сѣти; совокупность сферъ $\lambda'$ и $\lambda''$ содержитъ каждую пару точекъ ($L'$ $L''$), онѣ вмѣстѣ образуютъ псевдо-сферу. (Пользуемся случаемъ, чтобы сдѣлать слѣдующее замѣчанiе; слово псевдо-сфера мы употребляемъ въ смыслѣ „сферы" въ нашемъ псевдо-пространствѣ. Не нужно смѣшивать этого значенiя съ тѣмъ, которое присваивается тому же термину въ теорiи поверхностей).

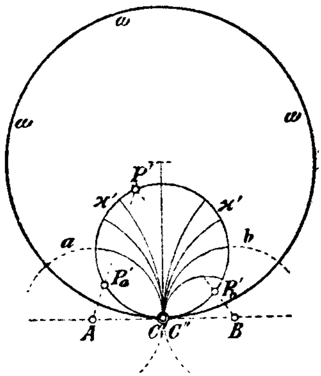
[53]) Положимъ, что $\lambda'$ и $\lambda''$ суть двѣ сферы, взаимно обратныя въ инверсiи сѣти. Мы предположимъ, что сѣть эллиптическая. Въ такомъ случаѣ сферы $\lambda'$ и $\lambda''$ не имѣютъ общихъ точекъ, ибо центръ сѣти $O$ есть внутреннiй центръ подобiя сферъ (см. п. 8 § 8-го); обѣ сферы расположены по разныя стороны плоскости, проходящей перпендикулярно къ линiи центровъ черезъ точку $O$. Эти двѣ сферы опредѣляютъ пучекъ сферъ, центры которыхъ расположены всѣ на одной прямой; это будетъ пучекъ гиперболическiй, такъ какъ радикальная плоскость сферъ $\lambda'$ и $\lambda''$ ихъ раздѣляетъ. Связка, ортогональная къ этому пучку, будетъ эллиптическая (см. прим. 33); всѣ сферы связки проходятъ поэтому черезъ двѣ точки $C'$ и $C''$, которыя совокупно образуютъ псевдо-центръ, псевдо-окружности ($\lambda'$, $\lambda''$) (см. прим. 52).

Если связка гиперболическая, то дѣло не обстоитъ такъ просто. Самое предложенiе справедливо только при нѣкоторыхъ весьма существенныхъ оговоркахъ, такъ какъ самыя сферы въ гиперболической сѣти могутъ быть различнаго типа; трудность заключается въ томъ, что здѣсь пучекъ, опредѣляемый сферами $\lambda'$ и $\lambda''$, можетъ оказаться эллиптическимъ и параболическимъ; тогда ортогональная связка не будетъ эллиптической и не опредѣлитъ двухъ точекъ ($C'$, $C''$), составляющихъ псевдо-центръ псевдо-сферы ($\lambda'$, $\lambda''$). Авторъ на это указываетъ ниже и выясненiю этого вопроса посвящаетъ пунктъ 5.

поставимъ себѣ задачу построить псевдо-окружность, проходящую черезъ данную псевдо-точку $P$ и имѣющую данный псевдо-центръ $C$. Пусть $C'$ и $C''$ будутъ двѣ точки (фиг. 34, 35, 36), которыя въ совокупности составляютъ псевдо-точку $C$; пусть $P'$ будетъ одна изъ составляющихъ псевдоточки $P$, а $\omega$ сѣченіе плоскости $\zeta$ съ ортогональной сферой сѣти, которую мы сначала будемъ считать гиперболической. Такъ какъ составляющая окружность $\varkappa'$, которая въ совокупности съ окружностью $\varkappa''$, обратной ей относительно $\omega$, образуетъ искомую псевдо-окружность $\varkappa$, должна пересѣкать ортогонально всѣ окружности $a$, $b$,..., проходящія черезъ $C'$ и $C''$, то она принадлежитъ пучку, ортогональному къ пучку $(a,b)$. Такимъ образомъ,



Фиг. 34.

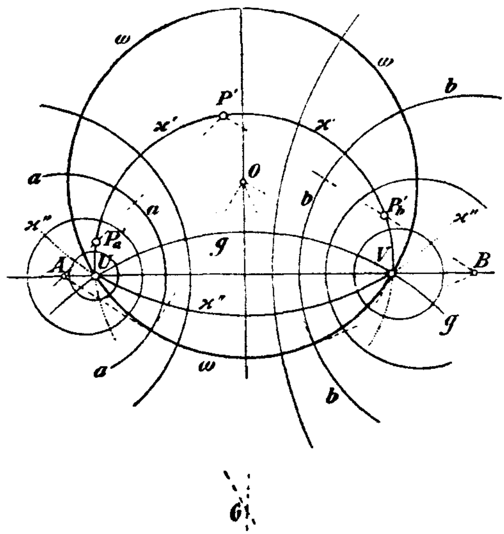


Фиг. 35.

псевдо-окружностями съ псевдо-центромъ $C$ служатъ, выражаясь языкомъ евклидовой геометріи, пары окружностей пучка, ортогональнаго къ пучку діаметровъ. Посредствомъ (гиперболической) инверсіи относительно окружностей $a$, $b$,... мы получаемъ изъ точки $P'$ дальнѣйшія точки $P_a'$, $P_b'$,... окружности $\varkappa'$, которыми она вполнѣ опредѣляется[54]). Точка $P_a'$, очевидно, лежитъ на одной прямой съ $P'$ и съ центромъ $A$ окружности $a$; точно также прямая $P'P_b'$ проходитъ черезъ центръ $B$ окружности $b$. Каждая прямая, проходящая черезъ точку $A$, встрѣчаетъ окружность $\varkappa'$ въ двухъ точкахъ $H'$ и $K'$, взаимно обратныхъ относительно окружности $a$ (на чертежѣ ихъ нѣтъ); съ точки зрѣнія гиперболической геометріи эти точки симметричны относительно псевдо-

[54]) Это та же идея, которая была положена выше въ основу опредѣленія псевдо-сферы: отраженіе псевдо-точки отъ псевдо-діаметра даетъ псевдо-точку, принадлежащую той же псевдо-окружности.

прямой $a$. Такъ какъ окружность $\varkappa''$ (см. фиг. 36, на фиг. 34 и 35 окружность $\varkappa''$ не начерчена) также сѣчетъ окружность $a$ подъ прямымъ угломъ, то точки, обратныя $H'$ и $K'$ относительно $\omega$, также лежатъ на окружности $\varkappa''$ и взаимно обратны относительно окружности $a$ [55]). Пары точекъ сѣти $H'$, $H''$ и $K'$, $K''$ образуютъ, такимъ образомъ, двѣ псевдо-точки $H$, $K$ псевдо-окружности $\varkappa$, расположенныя симметрично относительно псевдо-прямой $a$, т. е. псевдо-окружность $\varkappa$ дѣйствительно преобразуется въ себя самое при отраженіи отъ любого изъ своихъ псевдо-діаметровъ. Если псевдо-діаметры образуютъ эллиптическій пучекъ, какъ на фиг. 34, то мы будемъ и самую псевдо-окружность называть эллиптической.



Фиг. 36.

Пучекъ діаметровъ $a, b, \ldots$ можетъ оказаться параболическимъ только въ томъ случаѣ, если точки $C'$ и $C''$ совпадаютъ (естественно, — на окружности $\omega$, см. фиг. 35); его окружности соприкасаются въ общей точкѣ $(C', C'')$. Ортогональный пучекъ въ этомъ случаѣ также параболическій и имѣетъ радикальной осью касательную къ окружности $\omega$ въ точкѣ $C'$. Двѣ окружности этого пучка, взаимно обратныя относительно $\omega$, образуютъ въ совокупности псевдо-окружность съ центромъ $C$. Псевдо-окружности, псевдо-діаметры которыхъ образуютъ параболическій пучекъ, мы будемъ называть параболическими.

Гиперболическому пучку окружностей $a, b, \ldots$ (фиг. 36) соотвѣтствуетъ эллиптическій ортогональный пучекъ; пусть $U$ и $V$ будутъ основныя его точки. Если мы склонны разсматривать $a, b, \ldots$, какъ пучекъ псевдо-прямыхъ, проходящихъ чрезъ идеальную псевдо-точку $C$, то теперь гиперболическія псевдо-окружности состоятъ каждая изъ двухъ простыхъ окружностей, которыя проходятъ чрезъ точки $U$, $V$ и взаимно обратны при (гиперболической) инверсіи относительно окружности $\omega$, какъ напримѣръ, $\varkappa'$ и $\varkappa''$ на фиг. 36. Только въ томъ случаѣ, когда окружность $\varkappa'$ совпа-

[55]) При инверсіи относительно $\omega$ окружности $a$ и $b$ переходятъ каждая въ себя самое (§ 8, п. 5. пред. 2.), а окружность $\varkappa'$ въ $\varkappa''$.

даетъ съ $\varkappa''$, т. е. окружность $\varkappa$ сама принадлежитъ сѣти, не можетъ быть рѣчи о псевдо-окружности: мы имѣемъ тогда передъ собою псевдо-прямую, перпендикулярную къ $a$, $b$,...[56]). Однако, существуетъ только одна окружность $g$, проходящая черезъ точки $U$, $V$ и сѣкущая ортогонально окружность $\omega$; центръ ея $G$ расположенъ на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ середины отрѣзка $UV$ такимъ образомъ, что $GVO$ есть прямой уголъ.

Сводя все это воедино, мы можемъ сказать:

IV. Въ гиперболическомъ пространствѣ имѣется три типа псевдо-окружностей: эллиптическія, параболическія и гиперболическія.

a) Эллиптическія псевдо-окружности имѣютъ псевдо-центромъ дѣйствительную, конечную точку.

b) Псевдо-центръ параболической окружности лежитъ на абсолютной псевдо-сферѣ; ея псевдо-діаметры параллельны другъ другу, псевдо-окружность проходитъ черезъ свой псевдо-центръ.

c) Гиперболическія окружности имѣютъ идеальный псевдо-центръ; діаметры такой окружности не параллельны, но они и не пересѣкаются. Въ этомъ случаѣ существуетъ псевдо-прямая $g$, которая также сѣчетъ ортогонально пучекъ діаметровъ[57]).

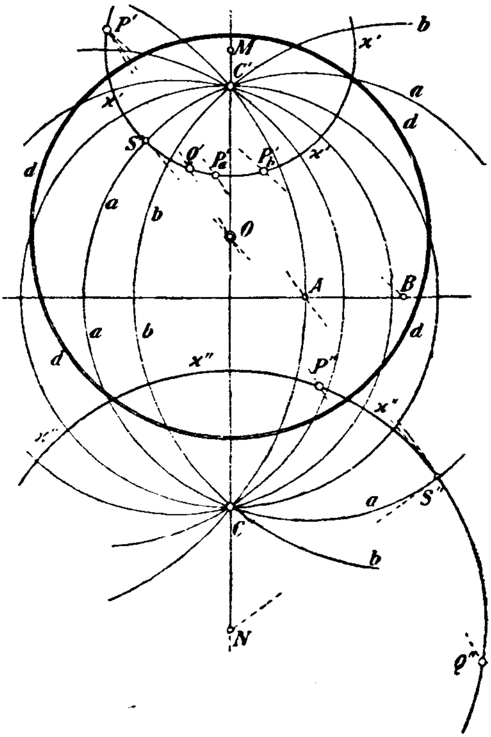
[56]) Какъ сфера, такъ и окружность, принадлежащая сѣти, обращается при инверсіи сѣти, въ себя самое; и обратно, каждая окружность, обратная самой себѣ въ инверсіи сѣти, принадлежитъ сѣти, а потому ортогональна къ окружности $\omega$ и представляетъ собой псевдо-прямую въ нашемъ гиперболическомъ пространствѣ.

[57]) Только эллиптическая псевдо-окружность представляетъ собой „окружность", какъ мы таковую обыкновенно понимаемъ, т. е. геометрическое мѣсто (псевдо)-точекъ, равно удаленныхъ отъ центра. Параболическая окружность имѣетъ безконечно удаленный центръ; это та кривая, которую Лобачевскій называлъ „предѣльной круга" или „орицикломъ". Гиперболическая окружность имѣетъ мнимый центръ; она можетъ быть опредѣлена, какъ геометрическое мѣсто псевдо-точекъ на псевдо-плоскости, равно удаленныхъ отъ нѣкоторой псевдо-прямой.

Чтобы уяснить себѣ еще, съ другой точки зрѣнія, тѣ же соображенія, замѣтимъ, что окружность въ обыкновенной плоской геометріи можно разсматривать какъ ортогональную траекторію пучка прямыхъ, т. е. какъ кривую, сѣкущую ортогонально всѣ лучи пучка. Если пучекъ вырождается въ пучекъ параллелей, т. е. когда центръ пучка уходитъ въ безконечность, то траекторія обращается въ прямую, на которую мы и смотримъ, какъ на предѣльную окружность, какъ на окружность безконечно большого радіуса. Этимъ двумъ случаямъ въ гиперболической геометріи отвѣчаетъ эллиптическая и параболическая окружность. Или еще иначе: если центръ окружности въ обыкновенной плоскости уходитъ въ безконечность, то окружность обращается въ прямую; въ гиперболической плоскости — она обращается въ особую линію, въ „параболическую окружность", какъ ее называетъ авторъ настоящаго сочиненія, — въ „орициклъ", какъ ее называетъ Лобачевскій. (На слѣд. стр).

Послѣднее предложеніе допускаетъ обращеніе: **совокупность псевдо-перпендикуляровъ къ одной и той же псевдо-прямой образуетъ пучекъ, а именно — гиперболическій въ гиперболической геометріи и эллиптическій въ эллиптической.**

Теперь обратимся къ эллиптической сѣти. Пусть плоскость чертежа, какъ псевдо-плоскость, опять проходитъ черезъ центръ сѣти, пусть $d$ будетъ ея сѣченіе съ діаметральной сферой (фиг. 37). Пусть, какъ и прежде, $C'$, $C''$ будутъ составляющія точки даннаго псевдо-центра, $P'$ и $P''$ составляющія данной псевдоточки, черезъ которую должна проходить псевдо-окружность. Отраженіемъ отъ псевдо-діаметровъ $a$ и $b$ мы получимъ изъ $P'$ двѣ дальнѣйшія точки $P_a'$ и $P_b'$ одной составляющей $\varkappa'$ искомой псевдо-окружности $\varkappa$, которая этимъ уже вполнѣ опредѣлена. Вторая составляющая $\varkappa''$ построена по тремъ точкамъ $P''$, $Q''$, $S''$, которыя получаются изъ точекъ окружности $\varkappa'$ посредствомъ эллиптической инверсіи относительно окружности $d$. Впрочемъ, для опредѣленія центра $N$ окружности $\varkappa''$ достаточно знать одну точку $S''$, расположенную на окружности, такъ какъ $OS''N$ есть прямой уголъ. Такъ какъ въ эллиптической сѣти имѣются только эллиптическіе пучки окружностей, то отсюда слѣдуетъ:



Фиг. 37.

---

Въ обыкновенной плоскости совокупность перпендикуляровъ къ одной и той же прямой образуютъ пучекъ паралелей; ортогональная ихъ траекторія есть предѣльная круга — прямая. Но въ гиперболической плоскости совокупность перпендикуляровъ къ одной прямой (какъ ниже указано и въ текстѣ) не представляетъ собой пучка паралелей; это своеобразный пучекъ (которому можетъ быть отнесена идеальная точка пересѣченія) расходящихся прямыхъ; ортогональныя траекторіи такого пучка суть „гиперболическія окружности".

V. Въ эллиптическомъ пространствѣ существуютъ только эллиптическія псевдо-окружности (съ дѣйствительнымъ псевдоцентромъ).

Послѣ этого подробнаго разбора псевдо-окружностей мы можемъ относителъно сферъ ограничиться замѣчаніемъ, что теоремы IV и V mutatis mutandis остаются также въ силѣ относительно сферъ.

**6.** Что касается вычисленій неевклидовой метрики, то мы оставимъ ихъ въ сторонѣ, такъ какъ для выясненія поставленнаго здѣсь вопроса о сущности основныхъ понятій, они вносятъ очень мало[58]). Метрика неевклидовой геометріи представляетъ высокій интересъ, если мы обозрѣваемъ ее сразу, какъ бы съ птичьяго полета; возможность окинуть ее такимъ взглядомъ даетъ намъ, съ одной стороны, проективное мѣроопредѣленіе Кели, а съ другой стороны, — теорія группъ Софуса Ли. Напротивъ, проникнуть въ эту своеобразную область при помощи методовъ элементарной геометріи представляетъ довольно неблагодарную работу; къ тому же чтеніе основныхъ изслѣдованій затрудняется массой новыхъ искусственныхъ выраженій и символовъ, которые каждый изъ авторовъ вводитъ по своему; къ этому присоединяются еще обыкновенно соображенія философскаго характера, съ которыми далеко не всегда можно согласиться. Неудобство представляетъ также и то обстоятельство, что эти идеи не проводятся рядомъ точныхъ построеній[59]); однако, здѣсь приходитъ на помощь геометрія сферъ, если мы относимъ всю систему къ сферической сѣти. Но тогда эти предложенія гораздо легче обозрѣть съ точки зрѣнія Евклидовой геометріи сферической сѣти, чѣмъ съ точки зрѣнія неевклидовой геометріи. Сферическая тригонометрія такимъ путемъ легко переносится въ псевдо-геометрію.

Для аналитической разработки обѣихъ неевклидовыхъ системъ указали очень удобный путь Шуръ*) и Гильбертъ**) Теорія Гильберта предполагаетъ знакомство съ началами аналитической геометріи. Эта теорія становится поразительно ясной, если мы пользуемся гиперболической сѣтью, такъ что развитіе ея этими средствами доставляетъ высокое наслажденіе. Гильбертовы „концы" прямой въ гиперболической геометріи, очевидно, представляютъ собой не что иное, какъ пересѣченіе ея съ

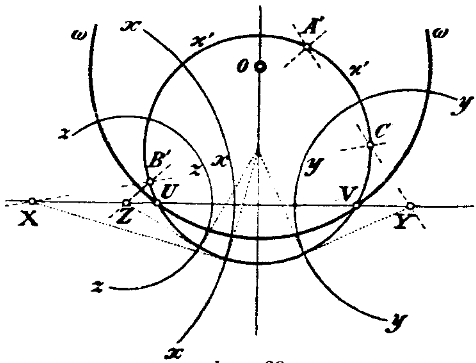
[58]) Хотя это замѣчаніе не фактическаго свойства, мы все же считаемъ умѣстнымъ высказать, что мы рѣшительно не раздѣляемъ этого взгляда. Напротивъ, мы считаемъ, что только изученіе тригонометріи неевклидоваго пространства, какъ первой метрической дисциплины, вполнѣ выясняетъ самую неевклидову геометрію.

[59]) Этотъ упрекъ мы также считаемъ рѣшительно несправедливымъ.

*) F. Schur, „Ueber die Grundlagen der Geometrie". Math. Ann. 55.

**) D. Hilbert, „Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie". Math. Ann. 57. Перепечатано во второмъ изданіи его сочиненія. „Grundlagen der Geometrie".

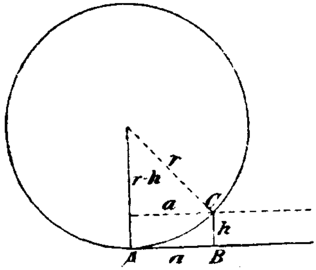
ортогональной сферой. Гильбертову лемму 4 въ § 1 указаннаго мемуара, на которой основываются операціи надъ „концами“, нужно сначала выяснить себѣ въ евклидовой геометріи; по существу, эта теорема тогда сводится къ тому, что перпендикуляры, возставленные изъ techo серединъ сторонъ треугольника $ABC$, пересѣкаются въ одной точкѣ, въ центрѣ описанной окружности $\varkappa$. Въ гиперболической геометріи эти перпендикуляры могутъ оказаться параллельными, могутъ и вовсе не пересѣкаться; въ послѣднемъ случаѣ они перпендикулярны къ нѣкоторой прямой. Въ псевдо-плоскости $\zeta$ предыдущаго пункта мы видѣли непосредственно, что эти перпендикуляры принадлежатъ эллиптическому, параболическому или гиперболическому пучку (пучку потому, что они пересѣкаютъ ортогонально, какъ окружность, проходящую черезъ вершины $A$, $B$, $C$, такъ и абсолютную окружность $\omega$). Такъ какъ мы въ гиперболической геометріи присваиваемъ всѣмъ прямымъ, расположеннымъ въ гиперболической плоскости перпендикулярно къ одной прямой идеальную точку пересѣченія (теорема IV), то эта лемма Гильберта остается въ силѣ не только въ томъ случаѣ, когда перпендикуляры параллельны, но и въ томъ случаѣ, когда они имѣютъ идеальную точку пересѣченія. На фигурѣ 38 все это показано, опущена только часть, обратная чертежу относительно окружности $\omega$ (какъ и въ пунктѣ 5); $A'$, $B'$, $C'$ и $\varkappa'$ суть соотвѣтственно составляющія точекъ $A$, $B$, $C$ и окружности $\varkappa$. Псевдоперпендикуляры изъ серединъ псевдо-отрѣзковъ $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ представлены здѣсь окружностями $x$, $y$, $z$, центры которыхъ $X$, $Y$, $Z$ лежатъ на общей хордѣ $UV$ окружностей $\omega$ и $\varkappa'$. На чертежѣ нанесены всѣ вспомогательныя линіи; касательныя, впрочемъ, проведены на глазъ, но точки касанія опредѣлены перпендикулярами изъ центра при помощи двухъ чертежныхъ треугольниковъ. Если разрѣшить себѣ такого рода вольности, которыя къ тому же допускаются также въ начертательной геометріи, то такого рода построенія мало затруднительны. Если мы найдемъ пересѣченіе псевдо-перпендикуляра $x$ къ $AB$ съ прямой $AB$ (на фигурѣ не начерченной), то мы получимъ точку $M$, которую опредѣляемъ, какъ середину псевдо-отрѣзка $AB$. „Середина“, опредѣляемая такимъ образомъ, во всякомъ случаѣ имѣетъ больше аналогіи съ евклидовой серединой, чѣмъ точка, опредѣляемая согласно предложенію 1 § 5-го; въ этомъ смыслѣ „серединой“ служила бы точка, которая вмѣстѣ съ без-



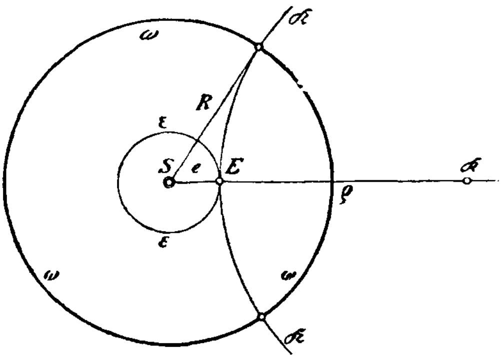
Фиг. 38.

конечно удаленной точкой дѣлитъ гармонически псевдо-отрѣзокъ $AB$. Такимъ образомъ, въ гиперболической геометріи отрѣзокъ имѣетъ двѣ „середины“: въ эллиптической геометріи послѣднее опредѣленіе совершенно непригодно, тогда какъ первое опредѣленіе всегда находитъ себѣ примѣненіе[60]).

**7.** Мы уже указали выше, что обѣ псевдо-геометріи эмпирически не могутъ быть отличены отъ обыкновенной, если мы примемъ радіусъ $R$ ортогональной или, соотвѣтственно, діаметральной сферы достаточно большимъ (см. стр. 74). Но здѣсь умѣстно поставить вопросъ, не обнаружились ли бы непосредственно особенности неевклидовой сферы, такъ какъ ни объ одномъ пространственномъ образѣ мы не имѣемъ такого яснаго представленія, какъ о сферѣ. Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, мы выведемъ нѣкоторыя формулы, которыя покажутъ, сколь большимъ




Фиг. 39.




Фиг. 40.

нужно выбрать радіусъ $R$, чтобы неевклидова плоскость или сфера достаточно приблизились къ евклидовой, т. е. чтобы разница между ними оставалась въ произвольныхъ указанныхъ предѣлахъ. Для этого намъ нужны слѣдующія предложенія евклидовой геометріи.

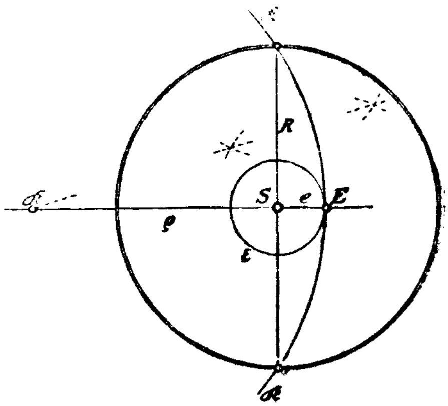
a) Къ окружности радіуса $r$ (фиг. 39) мы проведемъ касательную и опустимъ на нее перпендикуляръ $CB$ изъ точки окружности $C$. Положимъ, что намъ при этомъ дано разстояніе $CB = h$ и требуется найти разстояніе $a$ точки $B$ отъ точки касанія $A$. Изъ чертежа мы находимъ непосредственно: $r^2 = (r - h)^2 + a^2$, такъ что

$$a = \sqrt{2rh - h^2}. \tag{1}$$

Если мы будемъ разсматривать окружность, какъ псевдо-прямую въ неевклидовой геометріи, то мы будемъ называть величину $h$ касательнымъ уклоненіемъ отъ евклидовой прямой на разстояніи $a$.

[60]) Мы не входимъ здѣсь въ объясненіе этихъ довольно трудныхъ соображеній, потому что они находятся въ связи съ идеями Гильберта, которыхъ мы не имѣемъ возможности здѣсь излагать.

b) Положимъ, какъ на стр. 73, что центръ солнца $S$ служитъ центромъ сѣти; пусть радіусъ $R$ ортогональной или діаметральной сферы будетъ равенъ $n$ радіусамъ земной орбиты $e$; черезъ центръ земли $E$ проведемъ сферу $\mathfrak{K}$, принадлежащую нашей сѣти, и постараемся найти ея радіусъ $\varrho$. На фиг. 40 и 41, соотвѣтствующихъ случаямъ эллиптической и гиперболической сѣти, $\varepsilon$ изображаетъ эклиптику (которую мы принимаемъ круговой). Согласно теоремѣ объ отрѣзкахъ сѣкущей и хорды



Фиг. 41.

на фиг. 40: $e(2\varrho + e) = R^2$,

" " 41: $e(2\varrho - e) = R^2$,

такъ что вообще

$$2\varrho = (R^2 - \varepsilon e^2)/e = (n^2 - \varepsilon)e, \quad (2)$$

гдѣ $\varepsilon = +1$ для гиперболической сѣти и $\varepsilon = -1$ для эллиптической.

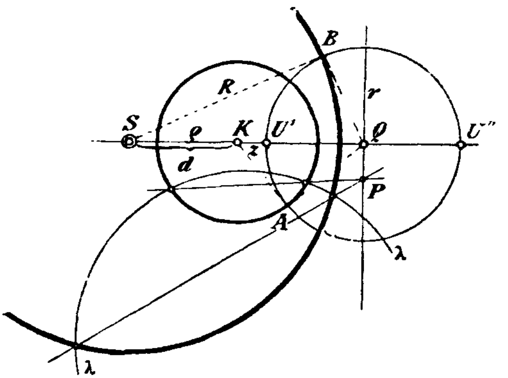
c) Изъ нѣкоторой точки, доступной съ земли, мы проведемъ касательную плоскость къ сферѣ $\mathfrak{K}$ и найдемъ разстояніе $a$ отъ точки касанія $A$ той точки плоскости $B$, надъ которой сфера подымается на высоту $h$, какъ это выясненно подробно въ рубрикѣ a). Для этого нужно въ формулѣ (1) положить $r = \varrho$, и мы получимъ:

$$a = n\sqrt{eh - \varepsilon he/n^2 - h^2/n^2} = n\sqrt{eh}\sqrt{1 - \varepsilon/n^2 - h/en^2}. \quad (3)$$

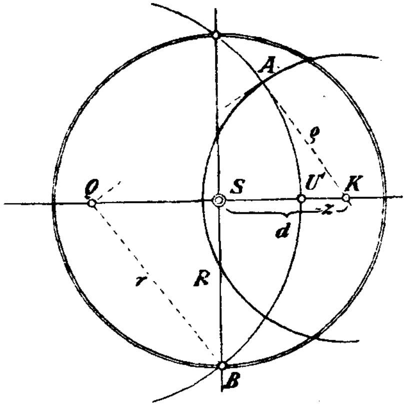
d) Пусть $K$ будетъ произвольная сфера (фиг. 42 и 43), $\varrho$ радіусъ, $K$ ея центръ въ евклидовомъ пространствѣ, $U$ ея псевдо-центръ съ точки зрѣнія неевклидовой геометріи соотвѣтствующей сѣти, $d$ разстояніе послѣдняго отъ центра сѣти $S$. Разыщемъ разность $z = SU' - SK$, „аномалію" сферы относительно соотвѣтствующей неевклидовой геометріи, гдѣ $U'$ есть та изъ двухъ составляющихъ точекъ псевдо-точки $U$, которая лежитъ ближе къ точкѣ $S$. Чтобы въ гиперболической сѣти $U$ было дѣйствительной точкой, сфера $K$ должна проходить внутри ортогональной сферы [61]). Мы примемъ, что плоскость чертежа $\zeta$ по прежнему проходитъ черезъ точку $S$, а также черезъ $K$; поэтому и точка $U$ падаетъ въ ту же плоскость. Черезъ точку $U$ проходитъ сфера сѣти $Q$, которая сѣчетъ ортогонально окружность $K$. На фиг. 42 и 43 изображены сѣченія этихъ

[61]) Псевдо-окружностью съ дѣйствительнымъ центромъ въ гиперболической сѣти, какъ выяснено въ п. 5 и изображено на фиг. 35, служатъ двѣ взаимно обратныя окружности, не имѣющія общихъ точекъ; поэтому одна изъ составляющихъ окружностей лежитъ внутри ортогональной окружности, а другая лежитъ внѣ ея.

сферъ съ плоскостью чертежа; на фигурѣ 42, кромѣ того, наглядно изображено построеніе точки $U$[62]). Треугольникъ $QAK$ въ обѣихъ случаяхъ даетъ:




Фиг. 42.




Фиг. 43.

$$r^2+\varrho^2=(r+\varepsilon z)^2, \qquad (\alpha)$$

гдѣ по прежнему $\varepsilon=+1$ въ гиперболической сѣти и $\varepsilon=-1$ въ эллиптической. Далѣе, треугольникъ $QBS$ даетъ:

на фиг. 42: $r^2+R^2=(d+z+r)^2$, такъ что
$$R^2=d^2+z^2+2dz+2zr+2rd;$$
на фиг. 43: $r^2-R^2=(r-z-d)^2$, такъ что
$$-R^2=d^2+z^2+2dz-2zr-2rd.$$

Объединяя оба случая, получимъ:

$$\begin{aligned}\varepsilon R^2&=d^2+z^2+2dz+2\varepsilon zr+2\varepsilon rd,\\ \varepsilon R^2&=d^2+(z^2+2\varepsilon zr)+2d\varepsilon(r+\varepsilon z).\end{aligned} \qquad (\beta)$$

Въ виду соотношеній ($\alpha$), мы можемъ въ формулѣ ($\beta$) положить:

$$r+\varepsilon z=+\sqrt{r^2+\varrho^2},\quad z^2+2\varepsilon zr=\varrho^2. \qquad (\gamma)$$

[62]) Составляющія точки $U$ и $U''$ псевдо-центра $U$ взаимно обратны въ инверсіи сѣти и служатъ основными точками эллиптическаго пучка окружностей, сѣкущихъ ортогонально пучекъ, опредѣляемый окружностью $E$ и ея инверсіей. Въ частности, слѣдовательно, окружность $Q$, имѣющая $U'U''$ своимъ діаметромъ, сѣчетъ ортогонально окружность $K$. Такъ какъ $SU'.SU''=K^2=SB^2$, то эта окружность $Q$ сѣчетъ подъ прямымъ угломъ и ортогональную окружность $S$. Отсюда слѣдуетъ, что точка $Q$ имѣетъ степень $r^2$ какъ относительно окружности $S$, такъ и относительно окружности $K$. Это значитъ, точка $Q$ лежитъ на радикальной оси окружностей $K$ и $S$. Чтобы разыскать эту радикальную ось, строимъ третью вспомогательную окружность $\lambda$, находимъ радикальный центръ $P$ трехъ окружностей и опускаемъ изъ $P$ перпендикуляръ на линію центровъ $SK$. Этимъ путемъ находимъ точку $Q$. Изъ нея проводимъ касательную $QB$ къ окружности $S$ и радіусомъ $QB$ проводимъ окружность, которая пересѣчетъ прямую $SK$ въ точкахъ $U'$ и $U''$.

Отсюда получаемъ:

$$\varepsilon R^2 = d^2 + \varrho^2 + 2d\varepsilon\sqrt{r^2+\varrho^2},$$

или

$$\sqrt{r^2+\varrho^2} = [R^2 - \varepsilon(d^2+\varrho^2)]/2d,\quad r = \sqrt{[R^2 - \varepsilon(d^2+\varrho^2)]^2/4d^2 - \varrho^2}. \qquad (\delta)$$

Съ другой стороны, въ виду соотношенія ($\gamma$),

$$\varepsilon z = -r + \sqrt{r^2+\varrho^2}, \qquad (\varepsilon)$$

откуда мы, наконецъ, получаемъ:

$$2\varepsilon zd = [R^2 - \varepsilon(d^2+\varrho^2)] - \sqrt{[R^2 - \varepsilon(d^2+\varrho^2)]^2 - 4d^2\varrho^2}, \qquad (4)$$

гдѣ радикалъ имѣетъ одно опредѣленное значеніе.

Изъ формулы (4) мы получаемъ при помощи простого вычисленія:

$$\varrho^2 = \varepsilon zR^2 : (z+d) - zd = \varepsilon zR^2/d - zd - \varepsilon(zR/d)^2/(1+z/d). \qquad (5)$$

Эти общія формулы значительно упрощаются, однако, если мы примемъ во вниманіе порядокъ входящихъ въ нихъ величинъ и ограничимся приближеніемъ въ нѣсколько десятичныхъ знаковъ. Если проведенная вокругъ центра солнца ортогональная или діаметральная сфера настолько велика (см. стр. 73), что она охватываетъ всѣ планеты, то радіусъ $R = ne$ содержитъ, по крайней мѣрѣ, $n = 30$ радіусовъ земной орбиты $e$. Пусть

$$\left.\begin{aligned} &n \geqq 30,\\ &e = 148\,.\,10^6\,\text{km (приблизительно)},\\ &h = \frac{1}{1000}\,\text{mm.} = 10^{-9}\,\text{km}, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

т. е. $h$ равно единицѣ, употребляемой при наиболѣе тонкихъ микроскопическихъ измѣреніяхъ. Тогда съ точностью до двухъ десятичныхъ знаковъ

$$a = n\sqrt{eh} = 0{,}38 \cdot n\,\text{km}. \qquad (n \geqq 30). \qquad (7)$$

На фиг. 42 и 43 K есть центръ сферы, относительно которой мы теперь примемъ, что ея центръ доступенъ съ земли. Тогда его разстояніе $d$ отъ солнца лишь незначительно отличается отъ радіуса земной орбиты $e$. Но при $d = e$ и $R = ne$ формула (5) даетъ:

$$\varrho^2 = \varepsilon zn^2e - ze - \varepsilon z^2n^2/(1+z/e).$$

Послѣднимъ членомъ этого выраженія, очевидно, можно пренебречь, если, скажемъ, $z^2n^2 < 10^{-6}$, $\varepsilon zn < 10^{-3}$ и $z$ очень мало по сравненію съ $e$; $\varepsilon z$ имѣетъ всегда положительное значеніе. При такомъ предположеніи мы имѣемъ приближенно: $\varrho^2 = \varepsilon ze(n^2 - \varepsilon)$,

такъ что $\varrho^2$ возрастаетъ или убываетъ вмѣстѣ съ произведеніемъ $\varepsilon z$. Если $\varepsilon z$ не превосходитъ $h = 10^{-9}$ km, то $\varrho$ не превосходитъ значенія

$$\varrho = 0{,}38 \cdot n\,\text{km} \qquad (n \geqq 30), \qquad (8)$$

съ тѣмъ приближеніемъ, какъ и въ формулѣ (7). Результатъ этихъ вычисленій можно формулировать слѣдующимъ образомъ.

VI. Обѣ неевклидовы геометріи не только логически равноправны съ евклидовой геометріей, но и эмпирически. Въ частности, осуществленіе неевклидовыхъ геометрій въ эллиптической или гиперболической сѣти удовлетворяетъ самымъ строгимъ требованіямъ точности. Если центръ солнца служитъ центромъ сѣти, а радіусъ ортогональной или діаметральной сферы взятъ въ $n$ радіусовъ земной орбиты, $n > 30$, то касательное уклоненіе псевдо-плоскости, доступной намъ на землѣ, составляетъ $^1/_{1000}$ mm только на разстояніи

$$a = 0{,}38 \cdot n \text{ km};$$

такъ что при $n = 30$

$$a = 11 \text{ km}$$

отъ точки касанія. Эллиптическая аномалія псевдо-сферы имѣетъ отрицательное значеніе, а гиперболическая положительное; для того, чтобы она въ томъ и въ другомъ случаѣ была меньше $^1/_{1000}$ mm (Евклидовъ) радіусъ можетъ быть не больше

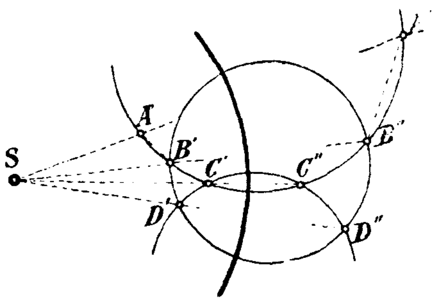
$$\varrho = 0{,}38\, n,$$

т. е. въ самомъ неблагопріятномъ случаѣ $n = 30$ онъ можетъ не превышать 11 km.

Для сферъ и окружностей обыкновенной величины приближеніе псевдо-центра къ евклидову центру необычайно велико. Было бы неправильно возразить на это, что такимъ образомъ устанавливается хотя и небольшая разница, но все же разница между тремя геометрическими системами. Эмпирически эту разницу врядъ ли возможно обнаружить уже при $n = 30$, при большихъ же значеніяхъ $n$ она фактически вовсе исчезаетъ. Вычисленныя уклоненія гиперболической и эллиптической геометріи отъ евклидовой остаются, такъ сказать, только на бумагѣ; они существуютъ только въ нашемъ воображеніи. Совершенно такъ же, какъ мы, съ точки зрѣнія евклидовой геометріи, говоримъ, что псевдо-плоскость гиперболической или эллиптической геометріи всегда имѣетъ уклоненіе отъ плоскости евклидовой геометріи, доступное вычисленію, можно было бы обратно, съ точки зрѣнія неевклидовой геометріи, возразить, что такъ называемая плоскость евклидовой геометріи должна быть кривой поверхностью, ибо она отъ касательной плоскости, проведенной въ какой либо точкѣ (въ этой неевклидовой геометріи), уклоняется на разстояніе, которое мы можемъ точно вычислить. Точно такъ же и относительно окружности можно противопоставить одно утвержденіе другому. Если бы всѣ три геометріи пользовались однимъ и тѣмъ же (матеріальнымъ) масштабомъ, то онѣ при всей точности измѣреній и вычисленій получили бы, по существу, тѣ же значенія величинъ $h$ и $z$, хотя формулы были бы различныя. Если поэтому обыкновенно говорятъ, что въ безконечно малой области въ обѣихъ неевклидовыхъ геометріяхъ остается въ силѣ Евклидова метрика, то мы теперь видимъ, что эта область, по сравненію съ малостью нашего человѣческаго масштаба, еще очень велика.

**8.** Въ заключеніе остается только доказать, что обѣ неевклидовы геометріи въ сферическихъ сѣтяхъ удовлетворяютъ также Гильбертовымъ аксіомамъ непрерывности $V_1$ и $V_2$. Первая изъ нихъ, такъ называемая „аксіома Архимеда", утверждаетъ, что по прямой, передвигаясь равными шагами, всегда возможно, сдѣлавъ конечное число шаговъ, перешагнуть за любую точку прямой. Доказательство очень легко провести въ пучкѣ окружностей, если мы примемъ во вниманіе, что изъ двухъ точекъ, взаимно обратныхъ относительно окружности $\varkappa$, та, которая расположена внутри круга, ближе (въ евклидовомъ значеніи слова) къ его периферіи. Это справедливо какъ для эллиптической, такъ и для гиперболической инверсіи.

Аксіома „полноты системы" $V_2$ также выполняется въ сѣти, потому что послѣдняя охватываетъ также „плоскости", „прямыя" и „точки" евклидова пространства. Изъ двухъ аксіомъ непрерывности группы V Архимедова аксіома важнѣе, такъ какъ она составляетъ основу измѣренія отрѣзковъ.




Фиг. 44.

Мы изслѣдуемъ поэтому, въ какой связи находится измѣреніе отрѣзковъ двухъ неевклидовыхъ геометрій съ той же задачей евклидовой геометріи; мы остаемся при томъ осуществленіи неевклидовой геометріи, которое даетъ сферическая сѣть. „Длина $\langle AB \rangle$ псевдо-отрѣзка $AB$ будетъ въ такомъ случаѣ нѣкоторое число, зависящее отъ составляющихъ точекъ $A'$, $A''$ и $B'$, $B''$ его концовъ и не мѣняющее своего значенія

1) если точки $A'$ и $A''$, $B'$ и $B''$ замѣщаютъ другъ друга,

2) если точки $A'$, $A''$ и $B'$, $B''$ замѣщаются ихъ отраженіями $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ $\mathfrak{B}'$ $\mathfrak{B}''$ отъ какихъ-либо изъ сферъ сѣти.

Этимъ требованіемъ „длина" $\langle AB \rangle$ еще не вполнѣ опредѣлена; но во всякомъ случаѣ мы, по крайней мѣрѣ, знаемъ, что мы должны ее искать среди выраженій, которыя не мѣняются при инверсіи. Такія выраженія называются **инваріантами** инверсіи. Если точки $A'$ и $A''$, $B'$ и $B''$... попарно обратны (фиг. 44), и $S$ есть центръ инверсіи, такъ что $SA' \cdot SA'' = SB' \cdot SB'' = \ldots$, то точки $A'$, $A''$, $B'$, $B''$ лежатъ на одной окружности,— точно также $C'$, $C''$, $D'$, $D''$ и т. д., а потому $\sphericalangle SA'B' = \sphericalangle SB''A'', \ldots$. Изъ подобія треугольниковъ $SA'B''$ $SB''A''$ слѣдуетъ:

$$A'B' : SA' = A''B'' : SB'', \quad A'B' : SB' = A''B'' : SA'',$$

а потому

$$\frac{A'B'}{\sqrt{SA' \cdot SB'}} = \frac{A''B''}{\sqrt{SA'' \cdot SB''}}. \tag{9}$$

Изъ этого наиболѣе простого инваріанта точекъ $A'$, $B'$, $A''$, $B''$ легко получить другіе; такъ напримѣръ, мы имѣемъ тождественно:

$$\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{A'C'/\sqrt{SA' \cdot SC'}}{B'C'/\sqrt{SB' \cdot SC'}} : \frac{A'D'/\sqrt{SA' \cdot SD'}}{B'D'/\sqrt{SB' \cdot SD'}};$$

такъ какъ, съ другой стороны, въ виду соотношенія (9), мы можемъ въ правой части вездѣ замѣнить $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ соотвѣтственно черезъ $A''$, $B''$, $C''$, $D''$, то корни вновь извлекаются, и мы получаемъ:

$$\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{A''C''}{B''C''} : \frac{A''D''}{B''D''}. \tag{10}$$

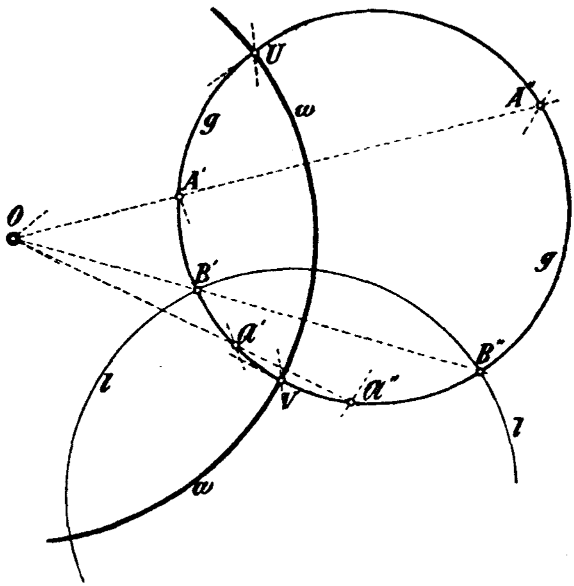
Каждая часть этого равенства называется **ангармоническимъ отношеніемъ** соотвѣтствующихъ четырехъ точекъ.

VII. **Ангармоническое отношеніе четырехъ простыхъ[63]) точекъ не мѣняется при инверсіи.**

Наши четыре точки могутъ и не лежатъ въ одной плоскости. Въ то время, какъ выраженіе (9) остается неизмѣннымъ только при той инверсіи, о которой тамъ была рѣчь, ангармоническое отношеніе остается инваріантомъ при всякой инверсіи. Меньшее число точекъ такого инваріанта не имѣетъ; однако, элементарными средствами мы не можемъ этого доказать. Итакъ, чтобы приписать двумъ псевдо-точкамъ $A$, $B$ длину $\langle AB\rangle$, мы неизбѣжно должны прибѣгнуть еще къ двумъ точкамъ прямой $AB$. Истинная, глубоко сокрытая причина этого факта можетъ быть выяснена только при помощи теоріи инваріантовъ. Въ гиперболической геометріи мы, естественно, сейчасъ же обратимся къ „концамъ“ псевдо-прямой, т. е. къ точкамъ ея пересѣченія $U$, $V$ съ ортогональной сферой. Въ эллиптической сѣти, однако, діаметральная сфера, какъ мы видѣли, не представляетъ собой такого особеннаго образа, и потому точки ея пересѣченія съ псевдо-прямой для насъ непригодны. Аналогію съ ортогональной сферой здѣсь представляетъ другая сфера, также имѣющая центръ въ центрѣ сѣти; но радіусъ этой сферы выражается чисто мнимымъ числомъ, абсолютная вели-

63) „Простыхъ“ — въ противоположеніе псевдо-точкамъ, составленнымъ каждая изъ двухъ простыхъ точекъ.

чина котораго выражаетъ радіусъ діаметральной сферы. Такъ какъ, однако, этотъ образъ не можетъ быть наглядно представленъ, то мы ограничимся гиперболической геометріей. Мы предположимъ, что точки $A'$, $A''$, $B'$, $B''$ и центръ сѣти $O$ расположены въ одной плоскости $\zeta$, которая служитъ также плоскостью чертежа (фиг. 45). Ея сѣченіе съ ортогональной сферой есть окружность $\omega$; „концы" псевдо-прямой $AB$ суть $U$ и $V$. При отраженіи отъ одной изъ псевдо-плоскостей сѣти ортогональная сфера переходитъ въ себя самое; отсюда слѣдуетъ: концы псевдо-прямой при отраженіи переходятъ въ концы псевдо-прямой, служащей изображеніемъ первой. Отразимъ теперь псевдо-прямую $AB$ отъ псевдо-прямой $l$ въ плоскости чертежа, перпендикулярной къ $AB$ въ точкѣ $B$. Центръ $L$ окружности $l$ лежитъ на прямой $UV$, радикальной оси пучка окружностей, опредѣляемаго окружностями $\omega$ и $AB$. Слѣдовательно, точки $U$ и $V$ взаимно обратны относительно окружности $l$. Пусть изображенія точекъ $A'$ и $A''$ при отраженіи отъ $l$ будутъ $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$; эти двѣ точки взаимно обратны относительно сѣти и образуютъ псевдо-точку $\mathfrak{A}$, изображеніе точки $A$ при отраженіи отъ $l$. Въ виду соотношенія (10) мы имѣемъ, съ одной стороны:




Фиг. 45.

$$\frac{A'U}{A'V}:\frac{B'U}{B'V}=\frac{A''U}{A''V}:\frac{B''U}{B''V}, \tag{11}$$

съ другой стороны:

$$\frac{A'U}{A'V}:\frac{B'U}{B'V}=\frac{\mathfrak{A}'V}{\mathfrak{A}'U}:\frac{B'V}{B'U},\quad \frac{A''U}{A''V}:\frac{B''U}{B''V}=\frac{\mathfrak{A}''V}{\mathfrak{A}''U}:\frac{B''V}{B''U}. \tag{12}$$

Если мы для сокращенія положимъ:

$$\frac{PU}{PV}:\frac{QU}{QV}=\{PQ\}, \tag{13}$$

то

$$\{A'B'\}=\{A''B''\};\ \{A'B'\}=\{B'\mathfrak{A}'\},\ \{A''B''\}=\{B''\mathfrak{A}''\}; \tag{14}$$

эти равенства мы можемъ объединить въ одно слѣдующимъ образомъ:

$$\{AB\} = \{B\mathfrak{A}\}. \tag{15}$$

Далѣе:

$$\{A'B'\}^2 = \{A'B'\}\ \{B'\mathfrak{A}'\}$$

$$= \left(\frac{A'U}{A'V} : \frac{B'U}{B'V}\right) \left(\frac{B'U}{B'V} : \frac{\mathfrak{A}'U}{\mathfrak{A}'V}\right) = \frac{A'U}{A'V} : \frac{\mathfrak{A}'U}{\mathfrak{A}'V} = \{A'\mathfrak{A}'\},$$

и точно такъ же:

$$\{A''B''\}^2 = \{A''B''\}\ \{B''\mathfrak{A}''\} = \{A''\mathfrak{A}''\}$$

или, короче:

$$\{AB\}^2 = \{AB\}\ \{B\mathfrak{A}\} = \{A\mathfrak{A}\}. \tag{16}$$

Псевдо-отрѣзокъ $A'\mathfrak{A}$ представляетъ собой сумму псевдо-отрѣзковъ $A'B'$ и $B'\mathfrak{A}'$, которые, съ точки зрѣнія гиперболической геометріи, равны между собой; иными словами, съ точки зрѣнія этой геометріи отрѣзокъ $A'\mathfrak{A}'$ вдвое больше отрѣзка $A'B'$. Въ равенствѣ (16) суммѣ $A'\mathfrak{A}'$ отрѣзковъ $A'B'$ и $A'\mathfrak{A}'$ соотвѣтствуетъ произведеніе ангармоническихъ отношеній, удвоенному отрѣзку $A'B'$ отвѣчаетъ квадратъ его ангармоническаго отношенія. Вслѣдствіе этого, если геометрическому сложенію отрѣзковъ должно отвѣчать ариѳметическое сложеніе измѣряющихъ ихъ чиселъ, то таковыми должны служить не ангармоническія отношенія, а ихъ логариѳмы. Поэтому мы опредѣляемъ длину $\langle AB\rangle$ псевдо-отрѣзка $AB$, полагая:

$$\langle AB\rangle = k \log\ \{AB\}\ = k \log \left(\frac{A'U}{A'V} : \frac{B'U}{B'V}\right), \tag{17}$$

гдѣ $k$ представляетъ собой постоянную, которая еще подлежитъ опредѣленію. Мы принимаемъ здѣсь натуральную систему логариѳмовъ; если бы мы выбрали другое основаніе, то измѣнилось бы только значеніе числа $k$. Если это число $k$ не зависитъ отъ $A'$ и $B'$, то въ виду соотношенія (11) эта величина дѣйствительно представляетъ собой инваріантъ при инверсіи сѣти, а потому можетъ быть разсматриваема, какъ число, зависящее отъ псевдо-точекъ $A$ и $B$. Согласно теоремѣ VII, выраженіе $\langle AB\rangle$ не мѣняется также и при отраженіи отъ псевдо-плоскости. Равенства (16) можно теперь написать въ такомъ видѣ:

$$\langle AB\rangle + \langle B\mathfrak{A}\rangle = \langle A\mathfrak{A}\rangle,\ 2\,\langle AB\rangle = \langle A\mathfrak{A}\rangle, \tag{18}$$

гдѣ $B$ есть псевдо-середина отрѣзка $A\mathfrak{A}$.

Пусть теперь $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ будетъ рядъ псевдо-точекъ на псевдо-прямой $g$, при чемъ $A_1$ есть псевдо-середина отрѣзка $A_0A_2$, $A_2$—

псевдо-середина отрѣзка $A_1A_3, \ldots, A_{n-1}$ — отрѣзка $A_{n-2}A_n$; въ такомъ случаѣ, обозначая черезъ $A_i'$ и $A_i''$ составляющія псевдо-точки $A_i$, будемъ имѣть:

$$\frac{A_0'U}{A_0'V}:\frac{A_1'U}{A_1'V}=\frac{A_1'U}{A_1'V}:\frac{A_2'U}{A_2'V}=\cdots=\frac{A'_{n-1}U}{A'_{n-1}V}:\frac{A_n'U}{A_n'V}, \tag{19}$$

ибо $A'_{\nu+1}$ есть изображеніе псевдо-точки $A'_{\nu-1}$ при отраженіи отъ псевдо-перпендикуляра, возставленнаго къ псевдо-прямой $g$ изъ $A_\nu'$. Такое же соотношеніе имѣетъ мѣсто и для точекъ $A_\nu''$. Изъ равенствъ (19) путемъ перемноженія можно получить:

$$\left(\frac{A_0'U}{A_0'V}:\frac{A_1'U}{A_1'V}\right)^n=\frac{A_0'U}{A_0'V}:\frac{A_n'U}{A_n'V},$$

такъ что

$$n\langle A_0A_1\rangle=\langle A_0A_n\rangle, \tag{20}$$

какъ оно и должно быть. Если $\langle A_0A_1\rangle$ содержитъ $m$ единицъ длины $\mathfrak{e}$, принятыхъ при измѣреніи псевдо-отрѣзковъ, то

$$\langle A_0A_n\rangle=\frac{n}{m}\,\mathfrak{e}. \tag{21}$$

Формула (21) даетъ, такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ результатъ измѣренія псевдо-отрѣзка $A_0A_n$ при помощи единицы $\mathfrak{e}$. Подобно тому, какъ это дѣлается въ евклидовой геометріи, можно доказать при помощи аксіомы Архимеда, что для каждаго псевдо-отрѣзка $A_0A_n$ можно съ любымъ приближеніемъ найти вспомогательный отрѣзокъ $A_0A_1$ такого рода, что онъ, съ одной стороны, представляетъ собой $n$-ую часть отрѣзка $A_0A_n$, а, съ другой стороны, $m$-ую часть единицы $\mathfrak{e}$, гдѣ $m$ и $n$ суть цѣлыя числа. Этимъ исчерпанъ вопросъ объ измѣреніи отрѣзковъ.

Мы теперь можемъ безъ труда опредѣлить постоянную $k$. Если $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ суть конечныя точки того псевдо-отрѣзка, который принятъ за единицу длины, при какомъ угодно положеніи его въ пространствѣ, то

$$\langle\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\rangle=1,$$

а потому

$$1=k\log\{\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\}. \tag{22}$$

Результатъ всего этого изслѣдованія мы выразимъ такимъ образомъ:

VIII. **Длина отрѣзка $AB$ въ гиперболическомъ пространствѣ представляетъ собой число, которое зависитъ отъ положенія крайнихъ точекъ $A$ и $B$ отрѣзка относительно абсолютной поверхности, т. е. поверхности, на которой расположены безконечно удаленныя точки; именно, длина отрѣзка** отличается только постояннымъ множителемъ отъ логариѳма ангармоническаго отношенія конечныхъ точекъ $A$ и $B$ отрѣзка и безконечно-удаленныхъ точекъ прямой $AB$:

$$\langle AB\rangle = k\log\left(\frac{A'U}{A'V}:\frac{B'U}{B'V}\right) = k\log\left(\frac{A''U}{A''V}:\frac{B''U}{B''V}\right),$$

$$1 = k\log\ \{\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\}.$$

Если точка $B'$ совпадаетъ съ $A''$, а, слѣдовательно, точка $B''$ съ точкой $A'$, то

$$\langle AB\rangle = k\log\left(\frac{A'U}{A'V}:\frac{A''U}{A''V}\right) = k\log\left(\frac{A''U}{A''V}:\frac{A'U}{A'V}\right),$$

т. е.

$$\langle AB\rangle = -\langle AB\rangle,\quad \langle AB\rangle = 0,$$

какъ оно и должно быть, такъ какъ въ этомъ случаѣ псевдо-точка $B$ совпадаетъ съ $A$.

Эллиптическое пространство имѣетъ мнимую абсолютную поверхность, но длина отрѣзка попрежнему зависитъ отъ положенія крайнихъ точекъ отрѣзка относительно абсолютной поверхности. Однако, мы не будемъ выводить здѣсь предложенія, соотвѣтствующаго теоремѣ VII, такъ какъ это можетъ быть осуществлено только методами аналитической геометріи. Оба предложенія вмѣстѣ даютъ намъ, однако, возможность хотя бы скромно заглянуть въ сущность мѣроопредѣленія Кели, которое приводитъ къ совершенно тому же результату и относительно угловъ.

## § 12. Евклидова геометрія въ линейномъ численномъ многообразіи третьей ступени.

1. Геометрическіе результаты предыдущаго изслѣдованія доказываютъ, что изысканія въ области основъ нашей науки не только имѣютъ интересъ для теоріи познанія, но сохраняютъ и практическое значеніе, такъ какъ они даютъ, можно сказать, безпредѣльныя завоеванія въ области мысли, которыя необходимо должны привести къ строго дедуктивному развитію геометріи: всѣ предложенія геометріи, касающіяся относительнаго положенія точекъ, прямыхъ, плоскостей и другихъ образовъ, которые изъ нихъ составляются, могутъ быть перенесены на любое другое многообразіе объектовъ, если послѣдніе въ надлежащей группировкѣ удовлетворяютъ тѣмъ посылкамъ, изъ которыхъ строго дедуктивно выводятся предложенія геометріи. Форма геометрическихъ образовъ, въ которой мы воспринимаемъ ихъ нашими чувствами,— напримѣръ, преобладаніе линейнаго протяженія прямой, совершенная форма сферы,— все это не имѣетъ ни малѣйшаго значенія для геометріи, какъ таковой. Для вывода теоремъ совершенно не нужно насиловать свое воображеніе представленіемъ безко-

нечно убывающей матеріальной точки; какъ мы видѣли, ту же роль могутъ играть сферы сѣти или окружности въ связкѣ, если мы принимаемъ ихъ за точки. Болѣе того, мы можемъ теперь показать, что нѣтъ необходимости даже въ томъ, чтобы точки представляли собой пространственные объекты: онѣ могутъ даже не находиться ни въ какой связи съ пространствомъ, если мы умѣемъ развить аналитическую геометрію строго формально, какъ геометрію трехмѣрнаго линейнаго численнаго многообразія. Знанія аналитической геометріи мы здѣсь, однако, не предполагаемъ; напротивъ, читатель, не знакомый еще съ этой областью математики, представляетъ для насъ даже нѣкоторое преимущество, такъ какъ онъ будетъ вынужденъ строго придерживаться опредѣленій, между тѣмъ какъ лицо, освѣдомленное въ аналитической геометріи, можетъ безсознательно воспользоваться своими познаніями и сдѣлать выводы, которые изъ нашихъ опредѣленій вовсе не вытекаютъ.

**2.** Подъ „точкой" мы будемъ здѣсь разумѣть любую совокупность трехъ вещественныхъ чиселъ, написанныхъ въ опредѣленной послѣдовательности; двѣ точки $(a, b, c)$ и $(a', b', c')$ мы будемъ считать тождественными только въ томъ случаѣ, если $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$. Подъ „плоскостью" мы будемъ разумѣть совокупность всѣхъ „точекъ", т. е. совокупность всѣхъ возможныхъ числовыхъ комбинацій $x$, $y$, $z$ (по три въ каждой), удовлетворяющихъ уравненію первой степени

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

съ численными коэффиціентами $A$, $B$, $C$, $D$, которые совмѣстно не обращаются въ нуль. Рѣшенія этого „уравненія плоскости" не мѣняются, если мы умножимъ обѣ его части на какое-либо число. Двѣ плоскости, которыя имѣютъ однѣ и тѣ же точки, мы считаемъ тождественными; ихъ уравненія могутъ отличаться другъ отъ друга развѣ только численнымъ множителемъ. Наконецъ, подъ „прямой" мы будемъ разумѣть совокупность точекъ, принадлежащихъ двумъ плоскостямъ; тройныя комбинаціи чиселъ $(x, y, z)$, которыя представляютъ эти точки, удовлетворяютъ, слѣдовательно, двумъ уравненіямъ первой степени. Пусть

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ \text{и} \quad f_2(x,y,z) &= A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

будутъ уравненія прямой $g$, а $(x', y', z')$ пусть будетъ точка этой прямой. Въ такомъ случаѣ не только $f_1(x',y',z') = 0$ и $f_2(x',y',z') = 0$, но и

$$\varkappa f_1(x',y',z') + \lambda f_2(x',y',z') = 0 \tag{2}$$

при любыхъ значеніяхъ чиселъ $\varkappa$ и $\lambda$. Каждое рѣшеніе системы (1) удовлетворяетъ также уравненію (2); въ виду того, что это также есть уравненіе первой степени, это означаетъ, что каждая прямая принадлежитъ безчисленному множеству различныхъ плоскостей [64]). Чтобы плоскость

$$\varkappa f_1(x,y,z)+\lambda f_2(x,y,z)=0 \qquad (3)$$

„проходила черезъ опредѣленную точку $(a,\ b,\ c)$“, т. е. содержала эту точку, необходимо, чтобы

$$\varkappa f_1(a,b,c)+\lambda f_2(a,b,c)=0,$$

откуда

$$\varkappa=-\omega f_2(a,b,c),\quad \lambda=\omega f_1(a,b,c),$$

гдѣ $\omega$ есть коэффиціентъ пропорціональности, который остается произвольнымъ. Если мы подставимъ эти значенія въ уравненіе (3), то получимъ уравненіе плоскости

$$f_1(x,y,z)f_2(a,b,c)-f_2(x,y,z)f_1(a,b,c)=0, \qquad (4)$$

которая не только содержитъ прямую $g$, но и точку $(a,b,c)$. Это уравненіе обращается въ тождество $0=0$, если $f_1(a,b,c)=0$ и $f_2(a,b,c)=0$, т. е. если точка $(a,b,c)$ принадлежитъ прямой $g$. Мы можемъ, такимъ образомъ, сказать: черезъ прямую и точку, внѣ ея лежащую, можно „провести плоскость“.

**3.** При помощи безчисленнаго множества плоскостей, проходящихъ черезъ прямую $g$, опредѣляющая ее пара уравненій можетъ быть приведена къ очень наглядному виду. Если прямая $g$ была первоначально задана уравненіями (1), и $(x',y',z')$ есть одна изъ ея точекъ, то каждое рѣшеніе системы $f_1(x,y,z)=0$ и $f_2(x,y,z)=0$ удовлетворяетъ также уравненіямъ

$$f_1(x,y,z)-f_1(x',y',z')=0,\quad f_2(x,y,z)-f_2(x',y',z')=0$$

и обратно, такъ что уравненія

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(x,y,z)&=f_1(x,y,z)-f_1(x',y',z')=A_1(x-x')+B_1(y-y')\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+C_1(z-z')=0\\\varphi_2(x,y,z)&=f_2(x,y,z)-f_2(x',y',z')=A_2(x-x')+B_2(y-y')\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+C_2(z-z')=0\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

также опредѣляютъ прямую $g$. Съ другой стороны, прямая $g$ содержится также въ плоскостяхъ

$$\begin{aligned}e_1(x,y,z)&=\varkappa_1\varphi_1(x,y,z)+\varkappa_2\varphi_2(x,y,z)=0,\\e_2(x,y,z)&=\lambda_1\varphi_1(x,y,z)+\lambda_2\varphi_2(x,y,z)=0,\end{aligned} \qquad (6)$$

---

[64]) Или иначе, каждая плоскость, выражаемая уравненіемъ вида (2), содержитъ прямую (1).

гдѣ $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ обозначаютъ произвольныя числа; эти плоскости навѣрное могутъ служить для опредѣленія прямой $g$, если и обратно $\varphi_1$ и $\varphi_2$ могутъ быть выражены изъ равенства (6) черезъ $e_1$ и $e_2$, т. е. если опредѣлитель $\varkappa_1\lambda_2 - \varkappa_2\lambda_1$, который мы будемъ обозначать символомъ

$$\varkappa_1\lambda_2 - \varkappa_2\lambda_1 = (\varkappa, \lambda) = -(\lambda_1\varkappa_2 - \lambda_2\varkappa_1) = -(\lambda, \varkappa), \tag{7}$$

не обращается въ нуль[65]).

Теперь возьмемъ частныя значенія:

$$\varkappa_1 = -C_2, \ \varkappa_2 = +C_1; \ \lambda_1 = -B_2, \ \lambda_2 = +B_1; \ \mu_1 = -A_2, \ \mu_2 = +A_1,$$

изъ которыхъ послѣдняя пара отвѣчаетъ третьей плоскости

$$e_3(x, y, z) = \mu_1\varphi_1(x, y, z) + \mu_2\varphi_2(x, y, z) = 0.$$

При помощи простого вычисленія мы получимъ, пользуясь символическимъ обозначеніемъ (7):

$$\begin{aligned} (C, A)(x - x') - (B, C)(y - y') &= 0, \\ (A, B)(x - x') - (B, C)(z - z') &= 0, \\ (A, B)(y - y') - (C, A)(z - z') &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Эти уравненія попарно опредѣляютъ прямую $g$, если опредѣлители $(\varkappa, \lambda)$, $(\lambda, \mu)$, $(\mu, \varkappa)$, или $-(B, C)$, $-(A, B)$, $-(C, A)$ отличны отъ нуля. Если бы эти опредѣлители были всѣ три равны нулю, то мы бы имѣли:

$$A_2 = \varepsilon A_1, \quad B_2 = \varepsilon B_1, \quad C_2 = \varepsilon C_1,$$

гдѣ $\varepsilon$ есть коэффиціентъ пропорціональности, т. е. плоскости (5) были бы тождественны, что́ не имѣетъ мѣста. Поэтому, по крайней мѣрѣ, одно изъ чиселъ $(A, B)$, $(B, C)$, $(C, A)$ отлично отъ нуля; такимъ образомъ, уравненія (8) даютъ, по крайней мѣрѣ, одну пару, опредѣляющую прямую $g$; если мы къ этимъ двумъ уравненіямъ присоединимъ третье, то это не можетъ повредить дѣлу, потому что каждое рѣшеніе этихъ двухъ уравненій удовлетворяетъ также третьему. Изъ уравненій (8) прежде всего вытекаетъ

$$(x - x') : (y - y') = (B, C) : (C, A); \ (x - x') : (z - z') = (B, C) : (A, B);$$

$$(y - y') : (z - z') = (C, A) : (A, B),$$

если ни одинъ изъ опредѣлителей не обращается въ нуль; такимъ образомъ, мы получаемъ для прямой $g$ трехчленную пропорцію:

$$(x - x') : (y - y') : (z - z') = (B, C) : (C, A) : (A, B), \tag{9}$$

[65]) Если этотъ опредѣлитель отличенъ отъ нуля, то система уравненій

$$e_1(x, y, z) = 0, \ e_2(x, y, z) = 0$$

эквивалентна системѣ (2).

которой мы будемъ, однако, пользоваться и въ томъ случаѣ, когда не всѣ опредѣлители въ правой части отличны отъ нуля; именно, въ этомъ случаѣ мы отъ этой пропорціи снова перейдемъ къ опредѣленной системѣ уравненій (8)[66]. Во всѣхъ случаяхъ уравненія (9) опредѣляютъ, такимъ образомъ, нашу прямую, проходящую черезъ точку $(x', y', z')$; и, обратно, каждой системѣ уравненій

$$(x-x'):(y-y'):(z-z')=a:b:c \tag{10}$$

отвѣчаетъ прямая, если три числа $a, b, c$ не обращаются совмѣстно въ нуль, и прямая эта проходитъ черезъ точку $(x', y', z')$. Отсюда слѣдуетъ, что черезъ двѣ точки $(x', y', z')$ и $(x'', y'', z'')$ всегда проходитъ одна и только одна прямая. Въ самомъ дѣлѣ, подставляя $x'', y'', z''$ въ уравненіе (10), мы получаемъ соотвѣтствующее нашей прямой трехчленное отношеніе: $a:b:c=(x''-x'):(y''-y'):(z''-z')$, и „уравненіе" нашей прямой, какъ мы будемъ выражаться короче, приметъ видъ:

$$(x-x'):(y-y'):(z-z')=(x''-x'):(y''-y'):(z''-z'). \tag{11}$$

**4.** Такъ какъ мы можемъ раздѣлить уравненіе плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{12}$$

на одинъ изъ коэффиціентовъ, то оно по существу содержитъ только 3 постоянныхъ. Эти постоянныя мы можемъ опредѣлить, если даны три точки $(x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z''')$, расположенныя въ этой плоскости. Можно, напримѣръ, опредѣлить отношеніе $A:D, B:D, C:D$ изъ уравненій:

$$\begin{aligned} Ax' + By' + Cz' + D &= 0, \\ Ax'' + By'' + Cz'' + D &= 0, \\ Ax''' + By''' + Cz''' + D &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Эти уравненія не опредѣляютъ однозначно неизвѣстныхъ отношеній только въ томъ случаѣ, если (извѣстные) коэффиціенты одного изъ этихъ уравненій выражаются одной и той же линейной зависимостью черезъ коэффиціенты каждаго изъ двухъ другихъ уравненій:

$$x'''=\varkappa x'+\lambda x'',\ y'''=\varkappa y'+\lambda y'',\ z'''=\varkappa z'+\lambda z'',\ 1=\varkappa+\lambda. \tag{14}$$

Но отсюда $x'''-x'=(\varkappa-1)x'+\lambda x''=\lambda(x''-x')$, такъ что:

$$(x'''-x'):(y'''-y'):(z'''-z')=(x''-x'):(y''-y'):(z''-z'),$$

[66]) Если бы, напримѣръ, $(A, B)=0$, то пропорція

$$(x-x'):(z-z')=(B, C):(A, B)$$

потеряла бы смыслъ; но мы ее замѣнили бы вторымъ уравненіемъ (8).

т. е. точка $(x''', y''', z''')$ лежитъ на прямой, проходящей черезъ точки $(x', y', z')$ и $(x'', y'', z'')$:

$$(x - x') : (y - y') : (z - z') = (x'' - x') : (y'' - y') : (z'' - z').$$

Итакъ, три точки, не лежащія на одной прямой, всегда опредѣляютъ плоскость, ибо при этихъ условіяхъ уравненія (13), служащія для опредѣленія отношеній $A : D$, $B : D$, $C : D$, другъ отъ друга не зависятъ.

**5.** Мы такимъ образомъ убѣждаемся, что наши основные образы обладаютъ всѣми тѣми свойствами обыкновенныхъ точекъ, прямыхъ и плоскостей, которыя касаются опредѣленія этихъ образовъ по даннымъ элементамъ, а также общихъ элементовъ двухъ образовъ (см. § 8, I). Теперь нужно еще присвоить „точкамъ“ нашихъ „прямыхъ“ понятіе „между“. Какъ извѣстно, расположеніе точекъ на прямой находитъ полное изображеніе въ рядѣ вещественныхъ чиселъ: число $z$ либо лежитъ „между“ двумя числами $a$, $b$ — тогда $a \leqq z \leqq b$ —, либо не лежитъ между ними; въ послѣднемъ случаѣ либо $z < a$, либо $z > b$. Соотношеніе „между“, такимъ образомъ, несомнѣнно имѣетъ мѣсто на прямой $x = 0$, $y = 0$, ибо точки этой прямой имѣютъ видъ $(0, 0, z)$, гдѣ $z$ пробѣгаетъ черезъ всѣ вещественныя значенія. Эту прямую мы будемъ называть „осью $z$-овъ“. Точно такъ же на оси $y$-овъ $x = 0$, $z = 0$ и на оси $x$-овъ $y = 0$, $z = 0$ понятіе „между“ опредѣляется „бо́льшимъ“ или „меньшимъ“ значеніемъ соотвѣтствующаго числа. Точки этихъ трехъ осей имѣютъ видъ $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, $(0, 0, z)$; мы можемъ поэтому установить соотвѣтствіе между точками этихъ трехъ прямыхъ такимъ образомъ, что отнесемъ другъ другу тѣ точки, въ которыхъ числа, отличныя отъ нуля, имѣютъ одинаковыя значенія. Этимъ устанавливается также соотвѣтствіе между расположеніями точекъ на трехъ прямыхъ: то, что въ этомъ отношеніи можно сказать относительно точекъ одной прямой, справедливо также относительно соотвѣтствующихъ точекъ другой прямой. Поэтому, чтобы установить требуемое расположеніе точекъ на прямой, отличной отъ этихъ трехъ осей, намъ остается только однозначно отобразить ее на одной изъ трехъ осей. Это достигается слѣдующимъ (предварительнымъ) опредѣленіемъ: Точка $Q = (x, y, z)$ нѣкоторой прямой лежитъ „между“ двумя другими ея точками $P_1 = (a_1, b_1, c_1)$ и $P_2 = (a_2, b_2, c_2)$, если

точка $(x, 0, 0)$ лежитъ между точками $(a_1, 0, 0)$ и $(a_2, 0, 0)$,
„ $(0, y, 0)$ „ „ „ $(0, b_1, 0)$ и $(0, b_2, 0)$,
„ $(0, 0, z)$ „ „ „ $(0, 0, c_1)$ и $(0, 0, c_2)$;

при этомъ принимается, что относительно точки $Q$ на оси можно сказать, что она лежитъ между $Q$ и $Q$. Эти условія не независимы одно отъ другого. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ уравненіе прямой можно представить въ двоякомъ видѣ:

$$(x-a_1):(y-b_1):(z-c_1)=(a_2-a_1):(b_2-b_1):(c_2-c_1) \quad \text{и}$$
$$(x-a_2):(y-b_2):(z-c_2)=(a_1-a_2):(b_1-b_2):(c_1-c_2),$$

то

$$\frac{x-a_1}{x-a_2}=\frac{y-b_1}{y-b_2}=\frac{z-c_1}{z-c_2}=\lambda_3, \tag{15}$$

гдѣ „параметръ“ $\lambda_3$ можетъ, очевидно, принимать всѣ вещественныя значенія, кромѣ $\lambda_3=1$; при $\lambda_3=1$ мы бы имѣли $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, $c_1=c_2$, что, разумѣется, противорѣчитъ предположенію, что $P_1$ и $P_2$ суть двѣ различныя точки. Обратно, каждому вещественному значенію числа $\lambda_3$ (кромѣ $\lambda_3=1$) отвѣчаетъ точка прямой $P_1P_2$. Въ частности, мы должны допустить также значеніе $\lambda_3=\infty$.

Если теперь точка $Q$ лежитъ между точками $P_1$ и $P_2$ въ смыслѣ приведеннаго опредѣленія, то въ каждой изъ трехъ паръ разностей

$$x-a_1 \text{ или } x-a_2;\ y-b_1 \text{ или } y-b_2;\ z-c_1 \text{ или } z-c_2$$

одна необходимо имѣетъ положительное, другая отрицательное значеніе; поэтому и $\lambda_3$ имѣетъ отрицательное значеніе. Обратно, если $\lambda_3$ имѣетъ отрицательное значеніе, то предыдущія разности имѣютъ попарно противоположные знаки. Напротивъ, если точка $Q$ не лежитъ между точками $P_1$ и $P_2$, то тѣ же разности имѣютъ попарно одинаковые знаки, такъ что $\lambda_3$ имѣетъ положительное значеніе. Итакъ, точка $Q$ лежитъ между точками $P_1$ и $P_2$ или не лежитъ между ними, смотря по тому, имѣетъ ли параметръ $\lambda_3$ отрицательное значеніе или положительное.

Совокупность всѣхъ точекъ прямой, расположенныхъ между точками $P_1$ и $P_2$, называется „отрѣзкомъ“ $\overline{P_1P_2}$, точки $P_1$ и $P_2$ называются „конечными точками“ отрѣзка $\overline{P_1P_2}$, остальныя точки прямой лежатъ на „продолженіяхъ“ отрѣзка $\overline{P_1P_2}$.

Изъ уравненій (15) мы получаемъ такъ называемое „параметрическое“ выраженіе точекъ прямой:

$$x_3=\frac{a_1-\lambda_3 a_2}{1-\lambda_3},\quad y_3=\frac{b_1-\lambda_3 b_2}{1-\lambda_3},\quad z_3=\frac{c_1-\lambda_3 c_2}{1-\lambda_3}, \tag{16}$$

изъ котораго вновь легко усмотрѣть, что параметръ $\lambda_3$ не можетъ равняться 1. Точно такъ же въ формѣ

$$x_1=\frac{a_2-\lambda_1 a_3}{1-\lambda_1},\quad y_1=\frac{b_2-\lambda_1 b_3}{1-\lambda_1},\quad z_1=\frac{c_2-\lambda_1 c_3}{1-\lambda_1}$$

и

$$x_2=\frac{a_3-\lambda_2 a_1}{1-\lambda_2},\quad y_2=\frac{b_3-\lambda_2 b_1}{1-\lambda_2},\quad z_2=\frac{c_3-\lambda_2 c_1}{1-\lambda_2} \tag{16'}$$

выражаются точки прямыхъ $P_2P_3$ и $P_3P_1$, гдѣ $P_3=(a_3, b_3, c_3)$ есть точка, не принадлежащая прямой $P_1P_2$.

Три точки $P_1$, $P_2$, $P_3$ образуютъ „треугольникъ“, отрѣзки $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_1}$ его „стороны“.

Пусть $S_1$, $S_2$, $S_3$ будутъ точки пересѣченія прямыхъ $P_2P_3$, $P_3P_1$, $P_1P_2$ съ нѣкоторой прямой, которая расположена въ плоскости треугольника $\eta$ и служитъ пересѣченіемъ послѣдней съ другой вспомогательной плоскостью

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Системы чиселъ, представляющія собой точки $S_1$, $S_2$, $S_3$, имѣютъ видъ (16) или (16′) и должны удовлетворять уравненію вспомогательной плоскости. Мы получаемъ такимъ образомъ по одному линейному уравненію для опредѣленія параметровъ $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$[67]); мы найдемъ:

$$\begin{aligned}\lambda_1&=\frac{Aa_2+Bb_2+Cc_2+D}{Aa_3+Bb_3+Cc_3+D},\\ \lambda_2&=\frac{Aa_3+Bb_3+Cc_3+D}{Aa_1+Bb_1+Cc_1+D},\\ \lambda_3&=\frac{Aa_1+Bb_1+Cc_1+D}{Aa_2+Bb_2+Cc_2+D},\end{aligned}\tag{17}$$

и отсюда получимъ очень важное соотношеніе:

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1.\tag{18}$$

Это соотношеніе представляетъ собой аналитическое выраженіе извѣстной теоремы Менелая, но на этомъ мы не будемъ останавливаться. Мы воспользуемся этимъ соотношеніемъ только для доказательства „аксіомы расположенія въ плоскости“ (Гильбертъ), которую мы приводили выше (§ 8, $\mathrm{II}_4$). **Прямая, расположенная въ плоскости треугольника, либо встрѣчаетъ двѣ его стороны (не продолженія ихъ), либо не встрѣчаетъ ни одной.** Въ самомъ дѣлѣ, въ виду соотношенія (18) изъ трехъ параметровъ $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ либо два имѣютъ отрицательныя значенія, либо ни одинъ.

Этимъ доказано предложеніе $\mathrm{II}_4$, а вмѣстѣ съ тѣмъ всѣ предложенія I и II въ § 8.

**6.** Мы переходимъ теперь къ конгруэнтности. Два отрѣзка мы будемъ называть конгруэнтными, если они имѣютъ одинаковую „длину“,

---

[67]) Каждая точка прямой $P_1P_2$ выражается уравненіями (16), въ которыхъ $\lambda_3$ имѣетъ соотвѣтствующее значеніе. Если мы хотимъ опредѣлить то значеніе параметра $\lambda_3$, которое отвѣчаетъ точкѣ пересѣченія прямой $P_1P_2$ съ прямой $s$, то мы должны принять во вниманіе, что соотвѣтствующія значенія $x_3$, $y_3$, $z_3$ удовлетворяютъ уравненію вспомогательной плоскости

$$Ax+By+Cz=D;$$

подставляя ихъ сюда, мы получимъ значеніе $\lambda_3$. Такимъ же образомъ получимъ значенія параметровъ $\lambda_2$ и $\lambda_1$, соотвѣтствующія точкамъ пересѣченія прямыхъ $P_1P_3$ и $P_3P_1$ съ прямой $s$.

а два угла мы будемъ называть конгруэнтными, если они имѣютъ одинаковое „измѣреніе"; то и другое понятіе намъ еще предстоитъ установить. Отрѣзку, имѣющему конечныя точки $(x, y, z)$ и $(x', y', z')$, мы отнесемъ положительное число $l$, опредѣляемое формулой

$$l = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}, \qquad (19)$$

которое мы и будемъ называть его „длиной". Число это не мѣняется, если мы замѣнимъ его крайнія точки другъ другомъ; „длину" отрѣзка мы будемъ также называть „разстояніемъ" его концовъ.

Тригонометрическихъ функцій мы, конечно, не можемъ здѣсь ввести обыкновеннымъ способомъ; напротивъ, мы опредѣлимъ ихъ совершенно независимо отъ какихъ бы то ни было геометрическихъ соображеній показательнымъ рядомъ (т. I, § 123):

$$2\cos\varphi = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}, \quad 2i\sin\varphi = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Двумъ отрѣзкамъ $\overline{P_1P_2} = d_2$ и $\overline{P_1P_3} = d_3$, выходящимъ изъ общей точки $P_1(a_1, b_1, c_1)$ и имѣющимъ конечныя точки $P_2 = (a_2, b_2, c_2)$ и $P_3 = (a_3, b_3, c_3)$, мы при помощи формулы

$$d_2 d_3 \cos\varphi_1 = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) + (b_2 - b_1)(b_3 - b_1) + (c_2 - c_1)(c_3 - c_1) \qquad (20)$$

и добавочнаго условія $\varphi_1 \leqq \pi$ однозначно отнесемъ уголъ или, вѣрнѣе, отвлеченное число $\varphi_1$, которое мы назовемъ „угломъ между этими двумя отрѣзками"; $\varphi_1$ называется также числомъ, измѣряющимъ этотъ уголъ. Однако, придерживаясь этой терминологіи, не нужно придавать этимъ выраженіямъ никакого содержанія помимо того, которое въ нихъ вложено опредѣленіемъ[68]). Косинусъ угла $\varphi_1$, какъ и въ обыкновенной тригонометріи, представляетъ собой правильную дробь, которая можетъ принимать всѣ значенія отъ $-1$ до $+1$; въ самомъ дѣлѣ, его числитель $Z$ по абсолютной величинѣ не превышаетъ знаменателя $N$, ибо, если мы въ тождествѣ

$$(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2) - (A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2)^2$$
$$= (A_1B_2 - A_2B_1)^2 + (B_1C_2 - B_2C_1)^2 + (C_1A_2 - C_2A_1)^2$$

положимъ

$$A_1 = a_2 - a_1, \; B_1 = b_2 - b_1, \; C_1 = c_2 - c_1,$$
$$A_2 = a_3 - a_1, \; B_2 = b_3 - b_1, \; C_2 = c_3 - c_1,$$

то получимъ для разности $N^2 - Z^2$ сумму трехъ квадратовъ, которая не можетъ имѣть отрицательныхъ значеній, а потому $N^2 - Z^2 \geqq 0$, $N \geqq Z$.

---

[68]) Иными словами, при указанномъ въ текстѣ заданіи точекъ $P_1, P_2, P_3$ мы подъ угломъ $P_1P_2P_3$ будемъ разумѣть не что иное, какъ число $\varphi_1$, опредѣляемое уравненіемъ (20).

Если мы напишемъ уравненія двухъ прямыхъ, на которыхъ лежатъ наши отрѣзки:

$$(x-a_1):(y-b_1):(z-c_1)=u_2:v_2:w_2,$$
$$(x-a_1):(y-b_1):(z-c_1)=u_3:v_3:w_3,$$

при чемъ первая прямая проходитъ, скажемъ, черезъ точку $(a_2, b_2, c_2)$, а вторая черезъ точку $(a_3, b_3, c_3)$, то

$$u_2:v_2:w_2=(a_2-a_1):(b_2-b_1):(c_2-c_1),$$
$$u_3:v_3:w_3=(a_3-a_1):(b_3-b_1):(c_3-c_1),$$

такъ что

$$\varkappa u_2=a_2-a_1,\quad \varkappa v_2=b_2-b_1,\quad \varkappa w_2=c_2-c_1,$$
$$\lambda u_3=a_3-a_1,\quad \lambda v_3=b_3-b_1,\quad \lambda w_3=c_3-c_1,$$

гдѣ $\varkappa$ и $\lambda$ суть коэффиціенты пропорціональности. Вставляя эти выраженія въ уравненія (20), получимъ:

$$\cos\varphi_1=\pm\frac{u_2u_3+v_2v_3+w_2w_3}{\sqrt{u_2^2+v_2^2+w_2^2}\,\sqrt{u_3^2+v_3^2+w_3^2}}.$$

Хотя коэффиціенты $\varkappa$ и $\lambda$ здѣсь опять исчезли, но двойной знакъ остается въ силѣ, потому что корни должны быть здѣсь взяты съ такими знаками, чтобы длины $d_2$ и $d_3$, фигурирующія въ равенствѣ (20), имѣли положительныя значенія; такъ, напримѣръ, радикалъ

$$\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2}=\sqrt{\varkappa^2(u_2^2+v_2^2+w_2^2)}$$

при отрицательномъ $\varkappa$ нужно взять въ такомъ видѣ:

$$-\varkappa\sqrt{u_2^2+v_2^2+w_2^2}.$$

Итакъ, двѣ прямыя опредѣляютъ два дополнительныхъ угла, а два отрѣзка — только одинъ уголъ, при условіи, что углы считаются не выше $\pi$.

Именно, чтобы получить, такимъ образомъ, однозначное опредѣленіе угла, мы ограничили его значеніе въ формулѣ (20).

**7.** Чтобы вычислить теперь треугольникъ, опредѣляемый тремя точками

$$P_1=(a_1, b_1, c_1),\quad P_2=(a_2, b_2, c_2),\quad P_3=(a_3, b_3, c_3),$$

мы положимъ:

$$\sphericalangle P_3P_1P_2=\varphi_1,\quad \sphericalangle P_1P_2P_3=\varphi_2,\quad \sphericalangle P_2P_3P_1=\varphi_3,$$
$$\overline{P_2P_3}=d_1,\ \overline{P_3P_1}=d_2,\ \overline{P_1P_2}=d_3.$$

Въ виду соотношенія (20):

$$
\begin{aligned}
d_1 d_2 \cos\varphi_3 &= (a_1 - a_3)(a_2 - a_3) + (b_1 - b_3)(b_2 - b_3) + (c_1 - c_3)(c_2 - c_3), \\
d_2 d_3 \cos\varphi_1 &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) + (b_2 - b_1)(b_3 - b_1) + (c_2 - c_1)(c_3 - c_1), \quad (21) \\
d_3 d_1 \cos\varphi_2 &= (a_3 - a_2)(a_1 - a_2) + (b_3 - b_2)(b_1 - b_2) + (c_3 - c_2)(c_1 - c_2),
\end{aligned}
$$

гдѣ

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \sqrt{(a_2 - a_3)^2 + (b_2 - b_3)^2 + (c_2 - c_3)^2}, \\
d_2 &= \sqrt{(a_3 - a_1)^2 + (b_3 - b_1)^2 + (c_3 - c_1)^2}, \qquad (22) \\
d_3 &= \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2}.
\end{aligned}
$$

Складывая уравненія (21) попарно, мы получимъ:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= d_2 \cos\varphi_3 + d_3 \cos\varphi_2, \\
d_2 &= d_3 \cos\varphi_1 + d_1 \cos\varphi_3, \qquad (23) \\
d_3 &= d_1 \cos\varphi_2 + d_2 \cos\varphi_1.
\end{aligned}
$$

Опредѣляя теперь изъ первыхъ двухъ уравненій (23) $\cos\varphi_2$ и $\cos\varphi_1$ и подставляя въ третье, мы получимъ:

$$
d_3^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2 d_1 d_2 \cos\varphi_3 . \qquad (24)
$$

Это есть такъ называемая „теорема косинусовъ" элементарной тригонометріи. При $\varphi_3 = \frac{1}{2}\pi$ мы получаемъ отсюда, какъ частный случай, теорему Пиѳагора; формулы (23) опредѣляютъ въ этомъ случаѣ $\cos\varphi_2$ и $\cos\varphi_3$ по отношеніямъ сторонъ прямоугольнаго треугольника.

Простое слѣдствіе теоремы косинусовъ представляетъ собой теорема синусовъ. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $\sin^2\varphi_3 = 1 - \cos^2\varphi_3$, то соотношеніе (24) даетъ:

$$
\begin{aligned}
4 d_1^2 d_2^2 \sin^2\varphi_3 &= 4 d_1^2 d_2^2 - (d_3^2 - d_1^2 - d_2^2)^2 \\
&= (2 d_1 d_2 - d_3^2 + d_1^2 + d_2^2)(2 d_1 d_2 + d_3^2 - d_1^2 - d_2^2) \\
&= ((d_1 + d_2)^2 - d_3^2)(d_3^2 - (d_1 - d_2)^2) = 16 \Delta^2,
\end{aligned}
$$

гдѣ мы, для сокращенія, положили

$$
d_1 + d_2 + d_3 = 2s \qquad (25)
$$

и

$$
\Delta = \sqrt{s(s - d_1)(s - d_2)(s - d_3)}. \qquad (26)
$$

Такимъ образомъ,

$$
d_1 d_2 \sin\varphi_3 = d_2 d_3 \sin\varphi_1 = d_3 d_1 \sin\varphi_2 = 2\Delta, \qquad (27)
$$

при чемъ корень долженъ быть здѣсь взятъ съ положительнымъ знакомъ, такъ какъ уголъ, меньшій $\pi$, не можетъ имѣть отрицательнаго синуса.

Соотношеніе (27) есть не что иное, какъ теорема синусовъ плоской тригонометріи:

$$\sin\varphi_1 : \sin\varphi_2 : \sin\varphi_3 = d_1 : d_2 : d_3. \tag{28}$$

Если мы раздѣлимъ первое изъ уравненій (23) на одно изъ трехъ чиселъ $d$ и ихъ отношенія, по теоремѣ синусовъ (28), замѣнимъ отношеніями синусовъ соотвѣтствующихъ угловъ $\varphi$, то получимъ:

$$\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2\cos\varphi_3 + \cos\varphi_2\sin\varphi_3,$$

или, согласно теоремѣ сложенія,

$$\sin\varphi_1 = \sin(\varphi_2 + \varphi_3); \tag{29}$$

точно такъ же

$$\sin\varphi_2 = \sin(\varphi_3 + \varphi_1), \quad \sin\varphi_3 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2). \tag{30}$$

Такимъ образомъ, либо

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi, \tag{31}$$

*либо*

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 + \varphi_3, \\ \varphi_2 &= \varphi_3 + \varphi_1, \\ \varphi_3 &= \varphi_1 + \varphi_2, \end{aligned} \tag{32}$$

т. е. $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$; отсюда мы получили бы, однако, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$, такъ какъ всѣ углы имѣютъ положительныя значенія. Но тогда уравненія (23) даютъ: $d_1 + d_2 + d_3 = 0$, и опять, стало быть, $d_1 = d_2 = d_3 = 0$; это же невозможно, потому что соотношеніе $d_1 = 0$, напримѣръ, даетъ:

$$(a_2 - a_3)^2 + (b_2 - b_3)^2 + (c_2 - c_3)^2 = 0;$$

такъ какъ здѣсь всѣ три слагаемыя могутъ имѣть только положительныя значенія, то они всѣ должны обращаться въ нуль, т. е. точки $P_2$ и $P_3$ должны совпадать. Итакъ, изъ двухъ исключающихъ другъ друга допущеній (31) и (32) послѣднее неправильно, а потому: сумма угловъ въ треугольникѣ составляетъ два прямыхъ.

**8.** Уголъ треугольника вполнѣ опредѣляется своимъ косинусомъ, между тѣмъ какъ по данному синусу всегда отвѣчаютъ два угла, дополняющіе другъ друга до двухъ прямыхъ. Это сказывается при вычисленіи треугольника по даннымъ его сторонамъ или угламъ. Если треугольникъ опредѣляется данными элементами однозначно, то онъ „конгруэнтенъ" всякому другому треугольнику, въ которомъ эти элементы имѣютъ тѣ же значенія, т. е. треугольники имѣютъ одинаковыя стороны и одинаковые углы между соотвѣтственными сторонами; это мы примемъ здѣсь за опредѣленіе конгруэнтности. Этимъ путемъ мы должны, слѣдовательно, придти къ четыремъ предложеніямъ о конгруэнтности треугольниковъ. Прежде всего, если въ треугольникѣ даны двѣ стороны $d_1$ и $d_2$ и уголъ „между ними заключенный" $\varphi_3$, то мы сначала по теоремѣ косинусовъ опредѣлимъ однозначно положительное число $d_3$; затѣмъ мы опредѣлимъ $\cos\varphi_1$ и $\cos\varphi_2$, слѣдовательно, также $\varphi_1$, $\varphi_2$, однозначно при помощи той же теоремы, хотя этотъ именно способъ вычисленія не можетъ считаться наиболѣе удобнымъ. Первая теорема о конгруэнтности, такимъ образомъ, имѣетъ мѣсто въ нашей геометріи. Если даны сторона $d_3$ и два „прилежащихъ" угла $\varphi_1$ и $\varphi_2$, то двѣ другія стороны $d_1$ и $d_2$ опредѣляются проще всего по теоремѣ синусовъ, такъ какъ третій уголъ $\varphi_3 = \pi - \varphi_1 - \varphi_2$ извѣстенъ. Этимъ доказана вторая теорема о конгруэнтности треугольниковъ. Конгруэнтность двухъ треугольниковъ, имѣющихъ одинаковыя стороны, непосредственно очевидна, такъ какъ углы могутъ быть однозначно опредѣлены по теоремѣ косинусовъ. Для доказательства послѣдней теоремы о конгруэнтности треугольниковъ намъ нужна лемма, что въ треугольникѣ противъ большей стороны лежитъ большій уголъ. Если мы изъ второго уравненія (23) вычтемъ первое, то мы получимъ:

$$d_3(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) = -(1+\cos\varphi_3)(d_1 - d_2),$$

такъ что:

$$\frac{\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2}{d_1 - d_2} = -\frac{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi_3}{d_3}. \tag{33}$$

Правая часть этого равенства во всякомъ случаѣ имѣетъ отрицательное значеніе, такъ какъ въ дроби знаменатель $d_3$ всегда есть положительное число, а числитель представляетъ собой квадратъ. Если поэтому $d_1 > d_2$, то $\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2$ есть отрицательное число, а поэтому $\cos\varphi_2 > \cos\varphi_1$, т. е. $\varphi_1 > \varphi_2$, такъ какъ въ интервалѣ отъ 0 до $\pi$ съ возрастаніемъ угла косинусъ уменьшается. Наша лемма, такимъ образомъ, доказана. Если поэтому по даннымъ $d_1$, $d_2$ и $\varphi_1$ мы опредѣлимъ уголъ $\varphi_2$ при помощи теоремы синусовъ, то изъ двухъ возможныхъ угловъ, согласно нашей леммѣ, нужно взять острый уголъ, и треугольникъ такимъ образомъ опредѣляется однозначно. Итакъ, два треугольника конгруэнтны, если двѣ стороны и уголъ, противолежащій большей сторонѣ, одного треугольника равны тѣмъ же элементамъ другого треугольника.

**9.** Этимъ установлено, что въ нашей геометріи остаются въ силѣ всѣ теоремы о конгруэнтности. Намъ недостаетъ еще только характернаго предложенія Евклидовой геометріи, пятаго постулата: черезъ данную точку проходитъ одна и только одна прямая, расположенная съ данной прямой въ одной плоскости и не встрѣчающая ея.

Это предложеніе легче всего доказать, пользуясь соображеніями п. 5-го. Пусть $P_1P_2$ будетъ данная прямая, $S_1$—данная точка и $s$—параллель, которую намъ нужно провести. Мы будемъ называть двѣ прямыя въ плоскости параллельными, если онѣ не имѣютъ общихъ точекъ. Поэтому, чтобы прямая $s$ была параллельна прямой $P_1P_2$, выраженіе (16) для точки $S_3$ должно перестать существовать; какъ мы указали въ замѣчаніи къ уравненіямъ (15), это наступаетъ только въ томъ случаѣ, если $\lambda_3$ принимаетъ недопустимое для него значеніе 1. Такъ какъ точка $S_1$ дана, то, въ виду соотношеній (17), $\lambda_1 \gtrless 1$; далѣе, вслѣдствіе соотношенія (18) въ этомъ случаѣ $\lambda_1\lambda_2 = 1$, а потому $\lambda_2$ также не равно 1; этимъ устанавливается дѣйствительная точка $S_2$. Прямая $S_1S_2$ представляетъ собой, такимъ образомъ, единственную параллель къ прямой $P_1P_2$[69]). Формулы (16′), въ виду соотношенія $\lambda_1\lambda_2 = 1$, послѣ простого вычисленія даютъ:

$$x_2 - x_1 = -\frac{a_2 - a_1}{1-\lambda_1},\ y_2 - y_1 = -\frac{b_2 - b_1}{1-\lambda_1},\ z_2 - z_1 = -\frac{c_2 - c_1}{1-\lambda_1},$$

итакъ, прямая, проходящая черезъ точку $S_1 = (x_1, y_1, z_1)$ параллельно прямой

$$(x - a_1) : (y - b_1) : (z - c_1) = (a_2 - a_1) : (b_2 - b_1) : (c_2 - c_1), \qquad (34)$$

имѣетъ уравненіе:

$$(x - x_1) : (y - y_1) : (z - z_1) = (a_2 - a_1) : (b_2 - b_1) : (c_2 - c_1). \qquad (35)$$

[69]) Это разсужденіе, кажется, недостаточно ясно. Авторъ возвращается къ обозначеніямъ, принятымъ въ п. 5. Три точки $P_1$, $P_2$, $P_3$, не расположенныя на одной прямой, опредѣляютъ собой плоскость. Каждая точка $(x_3, y_3, z_3)$ на прямой $P_1P_2$ можетъ быть выражена уравненіями (16), гдѣ $\lambda_3$ есть опредѣленное число, отличное отъ 1; и обратно, при любомъ значеніи параметра $\lambda_3$, отличномъ отъ 1, уравненія (16) выражаютъ точку на прямой $P_1P_2$. Такимъ же образомъ уравненія (16′) выражаютъ точки прямыхъ $P_2P_3$ и $P_3P_1$. Если мы разсѣчемъ эти три прямыя четвертой прямой $s$, расположенной въ той же плоскости и именно представляющей собой сѣченіе этой плоскости съ плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (!)$$

то точки пересѣченія $S_1$, $S_2$, $S_3$ выразятся тѣми же уравненіями (16) и (16′), при чемъ параметры $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ будутъ имѣть значенія (17), которыя даютъ

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1. \qquad (!!)$$

Теперь авторъ ставитъ вопросъ такъ: положимъ, что точка $S_1$ намъ задана; при какихъ условіяхъ прямая, представляющая собой сѣченіе плоскости $P_1P_2P_3$ съ плоскостью (!) и проходящая черезъ точку $S_1$, будетъ параллельна прямой $P_1P_2$?

Чтобы прямая была параллельна прямой $P_1P_2$, необходимо и достаточно, чтобы точка $S_3$ не существовала, т. е. чтобы $\lambda_3 = 1$. Съ другой стороны, такъ какъ точка $S_1$ дана, то дано значеніе $\lambda_1$, отличное отъ 1. Но въ такомъ случаѣ соотношеніе (!!) даетъ однозначно значеніе $\lambda_2$, опредѣляетъ точку $S_2$, и, стало быть, требованію удовлетворяетъ одна и только одна прямая $S_1S_2$.

Наша цѣль, такимъ образомъ, достигнута. Дальнѣйшее развитіе элементарной геометріи уже не представляетъ никакихъ затрудненій, и потому мы этимъ здѣсь заниматься не будемъ. Въ заключеніе мы остановимся еще только на аналитическихъ предпосылкахъ предложенія о параллельности.

**10.** Прямая $s$ оказывается параллельной прямой $P_1P_2$, потому что при $\lambda_3 = 1$ выраженія, опредѣляющія точку $S_3$, принимаютъ видъ:

$$x_3 = \frac{a_1 - a_2}{0}, \; y_3 = \frac{b_1 - b_2}{0}, \; z_3 = \frac{c_1 - c_2}{0}.$$

Если, однако, мы дадимъ параметру $\lambda_3$ значеніе 1 не непосредственно, а будемъ давать ему значенія, постоянно возрастающія отъ 0 и неограниченно приближающіяся къ 1, то числа $x_3$, $y_3$, $z_3$ будутъ возрастать[70]) безпредѣльно. Въ предѣлѣ мы получаемъ, такимъ образомъ, безконечно большія „значенія" $x_\infty$, $y_\infty$, $z_\infty$ чиселъ $x_3$, $y_3$, $z_3$, которыя сохраняютъ, однако, конечныя отношенія:

$$x_\infty : y_\infty : z_\infty = (a_1 - a_2) : (b_1 - b_2) : (c_1 - c_2).$$

Если мы теперь расширимъ опредѣленіе точки въ томъ смыслѣ, что допустимъ также безконечно большія „значенія" чиселъ $x$, $y$, $z$, съ тѣмъ, однако, чтобы они сохраняли конечныя отношенія, и такого рода точки назовемъ „несобственными", то мы должны будемъ каждой прямой

$$(x - a_1) : (y - b_1) : (z - c_1) = (a_2 - a_1) : (b_2 - b_1) : (c_2 - c_1)$$

приписать одну и только одну несобственную точку $(x_\infty, y_\infty, z_\infty)$ и именно такъ, что

$$x_\infty : y_\infty : z_\infty = (a_2 - a_1) : (b_2 - b_1) : (c_2 - c_1).$$

Какъ непосредственно обнаруживаетъ заключительное предложеніе п. 9-го, двѣ прямыя будутъ въ этомъ случаѣ параллельны, если онѣ имѣютъ общую несобственную точку[71]).

Если $(x_3', y_3', z_3')$ и $(x_3'', y_3'', z_3'')$ суть двѣ собственныя точки прямой $P_1P_2$ съ параметрами $\lambda_3 = \varkappa'$ и $\lambda_3 = \varkappa''$, то простое вычисленіе даетъ:

$$x_3' - x_3'' = (a_1 - a_2)\varkappa, \; y_3' - y_3'' = (b_1 - b_2)\varkappa, \; z_3' - z_3'' = (c_1 - c_2)\varkappa,$$

гдѣ

$$\varkappa = (\varkappa' - \varkappa'') / (1 - \varkappa')(1 - \varkappa''),$$

такъ что

$$\sqrt{(x_3' - x_3'')^2 + (y_3' - y_3'')^2 + (z_3' - z_3'')^2} = \pm \varkappa d_3,$$

---

[70]) По абсолютной величинѣ.

[71]) См. дополненіе въ концѣ книги.

гдѣ $d_3$ имѣетъ значеніе, выражаемое формулой (22). Поэтому разстояніе точекъ $(x_3', y_3', z_3')$ и $(x_3'', y_3'', z_3'')$ возрастаетъ безпредѣльно, если параметръ $\varkappa'$ сохраняетъ постоянное значеніе, отличное отъ 1, а другой параметръ $\varkappa''$ возрастаетъ отъ 0 до 1; это значитъ: несобственная точка прямой имѣетъ безконечно большое разстояніе отъ каждой изъ собственныхъ ея точекъ.

Сущность понятія о несобственной точкѣ лучше всего выясняется, если опредѣляемъ точку не тремя, а четырьмя конечными дѣйствительными числами, при томъ, однако, соглашеніи, чтобы при вещественномъ значеніи множителя $\varrho$, отличномъ отъ 0, системы чиселъ $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $(\varrho x_1, \varrho x_2, \varrho x_3, \varrho x_4)$ представляли одну и ту же точку $x$, а числа $(0, 0, 0, 0)$ не представляли бы точки въ этой геометріи $\mathfrak{H}$. Плоскость и прямая опредѣляются, какъ въ геометріи $\mathfrak{G}$ предыдущихъ пунктовъ: плоскость — линейнымъ однороднымъ уравненіемъ

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0, \tag{36}$$

которое мы короче будемъ выражать символомъ $a(x) = 0$; коэффиціентами этого уравненія служатъ вещественныя числа, которыя не обращаются совмѣстно въ нуль; прямая опредѣляется, какъ совокупность точекъ, общихъ двумъ различнымъ плоскостямъ. Двѣ плоскости $a(x) = 0$ и $b(x) = 0$ считаютъ тождественными, если онѣ содержатъ тѣ же точки, т. е. если можно опредѣлить множитель $\varrho$ такимъ образомъ, что $a_1 = \varrho b_1$, $a_2 = \varrho b_2$, $a_3 = \varrho b_3$, $a_4 = \varrho b_4$. Условіе, чтобы двѣ плоскости не совпадали, можно формулировать такъ, что величины $(a, b)_{14}$, $(a, b)_{24}$, $(a, b)_{34}$ не должны быть равны нулю, гдѣ для краткости полагаемъ:

$$(a, b)_{hk} = a_hb_k - a_kb_h; \tag{37}$$

такъ какъ $(a, b)_{hh}$ равняется нулю тождественно, то мы можемъ сказать вообще: четыре величины $(a, b)_{1k}$, $(a, b)_{2k}$, $(a, b)_{3k}$, $(a, b)_{4k}$ (при произвольномъ $k$) не должны обращаться въ нуль совмѣстно. Точно такъ же двѣ точки $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $(y_1, y_2, y_3, y_4)$ различны, если четыре величины $(x, y)_{1k}$, $(x, y)_{2k}$, $(x, y)_{3k}$, $(x, y)_{4k}$ ни при какомъ $k$ не обращаются совмѣстно въ нуль. По двумъ различнымъ точкамъ $x$ и $y$ прямой $a(x) = 0$ и $b(x) = 0$ мы получаемъ безчисленное множество другихъ ея точекъ при помощи формулы:

$$z_h = x_h\varkappa + y_h\lambda, \quad h = (1, 2, 3, 4), \tag{38}$$

гдѣ коэффиціенты $\varkappa$ и $\lambda$ могутъ принимать всевозможныя конечныя значенія; въ самомъ дѣлѣ, совершенно ясно, что $a(z) = \varkappa\, a(x) + \lambda a(y) = 0$, $b(z) = \varkappa b(x) + \lambda b(y) = 0$, такъ какъ въ отдѣльности $a(x) = 0$, $a(y) = 0$, $b(x) = 0$, $b(y) = 0$. Формула (38) замѣняла бы, такимъ образомъ, параметрическое выраженіе прямой (16), если бы можно было обнаружить, что каждое общее рѣшеніе уравненій $a(z)=0$ и $b(z)=0$ при надлежащемъ выборѣ постоянныхъ $p$ и $q$ можетъ быть представлено формулой:

$$z_h = x_h p + y_h q \quad (h = 1, 2, 3, 4). \tag{39}$$

Но возможность рѣшить совмѣстныя уравненія

$$z_h = x_h p + y_h q,$$
$$z_k = x_k p + y_k q$$

относительно $p$ и $q$ зависитъ отъ того, обращается ли опредѣлитель $(x, y)_{h,k}$ въ нуль, или нѣтъ. Такъ какъ точки $x$, $y$ другъ отъ друга различны, то опредѣлители $(x, y)_{hk}$ не могутъ обращаться въ нуль при всѣхъ комбинаціяхъ указателей $h$, $k$. Положимъ поэтому, что опредѣлитель $(x, y)_{\alpha\beta}$ отличенъ отъ нуля. Тогда мы можемъ привести $z_\alpha$ и $z_\beta$ къ виду:

$$z_\alpha = x_\alpha p + y_\alpha q, \quad z_\beta = x_\beta p + y_\beta q. \tag{40}$$

Къ индексамъ $\alpha$, $\beta$ мы присоединимъ индексы $\gamma$, $\delta$ такимъ образомъ, чтобы числа $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ представляли нѣкоторую перестановку чиселъ 1, 2, 3, 4. Тогда изъ уравненій $a(z)=0$ и $b(z)=0$ вытекаетъ:

$$a(z)\, b_\mu - b(z)\, a_\mu = 0; \quad \mu = 1, 2, 3, 4$$

или подробно:

$$\left.\begin{aligned} &(a, b)_{1\mu} z_1 + (a, b)_{2\mu} z_2 + (a, b)_{3\mu} z_3 + (a, b)_{4\mu} z_4 = 0, \quad \text{или} \\ &(a,b)_{\alpha\mu} z_\alpha + (a, b)_{\beta\mu} z_\beta + (a,b)_{\gamma\mu} z_\gamma + (a, b)_{\delta\mu} z_\delta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Этимъ уравненіямъ удовлетворяютъ также $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ и $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$. Изъ нихъ въ виду соотношеній (40) вытекаетъ:

$$\begin{aligned} &((a, b)_{\alpha\mu} x_\alpha + (a, b)_{\beta\mu} x_\beta) p + ((a, b)_{\alpha\mu} y_\alpha + (a, b)_{\beta\mu} y_\beta) q \\ &\qquad + (a, b)_{\gamma\mu} z_\gamma + (a, b)_{\delta\mu} z_\delta = 0; \end{aligned}$$

а такъ какъ величины $x$ и $y$ сами также удовлетворяютъ уравненіямъ (41), то:

$$\begin{aligned} &-((a, b)_{\gamma\mu} x_\gamma + (a, b)_{\delta\mu} x_\delta) p - ((a, b)_{\gamma\mu} y_\gamma + (a, b)_{\delta\mu} y_\delta) q \\ &\qquad + (a, b)_{\gamma\mu} z_\gamma + (a, b)_{\delta\mu} z_\delta = 0, \end{aligned}$$

такъ что

$$(a, b)_{\gamma\mu} \{ z_\gamma - p x_\gamma - q y_\gamma \} + (a, b)_{\delta\mu} \{ z_\delta - p x_\delta - q y_\delta \} = 0.$$

Теперь, если $(a, b)_{\gamma\delta}$ не равно нулю, то полагая въ этомъ уравненіи $\mu = \delta$ или $\mu = \gamma$, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} z_\gamma &= p x_\gamma + q y_\gamma, \\ z_\delta &= p x_\delta + q y_\delta. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Съ другой стороны, такъ какъ равенство $(a,\ b)_{\gamma\delta}=0$, въ виду уравненій (41) (при $\mu=\delta$), влекло бы за собой уравненіе:

$$(a,\ b)_{\alpha\delta}z_\alpha+(a,\ b)_{\beta\delta}z_\beta=0,$$

которому должны также удовлетворять $x_\alpha$, $x_\beta$ и $y_\alpha$, $y_\beta$, то мы имѣли бы: $x_\alpha:x_\beta=y_\alpha:y_\beta$; это противорѣчитъ сдѣланному допущенію, что $(x,\ y)_{\alpha\beta}$ не равно нулю. Итакъ, соотношеніе $(a,\ b)_{\gamma\delta}=0$ не можетъ имѣть мѣста, и мы такимъ образомъ доказали, что всѣ точки прямой могутъ быть выражены по двумъ изъ нихъ въ формѣ:

$$z_h=x_hp+y_hq. \tag{43}$$

Мы отобразимъ теперь геометрію однородныхъ координатъ $\mathfrak{H}$ въ прежней неоднородной системѣ $\mathfrak{G}$, полагая:

$$\begin{aligned}
&\frac{z_1}{z_4}=x, \quad \frac{z_2}{z_4}=y, \quad \frac{z_3}{z_4}=z,\\
&\frac{x_1}{x_4}=x', \quad \frac{x_2}{x_4}=y', \quad \frac{x_3}{x_4}=z',\\
&\frac{y_1}{y_4}=x'' \quad \frac{y_2}{y_4}=y'', \quad \frac{y_3}{y_4}=z'';
\end{aligned} \tag{44}$$

здѣсь слѣва стоятъ координаты пространства $\mathfrak{H}$, справа — пространства $\mathfrak{G}$, такъ что смѣшать ихъ съ обозначеніями въ уравненіяхъ (16) и (16′) нельзя. Теперь выраженія (43) даютъ:

$$x=\frac{x_1p+y_1q}{x_4p+y_4q}=\left(\frac{x_1}{x_4}+\frac{y_1}{y_4}\,\frac{q}{p}\,\frac{y_4}{x_4}\right)\Big/\left(1+\frac{q}{p}\,\frac{y_4}{x_4}\right)=\frac{x'-\lambda x''}{1-\lambda},$$

гдѣ

$$\lambda=-\frac{q}{p}\,\frac{y_4}{x_4},$$

и однородное параметрическое выраженіе прямой принимаетъ прежній видъ:

$$x=\frac{x'-\lambda x''}{1-\lambda}, \quad y=\frac{y'-\lambda y''}{1-\lambda}, \quad z=\frac{z'-\lambda z''}{1-\lambda}.$$

Значенію параметра $\lambda=1$, которое мы прежде считали недопустимымъ, соотвѣтствуетъ теперь равенство $px_4+qy_4=0$, т. е. $z_4=0$. Иными словами: Въ геометріи $\mathfrak{G}$ значенію параметра $\lambda=1$ не отвѣчала собственная точка прямой; между тѣмъ въ геометріи $\mathfrak{H}$ этому значенію отвѣчаетъ та точка прямой, которая лежитъ въ плоскости $z_4=0$. Съ точки зрѣнія геометріи $\mathfrak{G}$ мы можемъ такимъ образомъ сказать: несобственнымъ точкамъ пространства $\mathfrak{G}$ отвѣчаютъ въ пространствѣ $\mathfrak{H}$ точки плоскости $z_4 = 0$; двѣ прямыя или плоскости въ пространствѣ $\mathfrak{G}$ параллельны, если онѣ пересѣкаются въ точкѣ или, соотвѣтственно, по прямой этой плоскости. Можно поэтому сказать, что несобственныя точки пространства $\mathfrak{G}$ образуютъ „несобственную" плоскость, которая съ каждой собственной плоскостью имѣетъ общую прямую — „несобственную" прямую этой плоскости. Такова современная „проективная" точка зрѣнія на параллелизмъ[72]).

## § 13. Сущность основныхъ понятій.

**1.** Первымъ и важнѣйшимъ результатомъ изложеннаго изслѣдованія является то, что евклидова геометрія не содержитъ никакого противорѣчія; въ самомъ дѣлѣ, мы обнаружили существованіе, по крайней мѣрѣ, одного многообразія, или комплекса, составленнаго изъ тройныхъ числовыхъ группъ, элементы котораго, будучи поставлены въ надлежащую другъ отъ друга зависимость, вполнѣ подходятъ подъ основныя опредѣленія и основныя предложенія евклидовой геометріи. Конечно, эти элементы, а вмѣстѣ съ тѣмъ и вся эта геометрія, не имѣютъ вовсе конкретнаго существованія; устанавливая понятіе „о длинѣ" и „объ углѣ", мы категорически указывали, что здѣсь подъ этими понятіями не нужно разумѣть рѣшительно ничего, кромѣ чиселъ, опредѣленнымъ образомъ отнесенныхъ къ другимъ числамъ. Но именно то обстоятельство, что обыкновенныхъ свойствъ ариѳметическихъ чиселъ оказалось достаточно, чтобы отобразить систему евклидовой геометріи такимъ образомъ, что каждое ея предложеніе остается въ силѣ въ этой геометріи чиселъ, и, обратно, каждое предложеніе ариѳметической геометріи можетъ быть перенесено въ пространство, именно это удостовѣряетъ, что основныя понятія и основныя положенія Евклидовой геометріи другъ съ другомъ вполнѣ совмѣстимы.

Установивъ отсутствіе противорѣчій въ евклидовой геометріи, мы тѣмъ самымъ устанавливаемъ правильность двухъ неевклидовыхъ геометрій, такъ какъ эти послѣднія только вмѣстѣ съ евклидовой геометріей остаются правильными или падаютъ: построенная въ сферической сѣти ариѳметической геометріи предыдущаго параграфа ни эллиптическая ни гиперболическая геометрія никогда не можетъ привести къ логическому противорѣчію. Такъ какъ, съ другой стороны, отсюда вытекаетъ, что постулатъ о параллельныхъ линіяхъ не представляетъ собой логическаго слѣдствія остальныхъ понятій и посылокъ геометріи, то намъ не покажется уже страннымъ, что та точка зрѣнія на

---

72) Еще разъ указываемъ, что къ выясненію этихъ идей мы еще возвратимся въ особомъ дополненіи въ концѣ книги.

параллелизмъ, которая, какъ мы выяснили въ предыдущемъ параграфѣ, установилась въ ученіи о перспективѣ и въ проективной геометріи, также оказывается логически допустимой. Согласно этой теоріи, параллельныя прямыя также имѣютъ точку пересѣченія, которая, однако, какъ „несобственная“ точка, принадлежитъ особенной плоскости пространства — „несобственной“ плоскости. На это, однако, можно либо смотрѣть только какъ на описательное выраженіе того факта, что точка пересѣченія въ дѣйствительности не существуетъ, либо же можно представлять себѣ „несобственную“ плоскость, какъ дѣйствительно существующую. Въ строго абстрактной геометріи такое выдѣленіе одной плоскости изъ всѣхъ остальныхъ представляетъ собой, конечно, актъ произвольный, но самъ по себѣ вполнѣ допустимый. Такъ какъ, съ другой стороны, эта особенная плоскость, какъ таковая, отъ остальныхъ плоскостей ничѣмъ не отличается, то мы можемъ сказать: съ точки зрѣнія на параллелизмъ, установившейся въ проективной геометріи, эллиптическая геометрія, въ которой всѣ плоскости, а также всѣ прямыя одной и той же плоскости всегда пересѣкаются другъ съ другомъ, представляетъ собой абстрактную основу параболической и гиперболической геометріи; въ самомъ дѣлѣ, путемъ введенія въ гиперболическую геометрію идеальныхъ точекъ и прямыхъ, мы достигаемъ того, что и въ этой геометріи всѣ плоскости и всѣ прямыя въ плоскости взаимно пересѣкаются.

Евклидова геометрія въ параболической сѣти даетъ возможность установить еще четвертую точку зрѣнія на геометрическую безконечность, также не содержащую внутренняго противорѣчія: здѣсь всѣмъ прямымъ и плоскостямъ отнесена одна общая точка на безконечности[73]). Параллелизмъ здѣсь опредѣляется, какъ и въ евклидовой геометріи, тѣмъ, что прямыя не пересѣкаются, при чемъ несобственная точка за точку пересѣченія не считается. Впрочемъ, на обыкновенное евклидово пространство можно также смотрѣть, какъ на предѣльный случай параболической сѣти, центръ которой уходитъ въ безконечность. Окружности и сферы при этомъ переходятъ въ „дѣйствительныя“ прямыя и плоскости.

**2.** То обстоятельство, что оказываются возможными (по крайней мѣрѣ) четыре совершенно различныя, даже противорѣчивыя точки зрѣнія на безконечность и на параллелизмъ, наводитъ на очень серьезныя размышленія. Въ самомъ дѣлѣ, кто станетъ теперь серьезно утверждать, что геометрія исключительно описываетъ „факты“ пространственнаго воспріятія? Развѣ, говоря о безконечно удаленныхъ элементахъ, мы не имѣемъ передъ собой чисто абстрактныхъ построеній, которыя остаются за предѣлами не только каждаго возможнаго опыта, но и всякаго вообще

[73]) Это общая точка, черезъ которую проходятъ всѣ сферы сѣти.

опыта, какой мы только можемъ себѣ представить; не обнаруживается ли здѣсь ясно, что не только представленія оказываютъ вліяніе на понятіе, но и обратно: понятіе оказываетъ свое вліяніе на наше представленіе? Это вопросы, которые настойчиво приходятъ въ голову каждому мыслящему человѣку. Прежде, чѣмъ мы рѣшимся дать отвѣты на эти вопросы, будетъ полезно нѣсколько обстоятельнѣе выяснить при помощи тѣхъ средствъ, которыя развиты въ § 12, что здѣсь затронуты также интересы чисто математическаго характера. Въ § 12, 1 мы показали высокое научное значеніе логическаго анализа нашихъ пространственныхъ представленій и чисто логическаго построенія геометріи. Оно заключается въ томъ, что предложенія геометріи, построенной строго формально, примѣнимы ко всякому линейному трехмѣрному многообразію, т. е. къ каждой системѣ объектовъ, которые находятся другъ съ другомъ соотвѣтственно въ такихъ же соотношеніяхъ, какъ точки, прямыя и плоскости. Выраженіе псевдо-точка, псевдо-прямая, псевдо-плоскость были термины, которыми мы пользовались во избѣжаніе смѣшенія съ обычными понятіями; будемъ ихъ называть теперь основными образами „нулевой", „первой", „второй" ступени, или, короче, $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$; самое многообразіе пусть будетъ $\mathfrak{G}_3$; слово „ступень" означаетъ здѣсь то же, что и измѣреніе. Основные образы нулевой ступени мы будемъ также называть элементами, какъ это принято въ ученіи о комплексахъ. Вся эта терминологія находитъ себѣ оправданіе въ томъ, что, помимо сферическихъ сѣтей, существуетъ еще безчисленное множество трехмѣрныхъ многообразій, какъ мы это сейчасъ обнаружимъ, такъ что точки, прямыя и плоскости могутъ быть разсматриваемы, какъ индивидуумы родовыхъ понятій $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$.

**3.** Изъ дидактическихъ соображеній представляется нецѣлесообразнымъ съ самаго начала развивать абстрактную геометрію, какъ геометрію трехмѣрныхъ линейныхъ многообразій, потому что самое понятіе это не дается непосредственнымъ представленіемъ, а предполагаетъ уже обыкновенную геометрію. Лишь тогда, когда обыкновенная геометрія развита уже настолько, что мы имѣемъ въ своемъ распоряженіи достаточно примѣровъ линейныхъ многообразій третьей ступени, мы можемъ освободить наши теоремы отъ обычныхъ точекъ, прямыхъ и плоскостей, которыя служатъ ихъ субстратомъ; мы можемъ показать, что образы $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ этихъ многообразій также удовлетворяютъ (Гильбертовымъ) аксіомамъ геометріи, а слѣдовательно, и логическимъ ихъ слѣдствіямъ; но съ этого момента геометрія должна уже развиваться совершенно абстрактно въ примѣненіи ко всѣмъ извѣстнымъ и мыслимымъ многообразіямъ.

Если, напримѣръ, обыкновенная геометрія строго абстрактно развита въ такой мѣрѣ, что мы владѣемъ уже теоріей сферической сѣти, то мы имѣемъ въ параболической сѣти первое переоблаченіе евклидовой геометріи (не включая сюда лишь ученія о безконечности [74]). Если мы далѣе назовемъ пары точекъ, окружности и сферы гиперболической и эллиптической сѣти псевдо-точками, псевдо-прямыми и псевдо-плоскостями и обнаружимъ, что онѣ удовлетворяютъ всѣмъ аксіомамъ Евклидовой геометріи, кромѣ аксіомы о параллельныхъ линіяхъ, то мы можемъ утверждать, не повторяя вновь никакихъ доказательствъ, что къ нимъ примѣнимы всѣ предложенія евклидовой геометріи, не зависящія отъ аксіомы о параллельности.

Далѣе, средствами проективной геометріи мы можемъ построить теорію кривыхъ второго порядка совершенно независимо отъ какихъ бы то ни было метрическихъ соображеній; эта теорія непосредственно распространяется на сферическія сѣти, если разсматривать послѣднія опять какъ псевдо-пространства. Изъ кривыхъ и поверхностей второго порядка этой псевдо-геометріи мы разсмотрѣли выше только псевдо-окружности и псевдо-сферы; гораздо интереснѣе, однако, общіе образы второго порядка, теорію которыхъ мы можемъ заимствовать изъ обыкновенной геометріи безъ малѣйшихъ доказательствъ. И, что особенно изящно, съ точки зрѣнія обыкновенной геометріи это оказываются кривыя и поверхности четвертаго порядка (циклиды), непосредственное изслѣдованіе которыхъ представляетъ большія затрудненія. Между тѣмъ, перенося на нихъ готовый матеріалъ, мы неожиданно пріобрѣтаемъ неизсякаемый источникъ геометрическаго познанія. Достаточно указать на ученіе о полюсахъ и полярахъ.

Такимъ образомъ, геометрію каждаго трехмѣрнаго линейнаго многообразія можно изучать съ двухъ совершенно различныхъ точекъ зрѣнія, постепенно переходя на практикѣ отъ одной къ другой, хотя по существу онѣ совершенно различны: мы можемъ разсматривать основные образы нулевой, первой и второй ступени $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ многообразія $\mathfrak{G}_3$ то какъ образы обыкновенной геометріи, и тогда они имѣютъ очень сложную природу, то какъ объекты, аналогичные точкамъ, прямымъ и плоскостямъ обыкновенной геометріи, удовлетворяющіе всѣмъ ея аксіомамъ; тогда и слѣдствія этихъ аксіомъ могутъ быть примѣнимы къ $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$. Такимъ образомъ, умственная работа, затраченная на построеніе чисто абстрактной геометріи, послужитъ неизсякаемымъ источникомъ новыхъ истинъ. Итакъ, не изъ пренебреженія къ творческой силѣ интуиціи, не изъ склонности къ разрушительной критикѣ или педантичной логикѣ, но изъ строго взвѣшенныхъ интересовъ нашей науки надо настаивать на строгой кодификаціи ея предпосылокъ, чтобы ея предло-

[74]) Если въ евклидову геометрію вводятся „безконечно удаленныя" точки, то онѣ заполняютъ „безконечно удаленную" плоскость; въ параболической же сѣти имѣется только одна „безконечно удаленная" точка (см. прим. 73).

женія сразу пріобрѣтали всю ту силу, которая имъ дѣйствительно принадлежитъ. Это—требованіе, которое, по Маху, принято называть „экономіей мышленія“.

**4.** Еще и по другой причинѣ представляется желательнымъ владѣть, такъ сказать, нѣсколькими геометрическими языками и развить нѣкоторую упругость нашего воображенія. Именно, въ геометріи трехмѣрнаго пространства имѣются задачи, которыя, по аналитическому своему характеру, скорѣе падаютъ въ область пространствъ четырехъ и большаго числа измѣреній. При этомъ въ первоначальной своей формѣ онѣ не поддаются синтетическому изслѣдованію, потому что мы не привыкли разсматривать евклидово пространство, какъ образъ третьей ступени въ четырехмѣрномъ пространствѣ. Между тѣмъ въ евклидовомъ пространствѣ имѣется много линейныхъ многообразій четырехъ и болѣе высокаго числа измѣреній. Наиболѣе извѣстно многообразіе всѣхъ сферъ: чтобы установить центръ сферы, должны быть даны его разстояніи отъ трехъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостей; радіусъ представляетъ собой четвертое численное заданіе. Итакъ, существуетъ четырехкратно-безконечное множество сферъ, т. е. элементы многообразія всѣхъ сферъ отличаются одинъ отъ другого четырьмя числовыми заданіями, которыя могутъ принимать всевозможныя вещественныя значенія. Всѣ сферы образуютъ, по этой причинѣ, четырехмѣрное многообразіе $\mathfrak{G}_4$. Это многообразіе линейное, т. е. каждые два образа $\mathfrak{G}_3$ (сѣти) опредѣляютъ одинъ образъ $\mathfrak{G}_2$ (связку); каждые три $\mathfrak{G}_3$ опредѣляютъ одно $\mathfrak{G}_1$ (пучекъ); наконецъ, каждые четыре $\mathfrak{G}_3$ одно $\mathfrak{G}_0$ (сферу). Иначе: каждые два $\mathfrak{G}_0$ опредѣляютъ одно $\mathfrak{G}_1$; каждые три $\mathfrak{G}_0$, не принадлежащіе одному $\mathfrak{G}_1$, устанавливаютъ одно $\mathfrak{G}_2$; наконецъ, четыре элемента, не принадлежащіе одному образу $\mathfrak{G}_2$, опредѣляютъ одно $\mathfrak{G}_3$. Аналогично опредѣляется принципъ линейности для многообразій пяти и болѣе высокаго числа измѣреній. Аналитически линейности многообразія соотвѣтствуетъ тотъ фактъ, что основные его образы въ координатахъ выражаются „линейными“ уравненіями, т. е. уравненіями первой степени.

Если мы наткнемся на задачу, которая (съ точки зрѣнія аналитической геометріи) приводитъ къ тому, чтобы разсматривать пространство точекъ, прямыхъ и плоскостей, какъ основной образъ третьей ступени въ четырехмѣрномъ линейномъ многообразіи, то достаточно перенести задачу на многообразіе сферъ — и мы будемъ въ состояніи подойти къ задачѣ чисто синтетически, сдѣлать ее наглядной. Однако, такой переходъ изъ одного многообразія въ другое допустимъ только въ томъ предположеніи, что оба многообразія подчиняются однимъ и тѣмъ же аксіомамъ и ихъ геометріи опираются исключительно на эти аксіомы; какъ только мы въ доказательствахъ допускаемъ мотивы, не имѣющіе чисто логическаго характера, то такого рода перенесеніе не можетъ а priori считаться законнымъ.

Что существуютъ геометрическія задачи, которыя удовлетворительно разрѣшаются лишь въ томъ случаѣ, когда мы ихъ переносимъ въ многообразіе болѣе высокаго числа измѣреній, въ этомъ мы уже имѣли случай убѣдиться на теоремѣ Дезарга (см. § 10, 1). Это предложеніе, отнесенное только къ треугольникамъ на плоскости, образуетъ основу синтетической геометріи плоскости. Но въ то время, какъ всѣ остальныя предложенія этой планиметріи могутъ быть доказаны средствами плоской геометріи и при томъ чисто синтетически, т. е. безъ пособія аксіомъ конгруэнтности,—найти такое доказательство для этого основного предложенія не удавалось; наконецъ, Гильбертъ въ своихъ „Основаніяхъ геометріи" (§ 23) обнаружилъ, что всѣ старанія въ этомъ направленіи необходимо должны остаться тщетными. Гильбертъ показалъ, что это предложеніе необходимо предполагаетъ либо пространственную геометрію, либо аксіомы конгруэнтности. Но такъ какъ аксіомы конгруэнтности противны духу чистаго синтеза[75]), то это планиметрическое предложеніе синтетически можетъ быть доказано только при помощи пространства трехъ измѣреній и именно посредствомъ простыхъ соображеній, изложенныхъ нами выше въ § 10, 1.

**5.** Насколько задача можетъ иногда получить неожиданно яркое освѣщеніе, когда мы переносимъ ее въ другое многообразіе, это мы постараемся выяснить на примѣрѣ, тѣсно примыкающемъ къ теоремѣ Дезарга.

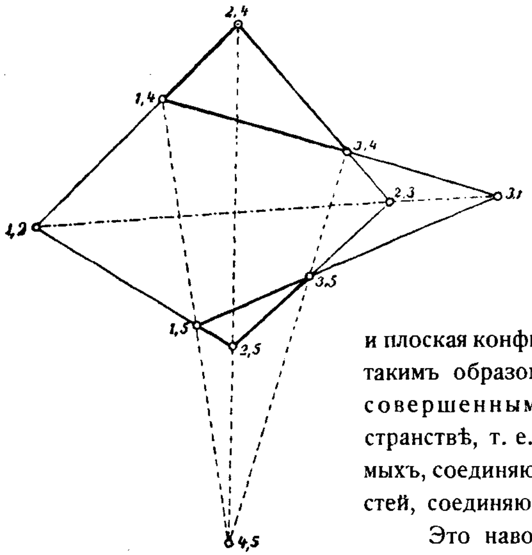
Подъ плоской конфигураціей Kf. $(n_k)$ разумѣютъ систему, состоящую изъ $n$ точекъ и $n$ прямыхъ на плоскости, которыя расположены такимъ образомъ, что черезъ каждую точку системы проходитъ $k$ ея прямыхъ и на каждой изъ прямыхъ системы лежитъ $k$ ея точекъ. Пространственная конфигурація Kf. $(n_k, g_s)$ есть система, составленная изъ $n$ точекъ, $n$ плоскостей и $g$ прямыхъ слѣдующимъ образомъ: черезъ каждую точку системы проходитъ $k$ ея плоскостей и въ каждой плоскости системы лежитъ $k$ ея точекъ; каждая же прямая проходитъ черезъ $s$ точекъ и лежитъ въ $s$ плоскостяхъ.

Опредѣленіе всѣхъ конфигурацій, соотвѣтствующихъ даннымъ значеніямъ чиселъ $n$, $g$, $k$, $s$, представляетъ очень интересную, но трудную задачу, которая ждетъ еще полнаго рѣшенія. Въ нижеслѣдующемъ мы дадимъ два первыхъ члена безконечнаго ряда конфигурацій, принадлежащихъ, однако, пространствамъ возрастающаго числа измѣреній. Очень

---

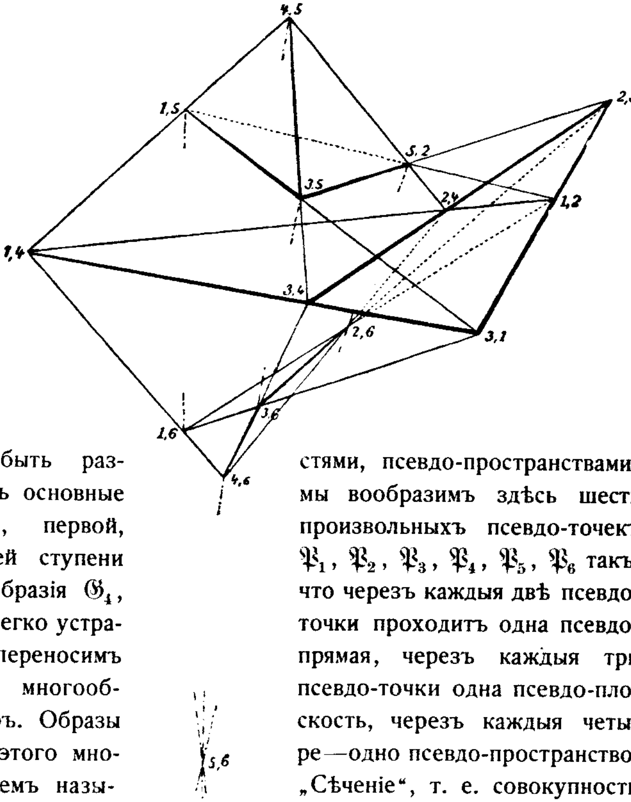
[75]) Что идея конгруэнтности чужда духу чисто синтетической геометріи, это конечно, дѣло точки зрѣнія и, во всякомъ случаѣ, зависитъ отъ тѣхъ предѣловъ, которые мы сами ставимъ чистой геометріи. Но дѣло заключается въ томъ, что теорема Дезарга есть основное предложеніе проективной геометріи, а этой дисциплинѣ идея о конгруэнтности дѣйствительно остается совершенно чуждой.

простую плоскую конфигурацію и именно Kf. $(10_3)$ даетъ фигура теоремы Дезарга, если мы беремъ перспективные треугольники, расположенные въ одной плоскости $\eta$. Какъ показываетъ фигура 46, мы можемъ каждую изъ 10 точекъ этой конфигураціи помѣтить двумя индексами изъ ряда чиселъ 1,2,3,4,5 такимъ образомъ, что каждая изъ 10 возможныхъ (парныхъ) комбинацій фигурируетъ только одинъ разъ, а пары индексовъ, принадлежащія точкамъ одной прямой, составлены только изъ трехъ различныхъ цифръ, которыя такимъ образомъ могутъ служить для обозначенія этой прямой. Такое положеніе дѣла наводитъ на мысль, что, быть можетъ, въ трехмѣрномъ пространствѣ можно взять систему изъ пяти точекъ $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_4, \mathfrak{P}_5$ такимъ образомъ, что точка $h, k$ этой конфигураціи служитъ сѣченіемъ плоскости $\eta$ съ прямою $\mathfrak{P}_h\mathfrak{P}_k$, прямая же конфигураціи $h, k, l$ служитъ сѣченіемъ плоскости $\eta$ съ плоскостью $\mathfrak{P}_h \mathfrak{P}_k \mathfrak{P}_l$ ($h, k, l = 1, 2, 3, 4, 5$). Это дѣйствительно оказывается возможнымъ, и плоская конфигурація Kf. $(10_3)$ оказывается, такимъ образомъ, сѣченіемъ плоскости съ совершеннымъ пятиугольникомъ въ пространствѣ, т. е. съ системой 5 точекъ, прямыхъ, соединяющихъ ихъ попарно, и плоскостей, соединяющихъ ихъ по три.



Фиг. 46.

Это наводитъ на мысль разсмотрѣть, восходя къ пространству, два перспективныхъ тетраэдра, т. е. два тетраэдра, вершины которыхъ вслѣдствіе особаго ихъ расположенія могутъ быть приведены въ соотвѣтствіе такимъ образомъ, что прямыя, соединяющія соотвѣтственныя вершины, проходятъ черезъ одну точку. Изъ этого заданія нетрудно вывести путемъ повторнаго примѣненія теоремы Дезарга, что соотвѣтствующія грани и ребра двухъ тетраэдровъ пересѣкаются въ точкахъ и по прямымъ, расположеннымъ въ одной плоскости. Фигура, которую мы такимъ образомъ получаемъ, образуетъ конфигурацію Kf. $(15_6, 20_3)$. Какъ показываетъ фиг. 47, ея точки могутъ быть обозначены индексами 1, 2, 3, 4, 5, 6 (подобно фигурѣ 46) такимъ образомъ, что каждая изъ 15 возможныхъ паръ цифръ фигурируетъ только одинъ разъ, пары же точекъ одной прямой нашей конфигураціи составлены только изъ трехъ цифръ, пары точекъ одной плоскости—изъ четырехъ; эти тройныя и четвертныя комбинаціи могутъ служить для обозначенія соотвѣтствующихъ прямыхъ и плоскостей. По аналогіи съ Kf. ($10_3$) мы естественно приходимъ къ мысли о полномъ шестиугольникѣ $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4\mathfrak{P}_5\mathfrak{P}_6$ въ четырехмѣрномъ пространствѣ, сѣченіе котораго съ трехмѣрнымъ пространствомъ $R_E$ нашей евклидовой геометріи давало бы конфигурацію Kf. ($15_6$, $20_3$); точка $h$, $k$, прямая $h$, $k$, $l$, плоскость $h$, $k$, $l$, $m$ нашей конфигураціи представляли бы тогда сѣченіе пространства $R_E$ съ прямой $\mathfrak{P}_h\mathfrak{P}_k$, съ плоскостью $\mathfrak{P}_h\mathfrak{P}_k\mathfrak{P}_l$, съ трехмѣрнымъ пространствомъ $\mathfrak{P}_h\mathfrak{P}_k\mathfrak{P}_l\mathfrak{P}_m$ ($h, k, l, m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Аналитически это предположеніе очень легко подтверждается *); но провести всѣ эти вычисленія чисто геометрически очень трудно, потому что мы не можемъ наглядно представить пространство $R_E$ въ видѣ образа въ пространствѣ $R_4$. Но такъ какъ мы знаемъ, что всѣ сферы, пучки, связки, и сѣти сферъ могутъ быть разсматриваемы, какъ основные образы нулевой, первой, второй и третьей ступени линейнаго многообразія $\mathfrak{G}_4$, то эта трудность легко устраняется, если мы переносимъ изслѣдованіе въ многообразіе всѣхъ сферъ. Образы $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$ этого многообразія мы будемъ называть псевдо-точками, псевдо-прямыми, псевдо-плоскостями, псевдо-пространствами; мы вообразимъ здѣсь шесть произвольныхъ псевдо-точекъ $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$, $\mathfrak{P}_5$, $\mathfrak{P}_6$ такъ, что черезъ каждыя двѣ псевдоточки проходитъ одна псевдопрямая, черезъ каждыя три псевдо-точки одна псевдо-плоскость, черезъ каждыя четыре—одно псевдо-пространство. „Сѣченіе“, т. е. совокупность общихъ элементовъ этого „совершеннаго“ четырехмѣрнаго шестиугольника съ псевдо-пространствомъ $R$ представляетъ собой конфигурацію Kf. ($15_6$, $20_3$), которая открыта такимъ образомъ не только для геометрическаго изслѣдованія, но и для непосредственнаго созерцанія. Въ дальнѣйшія подробности мы здѣсь входить не можемъ, мы должны были бы




Фиг. 47.

*) См. работы Рихмонда и Функа о конфигураціи Kf. ($15_6$, $20_3$): Richmond, Math. Ann. 53, R. Funck. (Strassburg, Diss. 1901).

только упомянуть еще объ одномъ обстоятельствѣ. Къ числу псевдопространствъ принадлежитъ также пространство точекъ, прямыхъ и плоскостей евклидовой геометріи, какъ предѣльный случай параболической сѣти съ безконечно удаленнымъ центромъ. Сѣченіе четырехмѣрнаго совершеннаго шестиугольника съ этимъ частнымъ (псевдо-)пространствомъ даетъ конфигурацію Kf. $(15_6,\ 20_3)$ въ обыкновенныхъ точкахъ прямыхъ и плоскостяхъ; именно, это не что иное, какъ радикальныя плоскости каждыхъ двухъ, радикальныя оси каждыхъ трехъ, радикальные центры каждыхъ четырехъ изъ шести сферъ, которыя представляютъ собой псевдо-вершины шестиугольника.

Если мы даже оставимъ совершенно въ сторонѣ то случайное, особенно благопріятное для насъ совпаденіе, что изслѣдуемая конфигурація, въ концѣ концовъ, приняла свою первоначальную форму, то отображеніе нашей задачи въ геометріи сферъ, само по себѣ, уже представляетъ значительное завоеваніе, такъ какъ область синтетической геометріи расширяется благодаря этому на цѣлое измѣреніе. То же повторяется во многихъ другихъ случаяхъ. Поэтому представляется желательнымъ познакомиться нѣсколько ближе съ объемомъ понятія о линейномъ многообразіи; для яснаго же пониманія сущности основныхъ геометрическихъ понятій это и само по себѣ необходимо. Мы вынуждены при этомъ предполагать знакомство съ началами аналитической геометріи. Кто ими не владѣетъ, тому придется принять выводы слѣдующаго пункта на вѣру.

**6.** Мы будемъ пользоваться обыкновенной прямоугольной системой координатъ $x$, $y$, $z$, хотя бы тѣми, которыми мы пользовались въ § 12. Точки поверхности $n$-го порядка опредѣляются уравненіемъ $n$-ой степени $f(x,\ y,\ z) = 0$, точки алгебраической кривой — общими рѣшеніями $s$ такихъ уравненій. Эти $s$ уравненій $g_1 = 0, g_2 = 0,\ g_3 = 0, \ldots,\ g_s = 0$ можно соединить въ одно $\varphi = 0$, если мы положимъ

$$\varphi = g_1 u_1 + g_2 u_2 + g_3 u_3 + \cdots + g_s u_s$$

и ограничимся только такими рѣшеніями уравненія $\varphi = 0$, которыя не зависятъ отъ неопредѣленныхъ параметровъ $u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots,\ u_s$. При такомъ соглашеніи относительно значеній, обращающихъ функцію $\varphi$ въ нуль, ее принято называть функціоналомъ*).

Если поверхности $f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots,\ f_r = 0$ имѣютъ только систему изолированныхъ общихъ точекъ, въ крайнемъ случаѣ, хотя бы только одну точку, то, приравнивая функціоналъ $\Phi = f_1 v_1 + f_2 v_2 + \cdots + f_r v_r$ съ неопредѣленными коэффиціентами нулю, мы выразимъ эту систему точекъ. Если же эти поверхности вовсе не имѣютъ общихъ точекъ, то уравненіе $\Phi = 0$ не выражаетъ никакого геометрическаго мѣста. Итакъ, отмѣтимъ первый результатъ нашихъ соображеній:

*) См. H. Weber, Lehrb. der Algebra, 2 Aufl. Bd. II § 153.

Съ помощью функціоналовъ можно выразить наиболѣе общій алгебраическій образъ, состоящій изъ отдѣльныхъ системъ точекъ $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0, \ldots, \Phi_p = 0$, отдѣльныхъ кривыхъ $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0, \ldots, \varphi_k = 0$ и отдѣльныхъ поверхностей $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \ldots, f_m = 0$, выразить при помощи одного уравненія $\Omega = 0$, гдѣ

$$\Omega = \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \ldots \Phi_p \cdot \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \ldots \varphi_k \cdot f_1 f_2 \ldots f_m .$$

Два такихъ алгебраическихъ образа $\Omega = 0$ и $\Omega' = 0$ опредѣляютъ пучекъ $\Omega$, именно $\varkappa\Omega + \lambda\Omega' = 0$; три такихъ образа, не принадлежащіе одному пучку, опредѣляютъ связку $\Omega$, именно $\varkappa\Omega + \lambda\Omega' + \mu\Omega'' = 0$; наконецъ, четыре образа, не принадлежащіе одной связкѣ, опредѣляютъ сѣть $\Omega$, именно $\varkappa\Omega + \lambda\Omega' + \mu\Omega'' + \nu\Omega''' = 0$, если во всѣхъ этихъ случаяхъ параметры $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ пробѣгаютъ всѣ возможныя численныя значенія. Дальше этого мы не пойдемъ. Если теперь уравненія $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$, $\Omega_3 = 0$, $\Omega_4 = 0$ суть уравненія въ текущихъ координатахъ $x$, $y$, $z$ четырехъ алгебраическихъ образовъ, не принадлежащихъ одной связкѣ, и отдѣльные образы (индивидуумы) сѣти

$$\xi\Omega_1 + \eta\Omega_2 + \zeta\Omega_3 + \Omega_4 = 0$$

мы будемъ называть псевдо-точками, а параметры $\xi$, $\eta$, $\zeta$ координатами соотвѣтствующей псевдо-точки, то мы можемъ примѣнить къ нимъ понятія, выясненныя въ § 12, и такимъ образомъ составить псевдо-прямыя и псевдо-плоскости. Координаты псевдо-точки $\xi$, $\eta$, $\zeta$, принадлежащей прямой, которая проходитъ черезъ двѣ псевдо-точки $(\xi', \eta', \zeta')$ и $(\xi'', \eta'', \zeta'')$, согласно § 12, 5, могутъ быть выражены при помощи одного параметра $\lambda$ формулами:

$$\xi = \frac{\xi' - \lambda\xi''}{1 - \lambda}, \quad \eta = \frac{\eta' - \lambda\eta''}{1 - \lambda}, \quad \zeta = \frac{\zeta' - \lambda\zeta''}{1 - \lambda}.$$

Такъ какъ

$$\xi\Omega_1 + \eta\Omega_2 + \zeta\Omega_3 + \Omega_4 = 0,$$

то мы поэтому имѣемъ:

$$\Omega' - \lambda\Omega'' = 0,$$

гдѣ

$$\Omega' = \Omega_1\xi' + \Omega_2\eta' + \Omega_3\zeta' + \Omega_4,$$
$$\Omega'' = \Omega_1\xi'' + \Omega_2\eta'' + \Omega_3\zeta'' + \Omega_4.$$

Псевдо-точки псевдо-прямой составляютъ, такимъ образомъ, пучекъ $\Omega$, индивидуумы котораго принадлежатъ сѣти; легко также показать, что псевдо-точки псевдо-плоскости образуютъ связку $\Omega$, элементы которой также принадлежатъ сѣти.

Мы пришли, такимъ образомъ, къ трехмѣрному линейному многообразію, весьма многообъемлющему по составу элементовъ, которые являются его псевдо-точками. Каждый образъ типа $\Omega$, — въ частности, каждая кривая или поверхность, — можетъ быть принята за „точку" новой „геометріи", построенной по образцу евклидовой и удовлетворяющей всѣмъ теоремамъ послѣдней.

7. Однако, этимъ еще отнюдь не исчерпанъ объемъ понятія о линейномъ многообразіи, да врядъ ли это и возможно сдѣлать. Можно было бы взять функціи $\Omega$ въ линейныхъ и плоскостныхъ координатахъ, исходя отъ системы матрицъ, можно было бы принять за элементы многообразія линейныя преобразованія пространства и т. д. Мы хотимъ еще остановиться только на одномъ способѣ построенія; именно: мы разсмотримъ примѣръ, который охватываетъ обѣ геометрическія системы, изложенныя въ § 10, 2, какъ частные случаи, и который легко допускаетъ обобщеніе. Съ этою цѣлью мы будемъ исходить отъ сѣти поверхностей второго порядка (сѣть $F^2$)

$$F_1(x,y,z)\xi + F_2(x,y,z)\eta + F_3(x,y,z)\zeta + F_4(x,y,z) = 0.$$

Если поверхность этой сѣти проходитъ черезъ точку $(x',y',z')$, то

$$F_1(x',y',z')\xi + F_2(x',y',z')\eta + F_3(x',y',z')\zeta + F_4(x',y',z') = 0,$$

а потому также

$$(F_1F_4' - F_1'F_4)\xi + (F_2F_4' - F_2'F_4)\eta + (F_3F_4' - F_3'F_4)\zeta = 0,$$

гдѣ для сокращенія $F_h$ и $F_h'$ замѣняютъ $F_h(x,y,z)$ и $F_h(x',y',z')$. Поверхности, проходящія черезъ точку $(x',y',z')$, образуютъ, такимъ образомъ, связку и всѣ проходятъ черезъ восемь точекъ пересѣченія трехъ поверхностей второго порядка

$$F_1F_4' - F_1'F_4 = 0, \quad F_2F_4' - F_2'F_4 = 0, \quad F_3F_4' - F_3'F_4 = 0;$$

$(x',y',z')$ есть одна изъ этихъ точекъ.

Поверхности сѣти $F^2$, проходящія черезъ точку $(x', y', z')$, имѣютъ, такимъ образомъ, еще семь другихъ общихъ точекъ, которыя называются сопряженными съ первой; каждая поверхность сѣти, проходящая черезъ одну изъ этихъ точекъ, необходимо проходитъ черезъ остальныя семь.

Такимъ образомъ, группа восьми сопряженныхъ точекъ опредѣляетъ въ сѣти $F^2$ только одну связку $F^2$, двѣ такія группы опредѣляютъ только одинъ пучекъ, наконецъ, три группы сопряженныхъ точекъ опредѣляютъ только одну поверхность второго порядка, проходящую черезъ эти точки, между тѣмъ какъ девять точекъ расположенныхъ произвольно уже опредѣляютъ поверхность второго порядка въ пространствѣ. Такъ какъ поверхности пучка пересѣкаютъ другъ друга по кривой 4-го порядка, то мы можемъ сказать: двѣ группы сопряженныхъ точекъ опредѣляютъ въ пространствѣ одну и только одну кривую 4-го порядка, проходящую черезъ ихъ точки. Мы видимъ, что группы сопряженныхъ точекъ играютъ для опредѣленія кривыхъ 4-го порядка въ пространствѣ и поверхностей 2-го порядка такую же роль, какую пары взаимно-обратныхъ точекъ играютъ для опредѣленія сферъ и окружностей сферической сѣти. Итакъ, мы приходимъ къ выводу: Если примемъ группы сопряженныхъ точекъ сѣти $F^2$ за псевдоточки, ея кривыя 4-го порядка въ пространствѣ за псевдо-прямыя, ея поверхности второго порядка за псевдо-плоскости, то эти псевдо-точки, псевдо-прямыя, псевдо-плоскости образуютъ трехмѣрное линейное многообразіе, удовлетворяющее аксіомамъ евклидовой геометріи, — естественно, также и аксіомамъ двухъ неевклидовыхъ геометрій, смотря по тому, выдѣлимъ ли мы одну изъ поверхностей системы въ качествѣ несобственной или нѣтъ*). Мы считаемъ необходимымъ подчеркнуть, что теорема эта имѣетъ мѣсто только въ томъ предположеніи, что вся группа изъ восьми сопряженныхъ точекъ принимается за одну псевдо-точку; нельзя, напримѣръ, выразиться такъ: если $A$ и $B$ суть сопряженныя точки, то $A$ есть та же псевдо-точка, что и $B$. Въ высшей степени интересно разсмотрѣть съ этой точки зрѣнія ученіе о сѣтяхъ $F^2$ и уяснить себѣ въ этомъ освѣщеніи предложенія, приведенныя въ III-емъ томѣ книги Райэ „Геометрія положенія" **). Вмѣсто кривыхъ и поверхностей второго порядка обыкновенной геометріи мы получаемъ здѣсь важныя кривыя и поверхности болѣе высокихъ порядковъ, которыя въ этой постановкѣ получаютъ самое яркое освѣщеніе. Къ этому остается только прибавить, что сѣть сферъ представляетъ собой частный случай сѣти $F^2$; роль сопряженныхъ точекъ здѣсь играютъ взаимно-обратныя точки.

**8.** Если мы въ предыдущихъ формулахъ дадимъ перемѣнной $z$ постоянное значеніе и соотвѣтственно измѣнимъ какъ самыя формулы, такъ и терминологію, то мы получимъ соотвѣтствующія предложенія, относящіяся къ плоскости; изъ нихъ мы приведемъ только слѣдующее: коническія сѣченія, ихъ пучки и связки образуютъ трехмѣрное линейное многообразіе, въ которомъ выполняются посылки евклидовой геометріи; исключеніе представляютъ лишь немногіе частные случаи кривыхъ второго порядка и ихъ вырожденія. Эти предложенія относительно коническихъ сѣченій и сѣтей $F^2$ сравнительно нетрудно получить и чисто аналитически. Если мы примемъ коническія сѣченія сѣти за

*) При этомъ мы не касаемся, конечно, вопроса о дѣйствительности.

**) Reye, „Geometrie der Lage".

псевдо-точки, пучки и связки за псевдо-прямыя и псевдо-плоскости, то къ нимъ примѣнимы всѣ аксіомы расположенія и сопряженія.

По существу эти предложенія, — правда, не въ этомъ сопоставленіи, — были уже извѣстны аналистамъ прошлаго столѣтія; Яковъ Штейнеръ не безъ большого труда получилъ ихъ чисто синтетически. Въ письмѣ къ Якоби отъ 31 декабря 1833 г., которое Янке (Jahnke) опубликовалъ въ журналѣ „Archiv der Mathematik und Physik“ (3), Bd. 4, S. 274, Штейнеръ даетъ предложеніе, которое переноситъ теорему о совершенномъ четырехсторонникѣ въ геометрію сѣти коническихъ сѣченій. Судя по той гордости, съ которой онъ говоритъ объ этомъ открытіи, которое все же представляется довольно доступнымъ, совершенно очевидно, что логическія основанія этого поразительнаго совпаденія не были ему ясны. Это вновь обнаруживаетъ, что критическое направленіе въ математикѣ стремящееся провести всѣ доказательства такимъ образомъ, чтобы они сохраняли свою силу въ каждомъ линейномъ трехмѣрномъ многообразіи, не представляетъ собой безплоднаго начинанія. По существу ту же цѣль преслѣдовалъ и Грассманъ (Grassmann) въ своемъ Ausdehnungslehre; то признаніе, которое это сочиненіе въ настоящее время все больше и бóльше встрѣчаетъ какъ въ чистой, такъ и въ прикладной математикѣ, особенно ясно говоритъ въ пользу того, что чрезвычайно цѣлесообразно перенести и метрическія свойства на всѣ многообразія. Что касается тѣхъ свойствъ, которыя вытекаютъ изъ аксіомъ расположенія (проективныя свойства), то относительно нихъ обыкновенно охотно признаютъ возможность и цѣлесообразность ихъ распространенія на всѣ линейныя многообразія.

**9.** До сихъ поръ мы старались доказать, что логическое расчлененіе и точное опредѣленіе пространственныхъ представленій полезно и необходимо съ чисто геометрической точки зрѣнія. Теперь мы обратимся къ точкѣ зрѣнія теоріи познанія и разсмотримъ задачу съ этой стороны, насколько это возможно сдѣлать простыми математическими методами. Нужно, конечно, прежде всего отмѣтить, что при этомъ мы оставляемъ почву строго математической дедукціи и переходимъ въ область, въ которой между математиками царитъ столь же мало согласія, какъ и между философами; но именно поэтому мы не должны обходить трудностей вопроса, не должны предоставлять ихъ, какъ нѣчто безплодное для математиковъ, исключительно философамъ. Задача теоріи познанія въ области точныхъ наукъ, повидимому, все болѣе занимаетъ философовъ; но задача математика, который, по словамъ Платона*), въ своей наукѣ имѣетъ „рукоятку философіи“ („λαβὰς φιλοσοφίας“), — отстоять свои интересы и доставить матеріалъ, который представляется ему особенно заслуживающимъ вниманія. Здѣсь рѣчь идетъ о вопросахъ, которые

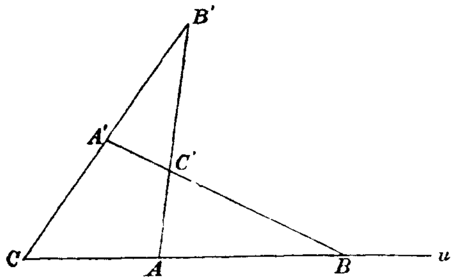
*) Diogenes Laertius, IV, 10 (M. Cantor. Vorl., B. I., 1880, S. 185).

и мы можемъ существенно подвинуть впередъ, если мы подвергнемъ ихъ безпристрастному изслѣдованію и выскажемъ, что мы собственно имѣемъ въ виду, культивируя нашу науку. Къ этому присоединяется еще другое основаніе: приложеніе математики къ естествознанію можетъ быть въ полной мѣрѣ плодотворнымъ только въ томъ случаѣ, если мы впередъ себя не обманываемъ относительно того, что наша наука можетъ и чего не можетъ дать. Въ этомъ отношеніи было бы очень поучительно ретроспективно обозрѣть исторію математики въ теченіе послѣднихъ двухъ столѣтій и уяснить себѣ, почему значеніе математики, какъ вспомогательнаго средства въ естествознаніи, столь же часто перецѣнивалось, какъ и недооцѣнивалось, и, съ другой стороны, отчего аппаратъ физическихъ формулъ сравнительно мало былъ затронутъ при постоянныхъ измѣненіяхъ господствующихъ въ этой наукѣ воззрѣній.

**10.** Вотъ что, во всякомъ случаѣ, опредѣленно вытекаетъ изъ предыдущаго изслѣдованія: относительно основныхъ образовъ „точка", „прямая", „плоскость", „пространство" и основныхъ понятій „между", „отрѣзокъ", „уголъ", „конгруэнтность" нужно строго различать тѣ ихъ свойства, которыя изъ обыкновеннаго пространства могутъ быть перенесены на всякое линейное многообразіе, отъ тѣхъ свойствъ, которыя индивидуально принадлежатъ этимъ понятіямъ. Такому перенесенію подлежатъ свойства сопряженія и расположенія, непрерывности и конгруэнтности, какъ они сопоставлены въ (Гильбертовыхъ) аксіомахъ. Не поддается такому перенесенію, напримѣръ, малость (матеріальной) точки, изящное, равномѣрное закругленіе сферы, вообще все, что относится къ внѣшнему виду пространственныхъ образовъ, если мы ихъ разсматриваемъ, какъ они есть, сами по себѣ, не сопоставляя ихъ съ другими. Эти индивидуальныя особенности съ особенной ясностью отпадаютъ при строго формальномъ развитіи аналитической геометріи, которое мы дали въ § 12. Когда рѣчь идетъ о совокупности трехъ чиселъ $(a, b, c)$, которая въ этой системѣ опредѣляетъ точку, то мы вообще не рисуемъ себѣ чего-либо большого или малаго; тутъ можно было бы развѣ говорить о размѣрѣ самыхъ трехъ чиселъ, но вѣдь это здѣсь не имѣетъ никакого значенія. Безконечно удаленные образы въ „однородной" геометріи $\mathfrak{H}$ § 12-го совершенно теряютъ то особенное положеніе, которое они занимаютъ въ нашихъ пространственныхъ представленіяхъ. Геометрическая фигура въ нашемъ обычномъ представленіи всегда имѣетъ верхнія и нижнія части, болѣе и менѣе удаленныя части; въ ариѳметической геометріи все то, что субъективно рисуется нашему воображенію, совершенно отпадаетъ. Тѣ свойства, которыя могутъ быть перенесены, касаются взаимоотношенія основныхъ понятій; индивидуальныя же свойства выражаютъ ихъ отношенія къ нашимъ внѣшнимъ чувствамъ.

**11.** Каждое изъ основныхъ геометрическихъ понятій расщепляется, такимъ образомъ, на слагающую, переходящую и въ другія многообразія, и на слагающую индивидуальную; однако, провести точную грань между этими слагающими, вообще говоря, очень трудно. Еще Кантъ въ своихъ „Prolegomena" неоднократно указывалъ, что различіе между понятіями „справа" и „слѣва", между тѣломъ и его изображеніемъ въ зеркалѣ и т. п. не поддается абстрактному опредѣленію; это признаетъ и Гауссъ, хотя онъ и оспариваетъ выводы, которые Кантъ отсюда дѣлаетъ (сообщеніе о мемуарѣ „Theoria residuorum biquadraticorum", Gauss, Werke, Bd. 2, S. 177). При всемъ томъ Пашу удалось въ своихъ лекціяхъ по новой геометріи, которыя мы уже неоднократно цитировали, провести въ аксіомахъ всю теорію расположенія. Вышеуказанное различіе не только поддается, такимъ образомъ, отвлеченному опредѣленію, но можетъ быть логически проведено. Этимъ мы отнюдь не хотимъ сказать, что понятіе о расположеніи совершенно исчерпывается аксіомами расположенія: рѣчь идетъ только о „переносной" слагающей, къ которой только и находитъ примѣненіе чисто логическая геометрія. Евклидовы опредѣленія понятій „точка", „прямая", „плоскость" (о понятіи „между" онъ вовсе не упоминаетъ) содержатъ исключительно индивидуальную, можно даже сказать, матеріальную сторону этого понятія, — именно поэтому отъ этихъ опредѣленій нельзя сдѣлать никакого геометрическаго вывода. Аксіомы расположенія, сопряженія, конгруэнтности, параллелизма и непрерывности (въ Гильбертовой формулировкѣ) также устанавливаютъ исключительно логическія соотношенія между этими понятіями; какъ Гильбертъ и самъ указываетъ, эти аксіомы выполняются въ линейномъ численномъ многообразіи трехъ измѣреній. Если Гильберту дѣлали упреки въ родѣ того, что его аксіомы не даютъ возможности отвѣтить на вопросъ, представляютъ ли карманные часы собою точку или нѣтъ, то это обнаруживаетъ только полное непониманіе задачъ, которыя Гильбертъ себѣ ставитъ. На такой вопросъ эти аксіомы не могутъ и не имѣютъ въ виду дать отвѣтъ. Ибо, если геометрія и была изобрѣтена и развита съ тою цѣлью, чтобы изучить свойства нашихъ пространственныхъ образовъ (мы ихъ воспринимаемъ нашими чувствами), то истины ея все-таки совершенно не зависятъ отъ той формы, въ которой мы себѣ эти образы обычно представляемъ; наша обыкновенная геометрія, какъ мы выяснили на многочисленныхъ примѣрахъ, представляетъ собой лишь одно изъ многихъ осуществленій ея логическаго содержанія. Итакъ, имѣлось ли это въ виду или нѣтъ, все равно, — геометрія, построенная въ смыслѣ Гильбертовыхъ „основаній", должна сохранить свою силу въ каждомъ трехмѣрномъ линейномъ многообразіи. Кто, какъ мы, на этой именно возможности перенесенія геометрическихъ предложеній въ другое многообразіе твердо настаиваетъ, тотъ не можетъ сомнѣваться, каково истинное значеніе аксіомъ, которыя другимъ кажутся то ненужными, то тривіальными вслѣдствіе полной ихъ очевидности, какъ, напримѣръ, аксіомы расположенія. Уже древніе математики въ Греціи расходились во взглядахъ на такого рода аксіомы. Но для геометріи, справедливой для всякаго линейнаго трехмѣрнаго многообразія, ни одно изъ этихъ предложеній, конечно, не можетъ быть признано настолько маловажнымъ, чтобы его не приходилось явно отнести къ основнымъ посылкамъ. Въ этомъ мы немедленно убѣждаемся при первой попыткѣ необычнаго осуществленія геометріи; попробуйте надѣлить группы сопряженныхъ точекъ сѣти $F^2$, принятыя нами въ п. 8 за псевдо-точки, свойствомъ, которое выражается понятіемъ „между"; безъ аксіомъ расположенія вы будете совершенно безпомощны.

**12.** Своей достовѣрностью геометрія не можетъ быть обязана индивидуальнымъ свойствамъ основныхъ образовъ, которыя мѣняются отъ многообразія къ многообразію, а исключительно тѣмъ свойствамъ, которыя мы назвали переносными, которыя, какъ таковыя, сохраняются во всякомъ многообразіи. Какъ показываетъ очеркъ основаній геометріи Гильберта, аксіомы образуютъ единственную недоказуемую предпосылку, единственный источникъ познанія для всей его системы. На основныхъ понятіяхъ покоятся опредѣленія производныхъ понятій: окружности, коническихъ сѣченій и т. д. Но геометрія работаетъ не исключительно основными и производными понятіями, число которыхъ, во всякомъ случаѣ, ограничено; иначе ея матеріалъ, въ концѣ концовъ, долженъ былъ бы исчерпаться, потому что изъ этихъ основныхъ понятій нельзя выжать больше того, что въ нихъ вложено опредѣленіемъ. Характерная особенность геометрическаго метода изслѣдованія въ томъ именно и заключается, что мы постоянно вводимъ новыя посылки. Однако, эти посылки существенно отличаются отъ основныхъ; именно относительно нихъ мы всегда можемъ предварительно доказать, что онѣ совмѣстны съ основными посылками, что онѣ выполняются вмѣстѣ съ послѣдними. Такъ, напримѣръ, теорема Дезарга предполагаетъ два треугольника $A'B'C'$ и $A''B''C''$, расположенныхъ такимъ образомъ, что прямыя $A'B'$ и $A''B''$, $B'C'$ и $B''C''$, $C'A'$ и $C''A''$ попарно пересѣкаются въ трехъ точкахъ $C$, $A$, $B$, расположенныхъ на одной прямой $u$. Чтобы убѣдиться въ допустимости такого предположенія (такой посылки), возьмемъ на прямой $u$ (фиг. 48) произвольно три точки $A$, $B$, $C$ (аксіома $\mathrm{II}_2$); присоединимъ сюда точку $A'$, не лежащую на прямой $u$, и соединимъ ее съ точками $B$ и $C$ (аксіома $\mathrm{I}_1$). Три точки $A'$, $B$ и $C$ опре-



Фиг. 48.

дѣлятъ плоскость $\eta$ ($I_4$), въ которой лежатъ прямыя $A'B$, $BC$, $CA'$ ($I_6$). Возьмемъ теперь точку $B'$ на продолженіи отрѣзка $CA'$ ($II_2$). Въ такомъ случаѣ прямая $B'A$, которая, согласно аксіомѣ $I_6$, лежитъ въ плоскости $\eta$, должна встрѣтить сторону $BA'$ треугольника $A'CB$ въ нѣкоторой точкѣ $C'$ между $A'$ и $B$ ($II_4$). Этимъ доказано вспомогательное предложеніе: мы всегда можемъ построить треугольникъ такъ, чтобы каждая изъ трехъ его сторонъ проходила черезъ ей предписанную точку на прямой. Примѣняя это предложеніе двукратно, мы получаемъ фигуру, которую предполагаетъ теорема Дезарга.

Аналогичными соображеніями можетъ быть доказана допустимость предположенія, изъ котораго мы въ п. 5 вывели конфигурацію Kf. ($15_6$, $20_3$). Уже изъ этихъ примѣровъ видно, что доказательства возможности, основанныя на аксіомахъ, могутъ быть очень тяжеловѣсны.

Первымъ опредѣленно указалъ на этотъ характерный методъ геометріи Кантъ въ своей „Критикѣ чистаго разума". Но онъ выдвигаетъ на передній планъ построеніе, которое дается самымъ доказательствомъ его возможности и вмѣстѣ съ этимъ доказательствомъ. Между тѣмъ построеніе имѣетъ здѣсь второстепенное значеніе; напротивъ, всегда необходимо предварительно доказать, что оно вообще возможно *).

Геометрія оказывается, такимъ образомъ, совокупностью логическихъ выводовъ изъ неограниченнаго ряда посылокъ, которыя не только совмѣстимы съ системой аксіомъ, но всегда выполняются, коль скоро аксіомы имѣютъ мѣсто [76]).

---

*) См. Kant, „Kritik der reinen Vernunft", Transzendentale Methodenlehre. Кантъ слишкомъ исключительно занятъ вспомогательными линіями, которыя должны быть построены, чтобы теоремы можно было примѣнять. Но старая, косная и неподвижная элементарная геометрія даетъ слишкомъ одностороннюю картину геометрическаго метода; Канту же этого нельзя поставить въ упрекъ, такъ какъ въ его время геометрія положенія еще не была открыта.

[76]) Идея, развиваемая здѣсь авторомъ, въ высшей степени важна, хотя рѣдко кто ясно ее понимаетъ. Когда мы доказываемъ, что въ треугольникѣ $ABC$ противъ равныхъ сторонъ $AC$ и $BC$ лежатъ равные углы $A$ и $B$, то посылками для этого доказательства служатъ:

1) Основныя опредѣленія и аксіомы; мы будемъ называть ихъ основными посылками.

2) Весь геометрическій матеріалъ, уже построенный, уже выведенный раньше, до доказательства интересущаго насъ предложенія. Эти посылки мы будемъ называть выводными посылками.

3) Условіе данной теоремы: въ треугольникѣ $ABC$ сторона $AC$ равна сторонѣ $BC$.

Изъ совокупности посылокъ этихъ трехъ категорій выводится, что уголъ $A$ равенъ углу $B$.

О томъ, что условіе нашей теоремы есть также посылка, при помощи которой дѣлается выводъ, объ этомъ часто забываютъ. Между тѣмъ никакого вывода

Далеко не во всякомъ научномъ изложенiи геометрiи проводится эта строго логическая форма; въ особенности относительно свойствъ расположенiя мы обыкновенно охотно полагаемся на интуицiю, потому что точное доказательство здѣсь слишкомъ кропотливо. Вообще, въ геометрическихъ доказательствахъ часто ограничиваются однимъ только указанiемъ важнѣйшихъ моментовъ и общаго хода разсужденiй, предоставляя читателю, по собственной склонности или присущей ему потребности, разложить его на силлогизмы. Существуютъ, однако, такiе отдѣлы геометрiи, гдѣ, не имѣя возможности пользоваться воззрѣнiемъ, мы должны строго держаться принятыхъ или доказанныхъ фактовъ и почти вынуждены придавать доказательствамъ силлогистическую форму, чтобы не проскользнули ошибки. Сюда принадлежатъ, напримѣръ, доказательства о связности и пересѣченiи Римановыхъ поверхностей, о которыхъ мы упоминали въ § 7, предложенiя о конструкцiи фахверковъ и т. д. Но и въ элементарной геометрiи

---

не было бы, если бы мы къ основнымъ и выводнымъ посылкамъ не присоединили этой новой посылки 3).

Итакъ, геометрiя развивается такимъ путемъ, что къ основнымъ и выводнымъ посылкамъ, которыми мы уже располагаемъ, мы постоянно присоединяемъ еще одну посылку — условiе новаго предложенiя — и отсюда дѣлаемъ выводъ.

Въ созиданiи этихъ вновь присоединяемыхъ посылокъ и заключается сущность творчества въ геометрiи.

Неоднократно говорили, въ томъ числѣ даже Д. С. Миль, что геометрiя не можетъ быть строго синтетической наукой, развиваемой изъ небольшого числа постулатовъ, ибо тогда она содержала бы въ себѣ не больше того, что вложено въ основные постулаты. Но при этомъ забываютъ, что построенiе геометрiи въ томъ именно и заключается, что мы постоянно присоединяемъ новыя посылки — условiя нашихъ теоремъ.

Нужно замѣтить, что посылки, которыя мы назвали выводными, въ свою очередь, получаются путемъ присоединенiя къ основнымъ посылкамъ этихъ посылокъ типа 3). Мы можемъ поэтому сказать, что **геометрiя развивается путемъ послѣдовательнаго присоединенiя къ основнымъ посылкамъ новыхъ посылокъ — условiй доказываемыхъ теоремъ. И въ созиданiи этихъ новыхъ посылокъ и заключается актъ геометрическаго творчества.**

На этихъ новыхъ посылкахъ авторъ и останавливается въ текстѣ и старается указать, въ чемъ заключается ихъ отличiе отъ основныхъ посылокъ — аксiомъ.

Это отличiе онъ усматриваетъ въ томъ, что ихъ совмѣстимость съ прежними посылками доказывается до очевидности просто.

Такъ, въ нашемъ примѣрѣ совершенно ясно, что, при наличности остальныхъ посылокъ, стороны $AC$ и $BC$ могутъ быть равны, могутъ быть не равны: присоединяя одну посылку, мы получаемъ одинъ выводъ, присоединяя другую, получаемъ иной выводъ.

Но когда возникъ вопросъ, можетъ ли при предыдущихъ посылкахъ изъ точки на плоскости выходить только одна прямая, не встрѣчающая данной прямой, или нѣсколько, то послѣднее предположенiе казалось несовмѣстнымъ съ остальными положенiями: въ виду отсутствiя возможности это доказать (какъ это всегда легко сдѣлать относительно новыхъ посылокъ), это допущенiе приняли въ видѣ новой **основной** посылки.

мы наталкиваемся на такого рода трудности, какъ только мы добровольно отказываемся отъ интуиціи, чтобы быть увѣреннымъ, что мы дѣйствительно дѣлаемъ логическіе выводы изъ аксіомъ и понятій. Какую бы форму мы ни придавали геометрическому доказательству изъ стилистическихъ или дидактическихъ соображеній, научно безупречнымъ его можно признать только въ томъ случаѣ, если оно даетъ весь матеріалъ, необходимый для строго логическаго вывода.

**13.** Возможность наглядно замѣстить при такого рода логическомъ формализмѣ тѣ объекты, на которыхъ онъ былъ первоначально построенъ, совершенно другими, не ограничивается одной геометріей; такая возможность представляется всюду, гдѣ мы аналогично оперируемъ въ области, логически установленной аксіомами. Въ особенности нужно отмѣтить, что и ариѳметика своими правилами и аксіомами не устанавливаетъ объектовъ, которые имъ подчиняются; при помощи теоріи группъ Галуа (Galois) можно многообразно составить системы символовъ, которые сочетаются по тѣмъ же правиламъ, что и числа *). Вся теорія дѣлимости, вытекающая изъ сопряженія чиселъ при помощи умноженія, по существу, примѣняется и къ алгебраическимъ числамъ, а теорія алгебраическихъ чиселъ можетъ быть распространена и на алгебраическія функціи. Сложеніе комплексныхъ чиселъ въ комплексной числовой плоскости вполнѣ отображаетъ сложеніе и разложеніе силъ, дѣйствующихъ въ плоскости на одну точку. Чрезвычайно замѣчательную интерпретацію сопряженія чиселъ съ помощью сложенія и умноженія мы встрѣтимъ въ графической статикѣ, гдѣ числа замѣняются системами силъ на фахверкѣ. Число, какъ и геометрическіе образы, имѣетъ переносныя и индивидуальныя свойства. Послѣднія еще очень нуждаются въ изслѣдованіи.

Физики уже давно знали и даже пользовались тѣмъ, что нѣкоторыя теоріи могутъ быть перенесены изъ одной области въ другую. Здѣсь говорятъ о механическихъ, гидродинамическихъ и статическихъ „отображеніяхъ". Многія изъ этихъ отображеній представляютъ собой только аналогіи, но многія обусловливаются тождественными логическими посылками. Такъ, напримѣръ, Христоффель (Christoffel **) чисто аксіоматически обосновалъ возможность перенести теорію дифференціальныхъ уравненій теплопроводности на теорію міровой торговли и вывелъ эти уравненія такимъ образомъ, что примѣнимость ихъ къ обѣимъ теоріямъ становится совершенно очевидной.

---

*) Вообще теорія группъ, какъ принадлежащая Галуа, такъ и построенная Ли (Lie), включаетъ теорію ариѳметическихъ дѣйствій. Ср., съ одной стороны, Weber, Math. Ann., Bd. 43, S. 521, съ другой стороны—F. Schur, Math. Ann., Bd. 41, S. 509.

**) Въ одной изъ лекцій объ уравненіяхъ въ частныхъ производныхъ, читанныхъ въ зимнемъ семестрѣ 1891 92 уч. года.

Въ химіи такого рода „изображеній" не знали. Поэтому въ свое время произвело значительное впечатлѣніе открытіе, сдѣланное Сильвестромъ (Sylvester) и Клиффордомъ (Clifford) (1878), что формулы строенія органическихъ соединеній символически отображаются законами составленія инваріантовъ бинарныхъ формъ. Внутренней связи между химіей и теоріей инваріантовъ, повидимому, нѣтъ: это совпаденіе представляетъ только слѣдствіе случайно совпадающихъ законовъ сопряженія *).

**14.** Во всѣхъ этихъ случаяхъ отображаются не самые объекты, а ихъ переносныя свойства — лучше сказать, соотношенія, связывающія эти объекты. Какъ видно изъ этого сопоставленія, то, что мы назвали выше логическимъ формализмомъ, собственно и составляетъ основу научной геометріи. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ наше познаніе здѣсь относится не къ самымъ предметамъ, а къ соотношеніямъ между ними, то наиболѣе цѣнная, абсолютно достовѣрная часть нашей науки содержится въ чисто логической геометріи. Именно поэтому для многихъ продуктивныхъ математиковъ геометрія начинается только тогда, когда она доведена до аксіомъ, — въ аналитической геометріи это косвенно всегда имѣетъ мѣсто; между тѣмъ въ подготовительной части геометріи можетъ сказать свое слово историкъ и философъ. Но если кто и не можетъ принять этой нѣсколько односторонней точки зрѣнія, то онъ все же предоставитъ математику право, если онъ располагаетъ системой аксіомъ, сдѣлать таковую краеугольнымъ камнемъ строго логическаго научнаго зданія. При этомъ происходитъ любопытная смѣна взглядовъ: если прежде аксіомы были для насъ предложеніями, заимствованными изъ опыта или напередъ заданными, которыя въ натуральной геометріи осуществляются лишь въ большей или меньшей мѣрѣ и потому обусловливаютъ часто тягостныя ограниченія во всѣхъ теоремахъ **), то мы ихъ теперь возводимъ на степень строгой достовѣрности, претворяя ихъ въ опредѣленія. Въ этомъ смыслѣ аксіомы Гильберта опредѣляютъ понятіе инцидентности (Inzidenz) (т. е. „на прямой" или „на плоскости лежитъ", „проходитъ черезъ точку", „опредѣляютъ", „пересѣкаютъ")[77]), расположенія („между"),

*) Случайный характеръ этого совпаденія очень убѣдительно доказалъ Студи (Study, Beiblätter zu den Annalen der Physik, 1901, Bd. 25, S. 87). Работы Сильвестра и Клиффорда помѣщены въ Am. Journ., I.

**) Двѣ точки опредѣляютъ прямую, если онѣ расположены не слишкомъ близко одна къ другой. Двѣ непараллельныя прямыя въ одной плоскости пересѣкаются въ одной точкѣ, но онѣ не должны составлять при этомъ слишкомъ остраго угла и т. д.

[77]) Мы сохраняемъ этотъ терминъ, принадлежащій автору настоящаго сочиненія, безъ измѣненія. Этотъ терминъ оказывается автору полезнымъ, главнымъ образомъ, ниже — въ проективной геометріи. Смыслъ же его таковъ: въ выраженіи „точка инцидентна съ прямой" авторъ объединяетъ два обычно употребляемыя выраженія „точка лежитъ на прямой" и „прямая проходитъ черезъ точку"; выра-

параллелизма, конгруэнтности и непрерывности. Относительно же того, что̀ такое точки, прямыя и плоскости, не дѣлается никакого соглашенія, такъ что перечисленныя соотношенія, какъ мы знаемъ, переносятся на любое трехмѣрное многообразіе. Намъ достаточно знать, что слова точка, прямая и плоскость выражаютъ три системы объектовъ, удовлетворяющихъ требованіямъ аксіомъ. Мы рекомендуемъ теперь вновь внимательно прочитать „опредѣленія" и „объясненія", тщательно и строго выраженныя въ книгѣ Гильберта.

Итакъ, въ книгѣ Гильберта о трехъ системахъ основныхъ образовъ не сказано ничего; не дѣлается даже попытки построенія прямыхъ и плоскостей изъ точекъ; поэтому будетъ наиболѣе подходящимъ назвать Гильбертову геометрію чистымъ ученіемъ о соотношеніяхъ.

**15.** Само собою разумѣется, что Гильбертовы аксіомы — мы будемъ попрежнему такъ называть опредѣленія его геометріи соотношеній — устанавливаютъ все же извѣстныя соотношенія между точками прямой или плоскости, хотя этихъ соотношеній и недостаточно, чтобы опредѣлить прямую, какъ образъ, составленный изъ точекъ. Если бы мы даже согласились, выходя за предѣлы его аксіомъ, разумѣть подъ словомъ „точки" обыкновенныя (очень маленькія матеріальныя) точки (а не, скажемъ, сферы въ сѣти), то подъ прямыми и плоскостями мы все же могли бы разумѣть какъ обыкновенныя прямыя, такъ и окружности или сферы параболической сѣти. Другіе примѣры легко построить аналитически. Примемъ, напримѣръ, за точку отправленія однородныя координаты $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ и произведемъ преобразованіе

$$x_1 = a_1 y_2 y_3 y_4, \quad x_2 = a_2 y_3 y_4 y_1, \quad x_3 = a_3 y_4 y_1 y_2, \quad x_4 = a_4 y_1 y_2 y_3 \qquad (1)$$

пространства $x$-овъ въ пространство $y$-овъ [78]); при этомъ плоскости $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$ пространства $x$-овъ переходятъ въ поверхности третьяго порядка:

$$a_1 u_1 y_2 y_3 y_4 + a_2 u_2 y_3 y_4 y_1 + a_3 u_3 y_4 y_1 y_2 + a_4 u_4 y_1 y_2 y_3 = 0, \qquad (2)$$

каждая же прямая переходитъ въ кривую пересѣченія двухъ такихъ поверхностей. Но это преобразованіе не только относитъ каждой точкѣ $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ одну точку $(y_1, y_2, y_3, y_4)$, но и обратно относитъ каждой

---

женіе „прямая инцидентна съ плоскостью" также объединяетъ выраженія: „прямая лежитъ на плоскости" и „плоскость проходитъ черезъ прямую".

[78]) Т. е. аналитическаго пространства, въ которомъ „точками" служатъ значенія четырехъ перемѣнныхъ $x$, въ аналитическое пространство, въ которомъ точками служатъ значенія четырехъ перемѣнныхъ $y$.

точкѣ $(y_1, y_2, y_3, y_4)$ одну опредѣленную точку $(x_1, x_2, x_3, x_4)$, потому что изъ уравненій (1) слѣдуетъ:

$$\varrho y_1 = a_1 x_2 x_3 x_4\,,\quad \varrho y_2 = a_2 x_3 x_4 x_1\,,\quad \varrho y_3 = a_3 x_4 x_1 x_2\,,\quad \varrho y_4 = a_4 x_1 x_2 x_3\,, \qquad (3)$$

гдѣ $\varrho$ есть коэффиціентъ пропорціональности, значеніе котораго легко получить, подставляя формулы (3) въ уравненіе (1). Однозначность соотвѣтствія пространства $x$-овъ съ пространствомъ $y$-овъ нарушается только въ точкахъ (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1); это такъ называемыя „основныя точки“ преобразованія. При инверсіи также существуетъ одна вещественная основная точка — центръ инверсіи. Исключительное положеніе, которое занимаютъ основныя точки, ведетъ къ тому, что всѣ поверхности третьяго порядка, соотвѣтствующія плоскостямъ пространства $x$-овъ, проходятъ черезъ эти четыре точки, какъ это видно изъ уравненія (2). Поэтому, если мы хотимъ, чтобы эти поверхности играли въ пространствѣ $y$-овъ роль плоскостей, а взаимныя ихъ пересѣченія — роль прямыхъ, то мы должны исключить изъ пространства $y$-овъ эти основныя точки подобно тому, какъ мы съ тою же цѣлью въ параболической сѣти исключили ея центръ (§ 8). Можно показать, — правда, не элементарными средствами, — что Евклидовы псевдо-геометріи, въ которыхъ точками служатъ обыкновенныя точки, между тѣмъ какъ псевдо-прямыми и псевдо-плоскостями не служатъ обыкновенныя прямыя и плоскости, могутъ быть построены только такимъ путемъ, что изъ пространства исключаются нѣкоторыя точки или линіи.

**16.** Здѣсь умѣстно поставить вопросъ, имѣющій существенное значеніе для теоріи познанія: возможно ли пополнить аксіомы (группы V) такимъ образомъ, чтобы данный комплексъ элементовъ могъ только однимъ единственнымъ способомъ удовлетворять всѣмъ аксіомамъ. Ограничиваясь обыкновеннымъ пространствомъ, этотъ вопросъ можно еще поставить такъ: можно ли пополнить Гильбертовы аксіомы такимъ образомъ, чтобы онѣ исключали всѣ одно-однозначныя преобразованія евклидовой геометріи? Задача заключается, такимъ образомъ, въ томъ, чтобы сдѣлать линейность нѣкотораго трехмѣрнаго многообразія однозначной, чтобы, какъ выражается Кантъ, было возможно, „исходя отъ точки“, построить прямую.

Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, мы раздѣлимъ всѣ преобразованія, о которыхъ идетъ рѣчь, на коллинеаціи, которыя преобразовываютъ каждую плоскость въ плоскость же, и на высшія преобразованія, которыя этого не производятъ.

a) Однозначность высшихъ преобразованій, какъ мы видимъ на приведенномъ выше примѣрѣ, нарушается въ опредѣленныхъ „основныхъ точкахъ“, которымъ соотвѣтствуетъ не одна точка, а безконечное множество ихъ. При инверсіи основной точкой является центръ инверсіи, которому отвѣчаютъ всѣ безконечно удаленныя точки. Существованіе такихъ точекъ можетъ быть устранено подходящими аксіомами, но не такими, конечно, въ справедливости которыхъ можно убѣдиться на образахъ той или иной эмпирической геометріи. Достаточно будетъ выяснить это на примѣрѣ параболической сѣти, которая, какъ мы знаемъ, осуществляетъ евклидову геометрію, если исключить центръ $O$. Чтобы эта геометрія и эмпирически совпадала съ евклидовой (въ которой прямыя осуществляются, скажемъ, лучами свѣта или натянутыми нитями), точку $O$ нужно взять на большомъ удаленіи отъ земли, напримѣръ, на какой-либо неподвижной звѣздѣ. Если это разстояніе составляетъ $n$ радіусовъ земной орбиты $e$, то наименьшая сфера сѣти, доступная на землѣ, имѣетъ радіусъ $r = {}^1/_2 ne$. Согласно формулѣ (1) § 11, касательное уклоненіе такой сѣти отъ плоскости на разстояніи $a$ отъ точки касанія равняется 0,001 mm., если мы примемъ $a = \sqrt{neh - h^2}$, т. е. приближенно $a = 0{,}38 \sqrt{n}$ km. Для ближайшей неподвижной звѣзды ($\alpha$ Centauri) приблизительно $n = 227\,000$, или, круглымъ счетомъ, $a = 180$ km. Эта сфера осуществляетъ, такимъ образомъ, плоскость съ огромной точностью. Если мы помѣстимъ центръ $O$ еще дальше, то эта сфера могла бы быть разсматриваема, какъ плоскость, въ наиболѣе точныхъ астрономическихъ вычисленіяхъ. Въ этомъ предположеніи псевдо-геометрія § 8-го какъ эмпирически, такъ и въ аксіомахъ совпадаетъ съ евклидовой; лучше сказать, это есть евклидова геометрія, ибо таковая вообще не можетъ быть точнѣе осуществлена.

Даже если бы мы чрезвычайно расширили естественныя границы нашихъ наблюденій, то и въ такомъ случаѣ мы никогда не могли бы обнаружить ни малѣйшаго уклоненія этой „псевдо-геометріи“ отъ „дѣйствительной геометріи“. И, слѣдовательно, мы никогда не могли бы установить, выполнена ли аксіома, относящаяся къ точкѣ $O$, или нѣтъ. Мы не можемъ этого, конечно, доказать, но, мы полагаемъ, мы можемъ утверждать, что никакія аксіомы, которыхъ справедливость могла бы быть констатирована на конечныхъ, доступныхъ намъ разстояніяхъ, не могли бы отдѣлить эту псевдо-геометрію отъ осуществленій евклидовой геометріи.

До сихъ поръ мы принимали, что центръ $O$ сѣти чрезвычайно удаленъ, но съ тѣмъ же правомъ, съ какимъ мы говоримъ въ Евклидовой геометріи о безконечно удаленныхъ точкахъ вообще, мы можемъ представить себѣ и точку $O$ въ безконечности; но въ такомъ случаѣ требованіе, которое какая-либо аксіома относила бы къ точкѣ $O$, эмпирически вообще не могло бы быть провѣрено.

Итакъ, если бы намъ даже удалось при помощи подходящихъ аксіомъ исключить высшія преобразованія евклидовой геометріи, т. е. охарактеризовать ихъ, какъ принадлежащія другому, неевклидову типу, то это были бы аксіомы такой же природы, какъ и аксіома о параллельности; это были бы аксіомы, быть можетъ, допустимыя абстрактно, но недоступныя никакому практическому контролю. Мы здѣсь неявно допустили, что рѣчь идетъ только объ алгебраическихъ преобразованіяхъ съ дѣйствительными основными точками; но мы сдѣлали это только потому, что въ наиболѣе общемъ случаѣ мы еще менѣе могли бы справиться при нашихъ ограниченныхъ элементарныхъ средствахъ съ трудностями задачи.

b) Изъ коллинеацій для насъ имѣютъ значеніе только тѣ, которыя преобразовываютъ всѣ безконечно удаленныя точки также въ безконечно удаленныя точки, т. е. которыя преобразовываютъ безконечно удаленную плоскость въ себя самое. Такого рода преобразованія называются аффинными (ср. § 11). Если $(x, y, z)$ и $(\xi, \eta, \zeta)$ суть соотвѣтствующія точки аффинной коллинеаціи въ координатахъ § 12-го, то всегда имѣютъ мѣсто соотношенія вида:

$$
\begin{aligned}
x &= a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + d_1\,,\\
y &= a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + d_2\,,\\
z &= a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta + d_3\,,
\end{aligned}
$$

съ постоянными коэффиціентами; вмѣстѣ съ тѣмъ имѣютъ мѣсто три такихъ же уравненія съ постоянными коэффиціентами, которыя выражаютъ координаты $\xi$, $\eta$, $\zeta$ черезъ $x$, $y$, $z$. Обосновываемъ ли мы эти преобразованія, какъ здѣсь, чисто аналитически или, какъ въ § 11, чисто геометрически, во всякомъ случаѣ легко убѣдиться, что эта коллинеація преобразовываетъ каждую точку безъ исключенія въ точку же, каждую прямую — въ прямую, каждую плоскость — вь плоскость же. Изъ этой полной однозначности, не имѣющей никакого исключенія, а также изъ возможности однозначнаго же обращенія этихъ соотношеній слѣдуетъ: если мы будемъ называть изображенія конгруэнтныхъ фигуръ также конгруэнтными, а также сообщимъ этимъ изображеніямъ всѣ остальныя соотношенія, связывающія оригиналы, то въ этомъ отображеніи Евклидова пространства всѣ аксіомы Евклидовой геометріи будутъ имѣть мѣсто.

Итакъ, существуетъ безчисленное множество совершенныхъ осуществленій евклидовой геометріи съ обыкновенными точками, прямыми и плоскостями, хотя фигуры, которыя мы при этомъ называемъ конгруэнтными, отнюдь не конгруэнтны въ обычномъ (евклидовомъ) смыслѣ этого слова. Между тѣмъ ни одна изъ этихъ системъ не можетъ быть выдѣлена въ качествѣ „дѣйствительно" евклидовой геометріи при помощи аксіомъ, устанавливающихъ только соотношенія.

**17.** Итакъ, на вопросъ, который мы поставили въ п. 16, приходится отвѣтить отрицательно. Если даже устранить извѣстныя особыя точки и линіи при помощи аксіомъ, которыя, какъ аксіома о параллельныхъ линіяхъ и о полнотѣ системы, никогда не могутъ служить критеріями примѣнимости абстрактной геометріи къ образамъ нашего чувственнаго воспріятія, то существуетъ еще безконечное множество (приближенныхъ) способовъ осуществленія аксіомъ евклидовой геометріи съ „дѣйствительными" точками, прямыми и плоскостями. Но вина этой многозначности, какъ мы видимъ, лежитъ также въ идеѣ конгруэнтности. Аксіомы конгруэнтности у Гильберта не устанавливаютъ конгруэнтности однозначно. Мы сейчасъ формулируемъ это предложеніе точнѣе; предварительно, однако, замѣтимъ въ противовѣсъ нѣкоторымъ философскимъ иллюзіямъ: аксіомы геометріи не содержатъ никакихъ законовъ образованія основныхъ образовъ. Что этого не даютъ аксіомы Гильберта, что онѣ не строятъ прямой, „исходя отъ точки", объ этомъ мы уже сказали выше, но этого не могутъ дать и другія аксіомы. Въ самомъ дѣлѣ, если бы мы имѣли такого рода чисто абстрактный законъ образованія прямой линіи (который, конечно, не можетъ пользоваться никакими физическими средствами), то намъ достаточно было бы присоединить сюда инверсію съ весьма удаленнымъ центромъ, и мы тотчасъ получили бы образъ, который во всѣхъ отношеніяхъ могъ бы сойти за прямую и лишь въ огромномъ удаленіи чисто абстрактно (не матеріально, ибо матеріальная прямая eo ipso ограничена) отличался бы отъ обыкновенной прямой. Помимо этого рода неопредѣленности задачи, здѣсь есть еще неопредѣленность другого рода, болѣе глубокая. Какъ мы сейчасъ сказали, аксіомы Гильберта о конгруэнтности не даютъ опредѣленнаго пріема для построенія отрѣзковъ и угловъ, конгруэнтныхъ даннымъ въ любомъ положеніи; напротивъ, можно было бы предложить безчисленное множество такихъ пріемовъ, оставаясь въ полномъ согласіи съ аксіомами Гильберта. Однако, отсюда отнюдь нельзя сдѣлать вывода, что эта многозначность относится исключительно къ конгруэнтности и отпадаетъ, если мы оставляемъ конгруэнтность въ сторонѣ; напротивъ, понятіе объ инцидентности, о расположеніи, о конгруэнтности, о параллелизмѣ и непрерывности въ аксіомахъ Гильберта въ такой мѣрѣ другъ съ другомъ переплетены, что представляется абсолютно невозможнымъ выдѣлить, обособить ихъ отъ этой тѣсной зависимости и опредѣлить каждое изъ этихъ понятій независимо отъ остальныхъ. Въ эту неопредѣленность вносятъ, такимъ образомъ, свою долю всѣ понятія, въ томъ числѣ и линейность, если смотрѣть на это понятіе, какъ на отсутствіе въ пространствѣ пробѣловъ, просвѣтовъ *).

**18.** Итакъ, аксіомы не даютъ синтеза, созиданія геометрическихъ образовъ; онѣ указываютъ только выборъ соотвѣтственныхъ многообразій и сопряженій изъ всей совокупности мыслимыхъ. Если поэтому мы опустимъ ту или иную аксіому, то выборъ становится шире: тогда

---

*) Есть ли это вообще понятіе допустимое, это вопросъ, который мы здѣсь оставимъ въ сторонѣ.

могутъ проскользнуть системы, удовлетворяющія остальнымъ аксіомамъ, хотя онѣ должны были бы быть исключены, если бы мы возстановили пропущенную аксіому. Это можно ясно видѣть у Гильберта и его послѣдователей на его „патологическихъ“ геометріяхъ, если можно такъ выразиться; это геометріи, которымъ не хватаетъ тѣхъ или иныхъ аксіомъ; тогда остальныя аксіомы получаютъ, кромѣ прежнихъ осуществленій, еще новыя, необычныя. До сихъ поръ еще не сдѣлано опыта осуществленія понятія объ инцидентности, отличнаго отъ обыкновеннаго, нагляднаго его пониманія. Такого рода quasi инцидентность можно, между прочимъ, установить слѣдующимъ образомъ. Каждой точкѣ пространства $P$ при помощи общей (или аффинной) коллинеаціи отнесемъ „изображеніе“ $P'$; относительно каждой прямой мы будемъ говорить, что она quasi инцидентна съ точкой $P$, если она дѣйствительно инцидентна съ ея изображеніемъ $P'$. Точки, съ которыми такимъ образомъ quasi инцидентна нѣкоторая плоскость, принадлежатъ не самой плоскости, а ея изображенію; плоскость опредѣляется тремя точками, но эти точки лежатъ — въ обычномъ смыслѣ этого слова — на изображеніи этой плоскости.

При такомъ положеніи дѣлъ дать опредѣленіе прямой или плоскости самой по себѣ представляется совершенно безнадежнымъ; къ тому же свойства отдѣльной прямой, какъ носительницы точекъ, столь мало характерны, что они принадлежатъ также каждой кривой („нулевого типа“ [79]), которая взаимно однозначно отображается на прямой.

**19.** Итакъ, одна возможность отобразить пространство въ себѣ самомъ при помощи коллинеаціи уже заранѣе обрекаетъ на неудачу всякую попытку, имѣющую цѣлью однозначно опредѣлить пространственные образы и допущенныя между ними соотношенія, не прибѣгая къ физическимъ законамъ *). Каждая коллинеація (и, въ частности, аффинная) одно-однозначно [80]) относитъ каждой точкѣ точку же, каждойпрямой — прямую каждой плоскости — плоскость въ качествѣ изображенія; и въ этомъ соотвѣтствіи нѣтъ ни малѣйшаго исключенія, между тѣмъ какъ при высшихъ

---

[79]) Русскій терминъ не установился; по-французски „une courbe du genre 0“, по-нѣмецки „eine Curve vom Geschlecht 0“. Такъ какъ этотъ терминъ встрѣчается здѣсь лишь попутно, то мы не считаемъ нужнымъ входить въ объясненіе этого сложнаго понятія.

*) Если, напримѣръ, мы строимъ прямую помощью визированія, то мы пользуемся закономъ прямолинейнаго распространенія свѣта.

[80]) Одно-однозначное (или совершенное) сопряженіе пространства съ самимъ собой — это такое сопряженіе, при которомъ не только каждой точкѣ соотвѣтствуетъ одна и только одна точка пространства, но и каждая точка является соотвѣтствующей одной и только одной точкѣ. Это есть однозначное сопряженіе, однозначно-обратимое.

преобразованіяхъ, какъ мы видѣли, всегда появляются основныя точки. Если поэтому мы будемъ относительно изображеній точекъ, прямыхъ и плоскостей употреблять выраженія „quasi инцидентны“, „quasi параллельны“, „quasi конгруэнтны“ и т. д., когда соотвѣтствующіе этимъ изображеніямъ оригиналы дѣйствительно находятся въ соотношеніи инцидентности, параллелизма, конгруэнтности и т. д., то этотъ способъ выраженія можно провести съ совершенно безукоризненной правильностью, даже, напримѣръ, въ томъ случаѣ, когда изображеніе $\eta'$ безконечно удаленной плоскости оказывается конечнымъ, такъ что двѣ прямыя $a'$, $b'$, проходящія черезъ одну и ту же точку $\eta'$ и представляющія собою изображенія прямыхъ $a$ и $b$, придется называть quasi параллельными. Для большей наглядности, однако, мы займемся аффиннымъ преобразованіемъ пространства, при которомъ безконечно удаленная плоскость переходитъ въ себя самое, и разсмотримъ, какое вліяніе оно оказываетъ на конгруэнтность.

Мы напомнимъ прежде всего Штейнеровы построенія при помощи линейки, изложенныя нами въ § 5-омъ, правда, частью нѣсколько нагляднѣе, но зато и менѣе просто, чѣмъ у Штейнера. Такъ какъ quasi параллелизмъ нашей псевдо-геометріи представляетъ собой также дѣйствительный параллелизмъ [81]), то мы можемъ безъ вспомогательной окружности, одной линейкой откладывать отрѣзки, quasi конгруэнтные данному на той же или на параллельной прямой. Для того же, чтобы откладывать quasi конгруэнтные отрѣзки на пересѣкающихся прямыхъ, линейки не достаточно; въ первоначальномъ пространствѣ $R$, согласно § 5-му, для этого нужна сфера; въ преобразованномъ пространствѣ $R'$ этой сферѣ отвѣчаетъ поверхность эллипсоида, которую мы будемъ называть quasi сферой и будемъ посредствомъ нея выполнять построенія § 5-го, какъ если бы это была дѣйствительно сфера. Эти построенія никогда не могутъ привести къ противорѣчію, хотя „конгруэнтность“, которую они воспроизводятъ, отлична отъ эмпирической. При помощи одной линейки можно построить безчисленное множество точекъ дѣйствительной сферы (пользуясь, однако, плоскостями), если даны три взаимно-перпендикулярныхъ діаметра. Ихъ изображенія называютъ взаимно-сопряженными діаметрами эллипсоида. Такъ какъ всѣ построенія при помощи линейки аффиннымъ преобразованіемъ переносятся со сферы на эллипсоидъ, а, съ другой стороны, эллипсоидъ вполнѣ опредѣляется любыми тремя попарно сопряженными діаметрами, то мы можемъ дополнить сдѣланное въ п. 17 замѣчаніе о конгруэнтности слѣдующимъ образомъ: Изъ каждаго осуществленія аксіомъ конгруэнтности можно получить при помощи аффиннаго преобразованія

[81]) Такъ какъ quasi параллельныя прямыя имѣютъ общую безконечно удаленную точку, которая остается безконечно удаленной при аффинномъ преобразованіи, то онѣ являются и дѣйствительно параллельными.

пространства безчисленное множество другихъ; чтобы фиксировать одно изъ нихъ, можно любые три отрѣзка $x$, $y$, $z$, выходящіе изъ одной точки $O$, принять за „взаимно перпендикулярные“ и „конгруэнтные“. Они опредѣляютъ тогда „сферу“, которая устанавливаетъ „конгруэнтность“ помощью построеній § 5-го. Если мы хотимъ, чтобы эта „конгруэнтность“ совпадала съ эмпирической, которую мы собственно привыкли называть этимъ словомъ, то для этого нѣтъ иного средства, какъ подобрать эти отрѣзки $x$, $y$, $z$, (пользуясь, скажемъ, циркулемъ) по возможности конгруэнтными и перпендикулярными въ эмпирическомъ смыслѣ слова.

**20.** Этимъ мы не желаемъ сказать, что, основываясь на этихъ допущеніяхъ, можно практически выполнять построенія; мы хотѣли только дать минимумъ операцій, опирающихся на физическіе законы (ибо безъ нихъ мы не могли бы осуществить эмпирическую конгруэнтность и ортогональность отрѣзковъ $x$, $y$, $z$), при помощи которыхъ дальше мы могли бы уже строить остальные образы геометріи на основаніи совершенно абстрактныхъ построеній и однозначно установить основныя соотношенія, которыя требуются аксіомами. При этомъ категорически обнаруживается, что въ „геометрической“ геометріи извѣстные объекты необходимо нужно принимать, какъ напередъ данные, именно, точки, прямыя и плоскости,—что сюда должны быть еще присоединены и другія эмпирическія данныя, какъ, напримѣръ, у насъ здѣсь „равные и взаимно перпендикулярные“ отрѣзки $x$, $y$, $z$, если мы хотимъ, чтобы логически построенная геометрія въ нашемъ представленіи совпадала съ обычной. Эта точка зрѣнія уже не разъ высказывалась; первымъ ее, повидимому, высказалъ Гауссъ, въ памятномъ письмѣ къ Бесселю (Bessel, 1829), въ которомъ онъ такъ выражаетъ свою математическую вѣру: „по глубочайшему моему убѣжденію, ученіе о пространствѣ занимаетъ по отношенію къ нашему знанію очевидныхъ истинъ совершенно иное положеніе, чѣмъ чистая наука о величинахъ; здѣсь наше познаніе совершенно не имѣетъ того полнаго убѣжденія въ ихъ необходимости (а, слѣдовательно, и въ абсолютной ихъ истинности), которая свойственна послѣдней. Мы должны смиренно признать, что въ то время, какъ число представляетъ собой исключительно продуктъ нашего духа, пространство имѣетъ реальное существованіе помимо нашего духа, которому мы, такимъ образомъ, a priori не можемъ вполнѣ предписывать законы“.

Слово „вполнѣ“ здѣсь слѣдуетъ подчеркнуть, слово „пространство“ было бы точнѣе замѣнить выраженіемъ „пространственное расположеніе“. Въ правильности логическаго формализма геометріи Гауссъ, конечно, не сомнѣвался; но необходимость тѣхъ именно аксіомъ, на которыя этотъ формализмъ опирается, могла казаться ему проблематичной, такъ какъ онъ уже убѣдился, что помимо евклидовой геометріи логически допустима также гиперболическая. Можно ли поддерживать въ настоящее время болѣе высокую оцѣнку ариѳметики — этотъ вопросъ мы оставимъ въ сторонѣ.

**21.** Это изреченіе Гаусса обнаруживаетъ замѣчательное различіе, даже противоположность взглядовъ Гаусса и Ньютона. Послѣдній пытается построить свою механику въ абсолютномъ пространствѣ и въ абсолютномъ времени; именно онъ принимаетъ:

„Абсолютное, истинное математическое время протекаетъ само по себѣ, по своей природѣ, равномѣрно и безъ отношенія къ чему бы то ни было“.

„Абсолютное пространство остается по своей природѣ и безъ отношенія къ какому бы то ни было внѣшнему объекту всегда одинаковымъ и неподвижнымъ“. (Philosophiae naturalis principia mathematica).

Мысль Ньютона ясна: элементарная механика оріентируетъ всѣ процессы движенія относительно земли, какъ неподвижнаго тѣла, но, если мы сравнимъ землю съ солнечной системой, то окажется, что земля сама имѣетъ вращеніе, или, по крайности, что математически-механическое изображеніе движенія солнечной системы оказывается необычайно простымъ, если мы принимаемъ солнце за „неподвижное“ тѣло и относимъ къ нему остальныя движенія. Въ механикѣ солнечной системы для установленія системы координатъ пришлось бы уже воспользоваться, скажемъ, плоскостью эклиптики. Но по отношенію къ неподвижнымъ звѣздамъ солнце, какъ оказывается, само имѣетъ поступательное движеніе; для изслѣдованія этого движенія мы должны были бы приковать наши координаты къ своду неподвижныхъ звѣздъ. Но и это тщетно! Спектральный анализъ обнаружилъ также существованіе собственнаго движенія неподвижныхъ звѣздъ, и въ качествѣ послѣдняго убѣжища въ поискахъ за твердой опорой, быть можетъ, еще остается развѣ только млечный путь. Такимъ образомъ, астрономъ-практикъ теряетъ одну точку опоры за другой, между тѣмъ какъ теоретикъ, который отнюдь не озабоченъ осуществленіемъ своихъ притязаній, исходитъ отъ абсолютнаго пространства, какъ отъ наиболѣе достовѣрнаго факта въ его сознаніи. Абсолютное пространство и абсолютное время ему совершенно необходимы при построеніи механики и физики; но они не представляютъ собою чего-либо такого, чѣмъ мы вполнѣ владѣемъ; они составляютъ скорѣе конечную цѣль, къ которой мы стремимся тяжкимъ трудомъ и безконечными усиліями и которой никогда не достигнемъ. Эта точка зрѣнія, въ особенности относительно времени, вполнѣ соотвѣтствуетъ также современному состоянію физики и механикѣ, гдѣ фиксированіе времени представляетъ совершенно своеобразныя трудности *).

*) H. Poincaré. „La valeur de la science“.

## § 14. Интуиція.

1. Если мы пробѣжимъ въ обратномъ порядкѣ цѣльную, строго дедуктивную цѣпь геометрическихъ теоремъ, то мы необходимо придемъ къ предложеніямъ, которыя дальнѣйшаго доказательства уже не допускаютъ и въ качествѣ „аксіомъ“ составляютъ основные законы въ области геометрической мысли; при такихъ условіяхъ закономѣрное построеніе пространственныхъ образовъ, интуитивно соотвѣтствующихъ геометрическимъ понятіямъ, возможно только въ томъ предположеніи, что основные образы намъ даны. Такъ какъ плоскость можетъ быть образована при помощи пучка лучей, пересѣкающихъ данную прямую, то въ послѣдней инстанціи мы должны, такъ сказать, имѣть готовыми только прямыя линіи; изъ этого, конечно, не слѣдуетъ, что прямая можетъ быть опредѣлена сама по себѣ. Но опредѣленія плоскости при помощи аксіомъ (аксіомы $I_4$, $I_5$, $I_6$) можно избѣжать, если мы будемъ строить плоскость указаннымъ сейчасъ способомъ и примемъ въ качествѣ аксіомы, что прямая, встрѣчающая двѣ стороны треугольника, необходимо встрѣчаетъ и третью (при чемъ подъ сторонами мы разумѣемъ неограниченныя прямыя, образующія своимъ пересѣченіемъ треугольникъ[82]); только ученіе о параллелизмѣ въ евклидовой геометріи требуетъ при такомъ изложеніи другой разработки.

Кромѣ того, нужно еще указать, какъ однозначно осуществить соотношенія, требуемыя аксіомами конгруэнтности. При осуществленіи конгруэнтности при помощи Штейнеровыхъ построеній, которыя мы съ этой именно цѣлью и предпослали въ § 5-омъ, въ каждой плоскости принимается еще существованіе окружности съ ея центромъ. Эти окружности можетъ дать одна сфера, которая, въ свою очередь, какъ указано въ § 13-омъ, можетъ быть построена по точкамъ, безъ дальнѣйшаго пособія аксіомъ конгруэнтности, по даннымъ тремъ конгруэнтнымъ и взаимно перпендикулярнымъ діаметрамъ; но равенство и ортогональность этихъ трехъ діаметровъ необходимы только для того, чтобы достигнуть совпаденія чисто абстрактной конгруэнтности съ эмпирической; помимо этого, какъ указано въ § 13-омъ, эти отрѣзки могутъ быть выбраны совершенно произвольно. Тогда то же построеніе по точкамъ даетъ уже, правда, не сферу, а эллипсоидъ, но quasi конгруэнтность, которую мы получаемъ при посредствѣ этого эллипсоида съ помощью Штейнеровыхъ построеній, удовлетворяетъ всѣмъ аксіомамъ (сѣченія діаметральными плоскостями теперь будутъ уже, конечно, эллипсами; но мы будемъ ихъ трактовать, какъ будто бы это были окружности[83]). Если мы примемъ (согласно устанавливаемому нами

---

[82]) Это построеніе, собственно, и выполнено авторомъ ниже (гл. III, 4) при изложеніи проективной геометріи.

[83]) Это значитъ, мы будемъ пользоваться эллипсомъ въ соотвѣтствующей плоскости совершенно такъ же, какъ мы пользовались основной окружностью для производства Штейнеровыхъ построеній.

опредѣленію) за „безконечно удаленныя“ точки тѣ, которыхъ мы не можемъ достичь, исходя отъ любой другой точки, конечнымъ числомъ равныхъ (съ точки зрѣнія аксіомъ конгруэнтности) шаговъ, то мы получаемъ еще болѣе широкія геометрическія системы, которыя удовлетворяютъ всѣмъ аксіомамъ Гильберта, не совпадая съ нашей обычной интуитивной геометріей. Болѣе того, мы не только можемъ совершенно произвольно выбрать три „діаметра“, не считаясь съ ихъ равенствомъ и ортогональностью, но точка ихъ пересѣченія $O$ можетъ даже не служить серединой каждаго діаметра въ эмпирическомъ смыслѣ этого слова. И если мы при такихъ условіяхъ будемъ вновь производить тѣ же „сферическія построенія“, то мы получимъ эллипсоидъ, который въ качествѣ (псевдо-)сферы опредѣляетъ евклидову (псевдо-)геометрію съ Евклидовой конгруэнтностью. Нѣкоторая плоскость $\eta$, „конечная“ — съ точки зрѣнія нашихъ обычныхъ представленій, становится „безконечно удаленной“ плоскостью этой псевдо-геометріи въ смыслѣ законовъ конгруэнтности, въ ней царящихъ. Въ себѣ самой эта евклидова псевдо-геометрія не содержитъ никакого противорѣчія. Когда выбрана „середина“ $O$ діаметральной прямой $xx$ и проходящая черезъ нее діаметральная плоскость $xy$, то діаметральная прямая $yy$ можетъ занять еще $\infty^1$ положеній; а третья діаметральная прямая $zz$ можетъ занять еще $\infty^2$ положеній; если, далѣе, мы на прямой $xx$ фиксируемъ одну точку нашей „сферы“, то остальныя пять точекъ нашихъ діаметральныхъ прямыхъ, принадлежащія сферѣ, могутъ еще имѣть $\infty^5$ различныхъ положеній [84]).

Итакъ, существуетъ $\infty^8$ геометрій, которыя опирируютъ съ обыкновенными точками, прямыми и плоскостями и удовлетворяютъ всѣмъ аксіомамъ евклидовой геометріи. Путемъ чисто геометрическихъ опредѣленій ни одна изъ нихъ не можетъ быть выдѣлена изъ всего комплекса. Напротивъ, для этого необходимо прибѣгнуть къ движенію твердаго тѣла въ эмпирическомъ смыслѣ этого слова *).

Этихъ важныхъ предложеній мы не имѣемъ возможности доказать элементарными средствами; тѣмъ не менѣе мы не хотѣли опустить ихъ

---

84) Подъ символомъ $\infty^k$ разумѣютъ мощность многообразія (см. т. I, § 1), въ которомъ каждый элементъ опредѣляется системой значеній $k$ независимыхъ параметровъ (координатъ). Такъ, напримѣръ, на плоскости имѣется $\infty^2$ точекъ, ибо каждая точка опредѣляется двумя координатами; въ трехмѣрномъ пространствѣ имѣется $\infty^3$ точекъ; въ плоскости имѣется $\infty^2$ прямыхъ, ибо каждая прямая опредѣляется двумя параметрами, а въ пространствѣ имѣется $\infty^4$ прямыхъ.

Нужно сказать, что приведенное выше опредѣленіе вызываетъ возраженія, входить въ которыя мы здѣсь не имѣемъ возможности.

*) Независимо отъ понятія о конгруэнтности нельзя точно опредѣлить понятіе о твердомъ тѣлѣ; можно развѣ только сказать, что это — тѣло, которое оказываетъ большое сопротивленіе усиліямъ нашихъ мускуловъ, когда мы его сжимаемъ.

вовсе, потому что они содержатъ указаніе на 8 постоянныхъ евклидовой геометріи, которыя чисто геометрическими методами не могутъ быть установлены. Противъ двухъ неевклидовыхъ геометрій съ идеалистической точки зрѣнія Канта часто указывали на ту единственную постоянную (параметръ) пространства, которая въ нашемъ осуществленіи этой геометріи фигурируетъ въ видѣ радіуса соотвѣтственно ортогональной или діаметральной сферы; существованіе такой постоянной именно и дѣлаетъ невозможнымъ признать образы нашего эмпирическаго созерцанія исключительно продуктомъ дѣятельности нашего духа. Именно, въ геометріи есть нѣчто, надъ чѣмъ наша мысль (еще?) не властвуетъ. Если же мы построимъ ту или другую неевклидову геометрію, не пользуясь движеніемъ, какъ мы это сдѣлали относительно евклидовой, то она будетъ зависѣть отъ девяти произвольныхъ постоянныхъ.

**2.** При посредствѣ образовъ, которые мы предполагаемъ данными, можно образовать всѣ остальные съ помощью пріемовъ, которые будутъ тѣмъ точнѣе, чѣмъ лучше наши исходные образы удовлетворяютъ требованіямъ аксіомъ. Такъ какъ это всегда можетъ быть осуществлено лишь съ бо́льшимъ или меньшимъ приближеніемъ, то чистая геометрія, свободная отъ всякихъ изъяновъ, существуетъ только идеально; ея образы не имѣютъ интуитивнаго существованія, они выливаются лишь въ схематизмъ Канта, въ законъ ихъ образованія.

Съ точки зрѣнія этой идеальной геометріи, система интуитивныхъ пространственныхъ образовъ должна быть признана весьма нагляднымъ, но несовершеннымъ осуществленіемъ чистыхъ идей. Къ тому же это не единственное возможное осуществленіе ихъ; точки, прямыя и плоскости являются только представителями родовыхъ понятій, именно пространственныхъ образовъ нулевой, первой и второй ступени въ трехмѣрномъ линейномъ многообразіи, и эти общіе образы также удовлетворяютъ аксіамамъ геометріи; поэтому обыкновенные пространственные образы осуществляютъ идеальную геометрію весьма многообразно: каждому изъ пространственныхъ образовъ можно присвоить роль идеальной точки. Такимъ образомъ, матеріальныя точки, прямыя и плоскости обыкновенной геометріи являются только однимъ изъ безчисленнаго множества осуществленій, наглядной иллюстраціей идеальной геометріи, *παράδειγμα* (примѣръ), по выраженію Платона. Отдѣлить эти различныя интерпретаціи идеальной геометріи абстрактно одну отъ другой a priori, а не по отношенію къ одной изъ нихъ, составляетъ новую задачу геометріи, разрѣшеніе которой, если оно вообще возможно, во всякомъ случаѣ потребуетъ введенія въ геометрію новыхъ понятій.

**3.** Итакъ, всѣ старанія, которыя прилагаютъ авторы популярныхъ сочиненій по геометріи, интуитивно достигнуть при помощи предѣльныхъ процессовъ точныхъ точекъ, прямыхъ и плоскостей, вполнѣ соотвѣтствующихъ аксіомамъ, всегда относятся къ нашей интерпретаціи, къ этой одной иллюстраціи чистой геометріи; въ частности, опредѣленія основныхъ образовъ у Евклида можно признать развѣ только описаніемъ этихъ иллюстрацій. Въ обезпеченіе правильности геометрическихъ истинъ это не вноситъ ничего. Геометрія есть точная наука, потому что она сама строитъ свои основныя понятія; правда, она опирается при этомъ на опытъ и ставитъ опытныя задачи своею цѣлью; но первымъ источникомъ познанія,— по крайней мѣрѣ, для научной геометріи,— опытъ не служитъ. Для развивающейся системы геометріи опытъ имѣетъ исключительно то значеніе, что онъ приводитъ къ основной ея задачѣ — дать совмѣстно съ физикой и механикой координированную картину мірозданія. Безъ этой конечной своей задачи геометрія была бы отрѣзана отъ притока извнѣ новыхъ, плодотворныхъ идей; въ дѣлѣ познанія она играла бы не бо́льшую роль, чѣмъ остроумная игра,— напримѣръ, чѣмъ шахматная игра, которая тоже сама созидаетъ свои основныя понятія и аксіомы и могла бы быть названа точной наукой, если бы было установлено понятіе о самомъ правильномъ ходѣ (хотя бы путемъ дальнѣйшаго ограниченія аксіомъ игры). Но, чтобы извѣстная логическая область была пригодна для абстрактнаго опредѣленія пространственныхъ образовъ, она должна почерпнуть въ нашихъ эмпирическихъ представленіяхъ уже готовые зачатки координирующей мысли и дать имъ свободное развитіе. Отсюда необходимость при преподаваніи исходить изъ опыта. Но такъ какъ начатки, взятые изъ эмпирическихъ представленій, еще не могутъ быть разносторонне между собой связаны, то мы не можемъ быть напередъ увѣрены, что при свободномъ развитіи они вообще окажутся совмѣстными. Такъ напримѣръ, еще до того, какъ мы начинаемъ заниматься геометріей, мы уже находимъ въ себѣ сильно развитое понятіе о сходствѣ, или о подобіи, а также и представленія, что прямая въ каждомъ изъ двухъ своихъ направленій уходитъ въ безконечность. Соединить эти двѣ безконечно удаленныя точки въ одну, какъ это дѣлаетъ параболическая геометрія, значитъ впасть въ противорѣчіе съ нашимъ непосредственнымъ представленіемъ. Только при помощи псевдогеометрическихъ доказательствъ (при помощи пучка лучей) можно убѣдиться, что эти точки „дѣйствительно“ совпадаютъ. Если мы теперь введемъ въ геометрическую систему понятіе о подобіи и о двухъ безконечно удаленныхъ точкахъ на прямой, то не должны ли мы ожидать, что эти понятія совмѣстны? Между тѣмъ фактически оказывается, что это не имѣетъ мѣста: въ гиперболической геометріи [85]) подобія не существуетъ,— по крайней мѣрѣ, въ Евклидовомъ опредѣленіи этого термина. Этотъ примѣръ достаточно ясно обнаруживаетъ, что расплывчатыя понятія, почерпнутыя изъ опыта, не имѣютъ достаточно опредѣленнаго со-

[85]) Въ которой прямая имѣетъ двѣ безконечно удаленныя точки.

держанія; иначе между понятіями, пріобрѣтенными такимъ образомъ, не могло бы быть противорѣчія, если только мы не склонны подвергнуть сомнѣнію возможность самаго опыта. Опыта нельзя опредѣлить законами, которые каждый, такъ сказать, можетъ ощупать собственными руками. То закономѣрное, что можно „почерпнуть интуиціей", въ самомъ благопріятномъ случаѣ есть лишь приближеніе, коренящееся въ первыхъ попыткахъ нашей мысли координировать окружающее. Отсюда возникаетъ обязанность геометріи доказать совмѣстность основныхъ ея посылокъ, какъ это впервые было сдѣлано въ „Основаніяхъ геометріи" Гильберта.

4. Такимъ образомъ, если идеальная геометрія можетъ гордиться творческой дѣятельностью человѣческаго духа, то эта гордость умѣряется все же сознаніемъ, что идеальная геометрія, которую можно построить современными научными средствами, еще далеко не настоящая геометрія. Если задача геометріи заключается въ томъ, чтобы при содѣйствіи механики и физики координировать все содержаніе нашихъ ощущеній и объединить ихъ въ одномъ цѣльномъ міросозерцаніи, то опредѣленіе нашихъ эмпирическихъ пространственныхъ представленій составляетъ какъ точку отправленія, такъ и отдаленную, быть можетъ, даже недостижимую цѣль всякой геометріи. Геометрическая система Паша, которую мы старались охарактеризовать въ § 10-омъ, какъ „натуральную геометрію", знаменуетъ, такимъ образомъ, въ этомъ процессѣ эволюціи геометріи не достигнутую цѣль, а только начало; вѣдь и эта геометрія счастливо прокладываетъ себѣ путь только благодаря тому, что она, въ концѣ концовъ, все-таки работаетъ отвлеченными понятіями, которыя лишь приближенно опредѣляютъ ея содержаніе. Только изъ этихъ абстрактныхъ понятій она выводитъ свои теоремы и лишь потомъ ограничиваетъ ихъ силу различнаго рода дополненіями (на основаніи непрерывности пространства), какъ-то: „напримѣръ", „вообще говоря", „если части расположены не слишкомъ неблагопріятно" и т. п. Если бы нѣкоторая геометрія хотѣла устанавливать свойства прямыхъ и другихъ линій на плоскости, начерченныхъ карандашемъ и линейкой, то она должна была бы считаться съ тѣмъ обстоятельствомъ, что дѣйствительныя точки всегда имѣютъ протяженіе, что прямая имѣетъ толщину. Чтобы и здѣсь получить законы, можно было бы разсматривать точку, какъ маленькій кругъ, прямую — какъ узкую полоску между двумя параллелями. Если мы будемъ двигать такую полоску въ плоскости такимъ образомъ, чтобы она хоть частью покрывала двѣ ея кругообразныя точки $A$ и $B$ и въ предѣлѣ касалась ихъ, то она опишетъ область $\varphi(A, B)$ — „поле", въ предѣлахъ котораго полосообразная прямая опредѣляется точками $A$ и $B$; два такихъ поля $\varphi(A, B)$ и $\varphi(C, D)$ имѣютъ тогда общую область $\psi$ — „поле" точки пересѣченія прямыхъ $AB$ и $CD$. Задача такой геометріи заключалась бы въ томъ, чтобы установить зависимость поля $\varphi(A, B)$ отъ $A$ и $B$ и области $\psi$ отъ

$\varphi(A, B)$ и $\varphi(C, D)$. Быть можетъ, чтобы получить простые законы, пришлось бы приближенно замѣнить область $\varphi$ гиперболой, область $\psi$ надлежащимъ образомъ подобраннымъ эллипсомъ; но это составляетъ одну изъ главныхъ задачъ „приближенной геометріи", о чемъ мы уже говорили въ § 10-омъ. Врядъ ли нужно говорить, что и эта геометрія должна дѣлать упрощающія допущенія,—которыя, въ свою очередь, не были бы возможны, если бы за ними не стояла чистая геометрія, въ которой понятія о точкахъ, прямыхъ и плоскостяхъ строго опредѣлены. Если бы мы захотѣли избѣжать этой необходимости, скажемъ, соображеніями такого рода, что границы полосъ, въ свою очередь, представляютъ собой болѣе тонкія полоски, то этимъ болѣе тонкимъ полоскамъ вновь пришлось бы приписать границы и т. д. Такимъ образомъ, приближенная геометрія становится основой приближеній второго порядка, на которыя, въ свою очередь, опираются приближенія третьяго порядка и т. д. Но ни одна изъ этихъ системъ не могла бы сдѣлаться объектомъ научной обработки безъ допущеній, которыя предполагаютъ закономѣрность, согласную съ нашими теперешними понятіями, и это возможно только на почвѣ геометріи, располагающей опредѣленными понятіями о точкахъ, прямыхъ и плоскостяхъ. Отсюда съ безусловной необходимостью вытекаетъ, что мы поступаемъ совершенно цѣлесообразно, если сознательно строимъ идеальную геометрію. Всякая геометрія, въ концѣ концовъ, есть геометрія идеальная, даже если она не ставитъ себѣ такихъ задачъ,— если это не обнаруживается ясно въ ея изложеніи *).

**5.** Однако, идеальная геометрія должна остерегаться постоянно повторяющейся ошибки, выражающейся въ стремленіи искусственно провести эмпирическія представленія въ согласіе съ чистыми, отвлеченными понятіями. Это есть, очевидно, обратное воздѣйствіе абстрактно совершенной геометріи на ея чувственный субстратъ, поскольку дѣло не сводится просто къ тому, чтобы пренебрегать уклоненіями реальныхъ образовъ отъ соотвѣтствующихъ понятій. Обыкновенно полагаютъ, что эти уклоненія могутъ быть искусственно устранены процессомъ предѣльнаго перехода. Исходя изъ той точки зрѣнія, что начерченные образы тѣмъ точнѣе соотвѣтствуютъ аксіомамъ, чѣмъ тоньше и тщательнѣе выполнены чертежи, дѣлаютъ обыкновенно заключеніе, что эти (реальныя) фигуры достигнутъ полной точности, если мы сведемъ точку совершенно къ нулю, совершенно лишимъ прямыя ширины и толщины, а въ плоскости сохранимъ только длину и ширину, уничтоживъ ея толщину. На недопустимость такого вывода мы уже указали въ первой главѣ. Правильно проведенный процессъ предѣльнаго перехода можетъ имѣть только одну разумную цѣль: вызывая въ нашемъ представленіи безконечный рядъ то-

*) Геометрія, которая отклоняла бы такого рода идеальную постановку, необходимо должна была бы искать опору въ номинализмѣ.

чекъ, прямыхъ и плоскостей, которыя становятся все тоньше и тоньше, съ одной стороны, доказать возможность и необходимость идеи совершенно точныхъ основныхъ образовъ, а съ другой стороны — дать процессъ, который обратно переносилъ бы эту идею на эмпирическіе объекты. Предѣльный процессъ представляетъ собой такимъ образомъ схематизмъ этихъ чистыхъ понятій, какъ его понимаетъ Кантъ, т. е. пріемъ, дающій возможность отнести эти понятія къ объектамъ. Что касается чистыхъ понятій о точкѣ, прямой и плоскости, то къ нимъ процессы предѣльнаго перехода не относятся, потому что роль точекъ могутъ взять на себя также сферы, окружности, числовыя группы и т. д.

**6.** Совершенно инымъ путемъ старается привести наши представленія въ согласіе съ чистыми понятіями Кантъ; онъ допускаетъ источникъ познанія геометрическихъ истинъ, отличный отъ чистаго мышленія и чувственнаго воспріятія — чистое воззрѣніе a priori. Чтобы занять опредѣленную позицію относительно этого труднаго вопроса, оставаясь на почвѣ математическихъ соображеній, мы будемъ исходить отъ замѣчанія философа Наторпа (Natorp): „математики въ такой мѣрѣ всосали въ плоть и кровь общее понятіе о пространствахъ любого числа измѣреній и любой характеристики, что они часто перестаютъ понимать Евклидово, Ньютоново, Кантово понятіе о нашемъ пространствѣ, къ существеннымъ признакамъ котораго принадлежитъ его единственность. Это и не трудно себѣ уяснить: въ самомъ дѣлѣ, этотъ признакъ единственности коренится не въ математической сторонѣ дѣла, а предполагается уже самымъ понятіемъ существованія, которое вообще ничего иного не выражаетъ, какъ опредѣленность въ единственномъ видѣ, въ отличіе отъ безчисленнаго множества представляющихся возможностей; а это понятіе дѣйствительно и безусловно предполагаетъ единственность. Ни одно мѣсто существующаго не опредѣлено однозначно, если однозначно не опредѣлено само пространство, которое только и представляетъ собой систему условій опредѣленія мѣста. Хотя это требованіе само по себѣ отнюдь не математическое, отсюда вытекаетъ все же для математика задача показать, при какихъ предположеніяхъ эта система опредѣленія мѣста дѣйствительно будетъ замкнута въ самой себѣ, а слѣдовательно, будетъ единственной". (Unterrichtsblätter für Math. u. Naturw., 1902, Heft 1.). Существованіе пространства (въ этомъ порядкѣ идей это означаетъ: геометрической системы, какъ одной единственной, абсолютно опредѣленной) есть основная предпосылка абстрактной механики; именно, послѣдняя предполагаетъ геометрію, въ которой конгруэнтность опредѣлена независимо отъ понятій о движеніи, чтобы, обратно, понятіе о движеніи и о твердомъ тѣлѣ можно было чисто абстрактно построить на конгруэнтности. Мы оказались бы въ ложномъ кругу, если бы мы захотѣли опредѣлить конгруэнтность при помощи движенія, а понятіе о твердомъ тѣлѣ при помощи конгруэнтности. Если мы предполагаемъ конгруэнтность, то движеніе представляетъ собой прежде всего, совершенно независимо отъ времени, процессъ образованія непрерывнаго ряда конгруэнтныхъ фигуръ, такъ что соотвѣтствующія точки непрерывно заполняютъ опредѣленныя кривыя — ихъ „пути“. Эти различныя фигуры называются „положеніями“ одной изъ нихъ, — „движущейся“ фигуры; каждаяизъ конгруэнтныхъ фигуръ можетъ быть принята за „движущуюся“. Разстояніе движущейся точки въ различныхъ ея положеніяхъ, измѣряемое по ея пути, называется пробѣгомъ, или пройденнымъ разстояніемъ до соотвѣтствующаго положенія. Подъ понятіемъ же **времени** мы разумѣемъ опредѣленіе, содержащее характеръ величины, которое должно быть присоединено, чтобы мы могли отличать различныя положенія движущейся точки; съ этой величиной должны быть однозначно и непрерывно сопряжены **разстоянія**, проходимыя движущейся точкой. Согласно этому опредѣленію время имѣетъ только одно измѣреніе и можетъ, такимъ образомъ, быть измѣрено и отображено при помощи одной перемѣнной $t$. Движеніе точки по прямолинейному пути называется „равномѣрнымъ“, если проходимыя ею разстоянія пропорціональны времени; на этомъ, извѣстнымъ способомъ, основываютъ опредѣленія скорости и ускоренія. Точки прямой могутъ быть безчисленнымъ множествомъ способовъ опредѣлены при помощи одной перемѣнной $t$; это значитъ — точка можетъ двигаться по прямой безчисленнымъ множествомъ различныхъ способовъ. Тѣла, которыя попарно такъ опредѣлены *), что мы должны представлять себѣ ихъ въ движеніи, называются **матеріальными** тѣлами, если, при этомъ, при достаточномъ удаленіи всѣхъ остальныхъ тѣлъ каждыя два тѣла движутся по направленію другъ къ другу [86]). Если при этомъ ихъ ускоренія равны (но противоположны по направленію), то мы говоримъ, что тѣла взаимно **эквивалентны**; если два матеріальныхъ тѣла эквивалентны съ третьимъ, то они эквивалентны другъ съ другомъ. Если изъ трехъ матеріальныхъ тѣлъ $A_1$, $A_2$, $A_3$ послѣднее въ присутствіи тѣла $A_2$ получаетъ болѣе сильное ускореніе, чѣмъ тѣло $A_2$, и если, далѣе, тѣло $A_2$ въ присутствіи $A_1$ ускоряется сильнѣе, нежели тѣло $A_1$, то тѣло $A_3$ въ присутствіи тѣла $A_1$ ускоряется сильнѣе, нежели послѣднее; въ каждой комбинаціи третье тѣло предполагается достаточно удаленнымъ. Благодаря этимъ аксіомамъ эквивалентность подходитъ подъ понятіе величины; эта величина называется **массой**. Время и масса суть основныя понятія механики; преды-

*) Указать, **какъ** это осуществляется,—задача будущаго.

[86]) Законъ всемірнаго тяготѣнія, который въ обыкновенной формулировкѣ уже **предполагаетъ** понятіе о матеріальномъ тѣлѣ, здѣсь принимается за точку отправленія и служитъ для опредѣленія матеріальнаго тѣла. Очень трудно сказать, въ какой мѣрѣ дѣйствительно возможно провести эту точку зрѣнія черезъ всю механику.

дущія опредѣленія, по трудности предмета, должны только считаться предварительными попытками опредѣлить время и массу постольку, поскольку это необходимо для чистой механики. Для примѣненія этихъ понятій къ дѣйствительности долженъ быть еще данъ ихъ схематизмъ, законоположеніе, которымъ они вводятся. Схематизмъ измѣренія времени представляетъ чрезвычайныя трудности, которыя коренятся въ одномѣрности времени. Какъ мы на прямой не можемъ откладывать равныхъ отрѣзковъ безъ пособія другихъ пространственныхъ образовъ, такъ и равные промежутки времени не могутъ быть эмпирически устанавливаемы конструктивно, а только при помощи какого-нибудь ритмическаго движенія, напримѣръ, біенія пульса или колебаній маятника. Относительно времени мы имѣемъ только общее воззрѣніе величины и чувство ритма, если отдѣльные такты слѣдуютъ другъ за другомъ не слишкомъ быстро и не слишкомъ медленно *).

При нашемъ изложеніи основныхъ понятій мы пытались разсматривать движеніе, какъ понятіе болѣе раннее, на которое опирается понятіе времени. Съ другой стороны, движеніе есть источникъ понятія о силѣ. Естественнымъ состояніемъ движенія матеріальной системы, „безъ посторонняго вліянія", является только движеніе ея точекъ по прямымъ линіямъ. Происхожденіе другихъ путей извѣстнымъ способомъ объясняется силами, которыя „сообщаютъ" тѣлу ускоренія въ различныхъ направленіяхъ; тѣло воспринимаетъ эти ускоренія, согласно закону параллелограмма силъ. Въ какой мѣрѣ срослась механика съ геометріей, съ особенной очевидностью явствуетъ изъ основного принципа, на которомъ великій физикъ Герцъ (Hertz) построилъ всю механику: Systema omne liberum perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directissimam (Mechanik, p. 162).

7. Если Кантъ въ частностяхъ комбинировалъ всѣ эти вещи иначе, то чтеніе книги Ньютона „Philosophiae naturalis Principia Mathematica" (London, 1687) все же должно было привести его къ соображеніямъ такого же рода, изъ которыхъ онъ почерпнулъ убѣжденіе необходимости одной геометріи, однимъ единственнымъ способомъ опредѣленной, такъ сказать, міровой геометріи. Что эту роль могла играть только евклидова геометрія, было для Канта одной изъ неопровержимѣйшихъ научныхъ истинъ. Если бы эта точка зрѣнія была обоснована, то въ этомъ заключалось бы познаніе необычайной глубины и важности. Такое познаніе не могло бы быть почерпнуто изъ опыта, потому что при своей однозначности оно тогда необходимо обусловливало бы единообразіе и въ построеніи координированной системы міра; но

*) О современномъ состояніи механики см. подробный обзоръ Фосса (A. Voss, въ „Энциклопедіи математическихъ наукъ"—„Encyklopädie der Math. Wissenschaften") Bd. IV$_1$.

оно не могло быть получено также и путемъ расчлененія понятій, потому что основныя понятія математики и механики образуются только при помощи аксіомъ[87]); въ качествѣ міровой геометріи, геометрія Евклида можетъ быть познана только въ своихъ аксіомахъ, которыя, однако, какъ таковыя, предшествуютъ основнымъ понятіямъ, — въ аксіомахъ, которыя только и дѣлаютъ возможными (формальныя) опредѣленія основныхъ понятій. Въ этомъ характерѣ всего этого познанія, въ основномъ его значеніи, которое только и дѣлаетъ возможнымъ единую строго логическую науку, и заключается то, что Кантъ хотѣлъ выразить словомъ a priori *).

Къ этому именно пункту примыкаетъ „Критика чистаго разума" Канта и поясненія къ ней въ „Пролегоменахъ". Здѣсь считается установленнымъ, что математика и физика покоятся на познаніяхъ a priori. Но гдѣ же ихъ источникъ, если они не могутъ быть ни почерпнуты изъ опыта, ни получены расчлененіемъ понятій. Этотъ особенный источникъ познанія, изъ котораго должны были проистечь эти истины, Кантъ называетъ чистой интуиціей a priori. Но какъ же это возможно? Если бы интуиція давала намъ представленіе о вещахъ, какъ онѣ есть, сами по себѣ, то интуиція a priori была бы совершенно невозможна, ибо такія свойства объектовъ, которыя имъ принадлежатъ совершенно независимо отъ меня, я могу познать только путемъ созерцанія. „Правда, и тогда остается непонятнымъ, какимъ образомъ созерцаніе наличной вещи можетъ дать мнѣ понятіе о томъ, какова она сама по себѣ, такъ какъ свойства ея не могутъ перейти въ мое воображеніе" **). Во всякомъ же случаѣ это не можетъ быть интуиціей a priori. До тѣхъ поръ, пока интуиція согласуется съ объектами, мы не въ состояніи выбраться изъ этого затрудненія. Но, быть можетъ, обратно, самыя вещи согласованы съ нашей внутренней интуиціей; быть можетъ, время и пространство представляютъ собой своеобразные координирующіе принципы, свойственные нашему духу, при помощи которыхъ онъ распутываетъ хаосъ нашихъ

[87]) Это значитъ, что тѣ признаки, которые устанавливаются аксіомами, только и составляютъ все содержаніе понятія.

*) Опредѣленіе понятія a priori въ примѣненіи къ аналитическимъ и синтетическимъ сужденіямъ, которое Кантъ пытается дать въ своей „Эстетикѣ", нельзя признать удачнымъ, потому что само слово „сужденіе" наводитъ на точку зрѣнія старой формальной логики; „сужденія" въ старой логикѣ устанавливали соотношенія между понятіями, которыя она принимала, какъ готовыя, не интересуясь ихъ происхожденіемъ. Далѣе, всѣ „сужденія" геометріи являются „аналитическими", даже тѣ, которыя выражаются аксіомами, потому что, съ нашей точки зрѣнія, основныя понятія формально опредѣляются аксіомами. Синтетическими эти сужденія были лишь тогда, когда основныя понятія при ихъ посредствѣ были только пріобрѣтены, т. е. на той предварительной ступени познанія, которую старая логика считаетъ законченной раньше, чѣмъ она приступаетъ къ дѣлу (или вовсе игнорируетъ).

**) „Prolegomena", § 9.

ощущеній и созидаетъ общую картину нашего міровоззрѣнія? Только въ такомъ видѣ мы и можемъ представить себѣ познаніе a priori, „если оно представляетъ собою не что иное, какъ форму психической дѣятельности моего субъекта, которая предшествуетъ всѣмъ моимъ дѣйствительнымъ впечатлѣніямъ, вызваннымъ внѣшними предметами“ *). Строго говоря, субъектъ здѣсь могъ бы остаться въ сторонѣ, такъ какъ съ этой точки зрѣнія собственное „я“ въ такой же мѣрѣ представляетъ собой результатъ познанія, какъ и внѣшніе объекты. Послѣднія познаются, такимъ образомъ, не сами по себѣ, а въ томъ видѣ, въ какомъ они намъ представляются, прошедши черезъ горнило принциповъ нашего сознанія.

Къ этому приводится ученіе Канта о пространствѣ, его трансцендентальный идеализмъ, поскольку это ученіе вообще можетъ быть передано въ немногихъ словахъ. Мы преднамѣренно не дѣлали попытки передавать это ученіе въ полной чистотѣ, въ которой, можетъ быть, развита его математическая часть **), ибо и самъ Кантъ лишь въ отдѣльныхъ мѣстахъ доходитъ до совершеннаго идеализма, преодолѣвающаго всякій сенсуализмъ. Въ частности, примѣры, которые Кантъ заимствуетъ изъ математики, часто совершенно непригодны для тѣхъ цѣлей, ради которыхъ онъ ихъ приводитъ, а иногда они даже не вполнѣ безупречны съ точки зрѣнія научной ***).

**8.** Въ виду стремленія современной геометріи развиться въ строго абстрактную науку, мы не можемъ относиться безразлично къ тому, приходится ли считаться помимо отвлеченнаго мышленія еще съ какимъ-либо инымъ источникомъ геометрическаго познанія и при томъ съ такимъ, который играетъ не одну только наводящую роль, но и претендуетъ на абсолютную достовѣрность. Мы не можемъ вслѣдствіе этого уклониться отъ того, чтобы занять опредѣленную позицію по отношенію къ гносеологическимъ взглядамъ Канта; именно, мы попытаемся разобрать доказательства и математическія разсужденія Канта съ точки зрѣнія математической критики, сдѣлавшей уже послѣ Канта значительные успѣхи.

*) „Prolegomena“, § 9.

**) Въ томъ направленіи, какъ это дѣлаютъ Когенъ (Cohen), Наторпъ (Natorp); см., напримѣръ: Natorp, „Social Pädagogik“, §§ 1—5. Все то, что пишутъ объ основахъ математики философы, требуетъ крайне серьезной критики; въ общемъ получается впечатлѣніе, что трудность задачи недостаточно оцѣнивается: это непріятное слѣдствіе Нео-Кантова идеализма, который питаетъ надежду вывести основные законы математики и механики изъ общихъ логическихъ принциповъ. Борьба съ грубымъ эмпиризмомъ не должна вести къ полному отрицанію опыта; идеализмъ (ученіе, къ которому мы и сами близко примыкаемъ) несомнѣнно долженъ былъ бы отвести большое мѣсто эмпиризму.

***) См., напримѣръ, „Prolegomena“, §§ 12 и 13, которые содержатъ совершенно недопустимыя опредѣленія конгруэнтности.

Того сознанія совершенно исключительнаго значенія евклидовой геометріи, какъ системы, съ необходимостью обусловливаемой единствомъ точнаго естествознанія,— научнаго убѣжденія въ необходимости ея аксіомъ для объясненія мірозданія въ такомъ видѣ, какъ это предполагаетъ Кантъ, мы въ настоящее время не имѣемъ и пока имѣть не можемъ: наши познанія объ основахъ математики и физики имѣютъ еще столько пробѣловъ, что обоснованный взглядъ на ихъ необходимость еще не могъ сложиться. Между физикой эѳира и физикой вѣсомой матеріи зіяетъ бездна, которая постоянно углубляется по мѣрѣ того, какъ мы пытаемся развивать эти науки строго абстрактно на подобіе геометріи, исходя изъ строго формулированныхъ аксіомъ; даже опредѣлить строго абстрактно эти двѣ области міра явленій представляется уже необычайно труднымъ; такъ, напримѣръ, сдѣланная нами выше въ п. 6 попытка опредѣлить матерію оказалась бы непригодной, если бы помимо силы тяготѣнія дѣйствовала еще какая-либо другая основная сила притяженія безъ отталкиванія. Такъ какъ, слѣдовательно, большія отрасли физики, можно сказать, еще вовсе не связаны внутреннимъ единствомъ, то представляется совершенно невозможнымъ съ абсолютной увѣренностью рѣшить, можетъ ли евклидова геометрія, или какая-либо иная, лечь въ основу этихъ наукъ, не приводя къ противорѣчію.

**9.** Замѣчательно, что Кантъ и его послѣдователи признавали недопустимымъ разрѣшать при помощи опыта *), есть ли евклидова геометрія „наша реальная“ геометрія или нѣтъ. Цѣль и предпосылки опытнаго изслѣдованія, конечно, не всегда строго опредѣляются. Посредствомъ провѣрочнаго измѣренія нѣтъ, конечно, возможности даже пытаться рѣшить, правильна ли Евклидова (или какая бы то ни была другая) геометрическая система, т. е. свободна ли она отъ логическаго противорѣчія. Это неосуществимо ни въ какой геометріи, потому что основные образы никакой геометріи мы не можемъ реально изобразить, исходя изъ аксіомъ. Но въ этомъ нѣтъ необходимости, потому что правильность Евклидовой (равно какъ и обѣихъ неевклидовыхъ геометрій) можно доказать строго логически, на основаніи ея аксіомъ. Но зато мы можемъ себя спросить, соотвѣтствуютъ ли дѣйствительно (приближенно) всѣ тѣ образы, многообразные по своему происхожденію, которые мы въ повседневной жизни именуемъ прямыми, аксіомамъ евклидовой геометріи. Можемъ ли мы, напримѣръ, построивъ циркулемъ и линейкой „треугольникъ“, измѣривъ его углы транспортиромъ, дѣйствительно знать a priori, что сумма угловъ съ достаточнымъ приближеніемъ составитъ два прямыхъ? Конечно, это было бы возможно, если бы мы могли придать линейкѣ (приближенно)

*) Къ этой мысли пришелъ уже, между прочимъ, и Іоаннъ Больэ (I. Bolyai). Ср. P. Stäckel, De ea Mechanicae analyticae parte, quae ad varietates complurium Dimensionum spectat.

ту закономѣрность, которую требуютъ аксіомы. Но это не имѣетъ мѣста. Для изготовленія линейки мы пользуемся не той закономѣрностью, которой требуютъ аксіомы, а движеніемъ свѣта: мы стараемся, чтобы ея ребра при визированіи сводились въ точку; можетъ также быть, что ребро сдѣлано „прямымъ" чисто механическими средствами. Но, съ другой стороны, мы можемъ, конечно, изъ опыта познать, что линіи, воспроизводимыя линейкой, въ достаточной мѣрѣ удовлетворяютъ требованіямъ аксіомъ расположенія и сопряженія, конгруэнтности и непрерывности; но остается ли также въ силѣ аксіома о параллельности, это мы съ полной увѣренностью сказать не можемъ, такъ какъ она не зависитъ отъ остальныхъ аксіомъ.

Итакъ, задача экспиримента заключается не въ томъ, чтобы рѣшить, правильны ли предложенія одной или другой геометріи; онъ можетъ только указать, примѣняется ли она къ эмпирическимъ пространственнымъ образамъ, построеннымъ тѣмъ или инымъ способомъ. При этомъ способъ ихъ построенія долженъ быть точно указанъ, иначе вся задача теряетъ содержаніе. Чѣмъ больше треугольникъ, тѣмъ больше могло бы оказаться уклоненіе суммы угловъ отъ двухъ прямыхъ; но вмѣстѣ съ тѣмъ становится труднѣе и самый опытъ. Если при небольшихъ треугольникахъ возможно еще обойтись средствами механики, то при измѣреніи большихъ треугольниковъ на земной поверхности или въ небесномъ пространствѣ приходится пользоваться законами оптики. Въ самомъ дѣлѣ, углы здѣсь измѣряются теодолитомъ, а потому стороны треугольника представляютъ собой свѣтовые лучи; съ другой стороны, раздѣленный кругъ теодолита изготовленъ на токарномъ станкѣ; его круглая форма воспроизведена, слѣдовательно, путемъ вращенія твердаго тѣла. При осуществленіи этого измѣренія оказываютъ, такимъ образомъ, совмѣстное дѣйствіе два совершенно раздѣльныхъ міра — эѳиръ и матерія. Конечно, свѣтовые лучи, натянутыя нити, оси вращенія и т. д. — суть прямыя линіи въ ходячемъ значеніи этого слова, но не представляютъ ли они только приближеній, этого мы знать не можемъ; въ частности, будетъ ли направленіе распространенія свѣта тождественно съ траекторіями твердыхъ тѣлъ, движущихся по инерціи, каковыя въ теоретической механикѣ, по опредѣленію, представляютъ собой (Евклидовы) прямыя линіи, — это еще теоретически не доказано. Мыслимо и то, что свѣтовые лучи осуществляютъ неевклидову геометрію, траекторіи инерціи — евклидову, т. е. что лишь въ этомъ предположеніи они могутъ найти себѣ объясненіе въ общей научной системѣ. Даже когда мы чисто механически дѣлаемъ треугольникъ и измѣряемъ его, то и тутъ остается мѣсто сомнѣнію. Дѣло въ томъ, что при обычномъ построеніи механики мы предполагаемъ, безъ особаго обоснованія, евклидову геометрію и опредѣляемъ траекторіи тѣлъ, движущихся по инерціи, какъ прямыя линіи. Но въ такомъ случаѣ, по меньшей мѣрѣ, было бы необходимо доказать, что эта геометрія совмѣстима съ тѣми аксіомами, которыя вноситъ традиціонная механика. Что въ этомъ отношеніи возможны коллизіи, обнаруживаетъ слѣдующій примѣръ. Четвертую вершину $D$ параллелограмма $ABCD$ можно построить по tремъ остальнымъ, соединяя середину $M$ діагонали $AC$ съ вершиной $B$ и откладывая на продолженіи отрѣзокъ $MD = MB$. Отсюда ясно, что такъ называемый параллелограммъ силъ въ механикѣ совершенно безъ нужды прибѣгаетъ къ понятію о параллельности, ибо точку $D$, къ которой собственно сводится вся суть дѣла, можно опредѣлить и построить, пользуясь исключительно аксіомами конгруэнтности; вѣдь этотъ законъ имѣетъ въ виду установить только равнодѣйствующую слагающихъ $BA$ и $BC$ по величинѣ и направленію, все же остальное представляетъ собой придатки геометрическаго характера. Сообразно этому могло бы казаться, что и въ двухъ неевклидовыхъ геометріяхъ сложеніе силъ и скоростей могло бы производиться при помощи этого построенія. Между тѣмъ въ дѣйствительности это далеко не такъ! Въ самомъ дѣлѣ, если мы построимъ для трехъ силъ $x$, $y$, $z$, расположенныхъ въ одной плоскости и имѣющихъ общую точку приложенія $O$, равнодѣйствующія $\xi$, $\eta$, $\zeta$ трехъ паръ $(y, z)$, $(z, x)$ и $(x, y)$, а затѣмъ построимъ равнодѣйствующія $a$, $b$, $c$ трехъ паръ $(\xi, x)$, $(\eta, y)$, $(\zeta, z)$, то эти послѣднія (т. е. $a$, $b$, $c$) должны всѣ совпасть по самому понятію о равнодѣйствующей, въ силу той аксіомы механики, что силы, имѣющія общую точку приложенія, имѣютъ опредѣленную равнодѣйствующую. Эта аксіома механики предъявляетъ, такимъ образомъ, къ геометріи весьма существенныя требованія. Совпаденіе отрѣзковъ $a$, $b$, $c$ при этомъ построеніи [88]) имѣетъ мѣсто только въ евклидовой геометріи, т. е. существенно предполагаетъ аксіому о параллельности: въ обѣихъ неевклидовыхъ геометріяхъ эти отрѣзки не совпадаютъ. Кстати замѣтимъ, что отсюда отнюдь не слѣдуетъ, будто Евклидова геометрія есть единственно возможная въ механикѣ; отсюда вытекаетъ только, что приведенное выше построеніе равнодѣйствующей двухъ силъ ни въ одной изъ неевклидовыхъ геометрій не можетъ служить основой опредѣленія равнодѣйствующей; здѣсь необходимо установить другое построеніе, которое удовлетворяло бы поставленному выше требованію, т. е. при которомъ отрѣзки $a$, $b$, $c$ всегда бы совпадали *). Если это построеніе по своему результату со значительнымъ приближеніемъ согласуется съ обычнымъ (такъ какъ о полномъ совпаденіи не можетъ быть рѣчи), то по отношенію къ этому пріему опасеніе, что онъ приведетъ къ противорѣчію съ остальными аксіомами механики, умѣстно

[88]) Т. е. при томъ способѣ построенія, который былъ указанъ выше.

*) Такое построеніе далъ Дависъ (E. Davis, „Die geometrische Addition in der hyperbolischen Geometrie“, Diss. Greifswald, 1904). Представляется ли это построеніе единственно возможнымъ, этого съ увѣренностью сказать нельзя.

лишь въ той же мѣрѣ, какъ и по отношенію къ евклидовой геометріи и къ обычному въ ней построенію равнодѣйствующей.

**10.** Нерѣдко высказывалось мнѣніе, что взгляды Канта опровергнуты уже самымъ созданіемъ неевклидовыхъ геометрій. Но Кантъ, съ своей точки зрѣнія, могъ допустить эти новыя геометрическія системы, какъ области чистаго мышленія, совершенно такъ же, какъ это и сейчасъ дѣлаютъ многіе математики, когда рѣчь идетъ о геометріи многихъ измѣреній. Онъ только отказалъ бы этимъ дисциплинамъ въ „реальности". Мы полагаемъ, однако, что намъ выше удалось доказать, что обѣ неевклидовы геометріи допускаютъ реализацію именно на почвѣ евклидовой геометріи; онѣ не представляютъ собой, слѣдовательно, фантастическихъ сплетеній ума, какъ это часто утверждали. Врядъ ли съ точки зрѣнія Канта можно противъ этого возразить, что при такой реализаціи точки не представляютъ собой дѣйствительныхъ точекъ; задача, которая здѣсь возникаетъ, разрѣшена тѣмъ построеніемъ обѣихъ неевклидовыхъ геометрій, которое дано Кели и Клейномъ, и сущность котораго мы имѣемъ въ виду указать въ третьей главѣ. Это осуществленіе неевклидовой геометріи находится приблизительно въ такомъ же отношеніи къ нашей интерпретаціи, какъ обыкновенная геометрія къ параболической сѣти; въ основѣ его лежатъ точки, прямыя и плоскости евклидовой геометріи, сохраняющія свои наименованія. Благодаря этому, думается намъ, вопросъ принимаетъ рѣшающій оборотъ; ибо, если пространственная координація, устанавливаемая евклидовой геометріей, даетъ возможность осуществлять неевклидову геометрію, то оспаривать реальность неевклидовой геометріи, какъ это дѣлаютъ многіе послѣдователи Канта, представляется уже невозможнымъ. Уже въ виду нашихъ элементарныхъ осуществленій неевклидовыхъ геометрій послѣднія являются лишь особыми главами евклидовой геометріи, только выраженными своеобразнымъ искусственнымъ языкомъ. Мы не сомнѣваемся и въ томъ, что возможно обратно воспроизвести евклидову геометрію при помощи неевклидовой; безконечно удаленная область евклидовой геометріи можетъ быть также отображена на конечномъ протяженіи, ибо безконечно удаленное означаетъ только то, „что не можетъ быть достигнуто конечнымъ числомъ шаговъ при движеніи, какъ оно понимается въ этой геометріи", т. е. „не можетъ быть измѣрено послѣдовательнымъ рядомъ точекъ, равно удаленныхъ, въ смыслѣ принятой въ этой геометріи конгруэнтности". Предложеніе о единственности евклидовой геометріи въ той мѣрѣ, въ какой оно нужно Канту, на нашъ взглядъ, отнюдь не уничтожается признаніемъ неевклидовой геометріи; оно должно лишь быть иначе формулировано (ср. § 11). — Исходя отъ какой-либо геометріи $A$, — скажемъ, отъ евклидовой, — можно построить множество многообразій и изслѣдовать въ нихъ законы сопряженія. Если затѣмъ, исходя отъ этихъ законовъ сопряженія, мы независимо опредѣляемъ многообразіе $B$, при чемъ совокупность законовъ сопряженія, необходимыхъ и достаточныхъ для его построенія, принимается за систему аксіомъ, то такимъ образомъ получается „геометрія *B*, содержащаяся въ системѣ *A*", или, общѣе, область мышленія *B*, содержащаяся въ другой области мышленія *A*. Двѣ такія геометрическія области мысли, изъ которыхъ каждая содержится въ другой, мы будемъ называть эквивалентными; тогда предложеніе о реальности, какъ его понимаетъ Кантъ, сводится къ слѣдующему: геометрія можетъ быть признана реальной въ томъ случаѣ, если она эквивалентна евклидовой геометріи. Выдвигаемая такимъ образомъ задача — найти критерій эквивалентности двухъ такихъ областей нашей мысли — очень трудна; достаточно сообразить, что въ евклидовой геометріи содержатся многообразія какого-угодно числа измѣреній и притомъ какъ линейныя, такъ и нелинейныя. Разрѣшеніе этой проблемы было бы не менѣе важно для геометріи, какъ и для оцѣнки теоріи познанія Канта. Ибо такіе критеріи должны были бы дать глубочайшія основы, свободныя отъ всѣхъ частностей и отъ всѣхъ особенностей случайно избранной точки зрѣнія, — а въ то же время необходимыя и достаточныя для построенія Евклидовой системы; но по Канту это были бы познанія a priori. Аксіома о параллельности не могла бы принадлежать къ числу этихъ критеріевъ, ибо она не имѣетъ мѣста ни въ одной ни въ другой неевклидовой геометріи; напротивъ, непрерывность должна была бы войти въ составъ этихъ критеріевъ.

**11.** Когда уже исчерпанъ вопросъ о реальности обѣихъ неевклидовыхъ геометрій, задача о единственности Евклидовой координаціи пространства можетъ быть выражена точнѣе. При чисто абстрактномъ и строго геометрическомъ построеніи какъ Евклидовой системы, такъ и неевклидовыхъ геометрій, конгруэнтность опредѣляется и доказывается не такъ, какъ это дѣлается обычно, — наложеніемъ при помощи движенія, — а рядомъ построеній; эти построенія опираются только на тѣ аксіомы, которыя остаются по выключеніи аксіомъ о параллельности и конгруэнтности, матеріально же они предполагаютъ лишь основные образы, которые признаются существующими. На этомъ опредѣленіи конгруэнтности мы уже, въ обратномъ порядкѣ, какъ это было намѣчено въ п. 6, строимъ понятіе о движеніи, которое совершенно свободно отъ понятія о времени; напротивъ, выведенное уже отсюда понятіе о времени даетъ лишь возможность ближе опредѣлить движеніе. Каждой изъ трехъ геометрій соотвѣтствуетъ при этомъ свое „движеніе" и свое „время". Вмѣстѣ съ тѣмъ взглядъ Канта на единственное, исключительное положеніе евклидовой геометріи нужно понимать такъ, что только „движеніе" и „время" евклидовой геометріи имѣютъ дѣйствительное существованіе. Отрицается, такимъ образомъ, не реальность эллиптической и гиперболической геометрій, а только дѣйствительность свойственныхъ имъ „движеній" и „времени"; то, что, съ точки зрѣнія этихъ двухъ геометрій, въ силу извѣстныхъ аналогій, именуется

„движеніемъ", „временемъ", „твердымъ тѣломъ", это въ логически правильной научной системѣ механики и физики не можетъ служить для опредѣленія процессовъ движенія. Евклидово движеніе есть единственное движеніе; Евклидовы твердыя тѣла суть единственныя твердыя тѣла; Евклидово время есть единственное время; короче говоря, это суть тѣ великія познанія a priori, которыя дѣлаютъ евклидову геометрію единственно возможной въ механикѣ.

Мы менѣе всего желали бы оспаривать, что евклидова геометрія по сіе время наилучшимъ образомъ выполняла свою задачу въ механикѣ, въ физикѣ и въ астрономіи; мы полагаемъ также, что она будетъ выполнять ее и впредь; но необходимость этой геометріи, какъ единственно возможной основы естествознанія, никогда и ни въ какомъ случаѣ не была познаніемъ a priori, которымъ мы уже располагаемъ; въ лучшемъ случаѣ, это есть познаніе, которое мы надѣемся пріобрѣсти въ ходѣ прогрессивнаго развитія всего нашего знанія. У Канта единственную логическую опору всего нашего знанія составляютъ, такъ сказать, нѣсколько мощныхъ столповъ, которые несутъ на себѣ все зданіе науки; было бы правильнѣе представить себѣ фахверкъ, въ которомъ перекладины многообразно скрещиваются, взаимно укрѣпляя другъ друга. Такъ и аксіомы геометріи и механики сплетаются другъ съ другомъ, и ни одна изъ нихъ не можетъ быть опущена безъ того, чтобы это не отразилось на прочности всего остального. Мы приводили уже примѣры въ п. 9-мъ, ихъ можно было бы очень легко умножить. Весь этотъ вопросъ можно будетъ рѣшить лишь тогда, когда передъ нами будетъ строго абстрактная система чистой механики, когда мы будемъ въ состояніи обозрѣть, возможно ли ее провести въ физикѣ эѳира. Единственность опредѣленной геометріи представляетъ собой, такимъ образомъ, не основу, а проблему познанія, и при томъ проблему чрезвычайно трудную, ибо вопросъ о томъ, въ состояніи ли абстрактная, но логически правильная система механики служить для опредѣленія дѣйствительныхъ процессовъ естествознанія, можетъ быть, за отсутствіемъ другихъ критеріевъ, рѣшенъ только тогда, когда она будетъ осуществлена. То же знаніе, которымъ мы располагаемъ въ настоящее время, можетъ быть съ одинаковой точностью охвачено различными системами механики, различіе которыхъ можетъ обнаруживаться лишь въ весьма удаленныя времена на весьма удаленныхъ образахъ; и только тогда окажется возможнымъ избрать наиболѣе подходящую систему. Всѣ попытки доказать, что „неевклидовы системы механики", т. е. системы механики, основанныя на неевклидовыхъ геометріяхъ, несовмѣстны съ опытомъ, сводятся къ тому, что выдвигаютъ нѣкоторые законы такой механики, находящіеся въ противорѣчіи съ тѣмъ опытомъ, которымъ мы по настоящее время располагаемъ. Но вмѣстѣ съ этимъ оказывается, что нужно только приписать тѣмъ константамъ неевклидовыхъ геометрій, которыя въ нашемъ осуществленіи послѣднихъ представляютъ собою радіусы ортогональной или діаметральной сферы, достаточно большія значенія*) и уклоненія, о которыхъ идетъ рѣчь, становятся столь ничтожными, что они падаютъ совершенно за предѣлы опыта, по сіе время намъ доступнаго. Это не приводитъ насъ, однако, къ коллизіи съ основнымъ требованіемъ естествознанія установить законы, дѣйствующіе повсемѣстно въ пространствѣ. Существуютъ вѣдь такіе законы природы, какъ напримѣръ, аберрація свѣта, которые становятся доступными наблюденію только при весьма большихъ разстояніяхъ; слѣдовательно, и тѣ „противорѣчія" съ наблюдаемыми въ дѣйствительности законами природы, о которыхъ была рѣчь, могутъ объясняться сравнительно небольшими размѣрами доступнаго намъ опыта въ пространствѣ и во времени. Съ другой стороны, положить одну или другую неевклидову геометрію въ основу механики и физики могло бы быть цѣлесообразнымъ лишь въ томъ случаѣ, если бы обнаружилось, что это приведетъ къ болѣе простой закономѣрности въ эмпирической дѣйствительности, нежели при старыхъ методахъ. Однако, необходимымъ для этого опытомъ мы еще не располагаемъ.

**12.** Къ этому мы хотимъ еще прибавить, что всѣ аргументы, которые приводятся въ пользу евклидовой геометріи на конечномъ протяженіи, пригодны также для параболической сѣти сферъ, даже болѣе того, для любой сѣти поверхностей второго порядка, имѣющихъ такую же структуру, какъ названная сѣть сферъ. Но эти сѣти $F^2$ могутъ быть построены независимо отъ аксіомы о параллельности. Ниже, въ отдѣлѣ графической статики, мы увидимъ, что именно параболическая сѣть сферъ является наиболѣе естественной основой ученія объ астатическомъ равновѣсіи; мы построимъ тамъ на этой основѣ систему однородныхъ координатъ, въ которыхъ окружности сѣти выражаются линейными уравненіями. Хотя это уже подробно изложено въ § 13-мъ, мы считаемъ нелишнимъ по поводу этого примѣра еще разъ указать, что формальная сторона Декартовой координаціи далеко еще не опредѣляетъ Евклидова пространства, а развѣ только область Евклидовыхъ разсужденій. Другой примѣръ, когда задачу механики можно было — правда, косвеннымъ образомъ, — перенести въ неевклидову геометрію, и именно въ геометрію сферической сѣти, удалось дать Клейну и Зоммерфельду (Sommerfeld). Эти геометры нашли, что движеніе тяжелаго шарового волчка можно изучать по движенію точки въ „сферическимъ" пространствѣ трехъ измѣреній, которое совпадаетъ съ нѣкоторой непараболической сѣтью сферъ. Вообще механика неевклидовыхъ и многомѣрныхъ пространствъ пріобрѣтаетъ все большее и большее значеніе. На этомъ въ высшей степени интересномъ вопросѣ мы не имѣемъ возможности остановиться здѣсь подробно и отсылаемъ читателя къ (пред-

*) Съ точки зрѣнія неевклидовыхъ геометрій, эта константа называется кривизной соотвѣтствующаго пространства. Понятіе это, однако, трудно выяснить въ элементарномъ сочиненіи.

варительной) статьѣ Штеккеля „Рефератъ о механикѣ многомѣрныхъ многообразій“ *), а также къ упомянутой уже выше его юбилейной статьѣ, помѣщенной въ сборникѣ въ память Больэ. Въ виду элементарнаго характера настоящаго сочиненія, мы были бы вполнѣ удовлетворены, если бы намъ удалось обратить вниманіе читателя на эти проблемы, равно интересныя для естествоиспытателей и философовъ, если бы намъ удалось вызвать интересъ къ болѣе глубокому изученію этихъ вопросовъ. Но для этого необходимо познакомиться съ оригинальными работами, которыя указаны ниже, въ литературномъ обзорѣ.

**13.** Прежде, чѣмъ сдѣлать окончательные выводы по вопросу объ апріорности пространства, мы должны упомянуть еще объ одномъ соображеніи, которое часто приводится въ пользу евклидовой геометріи; именно, что возможность переноснаго движенія (параллельнаго перенесенія) связана только съ евклидовой геометріей. Здѣсь дѣло обстоитъ совершенно такъ же, какъ съ параллелограммомъ силъ. Именно, если мы опредѣлимъ переносное движеніе, какъ такое движеніе неизмѣняемой системы, при которомъ всѣ точки описываютъ параллельныя прямыя, или, по крайней мѣрѣ, прямыя, образующія связку, то такое движеніе можетъ въ евклидовой геометріи осуществляться точно; въ обѣихъ же неевклидовыхъ геометріяхъ только приближенно: здѣсь, при безпредѣльно продолжающемся движеніи, система необходимо должна была бы измѣнить свою форму. Напротивъ, въ параболической сѣти сферъ это движеніе можетъ быть произведено съ полной точностью. Однако, это ничего не говоритъ противъ неевклидовыхъ геометрій. Въ самомъ дѣлѣ, абсолютно точныхъ переносныхъ движеній, во всей строгости этого понятія, какимъ его предполагаетъ идеальная геометрія, конечно, не существуетъ, какъ не существуетъ абсолютно твердыхъ тѣлъ. Все это суть „только“ идеи, посредствомъ которыхъ мы стараемся оріентироваться въ изобиліи явленій природы. Всѣ наши измѣренія опредѣляютъ соотвѣтствующій объектъ лишь неточно, частью вслѣдствіе неточностей метода (которыя подлежатъ еще устраненію), а частью вслѣдствіе того, что ни одно явленіе не можетъ быть изолировано во всей своей чистотѣ, которая необходима для совершенно точнаго производства наблюденія и измѣренія. Такъ напримѣръ, равноплечій рычагъ съ двумя равными грузами справа и слѣва, на который помимо этого абсолютно ничто не вліяетъ, есть „только“ идея. Земной магнитизмъ, сила тяжести, измѣняющаяся съ широтой мѣста, притяженіе небесныхъ тѣлъ, каждый лучъ свѣта, многіе милліоны тончайшихъ пылинокъ, словомъ, все необозримое множество вліяній дѣлаютъ совершенно невозможной чистоту явленій природы. Такимъ образомъ, законъ рычага не представляетъ собой факта, наблюденнаго въ его абсолютной точности, а напротивъ, представляетъ собой одно изъ

*) P. Stäckel. „Bericht über die Mechanik mehrfachen Mannigfaltigkeiten“ Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 12 (1903).

абсолютно точныхъ допущенiй, которое мы въ правѣ принять (если оно совмѣстимо съ остальными точными допущенiями), чтобы вообще опредѣлить физическiе факты. Аналогичную гипотезу представляетъ собой свободное паденiе тѣлъ. Кромѣ притяженiя земли, которое, строго говоря, возрастаетъ съ приближенiемъ къ центру земли, на падающее тѣло влiяетъ сопротивленiе воздуха, центробѣжная сила земли, горныя массы, которыя могутъ находиться по близости, притяженiе небесныхъ тѣлъ, а также многiя другiя обстоятельства, перечислять которыя было бы утомительно. Естествознанiе такимъ образомъ не наблюдаетъ явленiй въ чистомъ видѣ, а допускаетъ ихъ, чтобы имѣть возможность оформить наблюденiя въ законы; оно не исходитъ изъ точныхъ фактовъ; напротивъ, констатировать дѣйствительность, въ абсолютно точномъ значенiи слова,— представляетъ его отдаленную цѣль, достичь которой никогда не будетъ возможно. Формулы естествознанiя отнюдь не представляютъ собой сокращенныхъ таблицъ наблюденiй, математическiя формулы далеко не столь объективны; онѣ содержатъ законы для полученiя не только наблюденныхъ чиселъ, но и промежуточныхъ. Но исключительно при помощи наблюденiя и измѣренiя никогда не можетъ быть установлена зависимость между перемѣнной $x$ и ея функцiей $y$, если въ нашемъ распоряженiи заранѣе не было этой функцiи, созданной нашей собственной властной мыслью. Такимъ образомъ, явленiя въ чистомъ видѣ, какъ и точные законы, всегда останутся идеями. Объяснить явленiя природы — значитъ воспроизвести ихъ, исходя отъ чистыхъ явленiй при помощи точныхъ законовъ; значитъ, по словамъ Клопштока, „еще разъ продумать великую мысль творенiя" („den grossen Gedanken der Schöpfung noch ein Mal denken"). Послѣ всего сказанного нѣтъ основанiй дѣлать неевклидовой механикѣ упрекъ, что тотъ или иной процессъ въ ея системѣ въ точности невозможенъ; нужно только спросить, возможно ли безъ переноснаго движенiя, безъ понятiя о точномъ рычагѣ и т. д. выразить закономѣрно явленiя природы. Теперь мы рѣшительно уже не скажемъ, что въ неевклидовой механикѣ все неточно, все приближенно; напротивъ, ея идеи столь же чисты и строги, какъ и въ Евклидовой механикѣ. Это только другiя идеи, и вопросъ можетъ заключаться лишь въ томъ, сохраняютъ ли онѣ за собой право на существованiе въ смыслѣ ихъ примѣненiя. Но по настоящее время это имѣетъ мѣсто и останется въ силѣ до тѣхъ поръ, пока мы не сможемъ распространить нашъ опытъ на безпредѣльныя времена и на неизмѣримо удаленныя разстоянiя. Съ другой стороны, никогда еще не было основательнаго повода отказаться отъ евклидовой геометрiи, какъ отъ основы механики,— отъ геометрiи, имѣющей за собой столь цѣнное, исторически испытанное прошлое. Но ея принципiальное единовластiе надломлено; ея преимущества имѣютъ только историческiй, психо-физiологическiй характеръ; они находятъ себѣ оправданiе въ экономiи мышленiя.

**14.** Вмѣстѣ съ тѣмъ апріорность Евклидовой координаціи пространства въ томъ существенно особомъ смыслѣ слова, въ какомъ его постоянно приходится понимать у Канта, падаетъ: ибо, кромѣ абстрактнаго заданія, Кантъ признаетъ еще другого рода заданіе точныхъ фактовъ, именно — чистое воззрѣніе a priori. Эта скованность нашего духа, вслѣдствіе которой онъ долженъ принять аксіомы геометріи, какъ нѣчто непосредственно данное, можетъ быть объяснена только остатками сенсуализма, которые все еще коренятся въ идеализмѣ Канта: въ своихъ геометрическихъ изслѣдованіяхъ Кантъ въ такой мѣрѣ пользуется (эмпирическимъ) воззрѣніемъ, что подъ вліяніемъ Шопенгауэра могло даже составиться представленіе, что у Канта геометрія и ариѳметика основаны на воззрѣніи; между тѣмъ, ничто не можетъ быть въ такой мѣрѣ противно дѣйствительности. Координирующая роль мышленія у Канта всегда занимала первое мѣсто; разумъ какъ бы даже опредѣляетъ дѣятельность чувствъ. Если, тѣмъ не менѣе, Кантъ приписываетъ чувственному воспріятію роль, которую мѣстами очень трудно себѣ уяснить, то причина этого коренилась въ недостаткѣ его геометрическихъ и физическихъ познаній. Онъ судитъ о геометріи всецѣло въ перспективѣ геометріи элементарной. Понятіями „въ" (общѣе — инцидентности) и „между" (общѣе — расположенія) онъ нигдѣ не пытается овладѣть, а постоянно ссылается на воззрѣніе. Въ наиболѣе неблагопріятномъ свѣтѣ это выступаетъ въ приведенномъ выше примѣрѣ изъ „Prolegomena", гдѣ онъ сравниваетъ перчатку съ ея зеркальнымъ изображеніемъ: съ точки зрѣнія всѣхъ опредѣляющихъ признаковъ онѣ одинаковы, между тѣмъ онѣ все же не могутъ быть приведены въ совмѣщеніе. Въ дѣйствительности же здѣсь не хватаетъ одного важнаго признака, именно — „направленія". Въ проективной геометріи противоположеніе тѣла и его зеркальнаго изображенія можетъ быть приведено къ альтернативѣ, лежитъ ли нѣкоторая точка прямой между двумя другими заданными точками, или нѣтъ. Конгруэнтность у Канта, повидимому, опредѣляется то наложеніемъ при помощи движенія, то совпаденіемъ всѣхъ опредѣляющихъ признаковъ; первая точка зрѣнія не представляется чисто геометрической, а вторая совершенно недостаточна. Какъ мало Кантъ умѣлъ обозрѣть внутреннюю связь въ геометріи, видно изъ того, что проведеніе линіи (= прямой) онъ ставитъ на одну ступень съ проведеніемъ эллипса. Между тѣмъ законъ образованія прямой долженъ былъ дать чистое воззрѣніе, законъ же образованія эллипса, когда всѣ прямыя предполагаются построенными, можетъ быть установленъ съ помощью понятій. Аксіому о параллельности онъ признавалъ, какъ чистое воззрѣніе съ сознаніемъ, что такъ оно есть и иначе быть не можетъ. Все это суть недостатки, вина которыхъ коренится не столько въ его системѣ, сколько въ его вѣрѣ въ евклидову геометрію. О литературѣ аксіомы о параллельности мы не находимъ упоминанія ни въ „Критикѣ чистаго разума" ни въ „Пролегоменахъ". Совершенно ясно, что это затормозило свободное развитіе здоровой идеи, лежащей въ основѣ его теоріи познанія.

**15.** Однако, устраняя чистое воззрѣніе a priori, мы отнюдь не желали бы вовсе удалить изъ геометріи всякое воззрѣніе; (эмпирическое) воззрѣніе въ извѣстной области путемъ продолжительнаго упражненія все же приближается къ идеаламъ чистаго воззрѣнія. Намъ удается очистить его отъ всѣхъ случайностей нагляднаго представленія фигуры тѣмъ, что мы строимъ пространственные образы то какъ обыкновенныя точки, прямыя и плоскости, то какъ сферы, пучки и связки въ сферической сѣти, то чисто ариѳметически и т. д. Въ этой пестрой смѣнѣ формы осуществленія превоначальной фигуры сохраняется только чистый законъ ея образованія. Если мы въ этой фигурѣ путемъ воззрѣнія открываемъ тѣ или иныя свойства, которыя сохраняются при всѣхъ этихъ преобразованіяхъ, то мы можемъ предполагать, что таковыя проистекаютъ изъ самаго закона образованія фигуръ. Но удостовѣрить геометрическую истину во всей ея силѣ можетъ только доказательство, исходящее изъ чистыхъ понятій. Воззрѣніе само по себѣ даетъ только изолированное и приближенное познаніе; можетъ ли таковое при сопоставленіи съ воззрѣніями другого рода возвыситься на степень строгой истины, это можетъ рѣшить только наше мышленіе.

Съ интуиціи геометрія должна всегда начинаться, ибо абстрактная переработка эмпирическаго матеріала составляетъ ея задачу. Въ безпредѣльное обиліе нашихъ воспріятій можно внести порядокъ только путемъ законовъ, дѣйствующихъ безъ ограниченія. Мы, напримѣръ, наблюдаемъ, какъ совершается движеніе снаряда, на траекторіи котораго намъ извѣстны три точки, какъ могутъ быть установлены формы движущихся образовъ, если опредѣлены нѣсколько ихъ точекъ. Вслѣдствіе этихъ и другихъ наблюденій, которыя мы пытались очертить въ § 7-мъ, наша мысль приходитъ къ необходимости сдѣлать попытку принять нѣкоторыя закономѣрности, чтобы вывести изъ нихъ другія. Это осуществляется при помощи понятій и аксіомъ. Такимъ образомъ, опытнымъ путемъ возникаетъ точная наука; въ тѣ времена, исторически отъ насъ очень удаленныя, когда ея основныя понятія возникли, они казались совершенно адэкватными эмпирическимъ объектамъ. По существу же они представляютъ собой не отображеніе эмпирическаго, а чистыя идеи, правда, опирающіяся на эмпиризмъ, но неизмѣримо болѣе простыя, нежели чувственный объектъ. Послѣ всего сказаннаго здѣсь и въ п. 15-мъ мы полагаемъ, что не будемъ дурно поняты, если скажемъ очень коротко: аксіомы геометріи и механики имѣютъ эмпирическое происхожденіе. Этимъ мы далеко не хотимъ отрицать того, что онѣ представляютъ собой свободное твореніе нашей мысли, которая руководится только намѣреніемъ координировать помощью опредѣленныхъ законовъ пріобрѣтенія нашего опыта; мы выступаемъ, однако, вмѣстѣ съ тѣмъ, противъ притязаній идеализма, относящагося презрительно къ опыту, точно мы должны были придти къ нашей геометріи и механикѣ однимъ только размышленіемъ въ силу самыхъ законовъ мышленія. Этотъ путь могъ насъ только привести къ убѣжденію, что мы должны стараться сами установить порядокъ, опредѣляемый нѣсколькими основными правилами. Въ этомъ смыслѣ геометрія апріорна, т. е. сама необходима для опыта, но ея основныя положенія тогда не могутъ быть впередъ обезпеченными познаніями; это должны быть только гипотезы, сообразованныя съ опытомъ въ томъ значеніи, какое это слово имѣетъ у Платона*), т. е. исходныя допущенія, принимаемыя въ видѣ опыта, чтобы получить какую-либо точку отправленія и на ней строить относительное познаніе. Чѣмъ болѣе гипотеза оправдывается, тѣмъ выше становится ея цѣнность, какъ познанія; но, какъ учитъ повседневно физика, можетъ оказаться, что та или иная гипотеза не можетъ быть проведена. Однако, и въ этомъ случаѣ затраченная работа обыкновенно не оказывается потерянной, такъ какъ это изслѣдованіе по большей части обнаруживаетъ, въ какихъ пунктахъ сдѣланныя допущенія требуютъ исправленія. Лишь тогда, когда обнаружено, что основныя допущенія не содержатъ внутренняго противорѣчія, и что они достаточны для опредѣленія дѣйствительныхъ явленій, они становятся познаніями въ истинномъ смыслѣ этого слова. Въ этой стадіи находятся въ настоящее время аксіомы нашихъ различныхъ геометрій, если мы оставляемъ въ сторонѣ ихъ введеніе въ физику. Помимо той геометріи, которая можетъ служить наиболѣе подходящей основой механики и, съ этой точки зрѣнія, можетъ быть преимущественно (*κατ' ἐξοχήν*) названа натуральной геометріей, всегда еще допустимы другія искусственныя геометріи. Если же конечная цѣль нашихъ геометрій заключается въ томъ, чтобы онѣ были введены въ цѣпь всего нашего естествознанія, то ихъ аксіомы и по сей день еще остаются гипотезами.

Кто безпристрастно прослѣдитъ за споромъ объ основахъ нашей науки, который велся глубокими учеными съ такимъ ожесточеніемъ, кто будетъ при этомъ руководиться мыслью, что каждый изъ нихъ съ своей точки зрѣнія привнесъ, вѣроятно, нѣчто разумное, тотъ придетъ къ убѣжденію, что истина лежитъ не по серединѣ, а выше спорящихъ сторонъ. Съ той точки зрѣнія, на которую мы старались стать, можно, какъ намъ кажется, справедливо оцѣнить все, что есть правильнаго въ любой философской системѣ, которая съ знаніемъ и съ добросовѣстностью изслѣдовала основы математики. Въ частности, мы хотимъ еще вкратцѣ выдвинуть одну здравую идею въ ученіи Канта о чистомъ воззрѣніи a priori. Гильбертъ далъ импульсъ къ тому, чтобы точно изслѣдовать логическую силу отдѣльныхъ аксіомъ въ нашей наукѣ. Нѣчто подобное происходитъ въ настоящее время и въ механикѣ: впрочемъ, эти изслѣдованія ведутъ

*) Ср. H. Cohen, „Platons Ideenlehre und die Mathematik". Marburg, 1879.

свое начало еще отъ Лагранжа, какъ это можно усмотрѣть изъ приведенныхъ выше статей Штеккеля и доклада Фосса. Опираясь на эти предварительныя работы, мы будемъ все болѣе и болѣе въ состоянія усмотрѣть, какія аксіомы геометріи и механики нужно принять, чтобы съ той или иной точностью объяснить одно или другое явленіе природы. Такія изслѣдованія о преимуществахъ и недостаткахъ той или иной гипотезы производятся въ настоящее время въ возрастающемъ количествѣ. Но всѣ эти соображенія во истину остаются въ области чистаго воззрѣнія a priori въ томъ болѣе глубокомъ смыслѣ этого слова, что они взвѣшиваютъ самыя предположенія о предѣлахъ возможности нашего опыта. Только вмѣсто термина a priori слѣдовало бы подыскать болѣе опредѣленное выраженіе.

**16.** Итакъ, отвергая рѣшительно всякое вмѣшательство воззрѣнія въ ту область, гдѣ властвуетъ чистая мысль, мы тѣмъ охотнѣе предоставляемъ ему роль наводящей поддержки и спутника нашей мысли. Безъ индивидуальныхъ особенностей наглядныхъ фигуръ, которыя вовсе не введены въ геометрическія понятія, цѣль многихъ изъ этихъ понятій оставалась бы совершенно непонятной. Мы напомнимъ только понятіе о кривизнѣ. Какъ было указано въ п. 1, мы можемъ любой эллипсъ принять за „окружность", любую внутреннюю его точку за „центръ" и послѣдовательно построить евклидову геометрію, въ которой такъ называемые „радіусы" такой „окружности" будутъ равны. Но если мы въ этой или въ обычной евклидовой геометріи захотимъ притти къ точному понятію о кривизнѣ и съ этой цѣлью будемъ подыскивать кривую, которая (въ неясномъ еще смыслѣ этого слова) имѣетъ всюду равномѣрную кривизну, то намъ прежде всего придетъ въ голову „настоящая" окружность, построенная при помощи циркуля. Но, съ точки зрѣнія „псевдо-евклидовой геометріи", мы должны бы и ея псевдо-окружности приписать равномѣрную кривизну, и мы пришли бы при этомъ къ совершенно тѣмъ же законамъ, которые мы получаемъ въ „настоящей" евклидовой геометріи, исходя отъ „настоящей" окружности. Какъ бы послѣдовательно ни было ученіе о кривизнѣ въ этой псевдо-геометріи, выборъ этой псевдо-окружности, какъ кривой постоянной кривизны, оставался бы непонятнымъ. Но если бы при построеніи этой псевдо-геометріи мы пожелали больше считаться съ воззрѣніемъ, то мы должны были бы попытаться опредѣлить какимъ либо образомъ тотъ изъ эллипсовъ, который мы называемъ настоящей окружностью. Но, какъ мы видѣли выше, чисто геометрическими опредѣленіями этого достигнуть невозможно. Однако, намъ справедливо возразятъ, что, если кому-нибудь покажутъ настоящую окружность, не сообщая вовсе о томъ, какъ она построена (при помощи циркуля), то онъ несомнѣнно ясно почувствуетъ въ этой кривой закономѣрность, хотя бы онъ и не умѣлъ ее описать, закономѣрность, отличающую ее отъ всѣхъ остальныхъ эллипсовъ. Конечно! Но опредѣленіе этой закономѣрности не есть дѣло геометріи, это задача психологіи и физіологіи, и при томъ задача величайшей трудности. Для ея выясненія пришлось бы обратиться къ психо-физіологической основѣ симметріи. Даже тотъ, кто не умѣетъ математически мыслить, имѣетъ явно выраженное чувство „истинной" симметріи, которая не можетъ быть опредѣлена однимъ только движеніемъ. Если мы двѣ конгруэнтныя фигуры расположимъ справа и слѣва отъ нѣкоторой прямой не вполнѣ симметрично, то мы испытываемъ какъ бы даже физически непріятное ощущеніе. Если нѣкоторая прямая $x$ перпендикулярна къ плоскости симметріи нашего тѣла, а другая прямая, выходящая изъ плоскости, расположена не вполнѣ перпендикулярно къ прямой $x$, то продолжительное созерцаніе такой фигуры возбуждаетъ и утомляетъ насъ легче, чѣмъ въ томъ случаѣ, когда этотъ уголъ вполнѣ прямой (т. е. съ незамѣтной ошибкой). Очевидно, здѣсь вліяютъ условія аккомодаціи обоихъ глазъ. Относительно фигуръ, которыя расположены симметрично по отношенію къ плоскости симметріи нашего тѣла, наши глаза устанавливаются одинаково и испытываютъ одинаковое напряженіе. Прямые углы, которые при этой симметріи переходятъ другъ въ друга, мы гораздо легче чертимъ на глазъ, нежели расположенные иначе. Быть можетъ, это именно обстоятельство, въ связи съ образованіемъ окружности путемъ вращенія твердаго тѣла, представляетъ собой путь, которымъ можно объяснить предпочтеніе опредѣленной евклидовой геометріи всѣмъ другимъ*). Это, однако, дѣло психологіи.

---

*) Ср. M. Simon, „Zu den Grundlagen der Nichteuklidischen Geometrie", Strassburg, 1891. Тамъ же указанія дальнѣйшей литературы.

ГЛАВА III.

# Обоснованіе проективной геометріи.

## § 15. Аксіомы сопряженія и расположенія.

1. Изложивъ обѣ неевклидовы геометріи при помощи евклидовой геометріи, мы достигли того преимущества, что судьбы этихъ трехъ геометрическихъ системъ оказались тѣсно связанными одна съ другой: если бы одна изъ нихъ привела къ противорѣчію, то это обнаружило бы также противорѣчіе въ каждой изъ двухъ другихъ. Но, съ другой стороны, это имѣетъ и слабую сторону: можетъ показаться, что евклидова геометрія все-же является первоисточникомъ всѣхъ пространственныхъ построеній. Мы уже указывали выше, въ § 13 и въ § 14, что каждую изъ двухъ неевклидовыхъ геометрій можно построить совершенно независимо; и при томъ это можно сдѣлать двояко: можно построить какъ одну, такъ и другую неевклидову геометрію, исходя изъ ея аксіомъ, какъ это дѣлается обычно въ учебникахъ геометріи; можно также исходить отъ мѣроопредѣленія Кели (Cayley), что даетъ возможность сдѣлать обзоръ быстрѣе. Мы рѣшаемся остановиться на послѣднемъ методѣ, хотя мы и вынуждены будемъ ограничиться одними только указаніями. Но метрика Кели опирается на проективную геометрію, а потому мы должны прежде развить эту дисциплину.

2. Проективная геометрія послужитъ намъ также основой для окончательнаго построенія системы евклидовой геометріи. Въ своемъ мѣстѣ (§ 14) мы отказались отъ движенія, какъ критерія конгруэнтности, такъ какъ при этомъ критеріи обыкновенно молчаливо принимается, что движутся твердыя тѣла; понятіе же о твердости тѣла можно установить, только пользуясь неизмѣняемостью мѣръ. Обычное опредѣленіе конгруэнтности впадаетъ, такимъ образомъ, въ ложный кругъ, изъ котораго насъ не можетъ вывести и „чистое воззрѣніе", какъ это нерѣдко утверждали. Движеніе — не принципъ геометріи, а задача кинематики. По почину Лейбница, Наторпъ*) недавно сдѣлалъ попытку развить ученіе о располо-

*) См. цитату на стр. 154; ср. также Natorp. „Logik in Leitsätzen zu akad. Vorlesungen", Marburg, 1904.

женіи въ пространствѣ, исходя изъ понятія о движеніи, какъ объ измѣненіи мѣста, или какъ о совокупности всевозможныхъ положеній. Но понятіе объ измѣненіи оказывается слишкомъ общимъ для этой цѣли; можно было бы безъ труда указать „измѣненія", вызывающія непрерывное преобразованіе пространственныхъ образовъ, которыя все же не давали бы намъ того, что должно дать движеніе. Необходимо, слѣдовательно, принять во вниманіе тѣ свойства, которыя претворяютъ эти измѣненія, или преобразованія, въ движенія. Это суть свойства, принадлежащія группамъ, которыя не поддаются опредѣленію безъ пособія аксіомъ I, II, IV и V. Такъ какъ это, по существу, аксіомы проективной геометріи, то идеи Наторпа, — по крайней мѣрѣ, въ той ихъ части, которой дѣйствительно возможно воспользоваться, — могутъ найти себѣ примѣненіе прежде всего въ проективной геометріи въ томъ приблизительно видѣ, какъ это дѣлаетъ Линдеманъ*). Этотъ путь, однако, становится доступнымъ только при пособіи анализа или всей геометріи положенія. Въ духѣ элементарной геометріи представляется гораздо болѣе подходящимъ дать такое осуществленіе аксіомъ конгруэнтности, которое опирается на надлежащія построенія. Этого мы и имѣли въ виду достигнуть при помощи построеній Штейнера (§ 5). Однако эти построенія предполагаютъ, что въ каждой плоскости дана вспомогательная окружность. Но геометрическія свойства окружности не могутъ быть опредѣлены безъ помощи метрическихъ понятій. Мы оказались бы, такимъ образомъ, со всѣми своими задачами въ ложномъ кругу, если бы геометрія, какъ это предполагаетъ наивный эмпиризмъ, заимствовала всѣ свои законы отъ фигуръ, а не вкладывала ихъ сама въ эти фигуры. Съ точки зрѣнія чисто абстрактной геометріи, мы дѣлаемъ обратное заключеніе: такъ какъ идеальная окружность только метрически отличается отъ остальныхъ эллипсовъ, то въ чисто абстрактной системѣ идеальной геометріи должно быть возможно принять за „окружность" любой эллипсъ; и это не въ томъ смыслѣ, что и съ „неточной" фигурой можно связать строгіе выводы; напротивъ, построенія, произведенныя при помощи такой окружности, будутъ совершенно точны, хотя конгруэнтность, устанавливаемая этимъ путемъ, совершенно отличается отъ эмпирической конгруэнтности. На такую возможность мы уже указывали въ § 14, теперь мы имѣемъ въ виду эту идею осуществить[1]).

*) См. A. Clebsch. „Vorlesungen über Geometrie, bearbeitetet von Lindemann". Bd. II.

[1]) Идея автора заключается, такимъ образомъ, въ слѣдующемъ. Построенія Штейнера содержатъ критеріи конгруэнтности двухъ фигуръ: это значитъ, что произведя конечное число Штейнеровыхъ построеній, мы всегда имѣемъ возможность рѣшить, конгруэнтны ли данныя двѣ фигуры, или нѣтъ. Но при производствѣ Штейнеровыхъ построеній мы должны пользоваться вспомогательной окружностью.

(см. на слѣд. стр.).

**3.** Такъ какъ въ параболической и эллиптической геометріяхъ, путемъ введенія несобственныхъ или соотвѣтственно идеальныхъ элементовъ, чисто абстрактно вводятся законы сопряженія, дѣйствующіе въ эллиптической геометріи, то проективная геометрія, которая имѣетъ служить общей основой всѣхъ этихъ геометрическихъ системъ, должна исходить отъ аксіомъ сопряженія эллиптической геометріи.

Такимъ образомъ, въ проективной плоскости любыя двѣ прямыя всегда другъ друга пересѣкаютъ; лишь позже мы выдѣлимъ нѣкоторыя точки и прямыя въ качествѣ несобственныхъ или идеальныхъ, чтобы такимъ образомъ придти къ тремъ различнымъ геометрическимъ системамъ. Слова „точка, прямая, плоскость“ можно было бы также замѣнить терминами „основные образы нулевой, первой и второй ступени“; впрочемъ, плоскость мы постараемся воспроизвести при помощи пучка лучей.

Сообразно этому мы будемъ исходить отъ двухъ системъ объектовъ, которые мы будемъ называть **точками** и **прямыми**. Мы считаемъ также установленнымъ, что нужно разумѣть подъ инцидентностью точки съ прямой линіей [2]). Относительно точекъ, инцидентныхъ съ прямой, мы

---

Возникаетъ вопросъ, что будетъ, если мы замѣнимъ эту окружность эллипсомъ, т. е. если мы будемъ пользоваться эллипсомъ, какъ если бы это была наша вспомогательная окружность. Авторъ указываетъ, что мы придемъ такимъ образомъ къ своеобразному опредѣленію конгруэнтности, абстрактно совершенно правильному, т. е. не содержащему логическихъ противорѣчій, хотя эта конгруэнтность и будетъ существенно отличаться отъ обычной.

Но авторъ дѣлаетъ такое замѣчаніе: „Такъ какъ идеальная окружность только метрически отдѣляется отъ остальныхъ эллипсовъ, то въ чисто идеальной системѣ абстрактной геометріи **должно быть возможно** принять за „окружность“ любой эллипсъ“. Почему же это должно быть возможно? Если окружность дѣйствительно „только метрически отличается отъ остальныхъ эллипсовъ“, то лишь въ томъ смыслѣ, что окружность можно разсматривать, какъ частный случай эллипса. Но окружность можетъ быть разсматриваема также, какъ частный случай различнаго рода оваловъ. Если бы мы, однако, любой такой овалъ положили въ основаніе Штейнеровыхъ построеній, то мы впали бы въ противорѣчіе. Если эллипсъ не даетъ такихъ противорѣчій, то причина этого коренится довольно глубоко въ проективныхъ свойствахъ коническихъ сѣченій, а не въ тѣхъ поверхностныхъ соображеніяхъ, на которыя ссылается авторъ.

[2]) Эта инцидентность въ различныхъ осуществленіяхъ геометріи различно реализируется. Такъ напримѣръ, въ геометріи, осуществляемой сѣтью сферъ, прямая инцидентна съ точкой, если соотвѣтствующая сфера принадлежитъ пучку. Въ аналитической системѣ, развитой въ § 12, прямая инцидентна съ точкой, если соотвѣтствующія числа удовлетворяютъ уравненіямъ прямой и т. д.

Здѣсь авторъ исходитъ изъ допущенія, что опредѣленная совокупность объектовъ принята за точки, другая совокупность объектовъ — за прямыя. Онъ принимаетъ также, что установлено, при какихъ условіяхъ прямая инцидентна съ точкой, т. е. **данъ критерій, по которому относительно каждой точки и прямой мы можемъ установить, инцидентны ли они другъ съ другомъ или нѣтъ.**

будемъ говорить, что „точки лежатъ на прямой", что онѣ „принадлежатъ прямой"; какъ выяснено въ § 13, эти точки не должны непремѣнно лежать „на" прямой въ обычномъ значеніи этого слова; прямыя, инцидентныя съ точкой, „проходятъ черезъ эту точку". Прямая „соединяетъ" любыя двѣ „ея" точки, т. е. двѣ принадлежащія ей точки. Двѣ прямыя, проходящія черезъ одну точку, „пересѣкаются въ этой точкѣ", „имѣютъ эту общую точку". Всѣ эти способы выраженія служатъ только для облегченія рѣчи; между точками и прямыми мы допускаемъ, опираясь на понятіе объ инцидентности, слѣдующаго рода сопряженія:

$I_1$. Черезъ двѣ различныя точки всегда проходитъ одна и только одна прямая.

$I_2$. На каждой прямой лежатъ, по крайней мѣрѣ, двѣ точки.

$I_3$. Имѣются, по крайней мѣрѣ, двѣ непересѣкающіяся прямыя.

Такимъ образомъ, имѣются, по крайней мѣрѣ, три точки, не лежащія на одной прямой. Три прямыя, которыя попарно соединяютъ три точки, не лежащія на одной прямой, образуютъ „трехсторонникъ"; эти прямыя называются „сторонами" трехсторонника, а исходныя три точки — его „вершинами". Подъ „пучкомъ лучей" $(S, u)$ съ „вершиной" $S$ и „направляющей" $u$ мы будемъ разумѣть совокупность прямыхъ, или „лучей", которые соединяютъ вершину $S$ съ точками прямой $u$. Пучекъ лучей можетъ имѣть только одну вершину, такъ какъ иначе его лучи, въ силу положенія $I_1$, должны были бы всѣ совпасть. Мы требуемъ далѣе:

$I_4$. Два пучка лучей[3]) съ общей вершиной имѣютъ, по крайней мѣрѣ, одинъ общій лучъ.

$I_5$. Прямая, которая пересѣкаетъ двѣ стороны трехсторонника, не проходя черезъ точку пересѣченія послѣднихъ, пересѣкаетъ также третью сторону.

**4.** Эти двѣ аксіомы имѣютъ, очевидно, цѣлью дать опредѣленіе плоскости. Изъ аксіомы $I_5$ вытекаютъ, прежде всего, слѣдующія вспомогательныя теоремы:

A. Прямая, которая пересѣкаетъ два луча пучка, не проходя черезъ его вершину, пересѣкаетъ также 1) направляющую и 2) всѣ остальные лучи пучка; поэтому она можетъ и сама служить направляющей.

B. Любыя двѣ направляющія одного и того же пучка пересѣкаются[4]).

---

[3]) Мы будемъ въ дальнѣйшемъ для сокращенія называть пучекъ лучей просто „пучкомъ".

[4]) Докажемъ эти основныя предложенія. Положимъ, что прямая $m$ пересѣкаетъ два луча $a$ и $b$ пучка, и что $l$ есть направляющая этого пучка. Въ такомъ случаѣ прямыя $a, b, l$ образуютъ трехсторонникъ; прямая $m$, пересѣкающая стороны $a$ и $b$, согласно постулату $I_5$, пересѣчетъ также сторону $l$, т. е. направляющую. Въ этомъ содержится, въ сущности, уже и доказательство предложенія $B$.

Всю совокупность лучей и направляющихъ пучка вмѣстѣ съ принадлежащими имъ точками мы будемъ называть „плоскостью“ и притомъ „инцидентной“ съ этими прямыми и точками. Эти образы „лежатъ на этой плоскости“, они „принадлежатъ ей“, плоскость „проходитъ черезъ нихъ“. Такимъ образомъ, плоскости принадлежатъ: любая прямая, соединяющая двѣ ея точки, и точка пересѣченія двухъ ея прямыхъ. Любыя двѣ прямыя пересѣкаются [5]). Каждая точка плоскости можетъ быть принята за вершину, любая прямая, не проходящая черезъ эту точку, за направляющую пучка, „образующаго“ плоскость. Въ виду аксіомы $I_3$ не всѣ прямыя лежатъ въ одной плоскости. Всякая прямая, не лежащая въ нѣкоторой плоскости, пересѣкаетъ эту плоскость въ одной и только въ одной точкѣ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $S$ будетъ вершина пучка, образующаго плоскость, $u$ — его направляющая, $v$ — прямая, не лежащая въ плоскости: въ такомъ случаѣ пучки $(S, u)$ и $(S, v)$, въ силу аксіомы $I_4$, имѣютъ общій лучъ $w$, который пересѣкаетъ прямую $v$ въ точкѣ $V$; эта точка принадлежитъ какъ прямой $v$, такъ и плоскости. Отсюда непосредственно вытекаетъ, что двѣ плоскости всегда пересѣкаются по прямой линіи [6]). Три плоскости, не имѣющія общей прямой, пересѣкаются въ одной точкѣ. Черезъ три точки, не лежащія на одной прямой, всегда проходитъ одна и только одна плоскость, ибо одна изъ точекъ можетъ быть принята за вершину, а прямая, соединяющая двѣ другія, за направляющую пучка.

**5.** Лучи, соединяющіе точки плоскости $\alpha$ съ точкой $S$, не лежащей въ этой плоскости, образуютъ „сѣнь“ этой плоскости. Сѣченіе этихъ лучей съ плоскостью $\beta$, не проходящей черезъ точку $S$, называется „проекціей“ (точекъ) плоскости $\alpha$ изъ точки $S$ на плоскость $\beta$. Тѣ свойства фигуръ плоскости $\alpha$, которыя сохраняются проекціями этихъ фигуръ на любую другую плоскость, называются „проективными свойствами“ фигуръ. Геометрія, обоснованіемъ которой мы имѣемъ въ виду сейчасъ заняться, изучаетъ исключительно проективныя свойства геометрическихъ образовъ. Такъ, напримѣръ, то свойство середины $M$ отрѣзка $AB$, что она лежитъ „между“ крайними его точками, не есть проективное свойство,

[5]) Если эти двѣ прямыя служатъ лучами пучка, то онѣ пересѣкаются въ вершинѣ пучка; если одна служитъ лучемъ пучка, а другая направляющей, то онѣ пересѣкаются по самому опредѣленію направляющей (см. также предложеніе $A$); если же это двѣ направляющія, то онѣ пересѣкаются въ силу предложенія $B$.

[6]) Въ самомъ дѣлѣ, каждая прямая, лежащая на одной плоскости, необходимо должна встрѣтить другую плоскость. Эта общая точка можетъ быть принята за вершину образующаго пучка какъ для одной, такъ и для другой плоскости; эти два пучка имѣютъ, слѣдовательно, общую прямую ($I_4$), принадлежащую обѣимъ плоскостямъ. Если бы двѣ плоскости, кромѣ общей прямой, имѣли также общую точку, на этой прямой не лежащую, то эта точка и эта прямая могли бы быть приняты за вершину и направляющую пучка, образующаго каждую плоскость, — обѣ плоскости, такимъ образомъ, необходимо совпадали бы.

такъ какъ можно легко достигнуть того, чтобы проекція $M'$ точки $M$ изъ точки $S$ на нѣкоторую прямую $u'$ лежала внѣ отрѣзка $A'B'$, соединяющаго проекціи $A'$ и $B'$ точекъ $A$ и $B$. Если точка $D$ лежитъ на прямой $AB$ внѣ отрѣзка $AB$, и если $D'$ есть ея проекція изъ точки $S$ на прямую $u'$, то одна изъ двухъ точекъ $M'$ и $D'$ необходимо будетъ лежать между точками $A'$ и $B'$, а другая внѣ ихъ. Такимъ образомъ, то свойство четырехъ точекъ $A, B, M, D$, что двѣ изъ нихъ $M$ и $D$ раздѣляютъ двѣ другія $A$ и $B$, сохраняется при проектированіи; это — проективное свойство. Всѣ эти соображенія служатъ для насъ указаніемъ, какъ нужно видоизмѣнить аксіомы расположенія въ цѣляхъ проективной геометріи (ср. § 10, 1). Мы постулируемъ:

Двѣ различныя точки $A$ и $B$ на прямой $u$ устанавливаютъ подраздѣленіе всѣхъ остальныхъ точекъ прямой на два класса $(A, B)_{\mathrm{I}}$ и $(A, B)_{\mathrm{II}}$, обладающіе слѣдующими свойствами:

$\mathrm{II}_1$. Это подраздѣленіе не зависитъ отъ послѣдовательности точекъ $A, B$.

$\mathrm{II}_2$. Каждая точка прямой, кромѣ $A$ и $B$, принадлежитъ одному и только одному классу.

$\mathrm{II}_3$. Въ каждомъ классѣ есть, по крайней мѣрѣ, одна точка.

При этомъ подраздѣленіи, производимомъ точками $A$ и $B$, двѣ точки $Z$ и $W$ называются „сорасположенными“ (isothetisch) относительно $A$ и $B$, если онѣ принадлежатъ одному и тому же классу, и „противорасположенными“ (enantiothetisch) въ противоположномъ случаѣ.

$\mathrm{II}_4$. Въ каждой группѣ четырехъ точекъ, лежащихъ на одной прямой, любой изъ этихъ четырехъ точекъ отвѣчаетъ одна и только одна такая точка, что выдѣленныя такимъ образомъ двѣ точки противорасположены относительно двухъ другихъ.

Если, такимъ образомъ, точки $Z$, $W$ противорасположены относительно точекъ $A$, $B$, то [7])

a) точки $Z, A$ сорасположены относительно $W, B$,
b) „ $Z, B$ „ „ $W, A$,
c) „ $W, A$ „ „ $Z, B$,
d) „ $W, B$ „ „ $Z, A$;

изъ a) и c), въ силу аксіомы $\mathrm{II}_4$, слѣдуетъ, что

e) точки $A, B$ также противорасположены относительно точекъ $Z, W$.

То же вытекаетъ изъ соотношеній b) и d); изъ соотношеній же a) и d), а также b) и c) слѣдуетъ, что и сорасположеніе двухъ паръ точекъ есть свойство взаимное. Мы получаемъ, такимъ образомъ, предложеніе:

---

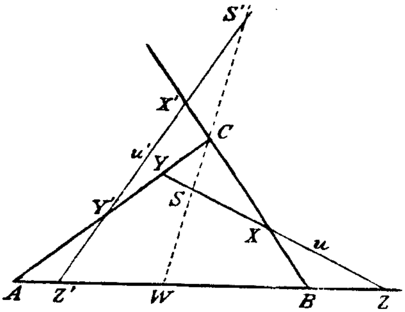
[7]) Если бы, напримѣръ, точки $Z$ и $A$ были противорасположены относительно точекъ $B$ и $W$, то оказалось бы, что къ точкѣ $Z$ можно двоякимъ образомъ такъ присоединить вторую точку, чтобы удовлетворить требованію $\mathrm{II}_4$.

Если точки $Z$, $W$ сорасположены (или противорасположены) относительно точекъ $A$, $B$, то и обратно: точки $A$, $B$ сорасположены (или противорасположены) относительно точекъ $Z$, $W$.

Чтобы выразить это взаимоотношеніе двухъ паръ точекъ, мы будемъ говорить, въ случаѣ противорасположенія, что двѣ пары точекъ $Z$, $W$ и $A$, $B$ „раздѣляютъ“ другъ друга. Въ случаѣ же сорасположенія, — что онѣ „слѣдуютъ“ другъ за другомъ. Различныя расположенія, которыя еще возможны въ соотвѣтствіи съ этими требованіями, ближе опредѣляются слѣдующей „плоскостной“ аксіомой:

$\mathrm{II}_5$. Двѣ прямыя $u$, $u'$ въ плоскости трехсторонника $a, b, c$, не проходящія ни черезъ одну изъ его вершинъ $A, B, C$ и не пересѣкающіяся на какой-либо изъ его сторонъ, даютъ въ сѣченіи со сторонами $a$, $b$, $c$ три пары точекъ $X$, $X'$, — $Y$, $Y'$ и $Z$, $Z'$; эти три пары точекъ либо не раздѣляютъ **ни одной** пары вершинъ, либо раздѣляютъ **двѣ** и только **двѣ** пары.

**6.** Если на нѣкоторой прямой $c$ двѣ пары точекъ $Z$, $W$ и $A$, $B$ другъ друга раздѣляютъ, такъ что пары $Z$, $B$ и $A$, $W$ слѣдуютъ одна за другой, а пара $Z$, $Z'$ [8]) раздѣляетъ пару точекъ $A$, $W$, то точка $Z'$ не можетъ совпадать ни съ $B$, ни, конечно, съ $A$, $W$, $Z$. Поэтому на любой прямой $c$ имѣются, по крайней мѣрѣ, пять точекъ $A$, $B$, $W$, $Z$, $Z'$, и можно принять, что точки $Z$, $Z'$ и $A$, $W$ другъ друга раздѣляютъ; путь $C$ будетъ точка, не лежащая на прямой $c$; положимъ, наконецъ, что точки $S$ и $S'$ раздѣляютъ пару точекъ $C$ и $W$ ($\mathrm{II}_3$). Прямая $u$, соединяющая точки $S$ и $Z$, и прямая $u'$, соединяющая $S'$ и $Z'$ (см. фиг. 49), пересѣкаютъ прямыя $BC$ и $AC$ соотвѣтственно въ точкахъ $X$, $X'$ и $Y$, $Y'$.



Фиг. 49.

Согласно заданію:

1) Точки $Z, Z'$ раздѣляютъ точки $A, W$,

2) „ $S, S'$ „ „ $W, C$.

Отсюда, въ силу аксіомы $\mathrm{II}_5$, трехсторонникъ $WCA$ даетъ:

3) Точки $Y$, $Y'$ слѣдуютъ за точками $A$, $C$.

Въ виду соотношенія 2) мы имѣемъ относительно треугольника $WCB$ альтернативу:

a) либо точки $X$, $X'$ раздѣляютъ точки $B$, $C$, а точки $Z$, $Z'$ слѣдуютъ за точками $W$, $B$;

b) либо точки $X$, $X'$ слѣдуютъ за точками $B$, $C$, а точки $Z$, $Z'$ раздѣляютъ точки $W$, $B$.

---

[8]) Такая точка $Z'$ всегда существуетъ въ силу постулата $\mathrm{II}_3$.

Съ другой стороны, относительно треугольника $ABC$, въ виду соотношенія 3, также имѣетъ мѣсто альтернатива:

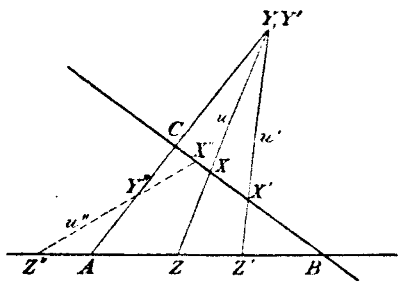
$\alpha$) либо точки $X$, $X'$ раздѣляютъ точки $B$, $C$, а точки $Z$, $Z'$ раздѣляютъ точки $A$, $B$;

$\beta$) либо точки $X$, $X'$ слѣдуютъ за точками $B$, $C$, а точки $Z$, $Z'$ слѣдуютъ за точками $A$, $B$.

Такъ какъ случай a) можетъ имѣть мѣсто только совмѣстно съ $\alpha$), а случай b) только совмѣстно съ $\beta$), то точки $Z$ и $Z'$ необходимо раздѣляютъ, кромѣ той пары точекъ, относительно которой это установлено условіемъ, еще вторую пару и не больше. Но всего мы имѣемъ на прямой $c$ три пары точекъ, которыя можно комбинировать съ парой $ZZ'$,— именно три парныя комбинаціи точекъ $A$, $B$, $W$. Если точки $Z$, $Z'$ не раздѣляютъ двухъ паръ, то онѣ не могутъ раздѣлять и третьей пары, ибо тогда онѣ необходимо должны были бы дѣлить еще одну пару. Мы, такимъ образомъ, получаемъ:

Предложеніе 1. Изъ пяти точекъ, расположенныхъ на одной прямой, каждая пара либо раздѣляетъ двѣ изъ трехъ паръ, образуемыхъ остальными тремя точками, либо не раздѣляетъ ни одной.

Теперь мы имѣемъ возможность освободить аксіому $\mathrm{II}_5$ отъ того ограниченія, что прямыя $u$ и $u'$ не должны пересѣкаться ни на одной изъ прямыхъ $a$, $b$, $c$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть точка $Y'$ совпадаетъ съ $Y$, пара $A$, $B$ раздѣляетъ пару $Z$, $Z''$, пара $Y$, $Y''$ раздѣляетъ пару $A$, $C$. Если $X''$ есть точка пересѣченія прямой $u'' = Y''Z''$ съ $BC$ и не совпадаетъ съ $X$, то, въ силу аксіомы $\mathrm{II}_5$ [9]), пара $X$, $X''$ должна слѣдовать за парой $BC$ (фиг. 50). Если теперь пара $A$, $B$ не дѣлитъ пары $Z$, $Z'$, а потому, въ силу предложенія 1, дѣлитъ пару $Z'$, $Z''$, то пара $X'$, $X''$, въ силу аксіомы $\mathrm{II}_5$, должна слѣдовать за парой $B$, $C$, ибо точки $Y'$, $Y''$ раздѣляютъ пару $A$, $C$. Отсюда, въ силу предложенія 1, вытекаетъ, что пара $X$, $X'$ также слѣдуетъ за парой $B$, $C$. Если точка $X''$ случайно совпадаетъ съ $X$, а точка $Z$ не совпадаетъ съ $Z'$, такъ что и $X$ не совпадаетъ съ $X'$, то точка $X''$ не можетъ совпасть съ $X'$. Поэтому къ прямымъ $u'$, $u''$ примѣняется предложеніе $\mathrm{II}_5$, которое и даетъ непосредственно, что пара $X$, $X'$ не раздѣляетъ пары $B$, $C$, если точки $Z$, $Z'$ не дѣлятъ пары $A$, $B$. Это соотношеніе между парами $X$, $X'$ и $Z$, $Z'$ взаимное; если поэтому точки $X$, $X'$ раздѣляютъ пару $B$, $C$, то и точка $Z$, $Z'$ раздѣляетъ пару $A$, $B$. Этимъ устраняется упомянутое выше огра-



Фиг. 50.

[9]) Примѣняя ее къ трехстороннику $ABC$ и прямымъ $u$ и $u''$.

ниченіе предложенія $II_5$. Если мы черезъ точку $Y$ проведемъ еще другія прямыя, встрѣчающія прямую $AB$ (и $BC$), то путемъ повторнаго примѣненія полученнаго результата мы придемъ къ слѣдующему выводу:

Предложеніе 2. Расположеніе точекъ на прямой, устанавливаемое аксіомами II, есть свойство проективное.

Это значитъ, что оно сохраняется при проектированіи съ одной прямой на другую.

**7.** Дѣленіе точекъ на прямой, устанавливаемое аксіомами II, допускаетъ существенное обобщеніе. Если $A$, $B$, $C$, $Z$ суть четыре точки на прямой и $(A, B)_C$ есть тотъ изъ двухъ классовъ, опредѣляемыхъ точками $A$ и $B$, который не содержитъ точки $C$, то точка $Z$ будетъ принадлежать этому классу или не будетъ принадлежать ему, смотря по тому, раздѣляютъ ли точки $Z$, $C$ пару $A$, $B$ или нѣтъ. Если мы обозначимъ точки $A$, $B$, $C$ въ какой-угодно изъ шести возможныхъ послѣдовательностей цифрами 1, 2, 3, то точка $Z$, въ силу аксіомы $II_4$, должна принадлежать одному и только одному изъ классовъ $(1, 2)_3$, $(2, 3)_1$, $(3, 1)_2$. Теперь мы докажемъ слѣдующее общее предложеніе:

Предложеніе 3. Если $n$ точекъ лежатъ на одной прямой, то ихъ можно перенумеровать цифрами $1, 2, 3, \ldots, n$ такимъ образомъ, чтобы имѣло мѣсто слѣдующее расположеніе:

1. Въ циклѣ $1, 2, 3, \ldots, n, 1$ любыя двѣ послѣдовательныя точки $\nu$, $\nu+1$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots, n-1$) или $n$, 1 опредѣляютъ въ смыслѣ аксіомъ II одинъ классъ $[\nu, \nu+1]$ или $[n, 1]$, который не содержитъ ни одной изъ $n-2$ остальныхъ точекъ, такъ что послѣднія всѣ принадлежатъ второму „дополнительному“ классу.

2. Каждая точка прямой $Z$, отличная отъ этихъ $n$ точекъ, принадлежитъ одному и только одному изъ этихъ $n$ классовъ: $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$, $\ldots$, $[n-1, n]$, $[n, 1]$.

3. Это расположеніе остается въ силѣ не только при круговой перестановкѣ цифръ $1, 2, 3, \ldots, n$, но и при обратной нумераціи $n, n-1, \ldots, 1$ тѣхъ же точекъ, а также при круговой перестановкѣ въ этой обратной нумераціи.

Случай $n = 3$ нами уже исчерпанъ. Чтобы доказать предложеніе путемъ перехода отъ $n$ къ $n+1$, мы предположимъ, что намъ дано $n+1$ точекъ и что по отношенію къ $n$ изъ нихъ теорема справедлива. Пусть классы, соотвѣтствующіе нѣкоторымъ $n$ точкамъ, будутъ: $[1, 2]^*$, $[2, 3]^*$, $\ldots$, $[n-1, n]^*$, $[n, 1]^*$. Согласно нашему допущенію, $(n+1)$-ая точка принадлежитъ одному и только одному изъ этихъ $n$ классовъ; мы можемъ принять, что она принадлежитъ классу $[n, 1]^*$, такъ какъ этого всегда можно достигнуть круговой перестановкой цифръ. Тогда точки $n+1$, $\nu$ раздѣляютъ пару точекъ $n$, 1 при

$$\nu = 2,\ 3,\ 4,\ .\ .\ .\ ,\ n-1.$$

Поэтому, въ силу аксіомы $II_4$, пара $n+1$, 1 слѣдуетъ за парой $\nu$, $n$, а пара $n$, $n+1$ слѣдуетъ за парой $\nu$, 1. Отсюда, въ свою очередь, вытекаетъ, что

$$(n+1,\ 1)_\nu = (n+1,\ 1)_n;\ (n,\ n+1)_1 = (n,\ n+1)_\nu \text{ при } \nu = 2,\ 3,\ .\ .\ .\ ,\ n-1,$$

гдѣ знакъ равенства служитъ для выраженія тождества соотвѣтствующихъ классовъ[10]). Такимъ образомъ, символы

$$(n+1,\ 1)_2 = (n+1,\ 1)_3 = \cdot\ \cdot\ \cdot = (n+1,\ 1)_{n-1} = (n+1,\ 1)_n$$

выражаютъ одинъ и тотъ же классъ, который мы короче будемъ обозначать черезъ $[n+1,\ 1]$. Точно такъ же пусть $[n,\ n+1]$ обозначаетъ классъ

$$(n,\ n+1)_1 = (n,\ n+1)_2 = \cdot\ \cdot\ \cdot = (n,\ n+1)_{n-1}.$$

Каждая точка $Z$, отличная отъ точекъ 1, 2, 3, . . ., $n+1$, должна принадлежать одному и только одному изъ классовъ

$$[1,\ 2]^*,\ [2,\ 3]^*,\ .\ .\ .\ ,\ [n-1,\ n]^*,\ [n,\ 1]^*.$$

Новымъ оказывается только тотъ случай, когда точка $Z$ принадлежитъ послѣднему классу $[n,\ 1]^*$, въ составъ котораго входитъ также точка $n+1$; въ этомъ случаѣ точки $Z$, $\nu$ раздѣляютъ пару точекъ $n$, 1 при $\nu = 2,\ 3,\ .\ .\ .\ ,\ n-1$. Примѣняя же предложеніе 1 къ пяти точкамъ $Z$, $\nu$, $n$, $n+1$, 1, мы заключаемъ, что пара $Z$, $\nu$ раздѣляетъ одну и только одну изъ паръ $n$, $n+1$ и $n+1$, 1[11]); иными словами, точка $Z$ принадлежитъ либо классу $(n,\ n+1)_\nu$, либо классу $(n+1,\ 1)_\nu$.

Если поэтому $Z$ и $n+1$ суть точки класса $[n,\ 1]^*$, то точка $Z$ принадлежитъ либо классу $[n,\ n+1]$, либо классу $[n+1,\ n]$. Этимъ предложеніе 3 доказано, а вмѣстѣ съ тѣмъ обнаружено, что **каждая новая точка дѣлитъ тотъ классъ, которому она принадлежитъ, на два новыхъ класса**. Поэтому звѣздочки, которыми мы имѣли въ виду отмѣтить классы, образованные $n$ точками, въ отличіе отъ классовъ, которые даютъ $n+1$ точекъ, оказываются излишними. Согласно аксіомѣ $II_3$, въ каждомъ классѣ имѣется, по крайней мѣрѣ, одна точка; слѣдовательно, на

---

10) $(n+1,\ 1)_\nu$ есть тотъ изъ двухъ классовъ, опредѣляемыхъ точками $n+1$ и 1, который не содержитъ точки $\nu$; такъ какъ точки $n$ и $\nu$ не раздѣляютъ пары $n+1$, 1, то точка $n$ принадлежитъ тому же классу, а потому классы $(n+1,\ 1)_\nu$ и $(n+1,\ 1)_n$ совпадаютъ.

11) Ибо она раздѣляетъ пару $n$, 1.

каждой прямой имѣются, по крайней мѣрѣ, четыре точки, а стало быть, по крайней мѣрѣ, четыре класса; въ нихъ имѣются еще, по крайней мѣрѣ, 4 другія точки, которыя вмѣстѣ съ прежними даютъ уже восемь классовъ; въ этихъ восьми классахъ есть, по крайней мѣрѣ, восемь новыхъ точекъ и т. д. Въ каждомъ изъ двухъ классовъ, на которые двѣ точки дѣлятъ прямую, имѣется безчисленное множество точекъ.

**8.** Различныя циклическія расположенія классовъ, которые $n$ точекъ, согласно предложенію 3, образуютъ на прямой, опредѣляютъ два различныхъ „направленія", въ которыхъ можно „пробѣгать" классы, т. е. прежде всего „сосчитывать" ихъ. Но если сюда ввести еще одну $(n+1)$-ю точку дѣленія $a$, которая принадлежитъ, скажемъ, классу $[4, 5]$, то эта точка, какъ мы видѣли, раздѣлитъ этотъ классъ на два новыхъ класса $[4, \alpha]$ и $[\alpha, 5]$; всякая другая точка $\beta$ того же класса $[4, 5]$ должна поэтому отойти либо къ классу $[4, \alpha]$, либо къ классу $[\alpha, 5]$. Если мы допустимъ послѣднее, то классъ $[\alpha, 5]$ распадется на классы $[\alpha, \beta]$ и $[\beta, 5]$, такъ что каждая точка $\gamma$ класса $[\alpha, 5]$ должна лежать либо въ классѣ $[\alpha, \beta]$, либо въ классѣ $[\beta, 5]$. Если точка $\gamma$ принадлежитъ классу $[\beta, 5]$, то послѣдній вновь распадается на классы $[\beta, \gamma]$ и $[\gamma, 5]$; поэтому классъ $[4, 5]$ состоитъ изъ классовъ $[4, \alpha]$, $[\alpha, \beta]$, $[\beta, \gamma]$, $[\gamma, 5]$, и мы получаемъ дальнѣйшее подраздѣленіе, согласно предложенію 3: $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$, $[4, \alpha]$, $[\alpha, \beta]$, $[\beta, \gamma]$, $[\gamma, 5]$, $[5, 6]$, ..., $[n-1, n]$, $[n, 1]$. Подсчетъ этихъ классовъ въ одномъ или въ другомъ направленіи даетъ въ то же время подсчетъ первоначальныхъ классовъ въ одномъ или въ другомъ направленіи; это продолжается, когда число точекъ дѣленія возрастаетъ, и мы такимъ образомъ приближаемся къ представленію, что точки прямой сами по себѣ могутъ быть приведены къ опредѣленному расположенію въ томъ смыслѣ, что всѣ классы, всѣ ихъ подклассы и т. д. могутъ быть приведены въ два циклически различныя расположенія. Вмѣстѣ съ тѣмъ здѣсь съ возрастающей силой запечатлѣвается представленіе о совокупности классовъ, какъ объ отрѣзкѣ, къ которому, однако, первоначально не примѣшивается понятіе о длинѣ[12]). При всемъ томъ мы стоимъ уже у того пункта, гдѣ возникаетъ понятіе о большемъ и меньшемъ. Въ самомъ дѣлѣ, само собой напрашивается разложеніе класса $[4, 5]$ на классы $[4, \alpha]$ и $[\alpha, 5]$, которые мы разсмотрѣли въ предыдущемъ примѣрѣ, символически выразить такъ:

$$[4, 5] = [4, \alpha] + [\alpha, 5];$$

вмѣстѣ съ тѣмъ классы $[4, \alpha]$ и $[\alpha, 5]$, составляющіе „части" объемлющаго класса $[4, 5]$, цѣлесообразно считать „меньшими", нежели весь классъ $[4, 5]$.

---

[12]) Нужно сказать, что авторъ совершенно безъ нужды привноситъ сюда наглядныя представленія.

Тогда

$$[\alpha, 5] = [\alpha, \beta] + [\beta, 5],$$
$$[\beta, 5] = [\beta, \gamma] + [\gamma, 5],$$

а вмѣстѣ съ тѣмъ

$$[4, 5] = [4, \alpha] + [\alpha, \beta] + [\beta, \gamma] + [\gamma, 5].$$

Если мы теперь согласимся это соотношеніе между классомъ $k$ и его частью $\varkappa$ обозначить знакоположеніемъ $\varkappa < k$, то

$$[\gamma, 5] < [\beta, 5], \quad [\beta, 5] < [\alpha, 5], \quad [\alpha, 5] < [4, 5],$$

и изъ этихъ „неравенствъ" вытекаетъ, какъ и въ ариѳметикѣ, что

$$[\gamma, 5] < [4, 5].$$

Относительно двухъ частей $k_1$ и $k_2$ объемлющаго класса $k$ мы имѣемъ, такимъ образомъ, критерій сравненія въ отношеніи понятій „больше" или „меньше", если одна изъ этихъ частей входитъ въ составъ другой; если же ни одинъ изъ этихъ классовъ не составляетъ части другого класса, то мы такимъ критеріемъ сравненія не располагаемъ. Этотъ критерій долженъ устанавливаться закономъ, который позволялъ бы всюду на прямой приводить въ сопряженіе съ нѣкоторыми данными классами другіе классы, которые принимаются за „равные" данному классу. Вмѣстѣ съ тѣмъ классъ $k_1$ считается „меньше" класса $k_2$, если послѣдній содержитъ часть $\varkappa_1$, которая равна классу $k_1$. Логическій генезисъ понятія о величинѣ имѣетъ, такимъ образомъ, точкой отправленія понятія „больше" и „меньше"; далѣе устанавливается равенство и въ заключеніе уже опредѣляется понятіе „сколь велико". Для нашихъ цѣлей достаточно первой ступени. Но мы бы желали, чтобы эти соображенія послужили для читателя импульсомъ для проведенія этихъ идей въ какомъ-либо многообразіи, въ которомъ онѣ не нашли еще, какъ для точекъ прямой, установившагося вслѣдствіе повседневнаго опыта тривіальнаго примѣненія; какъ на примѣръ, укажемъ на измѣреніе температуръ [13]).

## § 16. Аксіома Дедекинда и основная теорема проективной геометріи.

**1.** Для обоснованія геометріи плоскости, какъ мы видѣли въ § 13, 4, намъ нужно воспользоваться болѣе богатыми законами трехмѣрнаго пространства, чтобы вывести предложеніе Дезарга; предпосылки, которыя это предложеніе предполагаетъ, подробно указаны въ § 13, 12, доказательство же дано въ § 10, 1. Это предложеніе мы примѣнимъ къ двумъ парамъ треугольниковъ $A_1 B_1 C_1$ и $A_2 B_2 C_2$, $B_1 C_1 D_1$ и $B_2 C_2 D_2$, распо-

[13]) См. Д. Крыжановскій. „Ученіе о температурѣ по Маху". „Вѣстникъ Оп. Физики", №№ 464, 465—466.

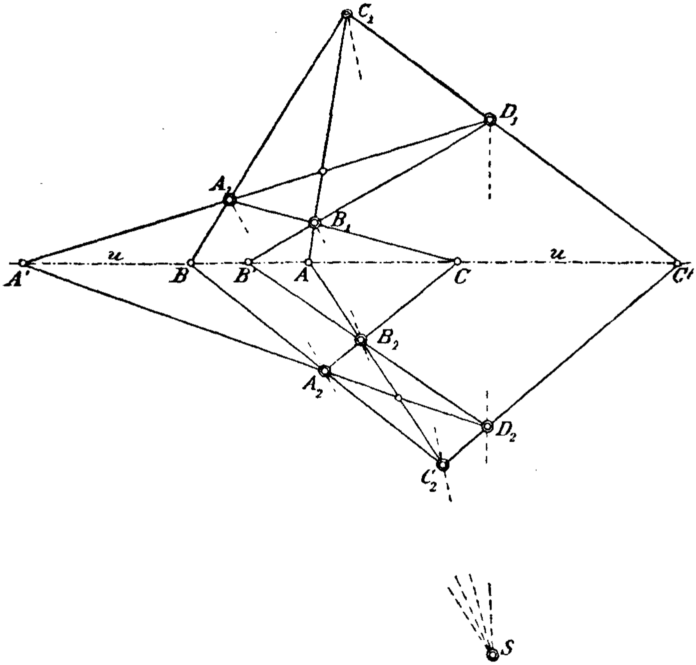
ложенныхъ въ нѣкоторой плоскости $\eta$ такимъ образомъ, что точки пересѣченія соотвѣтственныхъ сторонъ первой пары:

$C$ сторонъ $A_1B_1$ и $A_2B_2$,
$A$ „ $B_1C_1$ „ $B_2C_2$,
$B$ „ $C_1A_1$ „ $C_2A_2$,

а также точки пересѣченія соотвѣтственныхъ сторонъ второй пары:

$A'$ сторонъ $B_1C_1$ и $B_2C_2$,
$C'$ „ $C_1D_1$ „ $C_2D_2$,
$B'$ „ $B_1D_1$ „ $B_2D_2$,

расположены на одной прямой $u$. Въ такомъ случаѣ, по теоремѣ Дезарга, съ одной стороны, прямыя $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$, а съ другой стороны, $B_1B_2$, $C_1C_2$, $D_1D_2$ проходятъ черезъ одну точку. Но эта точка уже опредѣляется парой прямыхъ $B_1B_2$ и $C_1C_2$, входящихъ въ составъ обѣихъ




Фиг. 51.

системъ. Теперь оказывается, что два треугольника $A_1B_1D_1$ и $A_2B_2D_2$ расположены такимъ образомъ, что прямыя $A_1A_2$, $B_1B_2$, $D_1D_2$, соединяющія соотвѣтственныя вершины, проходятъ черезъ одну точку $S$. Поэтому, въ силу обращенія теоремы Дезарга, точки пересѣченія:

$C$ прямыхъ $A_1B_1$ и $A_2B_2$, $B'$ прямыхъ $B_1D_1$ и $B_2D_2$
и $A'$ прямыхъ $D_1A_1$ и $D_2A_2$

лежатъ на одной прямой. Это прямая $u$ (фиг. 51). Доказательство остается въ силѣ, если двѣ точки въ одной, въ двухъ или же въ трехъ парахъ $(A, A')$, $(B, B')$ и $(C, C')$ совпадаютъ. Но оно оказывается непригоднымъ, если одна изъ четырехъ точекъ $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ лежитъ на прямой $u$. Системы трехъ паръ прямыхъ, соединяющихъ эти точки попарно, называются „полнымъ" четырехугольникомъ; двѣ прямыя, или „стороны" каждой пары, которыя въ совокупности содержатъ всѣ четыре „вершины" $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$, называются „противоположными" сторонами четырехугольника, а точка ихъ пересѣченія — „дополнительной вершиной". Вмѣстѣ съ тѣмъ мы приходимъ къ предложенію:

Предложеніе 1. Если въ двухъ отнесенныхъ другъ другу полныхъ четырехугольникахъ пять паръ соотвѣтственныхъ сторонъ пересѣкаются въ точкахъ, лежащихъ на прямой $u$, которая не содержитъ ни одной изъ вершинъ, то прямыя шестой пары также пересѣкаются на той же прямой.

**2.** Полный четырехугольникъ $OPQR$ (фиг. 52) имѣетъ три дополнительныя вершины $A$, $J$, $B$. Относительно нихъ имѣетъ мѣсто предложеніе:

Предложеніе 2. Дополнительныя вершины полнаго четырехугольника не лежатъ на одной прямой.

Доказательство лучше всего провести безъ чертежа, такъ какъ это гарантируетъ намъ, что мы нигдѣ не пользуемся интуитивными соображеніями. Вершины четырехугольника мы обозначимъ просто цифрами 1, 2, 3, 4. Никакія три изъ нихъ не лежатъ на одной прямой. Положимъ, что

прямыя 14 и 23 пересѣкаются въ дополнительной вершинѣ $A$,
„ 24 „ 31 „ „ „ „ $B$,
„ 34 „ 12 „ „ „ „ $C$.

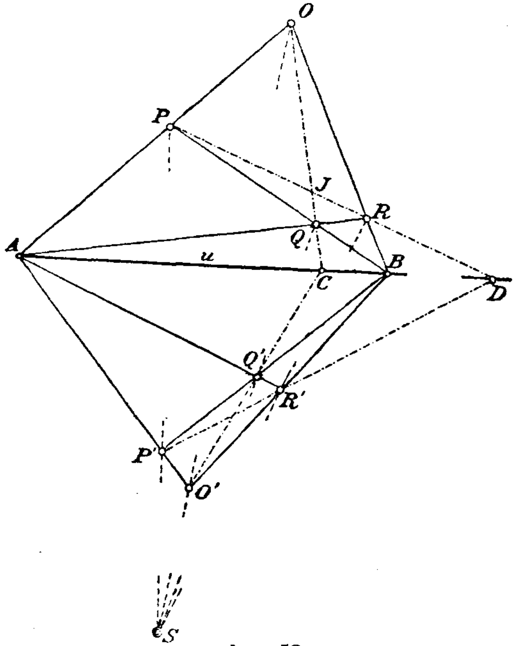
Нужно доказать, что точки $A$, $B$ и $C$ не лежатъ на одной прямой. Прямыя 14, 24, 34 суть трансверсали, проходящія, каждая, черезъ одну изъ вершинъ треугольника 123 и выходящія изъ вершины четырехугольника 4; — $A$, $B$, $C$ суть точки ихъ пересѣченія со сторонами треугольника. При помощи аксіомъ группы I нетрудно показать, что точки $A$, $B$, $C$ отличны одна отъ другой и отъ точекъ 1, 2, 3, 4, ибо всякое другое допущеніе необходимо приводитъ къ тому, что изъ точекъ 1, 2, 3, 4 три лежатъ на одной прямой[11]). Дальнѣйшее доказательство предложенія 2 опирается на аксіомы расположенія и ихъ слѣдствія.

На сторонахъ 23 и 31 треугольника 123 мы возьмемъ двѣ точки $A'$ и $B'$ такимъ образомъ, чтобы пара $A$, $A'$ раздѣляла точки 2, 3 и пара $B$, $B'$ раздѣляла точки 3, 1; положимъ, что прямая $u'$, соединяющая точки $A'$ и $B'$, встрѣчаетъ сторону 12 въ точкѣ $C'$. Если бы намъ

---

[11]) Если, напримѣръ, точка $A$ совпадаетъ съ точкой $B$, то точка 1 лежитъ на прямой $AA$ и точка 2 лежитъ на той же прямой, т. е. точки 1, 2, 4 лежатъ на одной прямой.

удалось показать, что точки $C$ и $C'$ также раздѣляютъ пару точекъ 1, 2, то отсюда вытекало бы, что точки $A$, $B$, $C$ не лежатъ на одной прямой $u$, ибо по аксіомѣ $\mathrm{II}_5$ три пары $(A, A')$, $(B, B')$, $(C, C')$ должны были бы при такихъ условіяхъ раздѣлять либо двѣ пары вершинъ треугольника 123, либо ни одной. Это дѣйствительно можно доказать, но для этого нужны нѣкоторыя предварительныя соображенія. Если четыре луча $a$, $b$, $c$, $d$ какого-либо пучка пересѣкаются двумя прямыми $x$ и $x'$, не принадлежащими пучку, соотвѣтственно въ точкахъ $A$, $B$, $C$, $D$ и $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, то, согласно предложенію 2 § 15-го, пара точекъ $A$, $B$ имѣетъ относительно пары $C$, $D$ то же расположеніе въ смыслѣ аксіомъ группы II, какое пара $A'$, $B'$ имѣетъ относительно $C'$, $D'$. Это мы будемъ для краткости обозначать такъ:




Фиг. 52.

$$(A,\ B;\ C,\ D) = (A',\ B';\ C',\ D').$$

Иначе говоря, въ зависимости отъ того, раздѣляютъ ли другъ друга пары точекъ $A$, $B$ и $C$, $D$, или нѣтъ, — пары $A'$, $B'$ и $C'$, $D'$ также соотвѣтственно другъ друга раздѣляютъ или не раздѣляютъ.

Пусть $X$, $Y$, $Z$ будутъ точки пересѣченія прямыхъ 14, 24, 34 съ прямой $u'$; въ такомъ случаѣ сѣченія пучковъ 1, 2, 3, 4 со сторонами треугольника 123 и съ прямой $u$ даютъ рядъ такихъ „равенствъ“, которыя мы перечислимъ, указывая каждый разъ пучекъ, обусловливающій это равенство.

Пучекъ 1: $(A,\ A';\ 2,\ 3) = (X,\ A';\ C',\ B')$, [15]) (1)
„ 4: $(A,\ A';\ 2,\ 3) = (X,\ A';\ Y,\ Z)$; (1′)

„ 2: $(B,\ B';\ 3,\ 1) = (Y,\ B';\ A',\ C')$, (2)
„ 4: $(B,\ B';\ 3,\ 1) = (Y,\ B';\ Z,\ X)$; (2′)

„ 3: $(C,\ C';\ 1,\ 2) = (Z,\ C';\ B',\ A')$, (3)
„ 4: $(C,\ C';\ 1,\ 2) = (Z,\ C';\ X,\ Y)$ (3′)

[15]) Изъ точки 1 выходятъ прямыя $1A$, $1A'$, 12, 13, которыя при пересѣченіи съ прямой $u$ даютъ точки $A$, $A'$, 2, 3; при пересѣченіи съ прямой $u'$ тѣ же прямыя даютъ точки $X$, $A'$, $C'$, $B'$. Аналогично устанавливаются и остальныя „равенства“.

По условію,

точки $A$, $A'$ раздѣляютъ точки 2, 3, (4)

„ $B$, $B'$ „ „ 3, 1. (5)

Изъ соотношеній (4) и (1′) вытекаетъ:

точки $X$, $A'$ раздѣляютъ точки $Y$, $Z$, (6)

Изъ соотношеній (5) и (2′) слѣдуетъ:

точки $Y$, $B'$ раздѣляютъ точки $Z$, $X$; (7)

отсюда, въ силу аксіомы $\mathrm{II}_4$, слѣдуетъ:

точки $X$, $Y$ слѣдуютъ за $A'$, $Z$, (6′)

точки $Y$, $X$ слѣдуютъ за $Z$, $B'$. (7′)

Согласно же предложенію 1 § 15-го, мы заключаемъ изъ соотношеній (6′) и (7′), что

пара точекъ $X$, $Y$ слѣдуетъ за парой $A'$, $B'$. (8)

Въ силу аксіомы $\mathrm{II}_4$, соотношеніе (6) даетъ:

пара точекъ $X$, $Z$ слѣдуетъ за парой $A'$, $Y$, (9)

а соотношеніе (7) даетъ также:

точки $X$, $Z$ раздѣляютъ точки $B'$, $Y$. (10)

Примѣняя теперь предложеніе 1 § 15-го, съ одной стороны, къ соотношеніямъ (9) и (10), мы получимъ, что

пара $X$, $Z$ раздѣляетъ пару $A'$, $B'$, (11)

а, съ другой стороны, къ соотношеніямъ (11) и (8), получимъ:

пара $A'$, $B'$ раздѣляетъ пару $Y$, $Z$. (12)

Изъ соотношеній (5) и (2) слѣдуетъ:

пара $Y$, $B'$ раздѣляетъ пару $A'$, $C'$; (13)

поэтому, согласно аксіомѣ $\mathrm{II}_4$,

пара $Y$, $C'$ слѣдуетъ за $A'$, $B'$,

или въ обратномъ порядкѣ:

пара $A'$, $B'$ слѣдуетъ за парой $Y$, $C'$. (14)

Наконецъ, въ силу того же предложенія 1 § 15-го, мы заключаемъ изъ соотношеній (13) и (14), что

точки $A'$, $B'$ раздѣляютъ точки $Z$, $C'$, (15)

а потому, въ виду соотношенія (3),

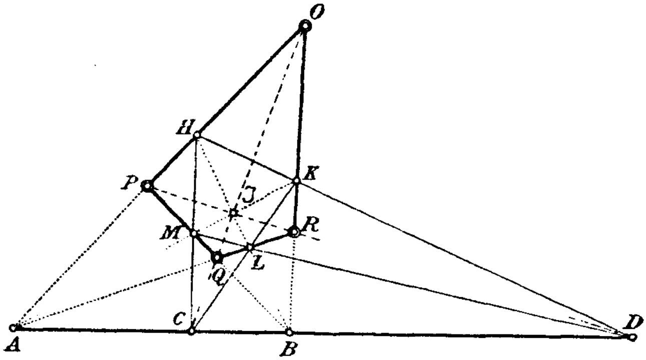
точки $C$, $C'$ раздѣляютъ точки 1, 2, (16)

что и требовалось доказать.

**3.** Полному четырехугольнику противопоставляется „полный четырехстронникъ"; это есть совокупность шести точекъ пересѣченія четырехъ прямыхъ, изъ которыхъ никакія три не проходятъ черезъ одну точку. Двѣ изъ этихъ точекъ пересѣченія, или „вершинъ" четырехсторонника, черезъ которыя проходятъ всѣ четыре прямыя, называются „противоположными" вершинами, прямая, ихъ соединяющая,— „дополнительной стороной" четырехсторонника. Такъ, напримѣръ, на фиг. 52 прямыя $OP$, $PQ$, $QR$, $RO$ опредѣляютъ полный четырехсторонникъ съ тремя парами противоположныхъ вершинъ: $(O, Q)$, $(P, R)$, $(A, B)$ и съ дополнительными сторонами $OQ$, $PR$, $AB$. Эти три прямыя не проходятъ черезъ одну точку, ибо таковой должна была бы служить, скажемъ, точка $J$, въ которой пересѣкаются прямыя $OQ$ и $PR$; но эта точка не лежитъ на прямой $AB$, ибо $A$, $B$, $J$ суть дополнительныя вершины полнаго четырехугольника, опредѣляемаго точками $O$, $P$, $Q$, $R$. Мы получаемъ, такимъ образомъ, предложеніе, аналогичное предложенію 2:

Предложеніе 3. Дополнительныя стороны полнаго четырехсторонника не проходятъ черезъ одну точку.

**4.** На фиг. 52 изображенъ частный случай, когда прямая $u$, о которой идетъ рѣчь въ предложеніи 1, проходитъ черезъ точки пересѣченія $A$ и $B$ двухъ паръ противоположныхъ сторонъ полныхъ четырехугольниковъ $OPQR$ и $O'P'Q'R'$. Выдѣляемымъ такимъ образомъ двумъ точкамъ $A$, $B$ и третьей точкѣ $C$ прямой это предложеніе однозначно относитъ, при помощи полныхъ четырехугольниковъ, четвертую точку $D$ той же прямой; такимъ образомъ, мы имѣемъ возможность




Фиг. 53.

этимъ способомъ построить безчисленное множество точекъ прямой $u$, коль скоро дана еще третья точка $C$. Если мы при этомъ построеніи, сохраняя точки $A$ и $B$, примемъ за третью точку $D$, то мы возвратимся обратно къ точкѣ $C$. Отношеніе точекъ $C$, $D$ къ выдѣляемой въ нашемъ полномъ четырехугольникѣ парѣ точекъ $A$, $B$ является, такимъ образомъ, взаимнымъ. Но и самое выдѣленіе точекъ $A$ и $B$ оказывается несущественнымъ. Именно (фиг. 53), если $H$, $K$, $L$, $M$ суть точки пересѣченія прямыхъ $AJ$ и $BJ$ со сторонами четырехугольника, проходящими черезъ вершины

$A$ и $B$, то полные четырехугольники $HOKJ$ и $JMQL$ даютъ каждый по парѣ противоположныхъ сторонъ, соотвѣтственно проходящимъ черезъ точки $A$ и $B$; между тѣмъ общая ихъ сторона $OJQ$ проходитъ черезъ точку $C$; вслѣдствіе этого, пятыя ихъ стороны $HK$ и $ML$ должны пройти черезъ точку $D$. Но, съ другой стороны, четырехугольники $PHJM$ и $JKRL$ даютъ каждый пару противоположныхъ сторонъ, проходящихъ черезъ точки $A$ и $B$, общая же сторона $PJR$ проходитъ черезъ точку $D$; слѣдовательно, шестыя стороны $HM$ и $KL$ должны пройти черезъ точку $C$. Но теперь $HKLM$ представляетъ собой четырехугольникъ, который даетъ двѣ пары противоположныхъ сторонъ, соотвѣтственно проходящихъ черезъ точки $C$ и $D$, между тѣмъ какъ стороны третьей пары проходятъ черезъ точки $A$ и $B$; такимъ образомъ, теперь точки $C$, $D$ выдѣлены по отношенію къ точкамъ $A$, $B$ совершенно такъ же, какъ раньше были выдѣлены точки $A$ и $B$ относительно $C$, $D$. Можетъ возникнуть вопросъ, нельзя ли разсматривать и точки $A$ и $C$, какъ точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ четырехугольника. Это, однако, оказывается невозможнымъ, ибо пары точекъ $A$, $B$ и $C$, $D$, какъ мы сейчасъ покажемъ, другъ друга раздѣляютъ, между тѣмъ, какъ пары $A$, $C$ и $B$, $D$, въ силу аксіомы $II_4$ (§ 15), слѣдуютъ другъ за другомъ. Въ самомъ дѣлѣ, проекціи точекъ $A$, $C$, $B$, $D$

изъ точки $Q$ на прямую $PR$ суть $R$, $J$, $P$, $D$,
„ „ $O$ „ „ „ $P$, $J$, $R$, $D$.

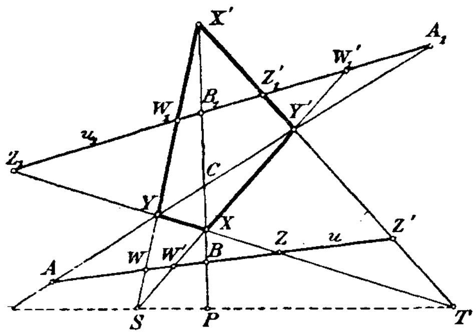
Если бы поэтому пары точекъ $AC$ и $BD$ другъ друга раздѣляли, то то же имѣло бы мѣсто относительно точекъ $R$, $J$ и $P$, $D$, а также относительно точекъ $P$, $J$ и $R$, $D$ (§ 15, предл. 2); но это противорѣчитъ аксіомѣ $II_4$ (§ 15), согласно которой изъ трехъ точекъ $R$, $P$, $D$, есть только одна, которая вмѣстѣ съ точкой $J$ раздѣляетъ двѣ другія точки. Слѣдовательно, пары $AC$ и $BD$ другъ друга не раздѣляютъ; то же справедливо и относительно двухъ паръ $A$, $D$ и $C$, $B$; въ виду аксіомы $II_4$ пары $A$, $B$ и $C$, $D$ должны другъ друга раздѣлять. Результатъ этого изслѣдованія сводится, такимъ образомъ, къ слѣдующему:

Предложеніе 4. Если полный четырехугольникъ $OPQR$ расположенъ относительно трехъ точекъ $A$, $B$, $C$ прямой $u$ такимъ образомъ, что черезъ каждую изъ точекъ $A$ и $B$ проходитъ пара противоположныхъ сторонъ четырехугольника, а черезъ точку $C$ проходитъ пятая сторона, то шестая однозначно опредѣляетъ на прямой $u$ точку $D$, т. е. любой другой четырехугольникъ,—скажемъ, $O'P'Q'R'$, такимъ же образомъ расположенный относительно точекъ $A$, $B$, $C$, даетъ ту же точку $D$. Двѣ пары точекъ $A$, $B$ и $C$, $D$ называются гармоническими парами точекъ, или двумя парами гармоническихъ точекъ.

Онѣ обладаютъ слѣдующими свойствами: a) онѣ раздѣляютъ другъ друга; b) точки $C$ и $D$ также могутъ быть сдѣланы точками пересѣченія противоположныхъ сторонъ четырехугольника, остальныя стороны котораго проходятъ черезъ точки $A$ и $B$; c) если, сохраняя точки $A$ и $B$, мы замѣнимъ точку $C$ точкой $D$, то точка $D$ займетъ мѣсто точки $C$.

Гармоническое соотвѣтствіе двухъ паръ точекъ $A$, $B$ и $C$, $D$, очевидно, представляетъ собой свойство проективное, ибо путемъ проектированія полный четырехугольникъ всегда опять превращается въ полный четырехугольникъ, а, слѣдовательно, двѣ гармоническія пары преобразовываются въ гармоническія же пары.

**5.** Положимъ, что три пары противоположныхъ сторонъ полнаго четырехугольника $XX'$ и $YY'$, $XY$ и $X'Y'$, $X'Y$ и $XY'$ пересѣкаются съ двумя прямыми $u$ и $u_1$, съ каждой въ трехъ парахъ точекъ $(B, A)$, $(Z, Z')$, $(W, W')$ и $(B_1, A_1)$, $(Z_1, Z_1')$, $(W_1, W_1')$ (фиг. 54). Въ такомъ случаѣ двѣ пары $X$, $X'$ и $Y$, $Y'$ могутъ занимать относительно треугольника $ABC$, согласно аксіомѣ $\mathrm{II}_5$, только слѣдующія положенія:




Фиг. 54.

a) либо онѣ раздѣляютъ соотвѣтственно пары $C, B$ и $C, A$;

b) либо онѣ ихъ не раздѣляютъ:

c) либо одна пара раздѣляетъ соотвѣтствующую ей пару, а другая не раздѣляетъ, какъ это имѣетъ мѣсто на фиг. 54 относительно треугольника $A_1B_1C$.

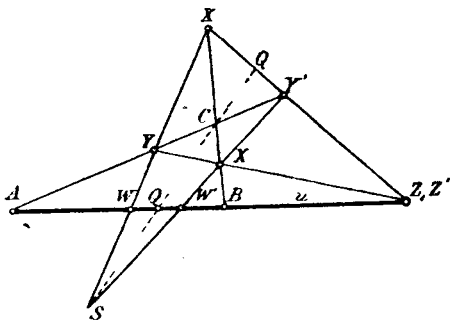
Примѣняя къ треугольникамъ $ABC$ и $A_1B_1C$ и сѣкущимъ $XY$ и $X'Y'$ (соотвѣтственно) или къ сѣкущимъ $X'Y$ и $X'Y'$ аксіому $\mathrm{II}_5$ (§ 15), мы приходимъ къ заключенію, что пары $Z$, $Z'$ и $W$, $W'$ въ случаѣ c) раздѣляютъ пару $A$, $B$ (это иллюстрируется на фиг. 54 парами $(A_1, B_1)$, $(Z_1, Z_1')$, $(W_1, W'_1)$, а въ случаѣ a) и b) не раздѣляютъ ея[16]). Теперь мы примѣнимъ ту же аксіому къ треугольнику $SWW'$, образованному прямыми $u$, $X'Y$ и $XY'$, и къ сѣкущимъ, проходящимъ черезъ точки $X'$, $Y$, $X$, $Y'$. Въ случаяхъ a) и b), когда пара $A$, $B$ не раздѣляетъ точекъ $W$, $W'$, — пары $X'$, $Y$ и $S$, $W$, съ одной стороны, и пары $X$, $Y'$ и

[16]) Пользуясь сѣкущими $XY$ и $X'Y'$, мы доказываемъ относительно пары $Z, Z'$; пользуясь же сѣкущими $YX'$, $XY'$, — относительно точекъ $W$, $W'$.

$S$, $W'$, съ другой стороны, будутъ совмѣстно либо сорасположены, либо противорасположены ($II_5$), а потому пара $Z$, $Z'$ не будетъ раздѣлять пары $W$, $W'$ ($II_5$, § 15) [17]). Въ случаѣ c) точки $A$, $B$ раздѣляютъ пару $W$, $W'$, и прямыя $X'X$ и $YY'$ должны производить на сторонахъ треугольника $SWW'$ еще одно дѣленіе ($II_5$, § 15), пара $Z, Z'$ будетъ раздѣлять вершины $W$, $W'$ [18]). Мы доказали, такимъ образомъ, слѣдующее предложеніе:

Предложеніе 5. Если прямая $u$ пересѣкаетъ стороны полнаго четырехугольника въ трехъ парахъ различныхъ точекъ, то либо каждая изъ этихъ трехъ паръ раздѣляетъ любую другую пару, либо ни одна изъ трехъ паръ не раздѣляетъ другой пары [19]).

**6.** Въ пунктѣ 4 былъ разобранъ тотъ частный случай, когда сѣкущая $u$, о которой идетъ рѣчь въ предложеніяхъ 1 и 4, проходитъ черезъ двѣ точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ. Намъ остается, такимъ образомъ, разсмотрѣть тотъ случай, когда на прямой $u$ пересѣкается одна пара противоположныхъ сторонъ; такой случай имѣлъ бы, напримѣръ, мѣсто на фиг. 54, если бы точка $Z'$ совпала съ точкой $Z$. На фиг. 55, которая, такимъ образомъ, получается, сохранены всѣ обозначенія предыдущаго чертежа и проведена еще прямая $SC$, которая пересѣкаетъ прямыя $AB$ и $X'Y'$ соотвѣтственно въ точкахъ $Q$ и $Q'$. Въ виду полнаго четырехугольника $XCYS$ пара $X'$, $Y'$ раздѣляется гармонически парой $Q'$, $Z$. Проекціями




Фиг. 55.

[17]) Что въ случаѣ $(X', Y; J, W) = (Y', X; S, W')$, это мы доказываемъ, примѣняя аксіому $II_5$ къ треугольнику $SWW'$ и сѣкущимъ $X'Y$ и $Y'$; что пара $Z, Z'$ при этомъ не будетъ раздѣлять пары $W$, $W'$, мы получаемъ, примѣняя ту же аксіому къ треугольнику $SWW'$ и сѣкущимъ $XY$ и $X'Y'$.

[18]) Что точки $A$, $B$ въ случаѣ c) раздѣляютъ пару $WW'$, это было уже выяснено выше въ текстѣ. Примѣняя поэтому къ треугольнику $SWW'$ и прямымъ $XX'$ и $YY'$ аксіому $II_5$, мы приходимъ къ заключенію, что $(X', Y; S, W') = (X, Y'; S, W)$, т. е. въ одной изъ этихъ двойныхъ паръ имѣетъ мѣсто дѣленіе, а въ другой нѣтъ; вслѣдствіе этого, примѣняя аксіому $II_5$ вновь къ треугольнику $SWW'$ и сѣкущимъ $XY$ и $X'Y'$, мы приходимъ къ выводу, что пара $Z, Z'$ въ этомъ случаѣ раздѣляетъ пару $W$, $W'$.

[19]) Наши три пары точекъ суть $(A, B)$, $(W, W')$, $(Z, Z')$. Въ случаяхъ a) и b), какъ было показано, пара $A, B$ не раздѣляется ни парой $W$, $W'$, ни парой $Z, Z'$, а пара $W$, $W'$ не раздѣляется парой $Z$, $Z'$; ни одна изъ трехъ паръ не дѣлитъ другой пары. Напротивъ, въ случѣ c) пара $A$, $B$ раздѣляется каждой изъ двухъ другихъ паръ, и эти послѣднія, въ свою очередь, раздѣляютъ другъ друга.

этихъ двухъ паръ точекъ изъ точекъ $C$ и $S$ на прямую *и* соотвѣтственно служатъ $A$, $B$ и $Q$, $Z$, съ одной стороны, — $W$, $W'$ и $Q$, $Z$, съ другой. Каждая изъ этихъ двухъ паръ дѣлитъ, слѣдовательно, вторую гармонически. Такъ какъ далѣе двѣ пары точекъ $A$, $C$ и $Y$, $Y'$ проектируются изъ точки $Z$ въ двѣ пары $B$, $C$ и $X$, $X'$, то какъ первыя, такъ и вторыя двѣ пары одновременно другъ друга раздѣляютъ или не раздѣляютъ. Въ силу аксіомы $II_5$ § 15, въ примѣненіи къ треугольнику $ABC$, точки $A$, $B$ ни въ одномъ ни въ другомъ случаѣ не раздѣляютъ точекъ $W$, $W'$ [20]). Поэтому:

Предложеніе 6. Если въ условіяхъ предложенія 5 двѣ точки одной изъ поименованныхъ тамъ паръ сливаются въ одну точку $Z$, то остальныя двѣ пары другъ друга не раздѣляютъ; при этомъ имѣется точка $Q$, которая совмѣстно съ точкой $Z$ дѣлитъ гармонически какъ одну, такъ и другую пару.

Обратно, если двѣ пары точекъ раздѣляются гармонически одной и той же парой $Z$, $Q$, то имѣются полные четырехугольники, которые посылаютъ въ точку $Z$ или $Q$ по двѣ противоположныя стороны, а въ каждую изъ двухъ названныхъ паръ точекъ — по одной парѣ противоположныхъ сторонъ.

Въ самомъ дѣлѣ, на прямой, проходящей черезъ точку $Z$, возьмемъ произвольно двѣ гармоническія пары $Z$, $Q'$ и $X'$, $Y'$, проведемъ прямыя $AY'$ и $BX'$, а также $X'W$ и $Y'W'$; этимъ опредѣлимъ точки $C$ и $S$ на фиг. 55. Затѣмъ построимъ точки пересѣченія $X$, $Y$ прямыхъ $WX'$, $AC$, $W'Y'$ и $BC$. Въ такомъ случаѣ прямая $XY$ должна пройти черезъ точку $Z$, такъ какъ $X'$, $Y'$ и $Q'$, $Z$ суть гармоническія пары. Вмѣстѣ съ тѣмъ доказано обратное предложеніе, изъ котораго вытекаетъ, что двѣ пары точекъ, раздѣляющія другъ друга, не могутъ быть раздѣлены гармонически одной и той же третьей парой [21]).

---

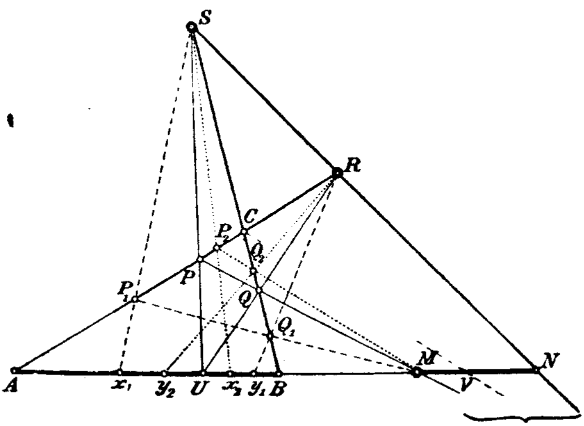
[20]) Здѣсь разсматривается сѣченіе треугольника прямыми $X'Y$ и $XY'$. Эти прямыя сѣкутъ:

сторону $AC$ въ точкахъ $Y$ и $Y'$,
„ $BC$ „ „ $X$ и $X'$,
„ $AB$ „ „ $W$ и $W'$.

Какъ было показано, если точки $A$, $C$ дѣлятъ пару $Y$, $Y'$, то и точки $B$, $C$ дѣлятъ пару $X$, $X'$; поэтому, въ силу аксіомы $II_5$, точки $A$, $B$ не дѣлятъ пары $W$, $W'$. Если же точки $A$, $C$ не дѣлятъ пары $Y$, $Y'$, то и точки $B$, $C$ не дѣлятъ пары $X$, $X'$, — а потому и точки $A$, $B$ не дѣлятъ пары $W$, $W'$.

[21]) Піери принимаетъ даже это свойство двухъ паръ за опредѣленіе дѣленія; согласно его опредѣленію двѣ точки не раздѣляютъ двухъ другихъ точекъ на той же прямой, если существуетъ пара, расположенная гармонически относительно каждой изъ двухъ первыхъ паръ; если же такой третьей пары не существуетъ, то первыя пары раздѣляютъ другъ друга. Это опредѣленіе тѣмъ болѣе искусственно, что оно примѣнимо только въ непрерывной системѣ.

7. Изъ изслѣдованій Гильберта о непрерывности въ § 12 его „Основаній" вытекаетъ, что двумъ парамъ точекъ $A$, $B$ и $M$, $N$, другъ друга не раздѣляющимъ, по силѣ введенныхъ нами до сихъ поръ аксіомъ, не всегда отвѣчаетъ третья пара $U$, $V$, дѣлящая гармонически обѣ данныя пары. Если мы попытаемся, сообразно предложенію 6, построить полный четырехугольникъ $PQRS$, который имѣетъ двѣ противоположныя стороны $PQ$ и $RS$, соотвѣтственно проходящія черезъ точки $M$ и $N$, а также двѣ другія противоположныя стороны $PR$ и $QS$, проходящія черезъ точки $A$ и $B$, такимъ образомъ, чтобы противоположныя стороны $PS$ и $QR$ третьей пары пересѣкали прямую $w$, содержащую точки $A$, $B$, $M$, $N$ (фиг. 56), въ одной точкѣ $U$, то мы, вообще говоря, получимъ двѣ различныя точки пересѣченія $x_1$, $y_1$. Соотвѣтствующія имъ точки $P$ и $Q$ на отрѣзкахъ $AR$ и $BS$, которыя мы сохраняемъ неизмѣнными, мы помѣтили отдѣльно черезъ $P_1$ и $Q_1$. Сохраняя вмѣстѣ съ данными точками $A$, $B$, $M$, $N$ неизмѣнными еще точки $R$ и $S$ и повторяя то же




Фиг. 56.

построеніе при другихъ положеніяхъ $P_2$, $P_3$ ... точки $P$ на отрѣзкѣ $AR$, мы получаемъ четверныя группы точекъ $P_2Q_2\,x_2y_2$, $P_3Q_3\,x_3y_3$ ..., которыя каждой точкѣ $x_n$ прямой $w$ относятъ нѣкоторую точку $y_n$ и, обратно, каждой точкѣ $y_n$ нѣкоторую точку $x_n$[22]). Пусть $C$ будетъ точка пересѣченія прямыхъ $AR$ и $BS$. Мы ограничиваемъ положеніе точки $P_n$ на прямой $AB$ классомъ $(A, C)_R$, не содержащимъ точки $R$. Такъ какъ точки $A$, $B$ не раздѣляютъ пары $M$, $N$, то прямыя $RN$ и $P_nM$ должны пересѣкать сторону $CB$ треугольника $ABC$ въ точкахъ $Q_n$ и $S$, которыя всегда раздѣляютъ пару точекъ $B$, $C$[23]); такимъ обра-

[22]) Иными словами, если мы произвольную точку прямой $w$ примемъ за $x_n$, то мы этимъ построеніемъ опредѣлимъ соотвѣтствующую ей точку $y_n$. Именно: соединяя точку $x_n$ съ $S$, мы получимъ въ пересѣченіи прямыхъ $Sx_n$ и $AR$ точку $P_n$; соединяя, далѣе, $P_n$ съ точкой $M$, мы получаемъ въ пересѣченіи съ прямой $SB$ точку $Q_n$; наконецъ, прямая $RQ_n$ опредѣляетъ на прямой $w$ точку $y_n$.

[23]) Это получается, если примѣнимъ аксіому $\mathrm{II}_5$ къ треугольнику $ABC$ и сѣкущимъ $MP_n$ и $RN$. Точки $P_n$, $R$ раздѣляютъ пару $A, C$ по условію, ибо точка

зомъ, положеніе точки $Q_n$ ограничивается классомъ $(C, B)_S$. Такъ какъ, съ другой стороны, точки $P_n$ и $R$, раздѣляемыя парой $A, C$, проектируются изъ $S$ въ точки $x_n$ и $N$, то вслѣдствіе ограниченія, принятаго относительно положенія точки $P_n$, всѣ точки $x_n$ принадлежатъ классу $(A, B)_N$, который мы короче обозначимъ черезъ $[A, B]$. Но тому же классу принадлежатъ также точки $y_n$, ибо три пары $A, B$,— $x_n$, $y_n$ и $M, N$, согласно предложенію 5, другъ друга не раздѣляютъ. Съ другой стороны, пользуясь первой ступенью понятія о величинѣ, какъ это установлено въ § 15, 8, мы можемъ сказать, что всегда будетъ имѣть мѣсто одно изъ неравенствъ

$$[A, x_n] \leqq [A, y_n] \text{ или } [A, x_n] \geqq [A, y_n], \tag{17}$$

въ которыхъ знакъ равенства имѣетъ мѣсто только въ томъ случаѣ, когда точки $x_n$ и $y_n$ совпадаютъ. На чертежѣ 56 точки $x_1$, $y_1$ удовлетворяютъ первому неравенству, точки $x_2$, $y_2$ удовлетворяютъ второму, точка же $U$ претворяетъ ихъ въ равенство, такъ какъ въ ней точка $x$ совпадаетъ съ соотвѣтствующей точкой $y$. Однако, существованіе такой точки $U$ должно быть постулировано особой аксіомой.

Обратно, если какъ-либо доказано, что пара точекъ $U, V$ дѣлитъ гармонически пары $A, B$ и $M, N$, и $U$ есть та точка этой пары, которая принадлежитъ классу $[A, B]$, то $U$ представляетъ собой такую точку $x$, которая совпадаетъ съ соотвѣтствующей точкой $y$.

Въ самомъ дѣлѣ, при помощи предложенія 6 мы докажемъ, что прямая $PQ$, соединяющая точку пересѣченія $P$ прямыхъ $US$ и $AR$ съ точкой пересѣченія $Q$ прямыхъ $UR$ и $BS$, проходитъ черезъ точку $M$. Обозначимъ предварительно точку пересѣченія прямыхъ $PQ$ и $AB$ черезъ $M'$; въ такомъ случаѣ, согласно предложенію 6 [24]), точкѣ $U$ соотвѣтствуетъ такая точка $V'$, что

a) точки $A, B$ раздѣляются гармонически точками $U, V'$,
b) „ $M', N$ „ „ „ $U, V'$,

Съ другой стороны, по условію:

$\alpha$) точки $A, B$ раздѣляются гармонически парой точекъ $U, V$; въ силу соотношенія a) отсюда вытекаетъ, что точка $V'$ совпадаетъ съ $V$;

$\beta$) точки $M, N$ раздѣляются гармонически точками $U$ и $V$; въ силу соотношенія b) отсюда вытекаетъ, что точка $M'$, въ свою очередь, совпадаетъ съ точкой $M$, что и требовалось доказать.

---

$P_n$ принадлежитъ классу $(AC)_R$; далѣе, по условію же точки $A, B$ не раздѣляютъ пары $M, N$; слѣдовательно, точки $S, Q_n$ не раздѣляютъ пары $B, C$.

[24]) Въ данномъ случаѣ теорема 6 примѣняется къ полному четырехугольнику $PQRS$, разсѣкаемому прямой $AB$; стороны $PS$ и $QR$ эта прямая встрѣчаетъ въ одной и той же точкѣ $U$.

**8.** Неравенство (17) производитъ въ классѣ $[A, B]$ Дедекиндово сѣченiе $U'/U''$, которымъ мы пользовались въ I томѣ (§ 22, 4) для опредѣленiя ирраціональныхъ чиселъ; именно:

Совокупность точекъ класса $[A, B]$ разбивается на двѣ категорiи точекъ*) $U'$ и $U''$ такимъ образомъ, что:

1) каждая точка класса $[A, B]$ принадлежитъ одной и только одной изъ этихъ категорiй;
2) изъ крайнихъ точекъ класса $A$, $B$ одна должна быть отнесена къ категорiи $U'$, другая къ категорiи $U''$;
3) между любой точкой $u'$ первой категорiи и любой точкой $u''$ второй категорiи въ классѣ $[A, B]$ имѣетъ мѣсто соотношенiе $[A, u'] < [A, u'']$.

Чтобы удобнѣе описать сѣченiе, которое въ нашемъ случаѣ производится путемъ установленiя соотвѣтствiя точекъ $y$ точкамъ $x$, мы условимся говорить, что точка $\mu$ класса $[A, B]$ „предшествуетъ" точкѣ $\nu$ того же класса, если въ предѣлахъ класса $[A, B]$ имѣетъ мѣсто неравенство $[A, \mu] < [A, \nu]$. Въ дополненiе къ этому мы условимся также говорить, что точка $A$ предшествуетъ точкѣ $B$. Слѣдуя Энрикесу **), мы отнесемъ:

1) къ категорiи $U'$ каждую точку $x$ класса $[A, B]$, которая предшествуетъ соотвѣтствующей точкѣ $y$; этой категорiи принадлежитъ, по крайней мѣрѣ, одна точка $A$;
2) къ категорiи $U''$ — всѣ остальныя точки класса $[A, B]$; сюда принадлежитъ также точка $B$.

Каждая точка класса $[A, B]$, включая и крайнiя точки $A$, $B$, можетъ быть разсматриваема, какъ точка $x$, и должна принадлежать одной изъ двухъ категорiй. Если точка $x_n$ предшествуетъ точкѣ $y_n$, то и каждая точка $x$ класса $[A, x_n]$ предшествуетъ точкѣ $y$, такъ какъ классъ $[A, x_n]$, какъ совокупность точекъ $x$, соотвѣтствуетъ классу $[B, y_n]$, какъ совокупности точекъ $y$ (предл. 2 § 15). Требованiя, которыми характеризуется сѣченiе, такимъ образомъ, выполнены [25]).

---

*) Мы преднамѣренно избѣгаемъ термина „часть", которымъ мы пользовались въ указанномъ мѣстѣ I тома, чтобы избѣгнуть какого-либо намека на то, что точки такой „части" пространственно расположены другъ подлѣ друга; такое расположенiе можетъ быть установлено только особой аксiомой.

**) F. Enriques. „Vorlesungen über projektive Geometrie". Deutsch von H. Fischer. Leipzig. 1903. §§ 18, 19. (Оригиналъ итальянскiй).

[25]) Замѣчанiе этого послѣдняго абзаца, строго говоря, излишне, такъ какъ прежнiя соображенiя уже даютъ все необходимое для сѣченiя; доказать же это соображенiе не такъ просто, если восполнить то, что авторомъ выражено въ немногихъ словахъ.

Если разсматривать прямую $AB$ то какъ рядъ точекъ $x$, то какъ рядъ точекъ $y$, то этимъ устанавливается сопряженiе прямой (ряда $x$) съ самою собой

Мы могли бы воспользоваться установленнымъ такимъ образомъ сѣченіемъ $U'/U''$, чтобы опредѣлить точку $U$, о которой идетъ рѣчь, аналогично тому, какъ мы разсуждали въ томѣ I. Но мы придемъ ближе къ цѣли, если мы постулируемъ эту точку при помощи слѣдующей аксіомы Дедекинда:

III. Каждое сѣченіе $U'/U''$ класса точекъ $[A, B]$ на прямой $w$ всегда производится нѣкоторой точкой $U$ этого класса въ томъ смыслѣ, что категорія $U'$ совпадаетъ съ классомъ $[A, U]$, категорія $U''$ съ классомъ $[U, B]$.

Эта точка $U$, разсматриваемая какъ точка $x$, необходимо должна совпадать съ соотвѣтствующей точкой $y$, такъ какъ она не можетъ ни предшествовать послѣдней, ни слѣдовать за ней. Когда точка $U$ опредѣлена, то точку $V$ мы получаемъ какъ пересѣченіе прямой $w$ съ прямой $OC$, соединяющей точку $C$ съ точкой пересѣченія $O$ прямыхъ $SR$ и $PQ$.

Въ классѣ $[A, B]$ не существуетъ другой точки $U_0$, отличной отъ $U$, которая совмѣстно съ другой точкой $V_0$, построенной по тому же правилу, что и $V$, дѣлитъ гармонически какъ точки $A$ и $B$, такъ и точки $M$ и $N$; въ самомъ дѣлѣ, если бы $AP_0PC$ было проекціей $AU_0UB$ изъ точки $S$ на прямую $AC$; далѣе, если бы $BQ_0QC$ было проекціей группы точекъ $AP_0PC$ изъ точки $M$ на прямую $CB$, — то $BU_0UA$ было бы проекціей послѣдней системы точекъ изъ точки $R$ на прямую $AB$.

---

(съ рядомъ $y$). Нетрудно видѣть, что это сопряженіе представляетъ собой проективное соотвѣтствіе. Рядъ точекъ $x$ мы проектируемъ сначала изъ точки $S$ на прямую $AC$; получаемъ рядъ точекъ $P$ (перспектива); этотъ рядъ проектируемъ изъ точки $M$ на прямую $BC$, получаемъ рядъ $Q$ (новая перспектива); наконецъ, рядъ $Q$ проектируемъ изъ $R$ на прямую $AB$, получаемъ рядъ $y$ (третья перспектива). Въ этомъ проективномъ соотвѣтствіи точки $A$ и $B$ замѣщаютъ другъ друга, равно какъ и точки $M$ и $N$. Подъ классомъ $[A, B]$ мы разумѣемъ классъ $(A, B)_N$, т. е. одинъ изъ двухъ классовъ, на которые точки $A$ и $B$ дѣлятъ прямую $AB$, а именно классъ, не содержащій точки $N$. Но такъ какъ точки $M$ и $N$ не раздѣляютъ точекъ $A$, $B$, то тотъ же классъ можетъ быть обозначенъ черезъ $(A, B)_M$.

Положимъ теперь, что точка $x_n$ принадлежитъ классу $[A, B]$ и предшествуетъ точкѣ $y_n$, которая, какъ мы знаемъ, тоже принадлежитъ классу $[A, B]$. Это значитъ, что $[A, x_n] < [A, y_n]$.

Положимъ теперь, что точка $x$ принадлежитъ классу $[A, x_n]$, иначе классу $(A, x_n)_N$; это значитъ, что точки $x$ и $N$ раздѣляютъ точки $A$, $x_n$. Но наше проективное соотвѣтствіе превращаетъ эти точки въ $y$ и $M$, $B$ и $y_n$; эти пары, слѣдовательно, раздѣляютъ другъ друга (предл. 2 § 15), т. е. точка $y$ принадлежитъ классу $(Y_n, B)_M$; значитъ, точки $y$, $M$ дѣлятъ пару $y_n$, $B$.

Разсмотримъ теперь пять точекъ $y_n$, $y$, $B$, $M$, $N$.

$$\text{Точки } y_n,\ B \text{ дѣлятъ точки } y,\ M; \qquad (\alpha)$$

$$\text{точки } y_n,\ B \text{ не дѣлятъ точекъ } M,\ N. \qquad (\beta)$$

Соотношеніе ($\beta$) представляетъ собой слѣдствіе аксіомъ $\mathrm{II}_4$, ибо точки $y_n$ принадлежатъ классу $[A, B]$ или $(A, B)_M$, т. е. точки $y_n$ и $M$ дѣлятъ пару $A$, $B$. Изъ

Слѣдовательно, двѣ группы $AU_0UB$ и $BU_0UA$ должны были бы имѣть одинаковое расположеніе (предл. 2-ое § 15). Если бы точки $A$, $B$ не раздѣляли точекъ $U$, $U_0$ и, слѣдовательно, либо пара $A$, $U_0$ раздѣляла бы пару $U$, $B$, либо пара $A$, $U$ раздѣляла бы пару $U_0$, $B$, то въ первомъ случаѣ пара $B$, $U_0$ должна была бы раздѣлять пару $U$, $A$, во второмъ случаѣ пара $B$, $U$—пару $A$, $U_0$; но то и другое находится въ противорѣчіи съ аксіомой $II_4$, согласно которой точкѣ $U$ отвѣчаетъ только одна изъ трехъ точекъ $U_0$, $A$, $B$, которая вмѣстѣ съ ней раздѣляетъ двѣ другія точки.

Но такъ какъ изъ двухъ точекъ, которыя гармонически дѣлять пару $A$, $B$, одна необходимо должна принадлежать классу $[A, B]$, то отсюда слѣдуетъ [26]:

Предложеніе 7-ое: двумъ парамъ точекъ $A$, $B$ и $M$, $N$, не раздѣляющимъ другъ друга, всегда отвѣчаетъ одна и только одна пара точекъ $U$, $V$, которая раздѣляетъ гармонически какъ пару $A$, $B$, такъ и пару $M$, $N$.

Это доказательство существованія, являющееся слѣдствіемъ требованія, выраженнаго аксіомой III, само по себѣ не даетъ точнаго построенія точекъ $U$ и $V$; напротивъ, для этого необходимо еще присоединить кривую второго порядка, — образъ, самое воспроизведеніе котораго можно себѣ представить только при посредствѣ безпредѣльнаго повторенія нѣкотораго построенія.

**9.** Аксіомы I, II, III образуютъ основу проективной геометріи. Уже здѣсь мы можемъ, такъ сказать, удвоить продуктивность труда, затрачиваемаго на построеніе этой геометріи; для этого достаточно замѣтить, что изъ аксіомъ I, II, III и ихъ слѣдствій вытекаютъ правильныя предложенія, если мы будемъ замѣнять слова „точка", „плоскость" словами „плоскость", „точка". Напримѣръ:

---

соотношеній ($\alpha$) и ($\beta$), въ силу предложенія 1 § 16-го, вытекаетъ, что точки $y_n$, $B$ дѣлятъ пару $y$, $N$; т. е. точка $y$ принадлежитъ классу $(y_n, B)_N$ или $[y_n, B]$. Итакъ, если точка $x$ принадлежитъ классу $[A, x_n]$, то точка $y$ принадлежитъ классу $[y_n, B]$.

Какъ выяснено было въ § 15, п.п. 7 и 8, точка $x_n$ дѣлитъ классъ $[A, B]$ на классы $[A, x_n]$ и $[x_n, B]$. Если точка $x_n$ предшествуетъ точкѣ $y_n$, то $[A, x_n] < [A, y_n]$; весь классъ $[y_n, B]$ принадлежитъ классу $[x_n, B]$, въ томъ числѣ и точка $y$; точка $y$ дѣлитъ классъ $[x_n, B]$ на $[x_n, y]$ и $[y, B]$, такъ что $[A, x_n] < [A, y]$. Такъ какъ $[A, x] < [A, x_n]$, то $[A, x] < [A, y]$.

[26]) Въ предыдущемъ абзацѣ было обнаружено, что точка $U_0$ не можетъ лежать вмѣстѣ съ $U$ въ классѣ $[A, B]$; но если бы существовала другая пара точекъ, которая дѣлила бы гармонически какъ пару $[A, B]$, такъ и пару $[M, N]$, то одна изъ этихъ точекъ лежала бы необходимо внутри класса $[A, B]$. Если бы мы ее приняли за точку $U_0$, то мы пришли бы такимъ образомъ къ противорѣчію.

Двѣ точки инцидентны съ одной и только одной прямой (съ прямой, ихъ соединяющей).

Три точки, не инцидентныя съ одной и той же прямой, инцидентны съ одной плоскостью.

Двѣ плоскости инцидентны съ одной и только одной прямой (съ прямой ихъ пересѣченія).

Три плоскости, которыя не инцидентны съ одной и той же прямой, инцидентны съ одной и той же точкой (съ точкой ихъ пересѣченія).

Но и въ геометріи на плоскости, которой мы въ дальнѣйшемъ намѣрены ограничиться, всѣ предложенія разбиваются на пары и переходятъ одно въ другое, когда мы замѣняемъ слова „прямая" и „точка" другъ другомъ и соотвѣтственно мѣняемъ остальные термины. Треугольнику, какъ системѣ прямыхъ, соединяющихъ три точки, соотвѣтствуетъ трехсторонникъ, какъ система трехъ точекъ пересѣченія трехъ прямыхъ на плоскости. Предложеніе Дезарга даетъ, напримѣръ:

Если два сопряженныхъ треугольника на плоскости расположены такимъ образомъ, что прямыя, соединяющія соотвѣтствующія вершины, проходятъ черезъ одну точку, то точки пересѣченія соотвѣтствующихъ сторонъ лежатъ на одной прямой.

Если два сопряженныхъ трехсторонника, лежащіе въ одной плоскости, расположены такимъ образомъ, что точки пересѣченія соотвѣтственныхъ сторонъ лежатъ на одной прямой, то прямыя, соединяющія соотвѣтственныя вершины, проходятъ черезъ одну точку.

Нѣтъ надобности проводить эту идею черезъ всѣ аксіомы сопряженія въ отдѣльности. Понятіе о расположеніи легко перенести на лучи пучка $S(a, b, c, \ldots)$; именно, мы будемъ присваивать лучамъ $a, b, c, \ldots$, проходящимъ черезъ точку $S$, тѣ же свойства расположенія, которыя принадлежатъ точкамъ ихъ пересѣченія $A, B, C, \ldots$ съ какой-либо прямой $u$, не проходящей черезъ точку $S$. Такъ какъ, согласно предл. 2 § 15, расположеніе точекъ на прямой есть свойство проективное, т. е. принадлежитъ также проекціямъ этихъ точекъ на любую прямую изъ точки $S$, то расположеніе лучей пучка не зависитъ отъ вспомогательной прямой $u$ и удовлетворяетъ аксіомамъ 2, если мы замѣняемъ слова „точка" и „прямая" другъ другомъ. Изъ предложеній, которыя такимъ образомъ получаются, мы приведемъ здѣсь аксіому расположенія въ плоскости $\mathrm{II}_5$ и ея обращеніе.

Двѣ прямыя $u$, $v$ въ плоскости треугольника либо не раздѣляютъ ни одной пары вершинъ, либо раздѣляютъ двѣ пары.

Двѣ точки $U$, $V$ въ плоскости трехсторонника либо не раздѣляютъ ни одной пары его сторонъ, либо раздѣляютъ двѣ пары.

Новое обозначеніе, здѣсь введенное, не нуждается, конечно, въ поясненіи; для доказательства предложенія, написаннаго справа, достаточно провести прямую, соединяющую точки $U$ и $V$, и примѣнить предл. 1 § 15-го къ точкамъ ея пересѣченія со сторонами трехсторонника. Такъ какъ предложеніе о лучахъ пучка, которое такимъ образомъ получается изъ аксіомы III, также оказывается справедливымъ, то точки плоскости находятся въ такомъ же отношеніи къ ея прямымъ, въ какомъ прямыя находятся къ ея точкамъ. Этимъ установленъ законъ двойственности, согласно которому всѣ предложенія строго проективной геометріи даютъ правильныя предложенія, если мы въ нихъ слова „точка" и „прямая" замѣнимъ другъ другомъ и соотвѣтственно видоизмѣнимъ остальные термины. Поэтому впредь изъ двухъ „двойственныхъ" въ указанномъ смыслѣ слова предложеній мы должны будемъ доказывать только одно; это сбереженіе труда даетъ уже здѣсь возможность оцѣнить достоинство строго логическаго развитія проективной геометріи изъ аксіомъ. Чтобы вполнѣ провести принципъ Маха объ экономіи мышленія, мы будемъ впредь выражать всѣ опредѣленія въ ихъ двойственной формулировкѣ. Такъ, напримѣръ, мы будемъ называть четыре луча пучка гармоническими, если имъ отвѣчаетъ полный четырехсторонникъ, въ которомъ черезъ двѣ пары противоположныхъ вершинъ проходитъ по одному изъ названныхъ лучей, а третій и четвертый лучи проходятъ каждый черезъ одну изъ двухъ другихъ противоположныхъ вершинъ. Эти лучи всегда проходятъ черезъ четыре гармоническія точки одного изъ полныхъ четырехугольниковъ, которые опредѣляютъ полный четырехсторонникъ; вмѣстѣ съ тѣмъ легко усмотрѣть, что четыре луча пучка, проходящіе черезъ четыре гармоническія точки, всегда представляютъ собою гармоническіе лучи.

**10.** Пучку лучей, который мы уже опредѣлили выше въ § 15, по принципу двойственности въ плоскости отвѣчаетъ „рядъ точекъ", т. е. совокупность точекъ прямой линіи. Рядъ точекъ и пучекъ лучей суть основные образы (первой ступени) проективной геометріи на плоскости. При ихъ посредствѣ можно образовать наиболѣе интересныя плоскія кривыя, коническія сѣченія, какъ по точкамъ, такъ и по касательнымъ. Чтобы уже здѣсь выдвинуть цѣль нашего изслѣдованія, мы предпошлемъ вспомогательное замѣчаніе въ предположеніи, что мы оперируемъ въ евклидовой геометріи. Если мы проектируемъ точки окружности $P_1, P_2, P_3, \ldots$ изъ двухъ точекъ на ея периферіи $S$ и $T$, то углы $P_hSP_k$ и $P_hTP_k$ $(h, k = 1, 2, 3, \ldots)$ равны между собою при всевозможныхъ комбинаціяхъ индексовъ $h$ и $k$. Если мы отнесемъ каждому лучу пучка $S$ тотъ лучъ пучка $T$, который проходитъ черезъ ту же точку окружности $P_n$, то четыремъ гармоническимъ лучамъ одного пучка $S$ отвѣчаютъ четыре гармоническихъ же луча другого пучка $T$, ибо соотвѣтствующіе лучи одного и другого пучка, въ силу теоремы о вписанныхъ углахъ, образуютъ одинаковые углы. Съ другой стороны, это соотвѣтствіе между двумя пучками не нарушается при проектированіи послѣднихъ. Если поэтому мы попутно будемъ считать извѣстнымъ, что центральная проекція окружности есть коническое сѣченіе, то мы можемъ сказать, что точки коническаго сѣченія $P_1, P_2, P_3, \ldots$ проектируются изъ двухъ его точекъ $S$ и $T$ двумя пучками, которые находятся въ такомъ соотвѣтствіи, что любымъ четыремъ гармоническимъ лучамъ одного пучка отвѣчаютъ четыре гармоническихъ же луча другого пучка. Отсюда естественно можно придти къ мысли, что и обратно — точки любого коническаго сѣченія могутъ быть получены, какъ точки пересѣченія соотвѣтствующихъ лучей двухъ пучковъ $S$, $T$, находящихся въ такомъ соотвѣтствіи, что четыремъ гармоническимъ лучамъ одного пучка отвѣчаютъ четыре гармоническихъ же луча другого.

Это соображеніе, которымъ мы ниже, конечно, вовсе не будемъ пользоваться, приводитъ къ мысли устанавливать обратимо-однозначныя „сопряженія" между лучами двухъ пучковъ (или рядовъ точекъ), т. е. устанавливать и изслѣдовать законы, которые относятъ каждому элементу (точкѣ — въ случаѣ ряда точекъ, лучу — въ случаѣ пучка лучей) одного образа одинъ и только одинъ элементъ другого образа, и обратно. Пучекъ лучей $S\,(a, b, c, \ldots)$ съ вершиной $S$ и лучами $a, b, c, \ldots$ можно проще всего привести въ сопряженіе съ рядомъ точекъ $u\,(A, B, C, \ldots)$, если каждому лучу пучка $S$ отнести ту точку прямой $u$, черезъ которую онъ проходитъ; такое соотвѣтствіе называютъ перспективнымъ. Если два ряда точекъ $u$ и $v$ на плоскости находятся въ перспективномъ соотвѣтствіи съ однимъ и тѣмъ же пучкомъ $S$ той же плоскости, то между ними тѣмъ самымъ устанавливается однозначное соотвѣтствіе [27]), которое также называется перспективнымъ. Прямыя, соединяющія соотвѣтствующія точки двухъ перспективныхъ рядовъ на плоскости, проходятъ, слѣдовательно, черезъ одну точку $S$. Два пучка, находящіеся въ перспективномъ соотвѣтствіи съ однимъ и тѣмъ же рядомъ точекъ, мы также будемъ называть перспективными [28]).

Представимъ себѣ теперь, что рядъ точекъ $u$ при помощи пучка лучей $S_1$ приведенъ въ перспективное соотвѣтствіе съ рядомъ точекъ $u_1$; что рядъ точекъ $u_1$, въ свою очередь, при помощи пучка $S_2$ приведенъ въ перспективное соотвѣтствіе съ рядомъ точекъ $u_2$; далѣе, этотъ рядъ приведенъ при помощи пучка $S_3$ въ соотвѣтствіе съ рядомъ $u_3$ и т. д.; въ такомъ случаѣ и послѣдній рядъ этой системы $u_n$ будетъ однозначно

27) Т. е. такое соотвѣтствіе будетъ дѣйствительно установлено, если мы примемъ, что каждой точкѣ одного ряда отвѣчаетъ та точка другого ряда, которая лежитъ съ первой на одномъ лучѣ пучка.

28) Иначе говоря, перспективными называются два пучка, приведенные въ такое соотвѣтствіе другъ съ другомъ, что точки пересѣченія соотвѣстствующихъ лучей лежатъ на одной прямой.

сопряженъ съ первымъ рядомъ $u$ [29]); однако, прямыя, соединяющія соотвѣтствующія точки рядовъ $u$ и $u_n$, вообще говоря, не будутъ проходить черезъ одну точку, — иными словами, эти два ряда не будутъ перспективными. Но соотвѣтствіе рядовъ $u$ и $u_n$ сохраняетъ то общее съ перспективой свойство, что четыремъ гармоническимъ точкамъ ряда $u$ всегда отвѣчаютъ четыре гармоническія же точки ряда $u_n$. Однозначное соотвѣтствіе между двумя основными образами первой ступени называется проективнымъ, если четыремъ гармоническимъ элементамъ одного образа всегда соотвѣтствуютъ четыре гармоническихъ же элемента другого. Два основныхъ образа, проективные съ третьимъ, проективны между собой. Основной образъ можетъ быть сопряженъ проективнымъ соотвѣтствіемъ и съ самимъ собой, если, напримѣръ, мы совмѣстимъ рядъ $u_n$ съ рядомъ $u$. Каждое перспективное соотвѣтствіе является также проективнымъ; но мы покажемъ, что и обратно — каждое проективное соотвѣтствіе можетъ быть осуществлено при помощи ряда перспективныхъ сопряженій.

**11.** Съ этой цѣлью мы прежде всего замѣтимъ слѣдующее:

Предложеніе 8. Проективное соотвѣтствіе двухъ основныхъ образовъ сохраняетъ расположеніе элементовъ; это значитъ, что двумъ парамъ элементовъ одного образа, раздѣляющимъ другъ друга, всегда отвѣчаютъ двѣ пары элементовъ другого образа, также раздѣляющія другъ друга.

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что двумъ парамъ $A, B$ и $C, D$, раздѣляющимъ другъ друга, отвѣчаютъ двѣ пары $A', B'$ и $C', D'$, не раздѣляющія другъ друга. Пусть $U', V'$ будутъ элементы, которые, согласно предложенію 7, дѣлятъ гармонически какъ элементы $A'$ и $B'$, такъ и элементы $C'$ и $D'$. Въ такомъ случаѣ элементы $U, V$, соотвѣтствующіе элементамъ $U', V'$, согласно опредѣленію проективнаго соотвѣтствія, должны также дѣлить гармонически какъ элементы $A, B$, такъ и элементы $C, D$; но это противорѣчитъ послѣднему предложенію пункта 6. Слѣдовательно, предложеніе 8 правильно; отсюда вытекаетъ, что циклическому ряду классовъ $[1, 2]$, $[2, 3]$, ..., о которыхъ была рѣчь въ § 15, 7, также отвѣчаетъ циклическій рядъ $[1', 2']$, $[2', 3']$ ... [30]).

---

29) Конечно, при надлежащемъ о томъ соглашеніи.

Если точкѣ $A$ ряда $u$ соотвѣтствуетъ точка $A$ ряда $u_1$, точкѣ $A_1$ соотвѣтствуетъ точка $A_2$ ряда $u_2$, ..., точкѣ $A_{n-1}$ ряда $u_{n-1}$ отвѣчаетъ точка $A_n$ ряда $u_n$, то мы должны условиться относить каждой точкѣ $A$ ряда $u$, точку $A_n$ ряда $u_n$.

30) Согласно предл. 3 § 15, 7, $n$ точекъ прямой всегда могутъ быть перенумерованы такимъ образомъ, чтобы изъ двухъ классовъ, на которые двѣ послѣдовательныя точки ($\nu$ и $\nu+1$) дѣлятъ прямую, одинъ вовсе не содержалъ ни одной изъ остальныхъ $n-2$ точекъ, а другой содержалъ бы, слѣдовательно, всѣ остальныя: первый изъ двухъ классовъ и обозначается символомъ $[\nu, \nu+1]$; каждая

Теперь возникаетъ вопросъ, сколькимъ элементамъ одного основного образа можно произвольно отнести элементы другого образа, чтобы установить проективное соотвѣтствіе, въ которомъ названные элементы отвѣчаютъ другъ другу. Двухъ элементовъ, во всякомъ случаѣ, мало. Въ самомъ дѣлѣ, если бы мы имѣли дѣло, скажемъ, съ двумя рядами точекъ $u$ и $u'$ и отнесли бы двумъ точкамъ $A$, $B$ одного ряда произвольныя двѣ точки $A'$, $B'$ другого ряда, то оба ряда можно было бы привести въ перспективное соотвѣтствіе съ пучкомъ, вершиной котораго служила бы точка пересѣченія $S$ прямыхъ $AA'$ и $BB'$; этимъ было бы установлено даже перспективное соотвѣтствіе между рядами $u$ и $u'$, въ которомъ точки $A$, $A'$ и $B$, $B'$ соотвѣтствовали бы другъ другу. Но мы могли бы также сначала привести рядъ $u$ въ перспективное соотвѣтствіе съ рядомъ $u''$, отнеся точкамъ $A$ и $B$ совершенно произвольныя двѣ точки $A''$ и $B''$ ряда $u''$; далѣе, рядъ $u''$ мы могли бы привести въ перспективное соотвѣтствіе съ рядомъ $u'$ такъ, чтобы точки $A''$, $A'$ и $B''$, $B'$ соотвѣтствовали другъ другу. Этимъ будетъ установлено также соотвѣтствіе между рядами $u$ и $u'$ [31]); простое испытаніе показываетъ, однако, что соотвѣтствіе между рядами $u$ и $u'$ мѣняется, когда мы мѣняемъ точки $A''$ и $B''$; иными словами, двухъ точекъ недостаточно для опредѣленія проективнаго соотвѣтствія. Мы посмотримъ поэтому, что дадутъ намъ три точки; для большей наглядности мы при этомъ сначала предположимъ, что рядъ точекъ $u$ приведенъ въ проективное соотвѣтствіе съ самимъ собой такимъ образомъ, что изъ трехъ точекъ $A$, $B$, $C$ каждая соотвѣтствуетъ себѣ самой.

**12.** Можетъ быть, впрочемъ, будетъ яснѣе представлять себѣ дѣло такимъ образомъ, что на одной прямой два ряда точекъ $u$, $u'$ приведены другъ съ другомъ въ проективное соотвѣтствіе такимъ образомъ, что три точки $A$, $B$, $C$ перваго ряда $u$ совпадаютъ съ соотвѣтствующими точками $A'$, $B'$, $C'$ другого ряда $u'$. Въ такомъ случаѣ точка $D$, которая совмѣстно съ $B$ дѣлитъ гармонически пару $A$, $B$, также должна со-

---

точка прямой, отличная отъ этихъ $n$ точекъ, принадлежитъ одному и только одному изъ этихъ $n$ классовъ: $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4] \dots [n-1, n]$, $[n, 1]$.

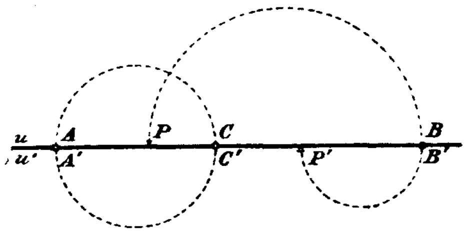
Пусть теперь $1'$, $2'$, $3' \dots n'$ будутъ точки, отвѣчающія этимъ $n'$ точкамъ при данномъ проективномъ соотвѣтствіи. Пусть, далѣе, $[1', 2']$, $[2', 3'] \dots [n', 1']$ будутъ $n$ классовъ, на которые эти послѣднія $n$ точекъ, согласно тому же предл. 3 § 15, дѣлятъ свою прямую.

Пусть $\lambda$ будетъ одна изъ перваго ряда точекъ, отличная отъ $\nu$ и $\nu+1$; она, такимъ образомъ, не принадлежитъ классу $[\nu, \nu+1]$; пусть $\varkappa$ будетъ точка, принадлежащая этому классу; въ такомъ случаѣ точки $\varkappa$ и $\lambda$ раздѣляютъ пару точекъ $\nu$, $\nu+1$; слѣдовательно, точки $\varkappa'$ и $\lambda'$ раздѣляютъ пару $\nu'$, $\overline{\nu+1}'$. Но точка $\lambda'$ не принадлежитъ классу $[\nu', \overline{\nu+1}']$; слѣдовательно, точка $\varkappa'$ ему принадлежитъ. Итакъ, каждая точка класса $[\nu, \nu+1]$ переходитъ въ точку класса $[\nu', \overline{\nu+1}']$ и, какъ очень легко уже усмотрѣть, обратно.

[31]) См. примѣчаніе 29.

впасть съ соотвѣтствующей ей точкой $D'$, ибо послѣдняя совмѣстно съ $B'$ должна дѣлить гармонически пару точекъ $A'$ и $B'$.

Если два ряда точекъ, расположенные на одной прямой, или два пучка съ общей вершиной приведены въ проективное соотвѣтствіе другъ съ другомъ, то подъ двойнымъ элементомъ въ этомъ соотвѣтствіи разумѣютъ такой элементъ, который отвѣчаетъ самому себѣ; $A$, $B$, $C$, $D$ представляютъ собой, такимъ образомъ, двойные элементы въ томъ соотвѣтствіи, о которомъ идетъ рѣчь. Двойными элементами являются также точка $E$, которая совмѣстно съ $C$ дѣлитъ гармонически пару $B$, $D$, далѣе, точка $F$, которая совмѣстно съ $D$ дѣлитъ гармонически точки $C$, $E$ и т. д. Мы получаемъ, такимъ образомъ, неограниченный рядъ двойныхъ элементовъ, ибо можно безъ труда обнаружить, что всѣ точки $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, ... различны между собой. Но здѣсь это не имѣетъ значенія. Однако, естественно возникаетъ предположеніе, что въ этомъ соотвѣтствіи всѣ вообще точки оказываются двойными элементами, т. е. соотвѣтствуютъ каждая себѣ самой. Чтобы изслѣдовать этотъ вопросъ, мы допустимъ, что нѣкоторой точкѣ $P$ ряда $u$ отвѣчаетъ точка $P'$ ряда $u'$, отличная отъ $P$. Согласно предложенію 1 § 15-го, пара точекъ $P, P'$ либо раздѣляетъ двѣ изъ трехъ паръ $A$, $B$; $B$, $C$; $C$, $A$; либо не раздѣляетъ ни одной изъ нихъ.




Фиг. 57.

Примемъ сначала первое; пусть, такимъ образомъ, пара точекъ $P, P'$ раздѣляетъ пары $C$, $A$ и $C$, $B$ (см. фиг. 57). Такъ какъ пара $A$, $C$, такимъ образомъ, дѣлитъ пару $P$, $P'$, то она должна еще раздѣлять либо пару $P$, $B$ либо пару $P'$, $B$ (§ 15, 1). Но въ такомъ случаѣ, въ силу предложенія 8, точки $A$, $C$ должны также раздѣлять соотвѣтственно пару $P'$, $B$ или $P$, $B$; иными словами, точки $A$, $C$ раздѣляютъ всѣ три пары, составленныя изъ точекъ $P$, $P'$, $B$, что противорѣчитъ предложенію 1 § 15-го. Сдѣланное допущеніе, такимъ образомъ, невозможно.

Обращаясь теперь ко второму случаю, примемъ, какъ это всегда возможно сдѣлать, что точки $A$, $B$, $C$ помѣчены черезъ $X$, $Y$, $Z$ такимъ образомъ, что точки $P$ и $P'$ принадлежатъ классу $[X, Y]$, не содержащему $Z$, а точка $P'$, лежащая внутри класса $[X, Y]$, падаетъ внутрь класса $[P, Y]$; классы, содержащіеся внутри $[X, Y]$, обозначаются однозначно, когда мы замыкаемъ опредѣляющія ихъ буквы въ прямоугольныя скобки (см. фиг. 58)[32]).

[32]) Какъ было выяснено въ § 15, 7, классъ $[X, Y]$ дѣлится однозначно на классы $[XP]$ и $[PY]$; точка $P'$ принадлежитъ одному изъ этихъ классовъ; если бы

Внутри класса $[P, P']$ не лежитъ ни одна изъ точекъ $X$, $Y$, $Z$. Проективное соотвѣтствіе рядовъ $u$ и $u'$ относитъ, согласно предложенію 8, точкамъ нѣкотораго класса ряда $u$ точки класса ряда $u'$, въ частности, точкамъ класса $[X, Y]$, не содержащаго точки $Z$,—точки класса $[X', Y]$, не содержащаго точки $Z'$. Но такъ какъ точки $X', Y', Z'$ совпадаютъ съ точками $X, Y, Z$, то это означаетъ, что каждой точкѣ класса $[X, Y]$ соотвѣтствуетъ точка того же класса $[X, Y]$.

Фиг. 58.

Каждой точкѣ класса $[P, Y]$ отвѣчаетъ точка класса $[P', Y]$. При помощи этого сопряженія мы произведемъ, какъ въ п. 7, Дедекиндово сѣченіе $U_1/U_2$ класса $[P, Y]$; именно, мы отнесемъ къ категоріи $U_1$ каждую точку $Q$ класса $[P, Y]$, которая, вмѣстѣ со всѣми предшествующими ей точками класса $[P, Y]$, предшествуетъ соотвѣтствующей ей точкѣ $Q'$; всѣ остальныя точки мы отнесемъ къ категоріи $U_2$. Категоріи $U_1$ принадлежатъ всѣ точки класса $[P, P']$, включая и точку $P$, но, быть можетъ, не включая точки $P'$; категоріи $U_2$, во всякомъ случаѣ, принадлежитъ точка $Y$. Такъ какъ всѣ условія сѣченія здѣсь выполнены, то, въ силу аксіомы III, существуетъ въ классѣ $[P, Y]$ точка $U$, которая производитъ это сѣченіе, такъ что категорія $U_1$ сводится къ классу $[P, U]$, а категорія $U_2$—къ классу $[U, Y]$. Но точка $U'$, соотвѣтствующая точкѣ $U$, не можетъ лежать ни въ классѣ $[P, U]$ ни въ классѣ $[U, Y]$. Если бы она лежала въ классѣ $[P, U]$, то точка $U$ должна была бы ей предшествовать, что составляетъ противорѣчіе; если бы она лежала въ классѣ $[U, Y]$, то, въ силу предложенія 8, каждой точкѣ класса $[U, Y]$ отвѣчала бы точка класса $[U', Y]$, а потому каждая точка класса $[U, U']$ предшествовала бы соотвѣтствующей ей точкѣ и, слѣдовательно, принадлежала бы категоріи $U_1$, иначе говоря, классу $[P, U]$; мы вновь получаемъ противорѣчіе [33]). Слѣдовательно, точка $U'$ совпадаетъ съ точкой $U$, т. е. $U$, какъ и точки $X$, $Y$, $Z$, есть

---

оказалось, что точка $P'$ принадлежитъ классу $[P X]$, то мы обозначенія $X$ и $Y$ при соотвѣтствующихъ трехъ классахъ транспонируемъ; тогда точка $P'$ будетъ принадлежать классу $[P Y]$ и однозначно раздѣлитъ его на классы $[P P']$ и $[P' Y]$. Въ смыслѣ обозначеній, принятыхъ въ § 15, 7,

$$[X, Y] = [X, P] + [P, P'] + [P', Y].$$

[33]) Авторъ разбираетъ два случая: когда точка $U'$, соотвѣтствующая точкѣ $U$, падаетъ внутрь класса $[P, U]$ и когда она падаетъ внутрь класса $[U, Y]$. Второй случай разобранъ вполнѣ правильно, но нѣсколько словъ, которыми авторъ ограничивается относительно перваго случая, содержатъ погрѣшность. „Если бы точка $U'$ принадлежала классу $[P, U]$", говоритъ авторъ, „то точка $U$ должна была бы ей предшествовать". Точка $U$ должна была бы предшествовать точкѣ $U'$, если бы она сама, т. е. точка $U$, принадлежала категоріи $U_1$ (т. е. классу $[P, U]$); изъ того же, что точка $U'$ принадлежитъ классу $[P, U]$, такого вывода сдѣлать нельзя.

Первый случай необходимо разобрать такъ же, какъ и второй. Допустимъ, что точка $U'$ падаетъ внутрь класса $[P, U]$; тогда она принадлежитъ необходимо двойная точка въ проективномъ соотвѣтствіи рядовъ $u$ и $u'$. Въ классѣ $[P, U]$ двойныхъ элементовъ вовсе нѣтъ, такъ какъ каждая точка этого класса предшествуетъ соотвѣтствующей точкѣ. Этотъ предварительный результатъ мы примѣнимъ прежде всего къ другому проективному соотвѣтствію рядовъ $u'$ и $u$, которое относитъ обратно точкамъ $Y', P', X'$ точки $Y, P, X$ и, слѣдовательно, каждой точкѣ класса $[Y', X']$ опять-таки относитъ точку класса $[Y, X]$. Каждой точкѣ класса $[P', X']$ отвѣчаетъ точка класса $[P, X]$. Слѣдовательно, въ классѣ $[P, X]$ имѣется точка $V'$, которая совпадаетъ съ соотвѣтствующей ей точкой $V$ и опредѣляетъ классъ $[P', V]$ внутри класса $[P', X']$, который не содержитъ ни одного двойного элемента въ соотвѣтствіи, связывающемъ рядъ $u'$ съ рядомъ $u$. Но каждый двойной элементъ этого соотвѣтствія является также двойнымъ элементомъ въ соотвѣтствіи, связывающемъ рядъ $u$ съ рядомъ $u'$; вслѣдствіе этого мы приходимъ къ заключенію, что въ классѣ $[U, V]$, принадлежащемъ классу $[X, Y]$, нѣтъ двойныхъ элементовъ, между тѣмъ какъ крайнія точки класса $U$ и $V$ представляютъ собой двойные элементы. Но, съ другой стороны, точка $W$, которая совмѣстно съ точкой $Z$ дѣлитъ гармонически точки $U, V$, принадлежитъ классу $[U, V]$ и въ то же время совпадаетъ съ соотвѣтствующей ей точкой $W'$; ибо точки $U$, $V$ и $Z$ совпадаютъ съ соотвѣтствующими имъ точками. Такимъ образомъ, классъ $[U, V]$ все-таки имѣетъ двойной элементъ. Такъ какъ это находится въ противорѣчіи съ полученнымъ выше выводомъ, то и второе наше допущеніе также оказывается неправильнымъ. Въ виду же того, что одинъ изъ двухъ разсмотрѣнныхъ случаевъ необходимо долженъ наступить, коль скоро точка $P'$ не совпадаетъ съ точкой $P$, то точка $P'$ совпадаетъ съ $P$. Чтобы это разсужденіе отъ противнаго дѣйствительно имѣло доказательную силу, нужно быть увѣреннымъ, что логическая область нашей геометріи, т. е. система аксіомъ I, II, III, не содержитъ внутренняго противорѣчія. Это можно было бы легко доказать при помощи ариѳметической геометріи $\mathfrak{H}$ § 12-го (п. 10), но мы, въ видахъ сбереженія мѣста, не станемъ этого дѣлать.

**13.** Предварительный результатъ этого изслѣдованія сводится къ слѣдующему: если на прямой установлено проективное соотвѣтствіе, которое относитъ три точки каждую самой себѣ, то оно относитъ и любую другую точку прямой самой себѣ.

классу $[P', U]$, ибо весь классъ $[P, Y]$ превращается въ $[P', Y]$ и ни одна его точка не переходитъ въ точку класса $[P, P']$. Съ другой стороны, каждая точка $U$ класса $[U', U]$ также принадлежитъ въ этомъ случаѣ категоріи $U$, а потому предшествуетъ соотвѣтствующей точкѣ $U'$; между тѣмъ весь классъ $[P, U]$ превращается въ $[P', U']$, а потому точка $U'$ лежитъ внутри класса $[P', U']$ и, слѣдовательно, предшествуетъ точкѣ $U$.

Ясно, что справедливо также предложеніе, соотвѣтствующее этому въ силу принципа двойственности: проективное соотвѣтствіе, которое относитъ каждый изъ нѣкоторыхъ трехъ лучей пучка самому себѣ, относитъ также и любой лучъ пучка самому себѣ; въ самомъ дѣлѣ, если мы разсѣчемъ пучекъ прямой линіей, то этимъ самымъ на послѣдней будетъ установлено проективное соотвѣтствіе; три точки, представляющія собой сѣченіе это прямой съ тремя лучами, которые въ пучкѣ отвѣчали самимъ себѣ, соотвѣтствуютъ каждая самой себѣ. Далѣе, отсюда можно также непосредственно усмотрѣть: если рядъ точекъ сопряженъ съ пучкомъ такимъ образомъ, что три точки лежатъ каждая на соотвѣтствующемъ лучѣ, то каждая точка прямой лежитъ на соотвѣтствующемъ ей лучѣ [34]). Эти три предложенія въ совокупности образуютъ слѣдующую основную теорему проективной геометріи:

Если установлено проективное соотвѣтствіе между двумя основными образами первой ступени, и при этомъ три элемента одного образа инцидентны каждый съ соотвѣтствующимъ элементомъ другого образа, то и каждый элементъ перваго образа инцидентенъ съ соотвѣтствующимъ элементомъ второго образа.

При этомъ мы разумѣемъ, что двѣ точки или двѣ прямыя инцидентны другъ съ другомъ, если они совпадаютъ; точка же инцидентна съ прямой, если она на послѣдней лежитъ. Теперь мы утверждаемъ:

Если два ряда точекъ $u$ и $u'$ связаны проективнымъ соотвѣтствіемъ такимъ образомъ, что точка $A$ пересѣченія прямыхъ $u$ и $u'$ отвѣчаетъ самой себѣ, то это соотвѣтствіе представляетъ собой перспективу.

Если два пучка $U$ и $U'$ связаны проективнымъ соотвѣтствіемъ такимъ образомъ, что прямая, соединяющая ихъ вершины, отвѣчаетъ самой себѣ, то эти пучки перспективны другъ съ другомъ (или, если угодно, съ однимъ и тѣмъ же рядомъ точекъ).

Въ самомъ дѣлѣ, остановимся на первомъ предложеніи: пусть $B$ и $C$ будутъ двѣ точки прямой $u$, отличныя отъ $A$, а $B'$ и $C'$ — соотвѣтствующія имъ точки прямой $u'$. Пучекъ $S$, которому принадлежатъ прямыя $BB'$ и $CC'$, будетъ приведенъ въ проективное соотвѣтствіе съ самимъ

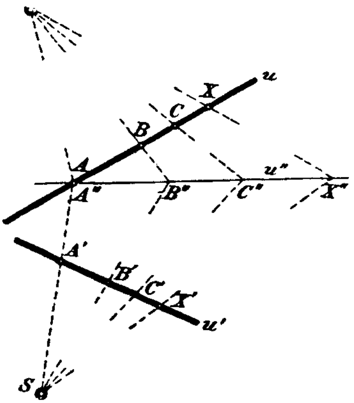
[34]) Положимъ, что въ нѣкоторомъ проективномъ соотвѣтствіи пучка $S$ съ рядомъ $u$ лучамъ $a$, $b$, $c$ пучка соотвѣтствуютъ точки $A$, $B$, $C$ пересѣченія этихъ лучей съ прямой $u$. Допустимъ далѣе, что лучъ $d$ пересѣкаетъ $u$ въ точкѣ $D$, но что лучу $d$ въ нашемъ соотвѣтствіи отвѣчаетъ не точка $D$ прямой $u$, а другая точка $D'$. Если, однако, мы каждому лучу отнесемъ точку его пересѣченія съ прямой $u$, то этимъ будетъ установлено перспективное, а, слѣдовательно, и проективное соотвѣтствіе. Мы получимъ, слѣдовательно, проективное соотвѣтствіе, если отнесемъ точкамъ $A, B, C, D$ точки $A, B, C, D'$; это противорѣчитъ доказанному предложенію

собой, если мы каждому лучу, проходящему черезъ нѣкоторую точку прямой $u$, отнесемъ лучъ, проходящій черезъ соотвѣтствующую точку прямой $u'$. Но въ такомъ случаѣ каждый изъ трехъ лучей $SA$, $SB$, $SC$ отвѣчаетъ самому себѣ, а слѣдовательно, отвѣчаетъ самому себѣ и каждый изъ остальныхъ лучей [35]). Отсюда вмѣстѣ съ тѣмъ вытекаетъ, что перспективное соотвѣтствіе двухъ рядовъ точекъ или двухъ пучковъ вполнѣ опредѣляется, если мы, помимо общаго элемента, отнесемъ произвольнымъ двумъ элементамъ одного образа произвольные же два элемента другого.

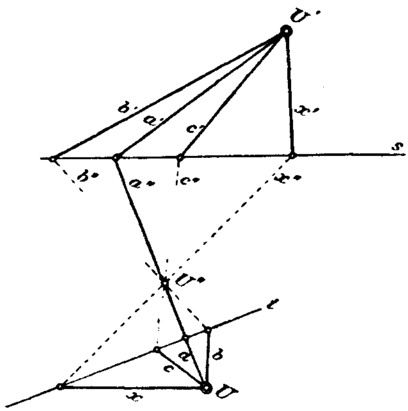
**14.** Этимъ предложеніемъ мы теперь воспользуемся, чтобы изслѣдовать наиболѣе общее проективное соотвѣтствіе двухъ основныхъ образовъ первой ступени.

Пусть $A$, $B$, $C$ и $A'$, $B'$, $C'$ будутъ три пары соотвѣтствующихъ точекъ двухъ проективныхъ рядовъ $u$ и $u'$; пусть $u''$ будетъ вспомогательная прямая, проходящая черезъ точку $A$ (см. фиг. 59).

Пусть $a$, $b$, $c$ и $a'$, $b'$, $c'$ будутъ три пары соотвѣтствующихъ лучей двухъ проективныхъ пучковъ $U$ и $U'$; пусть $U''$ будетъ вспомогательная точка, лежащая на прямой $a$ (см. фиг. 60).



Фиг. 59.



Фиг. 60.

На прямой $AA'$ мы выберемъ произвольно точку $S$ и отнесемъ перспективно прямую $u'$ къ пучку $S$, а послѣдній, въ свою

Черезъ точку пересѣченія прямыхъ $a$ и $a'$ мы проведемъ произвольную прямую $s$ и отнесемъ перспективно пучекъ $U'$ къ

[35]) Замѣтимъ, что обратныя предложенія справедливы по самому опредѣленію перспективы. Если, напримѣръ, два ряда точекъ $u$ и $u'$ расположены (или связаны) перспективно, то это значитъ, что оба они расположены перспективно относительно одного и того же пучка $S$; иначе говоря, прямая, соединяющая точку $S$ съ точкой $A$ прямой $u$, встрѣчаетъ прямую $u'$ въ соотвѣтствующей точкѣ $A'$; поэтому точка пересѣченія обѣихъ прямыхъ соотвѣтствуетъ самой себѣ.

очередь, свяжемъ перспективой съ прямой $u''$; этимъ будетъ установлено проективное соотвѣтствіе между прямой $u''$ (и прямой $u'$, а также) и прямой $u$, при чемъ точка пересѣченія $A$ прямыхъ $u$ и $u''$ отвѣчаетъ самой себѣ. Согласно заключительному предложенію пункта 13, прямыя $u$ и $u''$ расположены также перспективно относительно пучка $T$, которому принадлежатъ прямыя $BB''$ и $CC''$. Проективное соотвѣтствіе рядовъ $u$ и $u'$ осуществляется, такимъ образомъ, при помощи перспективныхъ соотвѣтствій, связывающихъ ряды $u$ и $u''$ и ряды $u''$ и $u'$.

Каждой точкѣ $X$ прямой $u$ прямая $TX$ опредѣляетъ соотвѣтствующую точку $X''$ на прямой $u''$, а прямая $SX''$ устанавливаетъ на прямой $u'$ точку $X'$, которая въ этомъ проективномъ соотвѣтствіи отвѣчаетъ точкѣ $X$ [36]).

ряду точекъ $s$, а этотъ послѣдній свяжемъ перспективой съ пучкомъ $U''$; этимъ будетъ установлено также перспективное соотвѣтствіе между пучкомъ $U''$ и (пучкомъ $U'$, а также) пучкомъ $U$, при чемъ прямая $a$, соединяющая точки $U$ и $U''$, отвѣчаетъ себѣ самой. Согласно заключительному предложенію п. 13, пучки $U$ и $U''$ расположены перспективно относительно ряда точекъ $t$, которому принадлежатъ точки пересѣченія прямыхъ $b$, $b''$ и $c$, $c''$. Проективное соотвѣтствіе пучковъ $U$ и $U'$ осуществляется, такимъ образомъ, при посредствѣ перспективныхъ соотвѣтствій, связывающихъ пучки $U$ и $U''$ и пучки $U''$ и $U'$.

Каждому лучу $x$ пучка $U$ точка пересѣченія прямыхъ $t$ и $x$, будучи соединена съ точкой $U''$, относитъ лучъ $x''$ въ пучкѣ $U''$; точка же пересѣченія прямыхъ $s$ и $x''$, будучи соединена съ точкой $U'$, опредѣляетъ лучъ $x'$, соотвѣтствующій лучу $x$ въ пучкѣ $U'$.

Такимъ образомъ, проективное соотвѣтствіе между двумя основными образами первой ступени установлено, если тремъ элементамъ одного образа отнесены произвольные три элемента другого образа.

Если рѣчь идетъ о рядѣ точекъ и пучкѣ, то можно взять вспомогательный рядъ точекъ, расположенныхъ перспективно относительно даннаго пучка или же вспомогательный пучекъ связать перспективно съ даннымъ рядомъ точекъ и примѣнить указанное сейчасъ построеніе; оно дастъ возможность найти элементъ, соотвѣтствующій любому данному элементу. Проективное соотвѣтствіе, не представляющее собой перспективы, какъ мы видимъ, можетъ быть всегда осуществлено посредствомъ небольшого числа перспективныхъ сопряженій.

[36]) Здѣсь существенно важно то, что мы получаемъ построеніе, которое непосредственно даетъ точку $X'$, отвѣчающую любой точкѣ $X$, коль скоро даны точки $A', B', C'$, соотвѣтствующія тремъ точкамъ $A, B, C$. Этимъ и обусловливается слѣдующій выводъ.

**15.** Преодолѣвъ наиболѣе глубокія трудности проективной геометріи, мы можемъ перейти теперь къ осуществленію идеи, высказанной въ п. 10; къ тому же попутно мы уяснили себѣ, что мы не должны брать двухъ пучковъ, связанныхъ перспективно другъ съ другомъ. Сообразно этому мы установимъ, согласно п. 14, проективное соотвѣтствіе

между двумя пучками $U$ и $U'$ такъ, чтобы лучъ $UU'$ не отвѣчалъ самому себѣ, и возьмемъ пересѣченіе каждаго луча $x$ пучка $U$ съ соотвѣтствующимъ лучемъ $x'$ пучка $U'$. Совокупность $\Xi$ точекъ пересѣченія называется **рядомъ точекъ (кривой) второго порядка**, такъ какъ на прямой $g$ можетъ быть не больше двухъ точекъ ряда $\Xi$.

между двумя рядами точекъ $u$ и $u'$ такимъ образомъ, чтобы точка пересѣченія прямыхъ $u$ и $u'$ не соотвѣтствовала самой себѣ; затѣмъ каждую точку $X$ прямой $u$ соединимъ прямой линіей $x$ съ точкой $X'$ прямой $u'$. Совокупность лучей $\xi$ называется **пучкомъ второго класса**, такъ какъ черезъ одну точку $P$ можетъ проходить не больше двухъ лучей $\xi$.

Чтобы доказать послѣднее утвержденіе въ первомъ изъ этихъ положеній, мы возьмемъ сѣченія прямой $g$ съ двумя пучками $U$ и $U'$; мы получимъ, такимъ образомъ, на прямой $g$ два проективныхъ ряда точекъ; согласно основной теоремѣ, на нашей прямой можетъ быть не болѣе двухъ точекъ, которыя въ этомъ соотвѣтствіи отвѣчаютъ каждая самой себѣ, иначе пучки $U$ и $U'$, вопреки условію, были бы перспективны.

Въ отличіе отъ рядовъ точекъ и пучковъ второго порядка мы будемъ называть образы, которые мы до сихъ поръ именовали этими терминами, рядами **перваго** порядка и пучками **перваго** класса. Замѣтимъ уже здѣсь, что рядъ точекъ второго порядка представляетъ собой коническое сѣченіе, а пучекъ второго класса — совокупность его касательныхъ. Въ ближайшихъ параграфахъ мы займемся этими образами подробно.

## § 17. Важнѣйшія проективныя свойства коническихъ сѣченій.

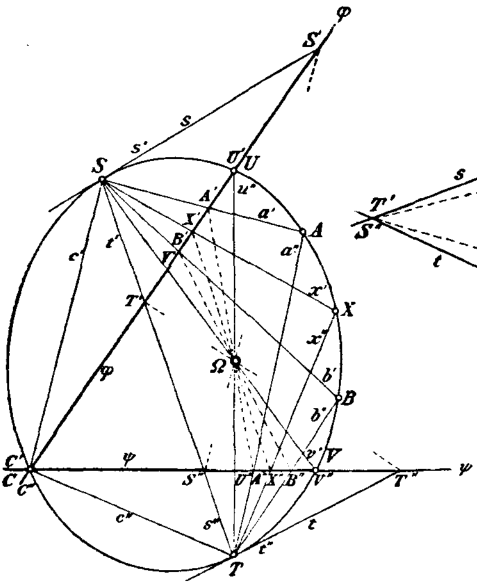
**1.** Важнѣйшія проективныя свойства рядовъ II пор. (второго порядка) и пучковъ II кл. (второго класса) съ необычной простотой вытекаютъ изъ закона ихъ образованія; а именно, по существу, они выводятся изъ двухъ фигуръ, соотвѣтствующихъ другъ другу по принципу двойственности. Чтобы отчетливо выдѣлить законъ двойственности, мы будемъ отмѣчать соотвѣтствующія точки и прямыя одними и тѣми же буквами, точки — прописными, а прямыя — строчными.

Два пучка $S$ и $T$ (фиг. 61) мы приведемъ въ проективное соотвѣтствіе, отнеся произвольнымъ тремъ лучамъ $a'$, $b'$, $c'$ перваго

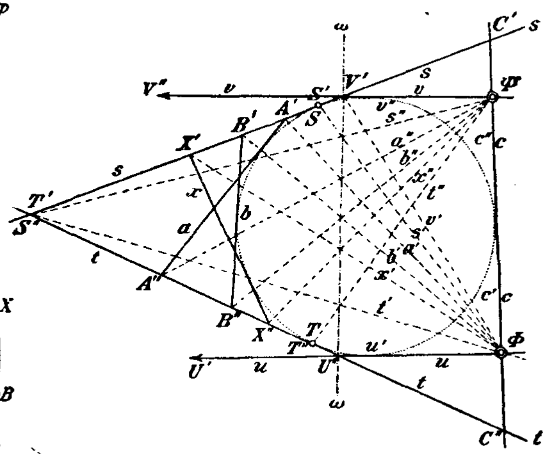
Два ряда точекъ $s$ и $t$ (см. фиг. 62) мы приведемъ въ проективное соотвѣтствіе, отнеся произвольнымъ тремъ точкамъ $A'$, $B'$, $C'$

пучка произвольные же три луча $a''$, $b''$, $c''$ второго въ качествѣ соотвѣтствующихъ имъ. Точки пересѣченія $A$, $B$ и $C$ трехъ паръ соотвѣтственныхъ лучей принадлежатъ въ такомъ случаѣ ряду II пор., образуемому пучками $S$, $T$. Черезъ точку $C$ проведемъ двѣ прямыя $\varphi$ и $\psi$ и каждую точку прямой $\varphi$ отнесемъ, въ качествѣ соотвѣтствующей, тому лучу пучка $S$, который черезъ нее проходитъ; точно такъ же отнесемъ точки прямой $\psi$ соотвѣтственно проходящимъ черезъ нихъ лучамъ пучка $T$. Лучамъ $a'$, $b'$, $c'$ отвѣчаютъ, такимъ образомъ, на прямой $\varphi$ точки $A'$, $B'$, $C'$,— лучамъ же $a''$, $b''$, $c''$ отвѣчаютъ на прямой $\psi$ точки $A''$, $B''$, $C''$. Такъ какъ рядъ $\varphi$ расположенъ перспективно относительно пучка $S$, а рядъ

перваго ряда произвольныя три точки $A''$, $B''$, $C''$ второго въ качествѣ соотвѣтствующихъ имъ. Прямыя $a$, $b$, $c$, соединяющія три пары соотвѣтственныхъ точекъ, принадлежатъ въ такомъ случаѣ пучку II кл., образуемому двумя рядами $s$ и $t$. На прямой $c$ выберемъ произвольно двѣ точки $\Phi$ и $\Psi$ и каждый лучъ пучка $\Phi$ отнесемъ, въ качествѣ соотвѣтствующаго, той точкѣ ряда $s$, черезъ которую онъ проходитъ; точно такъ же каждый лучъ пучка $\Psi$ отнесемъ той точкѣ прямой $t$, черезъ которую онъ проходитъ. Точкамъ $A'$, $B'$, $C'$ отвѣчаютъ тогда въ пучкѣ $\Phi$ лучи $a'$, $b'$, $c'$,— точкамъ же $A''$, $B''$, $C''$ отвѣчаютъ въ пучкѣ $\Psi$ лучи $a''$, $b''$, $c''$. Такъ какъ пучекъ $\Phi$ расположенъ перспективно относительно ряда



Фиг. 61.



Фиг. 62.

$\psi$ — перспективно относительно $T$,. такъ какъ, сверхъ того, пучки $S$ и $T$ связаны проективнымъ соотвѣтствіемъ, то и рядъ $\varphi$ связанъ проективнымъ соотвѣтствіемъ съ рядомъ $\psi$. Но такъ какъ соотвѣтствующія точки $C'$ и $C''$ рядовъ $\varphi$ и $\psi$ совпадаютъ въ одной точкѣ $C$, то ряды $\varphi$ и $\psi$ перспективны, т. е. прямыя $A'A''$, $B'B''$... и т. д., соединяющія соотвѣтственныя точки, проходятъ черезъ одну точку $\Omega$. Поэтому, чтобы найти лучъ $x''$ пучка $T$, соотвѣтствующій произвольному лучу $x'$ пучка $S$, достаточно соединить точку пересѣченія $X'$ прямыхъ $x$ и $\varphi$ съ точкой $\Omega$, а затѣмъ точку пересѣченія $X''$ этой прямой съ прямою $\psi$ соединить съ точкой $T$. Прямыя $x'$ и $x''$ пересѣкаются тогда въ нѣкоторой точкѣ $X$, принадлежащей ряду II пор. Аналогичнымъ образомъ мы можемъ получить лучъ $x'$, если данъ лучъ $x''$. Этимъ путемъ мы можемъ построить сколько угодно точекъ $X$ нашего ряда II пор. Лучу $TS$ или $s''$ пучка $T$ отвѣчаетъ на прямой $\psi$ точка $S''$, въ которой лучъ пересѣкаетъ эту прямую; точкѣ же $S''$ отвѣчаетъ на прямой $\varphi$ точка пересѣченія $S'$ прямыхъ $\varphi$ и $S''\Omega$; лучи $s'$ и $s''$ пересѣкаются въ точкѣ $S$, которая, слѣдовательно, также принадлежитъ нашему ряду II пор.; точно такъ же и точка $T$. Указанное выше построеніе точки $X$ содержитъ также рѣшеніе задачи: найти на прямой $x'$, проходящей черезъ точку ряда $S$, вторую точку $X$ этого ряда. — Чтобы точка $X$ совпала съ $S$, т. е. чтобы прямая $x'$, помимо $S$, не содержала ни одной точекъ $s$, а пучекъ $\Phi$ — перспективно относительно ряда $t$; такъ какъ, сверхъ того, ряды $s$ и $t$ связаны проективнымъ соотвѣтствіемъ, то пучекъ $\Phi$ связанъ проективно съ пучкомъ $\Psi$. Но въ виду того, что соотвѣтствующіе лучи $c'$ и $c''$ пучковъ $\Phi$ и $\Psi$ сливаются въ одну прямую $c$, пучки $\Phi$ и $\Psi$ перспективны, т. е. точки пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей $a'$ и $a''$, $b'$ и $b''$, . . . лежатъ на одной прямой $\omega$, Поэтому, чтобы найти точку $X''$ ряда $t$, соотвѣтствующую произвольной точкѣ $X'$ ряда $s$, нужно разыскать точку пересѣченія прямой $x'$, соединяющей точки $X'$ и $\Phi$, съ прямой $\omega$ и соединить ее прямой $x''$ съ точкой $\Psi$: эта прямая пересѣкаетъ прямую $t$ въ искомой точкѣ $X''$. Прямая, соединяющая точки $X'$, $X''$, принадлежитъ тогда пучку II кл. Аналогичнымъ образомъ мы можемъ получить точку $X'$, если дана точка $X''$. Этимъ способомъ мы можемъ построить сколько угодно прямыхъ $x$ нашего пучка II кл. Точкѣ пересѣченія $S''$ прямыхъ $t$ и $s$ въ ряду $t$ отвѣчаетъ въ пучкѣ $\Psi$ лучъ $s''$, соединяющій точку $\Psi$ съ $s''$; лучу же $s''$ отвѣчаетъ въ пучкѣ $\Phi$ прямая $s'$, соединяющая точку пересѣченія прямыхъ $s''$ и $\omega$ съ точкой $\Phi$; прямая, соединяющая точки $S'$ и $S''$, есть $s$, а потому послѣдняя также принадлежитъ пучку II кл.; точно такъ же и прямая $t$. Указанное выше построеніе луча $x$ содержитъ также рѣшеніе задачи — провести черезъ точку $X'$, лежащую на лучѣ $s$ пучка, второй лучъ $x$, также принадлеточки нашего ряда, прямая $x''$ должна также проходить черезъ точку $S$, иначе говоря, прямая $x'$ должна совпасть съ $SS'$, т. е. съ $s'$ [37]). Такая прямая, какъ $s'$, которая имѣетъ съ рядомъ одну, а не двѣ общія точки, называется касательной къ ряду. Черезъ точку $S$ проходитъ, слѣдовательно, только одна касательная $s'$. Точно такъ же $t''$ представляетъ собой касательную въ точкѣ $T$. Легко усмотрѣть, что прямая $T\Omega$ встрѣчаетъ прямую $\varphi$ въ точкѣ $U$, принадлежащей ряду II пор.; точно такъ же и прямая $S\Omega$ встрѣчаетъ прямую $\psi$ въ точкѣ $V$, принадлежащей ряду.

Точками $A$, $B$, $C$ вполнѣ опредѣляется проективное соотвѣтствіе пучковъ $S$, $T$; лучамъ $SA$, $SB$ и $SC$ должны быть отнесены лучи $TA$, $TB$, $TC$. Рядъ второго порядка, такимъ образомъ, вполнѣ опредѣляется пятью точками $S$, $T$, $A$, $B$, $C$. Можетъ, однако, показаться, что при этомъ точки $S$ и $T$ должны быть выдѣлены въ виду ихъ особаго значенія по сравненію съ точками $A$, $B$, $C$; но это не такъ. Въ самомъ дѣлѣ, $\varphi$ и $\psi$ суть произвольныя прямыя, проходящія черезъ точку $C$, а, слѣдовательно, $U$ и $V$ двѣ совершенно произвольныя точки нашего ряда II пор., которыя, если угодно, могутъ совпадать также съ точками $A$ и $B$. Если мы, сохраняя точки $A$, $B$, $U$, $V$, $S$, $T$, бу-

жащій пучку. — Чтобы лучъ $x$ совпадалъ съ $s$, т. е. чтобы черезъ точку $X'$ не проходилъ ни одинъ лучъ пучка, помимо $s$, точка $X''$ также должна лежать на прямой $s$, т. е. точка $X'$ должна совпадать съ точкой пересѣченія $S'$ прямыхъ $s$ и $s'$. Точка, черезъ которую проходитъ только одинъ лучъ пучка II кл., называется точкой касанія пучка. На прямой $s$ лежитъ, такимъ образомъ, только одна точка касанія $S'$. Точно такъ же $T''$ представляетъ собой точку касанія на прямой $t$. Легко усмотрѣть, что прямая $u$, соединяющая точку $(t\omega)$ пересѣченія лучей $t$ и $\omega$ съ точкой $\Phi$, принадлежитъ нашему пучку II кл.; точно такъ же и прямая, соединяющая точку $s\omega$ съ точкой $\Psi$.

Лучами $a$, $b$, $c$ вполнѣ опредѣляется проективное соотвѣтствіе двухъ рядовъ $s$, $t$; точкамъ $sa$, $sb$, $sc$ должны быть отнесены точки $ta$, $tb$, $tc$. Пучекъ второго класса, такимъ образомъ, вполнѣ опредѣляется пятью лучами $s$, $t$, $a$, $b$, $c$. Можетъ, однако, показаться, что при этомъ лучи $s$ и $t$ должны быть выдѣлены по ихъ особенному значенію по сравненію съ лучами $a$, $b$, $c$; но это не такъ. Въ самомъ дѣлѣ, $\Phi$ и $\Psi$ суть произвольныя точки на прямой $c$, а, слѣдовательно, $u$ и $v$ суть два совершенно произвольныхъ луча въ нашемъ пучкѣ II кл., которые, если угодно, могутъ также совпадать съ лучами $a$ и $b$. Если мы, сохраняя лучи $a$, $b$, $u$, $v$, $s$ и $t$, будемъ замѣнять лучъ $c$ другими

[37]) Прямая $x''$ должна совпадать съ $TS$, а послѣдняя, какъ мы видѣли, соотвѣтствуетъ лучу $s'$ или $SS'$ пучка $S$.

демъ замѣнять точку $C$ другими точками $C_1$, $C_2$, . . . нашего ряда II пор.[38]), то точка $X'$ на прямой $x'$ будетъ занимать положенія $X_1'$, $X_2'$,..., точка $X''$ на прямой $x''$ будетъ занимать положенія $X_1''$, $X_2''$, . . . , при чемъ прямыя $X'X''$, $X_1'X_1''$, $X_2'X_2''$, . . . будутъ попрежнему проходить черезъ точку $\Omega$[39]). Мы получаемъ, такимъ образомъ, два ряда точекъ на прямыхъ $x'$ и $x''$, именно, $X'$, $X_1'$, $X_2'$, . . . и $X''$, $X_1''$, $X_2''$, . . . , расположенныхъ перспективно другъ относительно друга. Но пучки $U$ и $V$ расположены перспективно относительно этихъ двухъ рядовъ. Слѣдовательно, они связаны другъ съ другомъ проективнымъ соотвѣтствіемъ. Такъ какъ, далѣе, $C_n$ есть точка пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей $UX_n'$ и $UX_n''$ ($n = 0, 1, 2 \ldots$), то нашъ рядъ II пор. образуется также проективными пучками $U$, $V$.

лучами $c_1$, $c_2$, $c_3$ . . . нашего пучка II кл., то лучъ $x'$ будетъ занимать въ пучкѣ $X'$ положенія $x_1'$, $x_2'$, . . . ; лучъ $x''$ въ пучкѣ $X''$ будетъ занимать положенія $x_1''$, $x_2''$, . . . , при чемъ точки $x'x''$, $x_1'x_1''$, $x_2'x_2''$, . . . будутъ попрежнему лежать на прямой $\omega$. Мы получаемъ, такимъ образомъ, два пучка лучей $x'$, $x_1'$, $x_2'$ . . . и $x''$, $x_1''$, $x_2''$. . . , которые при посредствѣ прямой $\omega$ приведены другъ съ другомъ въ перспективное соотвѣтствіе; но ряды $u$ и $v$, въ свою очередь, расположены перспективно относительно этихъ двухъ пучковъ; слѣдовательно, они связаны другъ съ другомъ проективнымъ соотвѣтствіемъ. Такъ какъ, далѣе, лучъ $c_n$ соединяетъ точки $ux_n'$ и $vx_n''$ ($n=0, 1, 2, \ldots$), то нашъ пучекъ II кл. образуется также проективными рядами $u$ и $v$.

**2.** Изъ множества фактовъ, вытекающихъ изъ этихъ положеній, мы приведемъ только важнѣйшія.

Предложеніе 1. Рядъ точекъ II пор. всегда содержитъ вершины пучковъ, которыми онъ образованъ.

Предложеніе 1'. Пучекъ II кл. всегда содержитъ прямыя, представляющія собой носительницы образующихъ ихъ рядовъ точекъ.

[38]) Сохраняя при этомъ точки $U$ и $V$, такъ что, когда точка занимаетъ положеніе $C_i$, то прямыя $\varphi$ и $\psi$ замѣняются прямыми $C_iU$ и $C_iV$.

[39]) То, что доказано выше относительно точки $\Omega$, можетъ быть формулировано слѣдующимъ образомъ: Пусть $S$ и $T$ два проективныхъ (но не перспективныхъ) пучка, а $C$ произвольная третья точка пучка, принадлежащая образуемому этими двумя пучками ряду II пор.; черезъ точку $C$ проведемъ произвольныя прямыя $CU$ и $CV$ и на нихъ возьмемъ соотвѣтственно точки $U$ и $V$, принадлежащія ряду II пор. Если точка $X$ есть любая другая точка ряда, $X'$ и $X''$ суть точки пересѣченія прямыхъ $CU$ и $CV$ соотвѣтственно съ прямыми $SX$ и $SV$, то прямая $X'X''$ проходитъ черезъ точку пересѣченія $\Omega$ прямыхъ $SV$ и $TU$. Если точка $C$ замѣняется точкой $C_i$, а точки $U$ и $V$ остаются, то вмѣсто точекъ $X'$ и $X''$ мы получимъ точки $X_i'$ и $X_i''$, а прямая $X_i'X_i''$ попрежнему будетъ проходить черезъ точку пересѣченія прямыхъ $SV$ и $TU$.

Предложеніе 2. Рядъ точекъ II пор. проектируется изъ любыхъ двухъ принадлежащихъ ему точекъ проективными пучками.

Предложеніе 2′. Пучекъ II кл. даетъ въ пересѣченіи съ любыми двумя принадлежащими ему пучками проективные ряды.

Одинъ и тотъ же рядъ II пор. можетъ, слѣдовательно, быть образованъ проективно $\infty^2$ способами; точно такъ же и пучекъ II кл.

Предложеніе 3. Рядъ II пор. опредѣляется пятью точками, или четырьмя точками и касательной въ одной изъ нихъ, или тремя точками и касательными въ двухъ изъ нихъ.

Первый случай иллюстрируется элементами $S$, $T$, $A$, $B$, $C$; второй — $S$, $s$, $T$, $A$, $C$, гдѣ лучи $s'$, $a'$, $c'$ пучка $S$ соотвѣтствуютъ лучамъ $s''$, $a''$, $c''$ пучка $T$; третій случай иллюстрируется элементами $S$, $s'$, $T$, $t''$, $C$; здѣсь лучи $s'$, $t'$, $c'$ пучка $S$ соотвѣтствуютъ лучамъ $s''$, $t''$, $c''$ пучка $T$[40]).

Предложеніе 3′. Пучекъ II кл. опредѣляется пятью лучами, или четырьмя лучами и точкой касанія одного изъ нихъ, или тремя лучами и точками касанія двухъ изъ нихъ.

Первый случай иллюстрируется элементами $s$, $t$, $a$, $b$, $c$, второй — $s$, $S$, $t$, $b$, $c$, при чемъ точки $S'$, $A'$, $C'$ ряда $s$ соотвѣтствуютъ точкамъ $S''$, $A''$, $C''$ ряда $t$; наконецъ, третій случай иллюстрируется элементами $s$, $S'$, $t$, $T''$, $c$; здѣсь точки $S'$, $T'$, $C'$ ряда $s$ отвѣчаютъ точкамъ $S''$, $T''$, $C''$ ряда $t$.

Въ виду предложенія 2, построеніе касательныхъ и точекъ касанія, указанное въ п. 1., пріобрѣтаетъ большое значеніе: такъ, оно оказывается примѣнимымъ ко всякой точкѣ въ рядѣ II пор., а также ко всякому лучу въ пучкѣ II кл.

Такимъ образомъ имѣемъ:

Предложеніе 4. Рядъ II пор. имѣетъ касательную въ каждой своей точкѣ.

Предложеніе 4′. Въ пучкѣ II кл. каждый лучъ имѣетъ точку касанія.

Но, несомнѣнно, наиболѣе важный результатъ представляетъ собой:

Предложеніе Паскаля *) и предложеніе Бріаншона *)

Во всякомъ обыкновенномъ шестиугольникѣ, верши-

Во всякомъ обыкновенномъ шестисторонникѣ, сто-

---

40) Для опредѣленія ряда II пор. должны быть даны образующіе его проективные пучки; а для этого достаточно знать три луча одного пучка и соотвѣтствующіе имъ лучи второго.

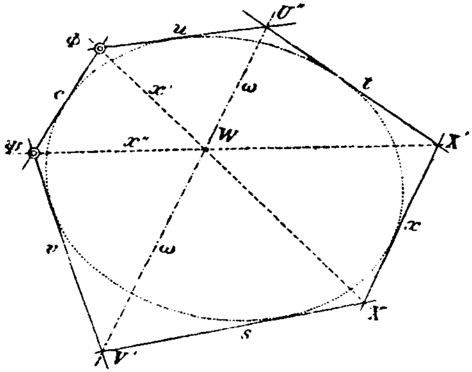
*) Въ книгѣ Райе (Th. Reye, „Die Geometrie der Lage", 3 Aufl., 1 Abt., S. 77) имѣется указаніе, что Паскаль (Pascal) открылъ предложеніе, названное его именемъ, когда ему было 16 лѣтъ (въ 1639 г.). Бріаншонъ (Brianschon) опубликовалъ открытое имъ предложеніе въ 1806 г.

ны котораго принадлежатъ ряду II пор., три пары противоположныхъ сторонъ пересѣкаются въ трехъ точкахъ, лежащихъ на одной прямой $w$. Это непосредственно видимъ на шестиугольникѣ $SXTUCV$:

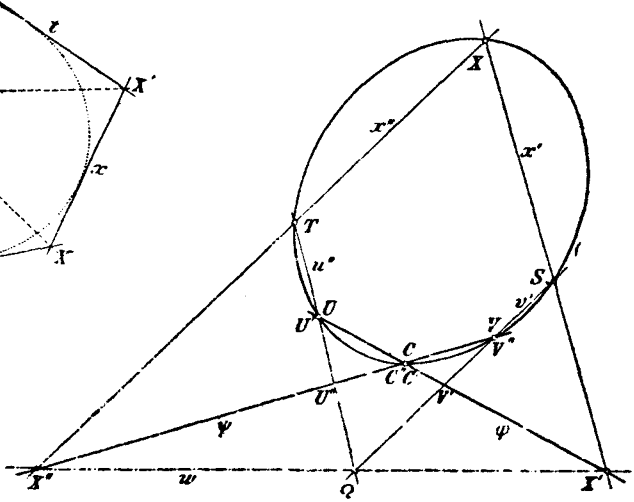
| | | | |
|---|---|---|---|
| Сторона: | $SX$, | $XT$, | $TU$ |
| Противоп. сторона: | $UC$, | $CV$, | $VS$ |
| Точка пересѣченія: | $X'$, | $X''$, | $\Omega$; |

роны котораго принадлежатъ пучку II кл., прямыя, соединяющія попарно противоположныя вершины, проходятъ черезъ одну и ту же точку $W$; это непосредственно видимъ на шестисторонникѣ $sxtucv$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Вершина: | $sx$, | $xt$, | $tu$ |
| Противоп. верш.: | $uc$, | $cv$, | $vs$ |
| Соедин. прямая: | $x'$, | $x''$, | $\omega$; |




Фиг. 63.




Фиг. 64.

эти три точки дѣйствительно лежатъ на одной прямой $w$; на фиг. 63 шестиугольникъ имѣетъ другое расположеніе; но здѣсь сохранены обозначенія фиг. 61.

въ самомъ дѣлѣ, эти три луча проходятъ черезъ одну точку. На фиг. 64 шестисторонникъ имѣетъ другое расположеніе; но здѣсь сохранены обозначенія фиг. 62.

Интересно разсмотрѣть еще тотъ случай, когда пучки $S$ и $T$ имѣютъ перспективное расположеніе, такъ что, напримѣръ, точка $C$ лежитъ на прямой $ST$ (см. фиг. 65) [41]). Они образуютъ тогда прямую, проходящую

[41]) Если точка $C$ лежитъ на прямой $ST$, то лучи $c'$ и $c''$ оба совпадаютъ съ прямой $ST$; иными словами, прямая, соединяющая вершины соотвѣтствующихъ пучковъ, отвѣчаетъ самой себѣ.

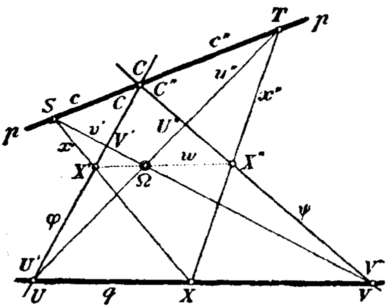
черезъ точки $U$ и $V$ и содержащую точку $X$ [42]). Мы, такимъ образомъ, получаемъ:

Частный случай предложенія Паскаля.

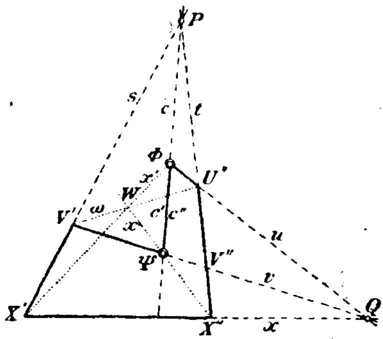
Если послѣдовательныя вершины шестиугольника $SXTUCV$ попеременно расположены на двухъ прямыхъ $p$ и $q$, то три пары противоположныхъ сторонъ пересѣкаются въ трехъ точкахъ, лежащихъ на одной прямой $w$ (фиг. 65).

Частный случай предложенія Бріаншона.

Если послѣдовательныя стороны шестисторонника $sxtucv$ попеременно проходятъ черезъ двѣ точки $P$ и $Q$, то прямыя, соединяющія три пары противоположныхъ вершинъ, проходятъ черезъ одну точку $W$ (фиг. 66).



Фиг. 65.



Фиг. 66.

Обращеніе предложенія Паскаля.

Если три пары противоположныхъ сторонъ плоскаго шестиугольника $SXTUCV$ пересѣкаются въ трехъ точкахъ $X'$, $X''$, $\Omega$, лежащихъ на одной прямой $w$, то шесть его вершинъ либо принадлежатъ ряду II пор., либо расположены по три на двухъ прямыхъ $p$ и $q$.

Обращеніе предложенія Бріаншона.

Если три прямыя, попарно соединяющія противоположныя вершины плоскаго шестисторонника $sxtucv$, проходятъ черезъ одну точку $W$, то шесть его сторонъ либо принадлежатъ пучку II кл., либо проходятъ по три черезъ двѣ точки $P$ и $Q$.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы сохранимъ обозначенія, принятыя на фигурахъ 63 — 66, то при условіяхъ перваго предложенія ряды $\varphi$ и $\psi$ будутъ перспективны, если точкамъ $U'$, $C'$, $V'$ отнесемъ точки $U''$, $C''$, $V''$;

[42]) Ибо точки пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей двухъ перспективныхъ пучковъ лежатъ на одной прямой.

эта перспектива воспроизводится пучкомъ $\Omega$. Слѣдовательно, $X'$ и $X''$ также представляютъ собой соотвѣтствующія точки. Вершины шестиугольника представляютъ собой поэтому точки пересѣченія соотвѣтствующихъ лучей проективныхъ пучковъ $S$ и $T$, т. е. принадлежатъ ряду II пор., если только пучки лучей не перспективны [43]). Въ этомъ исключительномъ случаѣ точка $C$ лежитъ на прямой $TS$; но тогда и точки $U, X, V$ принадлежатъ одной прямой (§ 16, 10). Въ виду принципа двойственности этимъ доказано и второе предложеніе. Оба предложенія могутъ служить для того, чтобы построить рядъ II пор. или пучекъ II кл. соотвѣтственно по пяти точкамъ или по пяти лучамъ.

**3.** Какъ мы видѣли въ п. 1., общему лучу $ST$ двухъ проективныхъ пучковъ $S$ и $T$, образующихъ рядъ II порядка $\varkappa$, соотвѣтствуетъ какъ въ одномъ, такъ и въ другомъ пучкѣ касательная ряда $\varkappa$.

Чтобы использовать этотъ фактъ, мы должны еще разъ обратиться къ доказательству предложенія Паскаля (см. фиг. 61 или 63). Проективные пучки $S$ и $T$ опредѣляютъ на прямыхъ $\varphi$ и $\psi$ два перспективныхъ ряда; эта перспектива осуществляется пучкомъ $\Omega$. Но проективное соотвѣтствіе пучковъ $S$ и $T$ вполнѣ опредѣляется, если мы отнесемъ другъ другу лучи $SU$ и $TU$, $SV$ и $TV$, $SC$ и $TC$. Это остается въ силѣ и въ томъ случаѣ, если точка $U$ сольется съ точкой $T$, а подъ лучемъ $TU$, въ виду приведеннаго выше предложенія о касательныхъ, будемъ разумѣть касательную въ точкѣ $T$, такъ какъ этой послѣдней, дѣйствительно, отвѣчаетъ лучъ $ST$, тождественный при этихъ условіяхъ съ $SU$. Вмѣстѣ съ тѣмъ можно принять, что точка $V$ совпадаетъ съ $S$, при чемъ подъ прямой $SV$ нужно разумѣть касательную въ точкѣ $S$. Мы получаемъ, такимъ образомъ, предложенія 5. и 6. *)

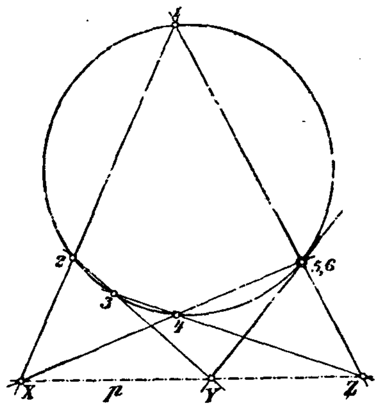
Предложеніе 5. Предложеніе Паскаля остается въ силѣ, если двѣ послѣдовательныя вершины сливаются

Предложеніе 5′. Предложеніе Бріаншона остается въ силѣ, если двѣ послѣдовательныя стороны сливаются въ од-

[43]) Пучекъ $\Omega$, какъ указано въ текстѣ, осуществляетъ перспективное соотвѣтствіе рядовъ $\varphi$ и $\psi$; въ этомъ соотвѣтствіи точкамъ $U', C', V', X'$ ряда $\varphi$ отвѣчаютъ точки $U'', C'', V'', X''$ ряда $\psi$. Если мы теперь каждому лучу пучка $T$, проходящему черезъ нѣкоторую точку ряда $\varphi$, отнесемъ тотъ лучъ пучка $T$, который проходитъ черезъ соотвѣтствующую точку ряда $\psi$, то между пучками будетъ установлено проективное соотвѣтствіе. Вмѣстѣ съ тѣмъ лучамъ $SU', SC', SV', SX'$ будутъ отвѣчать лучи $TU'', TC'', TV'', TX''$, которые въ пересѣченіи съ первыми послѣдовательно даютъ остальныя вершины $U, C, V, X$ шестиугольника.

*) Мы формулируемъ предложеніе о пятиугольникѣ и пятисторонникѣ въ томъ видѣ, въ какомъ его обыкновенно выводятъ, какъ предѣльный случай предложенія Паскаля и Бріаншона.

въ одну точку, а соединяющая ихъ прямая замѣняется касательной въ этой точкѣ (см. фиг. 67). Иными словами, если




Фиг. 67.

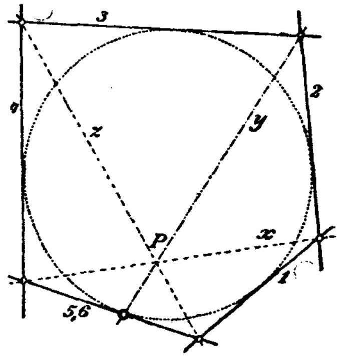
даны пять точекъ ряда II пор., и мы желаемъ опредѣлить касательную въ одной изъ нихъ, то слѣдуетъ обозначить эту точку цифрами 5 и 6, а четыре остальныя точки въ той или другой послѣдовательности — цифрами 1, 2, 3, 4; затѣмъ нужно построить прямую Паскаля $p$ по схемѣ:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Сторона: | 12, | 23, | 34 |
| Противоп. стор.: | 45, | 56, | 61 |
| Точка пересѣч.: | $X$, | $Y$, | $Z$ |

Точки $X$ и $Z$ опредѣляютъ прямую $p$, которая въ пересѣченіи съ прямою 23 даетъ точку $Y$; прямая $Y5$ и есть искомая касательная.

Предложеніе 6. Если вершины полнаго четырехугольника принадлежатъ ряду II пор., то любыя двѣ дополнительныя вершины лежатъ на одной прямой съ точкой пе-

ну прямую, а точка ихъ пересѣченія замѣняется точкой касанія этой прямой (см. фиг. 68). Иными словами, если даны пять




Фиг. 68.

лучей пучка II кл., и мы желаемъ опредѣлить точку касанія одного изъ нихъ, то слѣдуетъ обозначить этотъ лучъ цифрами 5, 6, а четыре остальные въ этой или другой послѣдовательности — цифрами 1, 2, 3, 4; затѣмъ нужно построить точку Бріаншона $P$ по схемѣ:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Вершина: | 12, | 23, | 34 |
| Противоп. верш.: | 45, | 56, | 61 |
| Соединяющ. прямая: | $x$, | $y$, | $z$. |

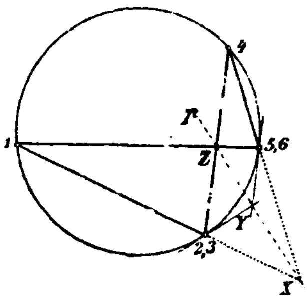
Пересѣченіемъ прямыхъ $x$ и $z$ опредѣляется точка $P$; черезъ точки $P$ и 23 проводимъ прямую $y$; тогда $y5$ есть точка касанія.

Предложеніе 6′. Если стороны полнаго четырехсторонника принадлежатъ пучку II кл., то любыя двѣ дополнительныя стороны и прямая, соединяющая точки касанія ресѣченія касательныхъ въ двухъ противоположныхъ вершинахъ.

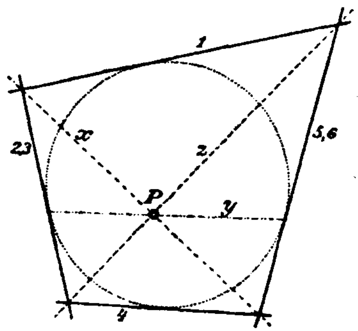
Сюда относится фиг. 69, въ которой сохранены обозначенія фигуры 67; на прямой $p$, согласно нашему предложенію, лежитъ также точка пересѣченія касательныхъ въ двухъ другихъ противоположныхъ вершинахъ;

двухъ противоположныхъ сторонъ, проходятъ черезъ одну точку.

Сюда относится фиг. 70, въ которой сохранены обозначенія фигуры 68; черезъ точку $P$, согласно нашему предложенію, проходитъ прямая, соединяющая точки касанія („хорда соприкосновенія")двухъдругихъ противоположныхъ сторонъ;



Фиг. 69.



Фиг. 70.

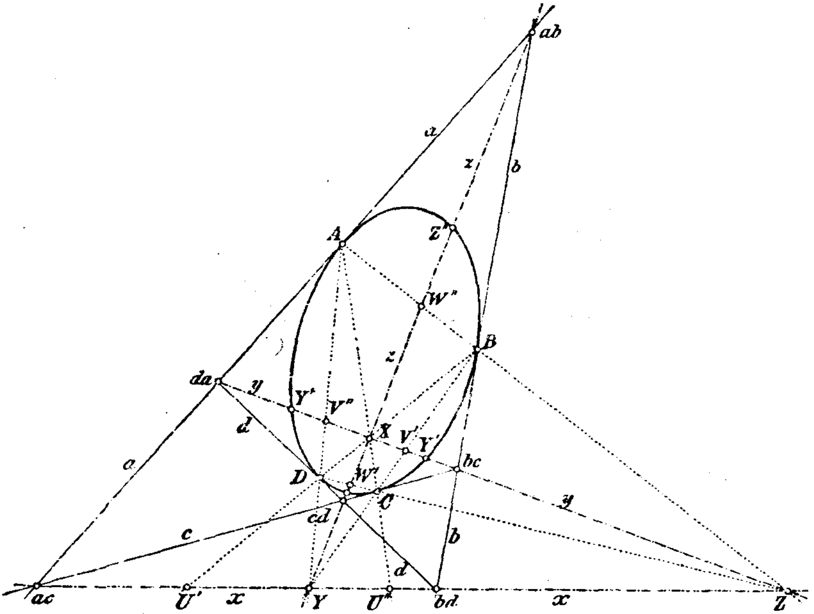
это обнаруживается непосредственно, если замѣнимъ обозначенія 1; 2, 3; 4; 5, 6 черезъ 1, 2; 3; 4, 5; 6.

**4.** Четыре точки $A, B, C, D$ ряда II пор. опредѣляютъ въ общемъ три четырехугольника $ABCD$, $ACBD$, $ADBC$, къ каждому изъ которыхъ можно примѣнить предложеніе 6; аналогично обстоитъ дѣло и съ четырьмя лучами $a, b, c, d$ пучка II кл. Отсюда вытекаютъ два особенно плодотворныхъ предложенія.

Предложеніе 7. Четыре точки $A, B, C, D$ ряда II пор. опредѣляютъ полный четырехугольникъ, касательныя же $a, b, c, d$ въ этихъ точкахъ образуютъ полный четырехсторонникъ; дополнительныя стороны четырехсторонника $x, y, z$ и дополнительныя вершины $X, Y, Z$ четырехугольника образуютъ

Предложеніе 7′. Четыре луча $a, b, c, d$ пучка II кл. опредѣляютъ полный четырехсторонникъ, ихъ точки соприкосновенія опредѣляютъ полный четырехугольникъ; дополнительныя вершины четырехугольника $X, Y, Z$ и дополнительныя стороны $x, y, z$ четырехсторонника образуютъ одинъ и тотъ же треуголь- никъ [44]). | одинъ и тотъ же треугольникъ.

Представимъ себѣ, что рядъ II пор. заданъ точками $B, C, D$ и касательными $b, d$ въ точкахъ $B$ и $D$; чтобы построить рядъ, достаточно отнести лучамъ $b$, $BC$, $BD$ пучка $B$ лучи $DB$, $DC$, $d$ пучка $D$; этимъ рядъ вполнѣ опредѣленъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣлена и касательная $c$ въ точкѣ $C$. Пусть теперь $A$ будетъ произвольная точка ряда. Чтобы найти касательную $a$, надо, согласно предложенію 7, точку пересѣченія $X$ прямыхъ $AC$ и $BD$ спроектировать изъ точки $bc$ на прямую $d$ и изъ точки $cd$ на прямую $b$, а затѣмъ соединить полученныя точки $da$ и $ab$ (см. фиг. 71). Если мы вмѣсто $A$ возьмемъ другія точки ряда $A_1$, $A_2$, $A_3$, . . . *), то лучи




Фиг. 71.

$CA$, $CA_1$, $CA_2$, $CA_3$, . . . опредѣлятъ на прямой $BD$ рядъ точекъ $X$, $X_1$, $X_2$, $X_3$, . . . , перспективный съ пучкомъ $C$; точки этого ряда проектируются изъ точекъ $bc$ и $cd$ двумя проективными пучками. Послѣдніе, въ свою очередь, опредѣляютъ на прямыхъ $d$ и $b$ два взаимно проективныхъ

[44]) На прямой $XY$, соединяющей двѣ дополнительныя вершины $X$ и $Y$ четырехугольника, согласно предыдущему предложенію, лежатъ точки пересѣченія касательныхъ $a$ и $b$, $c$ и $d$; иначе говоря, дополнительная сторона $z$ полнаго четырехсторонника совпадаетъ съ прямой $XY$; точно такъ же дополнительныя стороны четырехсторонника $y$ и $x$ совпадаютъ съ прямыми $XZ$ и $YZ$.

*) См. подробный рисунокъ 72, на которомъ для облегченія самаго черченія рядъ II пор. изображенъ окружностью, какъ это, впрочемъ, дѣлалось уже и раньше въ другихъ чертежахъ.

ряда, при чемъ касательныя $a, a_1, a_2, a_3, \dots$ въ точкахъ $A, A_1, A_2, A_3, \dots$ постоянно соединяютъ двѣ соотвѣтственныя точки этихъ рядовъ. Примѣняя еще сюда законъ двойственности, мы получаемъ:

Предложенiе 8. Касательныя ряда II пор. образуютъ пучекъ II кл.

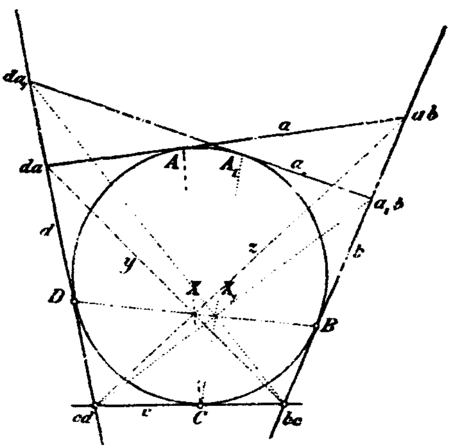
Предложенiе 8′. Точки касанiя пучка II кл. образуютъ рядъ II пор.

Теперь ясно, почему мы имѣли возможность демонстрировать предложенiя 7 и 7′ одной и той же фигурой. Нужно обратить вниманiе на построенiя рядовъ II пор. по точкамъ и касательнымъ, вытекающiя изъ фиг. 72. Предыдущiя соображенiя наводятъ также на мысль установить проективное соотвѣтствiе между двумя рядами II пор. Съ этой цѣлью мы введемъ слѣдующее опредѣленiе:

Четыре точки ряда II пор. называются гармоническими, если онѣ изъ какой-либо точки ряда проектируются четырьмя гармоническими лучами; согласно предложенiю 2, они въ такомъ случаѣ проектируются и изъ любой другой точки ряда гармоническими лучами.

Четыре луча въ пучкѣ II кл. называются гармоническими, если какой-либо лучъ пучка пересѣкаетъ ихъ въ четырехъ гармоническихъ точкахъ; согласно предложенiю 2′, любой другой лучъ пучка въ этомъ случаѣ также пересѣкаетъ ихъ въ четырехъ гармоническихъ точкахъ.

Помощью этихъ предложенiй можно безъ труда распространить на точки и лучи образовъ второго порядка свойства расположенiя, устанавливаемыя аксiомами группы II. Если теперь будемъ вообще называть проективнымъ соотвѣтствiемъ любыхъ двухъ образовъ такое сопряженiе ихъ, при которомъ четыремъ гармоническимъ элементамъ всегда отвѣчаютъ четыре гармоническихъ же элемента, то мы по фиг. 72 можемъ установить слѣдующее: четыремъ гармоническимъ точкамъ $A, A_1, A_2, A_3$ отвѣчаютъ четыре гармоническихъ луча, соединяющихъ ихъ съ точкою $C$; эти лучи опредѣляютъ на прямой $DB$ четыре гармоническiя точки $X, X_1, X_2, X_3$; этимъ послѣднимъ, въ свою очередь, отвѣчаютъ на $b$ и $d$ по четыре гармоническихъ точки на каждой, а именно: $ab$, $a_1b$, $a_2b$, $a_3b$ и $da$, $da_1$, $da_2$, $da_3$, какъ проекцiи изъ точекъ $cd$ и $bc$; наконецъ, послѣднимъ отвѣчаютъ четыре гармоническiя



Фиг. 72.

касательныя $a, a_1, a_2, a_3$. Такимъ образомъ, точки ряда второго порядка оказываются проективно сопряженными съ лучами пучка касательныхъ II кл. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы получаемъ:

Предложеніе 9. Точки ряда II пор. связаны проективнымъ соотвѣтствіемъ съ касательнымъ пучкомъ II кл., если каждой точкѣ отнесена, въ качествѣ соотвѣтствующаго луча, касательная въ этой точкѣ.

**5.** Исходя изъ фиг. 71 и относящихся къ ней соображеній, можно также съ необычайной простотой развить теорію поляръ рядовъ II пор. и пучковъ II кл. Мы будемъ при этомъ придерживаться Райе *), книгой котораго мы и вообще руководились въ настоящемъ изложеніи. Мы утверждаемъ, прежде всего, что въ ряду II порядка $\varkappa$ и въ соотвѣтствующемъ пучкѣ касательныхъ точка $X$ и прямая $x$, а также $Y$ и $y$, $Z$ и $z$ другъ друга вполнѣ опредѣляютъ.

Въ самомъ дѣлѣ, по своему положенію

относительно совершеннаго четырехугольника, опредѣляемаго точками $A, B, C, D$, точки пересѣченія $U'$ и $U''$ прямой $x$ съ прямыми $BD$ и $AC$ раздѣляются гармонически точкой $X$ и точками ряда $\varkappa$;

относительно совершеннаго четырехсторонника, опредѣляемаго лучами $a, b, c, d$, лучи $u'$ и $u''$, соединяющіе точку $X$ съ точками $bd$ и $ac$, раздѣляются гармонически лучомъ $x$ и лучами пучка $\varkappa$;

этимъ мы хотѣли выразить, что

прямыя $U'X$ и $U''X$ имѣютъ каждая по двѣ общія точки съ рядомъ $\varkappa$, которыя дѣлятъ гармонически соотвѣтственно пары $X$ и $U'$, $X$ и $U''$.

черезъ точки $u'x$, или $bd$, и $u''x$, или $ac$, проходятъ двѣ касательныя ряда $\varkappa$, которыя раздѣляютъ гармонически соотвѣтственно пары $x$ и $u'$, $x$ и $u''$.

Съ другой стороны, прямая $x$ уже вполнѣ опредѣляется точками $A$, $C$ ряда $\varkappa$, которыя лежатъ на одной прямой съ точкой $X$, ибо это есть прямая, соединяющая точку пересѣченія $ac$ касательныхъ въ $A$ и $C$ съ точкой $U''$, которая совмѣстно съ $X$ дѣлитъ гармонически пару $A$, $C$. Мы можемъ поэтому смотрѣть на $BD$, какъ на совершенно произвольную пря-

Съ другой стороны, точка $X$ уже вполнѣ опредѣляется прямыми $a$ и $c$, пересѣкающимися на прямой $x$, ибо это есть точка пересѣченія прямой $AC$, соединяющей точки касанія лучей $a$ и $c$ съ лучемъ $u''$, который совмѣстно съ $x$ дѣлитъ гармонически пару лучей $a$, $c$. Мы можемъ поэтому смотрѣть на $bd$, какъ на совершенно произвольную точку на прямой $x$, изъ которой

*) Th. Reye. „Geometrie der Lage", I Abt., achter Vortrag.

мую, проходящую черезъ точку $X$, которая имѣетъ съ рядомъ $\varkappa$ двѣ общія точки $B$ и $D$; вмѣстѣ съ тѣмъ мы только-что доказали, что какъ точка $U'$, которая совмѣстно съ $X$ дѣлитъ гармонически пару $B,D$, такъ и точки пересѣченія $bd$ касательныхъ въ точкахъ $B$ и $D$ лежатъ на прямой $x$.

выходятъ двѣ касательныя $b$ и $d$ къ ряду $\varkappa$; вмѣстѣ съ тѣмъ мы только-что установили, что какъ лучъ $u'$, который совмѣстно съ $x$ дѣлитъ гармонически пару лучей $b$, $d$, такъ и прямая, соединяющая точки касанія лучей $b$ и $d$, проходятъ черезъ точку $X$.

Этимъ доказано:

Предложеніе 10. Рядъ второго порядка $\varkappa$ относитъ каждой точкѣ $X$, лежащей въ плоскости ряда, но ему не принадлежащей, прямую $x$, „поляру этой точки“, обладающую слѣдующими свойствами:

a) каждая прямая, проходящая черезъ точку $X$ и имѣющая съ рядомъ $\varkappa$ двѣ общія точки, пересѣкаетъ прямую $x$ въ точкѣ, которая совмѣстно съ $X$ дѣлитъ гармонически упомянутую пару точекъ ряда;

b) если точки касанія двухъ касательныхъ ряда $\varkappa$ лежатъ на одной прямой съ точкой $X$, то эти касательныя пересѣкаются на прямой $x$;

c) если изъ точки $X$ проходятъ двѣ касательныя къ ряду $\varkappa$, то точки ихъ соприкосновенія лежатъ на прямой $x$.

Предложеніе 10'. Пучекъ второго класса $\varkappa$ относитъ каждому лучу, расположенному въ его плоскости, но ему не принадлежащему, точку $X$, „полюсъ“ этого луча $x$, обладающую слѣдующими свойствами:

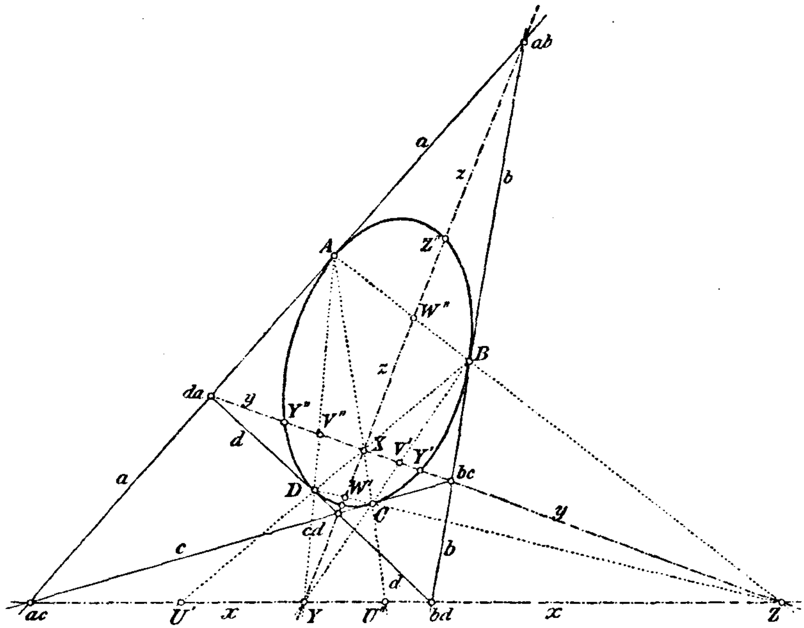
a) каждая точка прямой $x$, изъ которой выходятъ двѣ касательныя къ ряду $\varkappa$, опредѣляетъ съ точкой $X$ прямую, которая совмѣстно съ $x$ дѣлитъ гармонически упомянутую пару касательныхъ;

b) если касательныя двухъ точекъ соприкосновенія пучка пересѣкаются на прямой $x$, то прямая, соединяющая точки касанія, проходитъ черезъ точку $X$;

c) если на прямой $x$ лежатъ точки соприкосновенія двухъ лучей пучка $\varkappa$, то ихъ касательныя проходятъ черезъ точку $X$.

d) Если пучекъ второго класса составленъ изъ касательныхъ ряда второго порядка, то каждая точка служитъ полюсомъ свой поляры, каждая прямая — полярой своего полюса [45]).

Утвержденія c) еще нуждаются въ доказательствѣ. На фигурѣ 71 черезъ точку $X$ не проходятъ касательныя къ ряду $\varkappa$, но изъ точекъ $Y$ и $Z$ проходятъ по двѣ касательныя. Но такъ какъ двѣ пары точекъ $Y$, $V'$ и $Y$, $V''$ раздѣляются рядомъ $\varkappa$ гармонически, то $y$ есть поляра точки $Y$; точно такъ же $z$ есть поляра точки $Z$; такимъ образомъ, въ треугольникѣ $XYZ$




Фиг. 71.

каждая сторона служитъ полярой противолежащей вершины; онъ называется поэтому „полярнымъ треугольникомъ“, или „полярнымъ трехсторонникомъ“. Если бы теперь прямая $ZZ''$, соединяющая точку $Z$ съ точкой пересѣченія $Z''$ прямой $z$ и ряда $\varkappa$, имѣла бы съ рядомъ $\varkappa$ еще одну общую точку $P$, то точка, которая совмѣстно съ $Z$ дѣлила бы гармонически пару $Z''$, $P$, должна была бы также лежать на прямой $z$; но въ такомъ случаѣ она должна была бы совпасть съ точкой $Z''$, что возможно

[45]) Прямая $z$ есть поляра точки $Z$; она соединяетъ согласно предложенію c), доказательство котораго помѣщено въ текстѣ ниже, точки касанія $Z'$ и $Z''$ касательныхъ, выходящихъ изъ точки $Z$; мы можемъ поэтому смотрѣть на точку $Z$, какъ на точку пересѣченія двухъ касательныхъ пучка, а на $z$, какъ на прямую, соединяющую точки касанія; поэтому $Z$ есть полюсъ прямой $z$.

только въ томъ случаѣ, когда точка $P$ также совпадаетъ съ $Z''$. Поэтому касательныя въ точкахъ $Z'$ и $Z''$ проходятъ черезъ точку $Z$ [46]).

Предложеніями 10 и 10′ можно многообразно воспользоваться для построенія поляры по данному полюсу и полюса по данной полярѣ; при этомъ рядъ $\varkappa$ долженъ быть только заданъ достаточнымъ числомъ точекъ или касательныхъ, т. е., слѣдовательно, либо пятью точками, либо пятью касательными, либо четырьмя точками и касательной въ одной изъ нихъ, либо четырьмя касательными и точкой касанія одной изъ нихъ, либо тремя точками и касательными въ двухъ изъ нихъ, либо тремя касательными и точками касанія двухъ изъ нихъ. Во всѣхъ этихъ случаяхъ проективное построеніе ряда $\varkappa$ непосредственно ясно, а полюсы и поляры могутъ быть найдены при помощи одной только линейки.

**6.** Сохраняя на фигурѣ 71 точки $A$, $B$, $Z$, а вмѣстѣ съ ними и прямыя $a$, $b$, $z$, мы предположимъ, что точка $X$ занимаетъ на прямой $z$ различныя положенія $X_1, X_2, X_3, \ldots$ *). Такъ какъ точки $C$ и $D$ въ ряду $\varkappa$ опредѣляются прямыми $AX$ и $BX$, то вмѣстѣ съ измѣненіями положенія точки $X$ касательныя $c$ и $d$ въ точкахъ $C$ и $D$ будутъ занимать другія положенія $c_1, c_2, c_3, \ldots$ и $d_1, d_2, d_3, \ldots$. Мы обратимъ теперь вниманіе на положенія луча $c$; согласно предложенію 2′, лучи $c, c_1, c_2, c_3, \ldots$ пересѣкаютъ прямыя $a$ и $b$ въ двухъ взаимно проективныхъ рядахъ точекъ $ac, ac_1, ac_2, ac_3, \ldots$ и $bc, bc_1, bc_2, bc_3, \ldots$. Эти ряды проектируются изъ точки $Z$ двумя проективными пучками $x, x_1, x_2, x_3, \ldots$ и $y, y_1, y_2, y_3, \ldots$. Но послѣдній пучекъ расположенъ перспективно относительно ряда $X, X_1, X_2, X_3, \ldots$; слѣдовательно, этотъ рядъ связанъ проективно съ пучкомъ $x, x_1, x_2, x_3, \ldots$. Если точка $X_n$ не принадлежитъ ряду $\varkappa$, то $x_n$ есть поляра этой точки; если прямая $x_n$ не касается ряда $\varkappa$, то точка $X_n$ есть ея полюсъ; но если точка $X$ совпадаетъ съ одной изъ точекъ $Z'$ или $Z''$ пересѣченія прямой $z$ и ряда $\varkappa$, то точки $B$ и $D$, а вмѣстѣ съ ними и $Y$, также совпадаютъ съ тою же точкой; вмѣстѣ съ тѣмъ прямая $x$ становится касательной, ибо, какъ мы видѣли, $ZZ'$ и $ZZ''$ суть касательныя къ ряду $\varkappa$ изъ точки $Z$. Если мы поэтому захотимъ распространить понятіе о полярѣ и на такія точки, которыя принадлежатъ ряду $\varkappa$, то мы должны будемъ установить такое опредѣленіе: поляра точки ряда II пор. есть касательная въ этой точкѣ, полюсъ касательной есть ея точка соприкосновенія. Опираясь на это

[46]) Иначе: если прямая, проходящая черезъ точку $X$, встрѣчаетъ рядъ $\varkappa$ въ точкахъ $A$ и $C$, то она встрѣчаетъ прямую $x$ въ точкѣ $U$, которая совмѣстно съ $X$ дѣлитъ гармонически точки $A$ и $C$; если поэтому точки $A$ и $C$ сливаются въ одну точку, то съ послѣдней сливается и точка $U$; т. е. прямая $x$ проходитъ черезъ точку касанія каждой касательной, выходящей изъ точки $X$.

*) Точки эти на фиг. 71 для упрощенія чертежа опущены.

опредѣленіе, мы можемъ уже высказать безъ ограниченія слѣдующее предложеніе:

Предложеніе 11. Поляры точекъ ряда перваго порядка $z$ образуютъ пучекъ перваго класса $Z$, который связанъ проективно съ этимъ рядомъ и вершина котораго служитъ полюсомъ прямой $z$ и обратно.

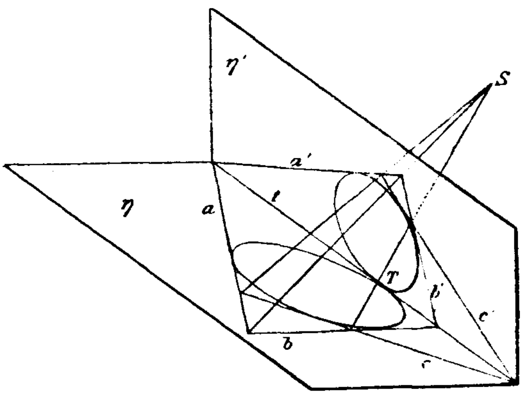
Неразобранный еще случай, когда прямая $z$ касается ряда $\varkappa$, очень легко исчерпать. — На этомъ предложеніи можно основать новое доказательство закона двойственности; это доказательство, быть можетъ, не имѣетъ того основного характера, но зато оно относитъ каждой плоской фигурѣ вполнѣ опредѣленную двойственную ей фигуру. Для этой цѣли достаточно построить поляру каждой точки этой фигуры и полюсъ каждой ея прямой относительно нѣкотораго ряда II пор. Тогда четыремъ гармоническимъ точкамъ прямой соотвѣтствуютъ четыре гармоническихъ луча пучка [47]); двумъ парамъ точекъ, раздѣляющимъ другъ друга, отвѣчаютъ двѣ пары лучей пучка, также раздѣляющія другъ друга и т. д. Построеніе и изслѣдованіе фигуры, полярной относительно данной, очень поучительно. Для упражненія возьмемъ въ плоскости ряда второго порядка $\varkappa$ еще другой рядъ второго порядка $\lambda$ и отнесемъ каждой точкѣ послѣдняго $P$ ея поляру $p$ относительно ряда $\varkappa$. Такимъ образомъ мы получимъ безчисленное множество лучей $p$. Что можно о нихъ сказать? Если мы представимъ себѣ рядъ $\lambda$ образованнымъ при помощи двухъ проективныхъ пучковъ $S$ и $T$, то имъ отвѣчаютъ два проективныхъ ряда точекъ $s$ и $t$, при чемъ прямыя $p$ соединяютъ попарно соотвѣтствующія другъ другу точки. Лучи $p$ образуютъ, слѣдовательно, пучекъ второго класса, огибающій нѣкоторый рядъ точекъ второго порядка.

**7.** Мы видимъ изъ этого примѣра и изъ всего предыдущаго изслѣдованія, какъ необыкновенно подвижна современная синтетическая геометрія, какъ легко она разматывается въ противоположность древней геометріи, съ построеніемъ которой мы, по существу, знакомимся уже въ школѣ. Наиболѣе существенная разница между обѣими геометріями, очевидно, заключается въ томъ, что въ геометріи древнихъ вполнѣ господствуетъ понятіе объ измѣреніи, между тѣмъ какъ новая геометрія основывается, главнымъ образомъ, на понятіяхъ о расположеніи и инцидентности; поэтому ее и называютъ геометріей положенія. Метрическія свойства могутъ быть познаваемы только путемъ сравненія въ силу законовъ измѣренія; поэтому они гораздо менѣе бросаются въ глаза, нежели свойства расположенія и инцидентности. Отсюда — особенная наглядность

[47]) Это слѣдуетъ изъ того, что точкамъ, расположеннымъ на одной прямой, будутъ отвѣчать лучи пучка, вершиной котораго служитъ полюсъ этой прямой; полному же четырехугольнику будетъ отвѣчать полный четырехсторонникъ.

геометріи положенія. Если часто приходится слышать, что то или другое доказательство въ области проективной геометріи основывается исключительно на воззрѣніи, то это можетъ и должно означать лишь то, что доказательства апеллируютъ только къ такимъ свойствамъ пространственныхъ образовъ, которыя можно непосредственно усмотрѣть на чертежѣ, не прибѣгая къ измѣренію и сравненію; таковы свойства расположенія и инцидентности. Мы узнаемъ, напримѣръ, что двѣ пары точекъ раздѣляютъ другъ друга гармонически по ихъ положенію относительно полнаго четырехугольника. Въ прежней геометріи онѣ опредѣляются извѣстной пропорціей, и гармоническое расположеніе двухъ точекъ часто познается только путемъ вычисленія. Ряды II пор. греки опредѣляли, какъ сѣченія круговой конической поверхности плоскостью; они пользовались, такимъ образомъ, метрически выдѣленнымъ рядомъ второго порядка, окружностью, теорія которой должна была, конечно, быть предпослана; между тѣмъ, новая геометрія восходитъ къ источнику, изъ котораго проистекаютъ свойства в с ѣ х ъ рядовъ второго порядка.

Что окружность принадлежитъ къ числу рядовъ второго порядка, это мы уже видѣли въ предыдущемъ параграфѣ. Для округленія нашего очерка ученія о коническихъ сѣченіяхъ намъ остается еще только показать, что ряды второго порядка дѣйствительно представляютъ собой сѣченія круговой конической поверхности плоскостью, или — что сводится къ тому же — что они представляютъ собой центральныя проекціи окружностей. Положимъ, что въ плоскости $\eta$ данъ рядъ точекъ второго порядка $\varkappa$ (см. фиг. 73). Черезъ нѣкоторую его касательную $t$ мы проведемъ плоскость $\eta'$ и въ послѣдней построимъ окружность $\varkappa'$, касающуюся прямой $t$ въ той же точкѣ $T$, что и рядъ $\varkappa$. Положимъ далѣе, что произвольныя три касательныя $a$, $b$, $c$ пучка $\varkappa$ встрѣчаютъ прямую $t$ въ точкахъ $X$, $Y$, $Z$. Изъ этихъ точекъ мы проводимъ касательныя $a'$, $b'$, $c'$ къ окружности $\varkappa'$. Въ такомъ случаѣ прямыя $a$ и $a'$, $b$ и $b'$, $c$ и $c'$ опредѣляютъ три плоскости $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Послѣднія пересѣкаются въ одной точкѣ $S$, такъ какъ онѣ не могутъ проходить черезъ одну прямую. Изъ точки $S$ проектируемъ окружность $\varkappa'$ на плоскость $\eta$. Мы утверждаемъ, что $\varkappa$ есть проекція



Фиг. 73.

окружности $\varkappa'$. Въ самомъ дѣлѣ, эта проекція, во всякомъ случаѣ, представляетъ собой образъ, который можетъ быть воспроизведенъ на плоскости $\eta$ проективными пучками [48]); это есть, слѣдовательно, рядъ точекъ второго порядка, который имѣетъ съ рядомъ $\varkappa$ четыре общія касательныя $a, b, c, t$ и общую точку касанія $T$ на прямой $t$; онъ совпадаетъ поэтому съ рядомъ $\varkappa$. Замѣтимъ, что мы воспользовались въ этомъ доказательствѣ только тѣмъ свойствомъ образа $\varkappa'$, что онъ представляетъ собой рядъ второго порядка; спеціальныя метрическія свойства окружности намъ вовсе не были нужны. Если мы поэтому выскажемъ предложеніе:

Предложеніе 12. Ряды второго порядка представляютъ собой центральныя проекціи окружностей,

то этимъ будетъ переданъ результатъ нашего изслѣдованія только въ ограниченной формѣ.

Этимъ мы закончимъ ученіе о коническихъ сѣченіяхъ; метрическія свойства этихъ образовъ будутъ изложены частью въ планиметріи, частью въ аналитической и начертательной геометріяхъ.

## § 18. Проективная метрика.

**1.** Развивая въ трехъ предыдущихъ параграфахъ начала проективной геометріи, мы ограничились основными предложеніями и притомъ тѣми, доказательство которыхъ сопряжено съ дѣйствительно принципіальными трудностями. Придерживаясь этого принципа, мы должны были бы, собственно говоря, изложить еще свойства непрерывности рядовъ II пор. и пучковъ II кл.; въ частности, слѣдовало бы изложить важныя предложенія, которыя Райе приводитъ въ восьмой лекціи перваго отдѣла своей „Геометріи положенія“ (стр. 100 и 101 IV изданія). Однако, эти предложенія въ указанномъ мѣстѣ доказаны при помощи непрерывности прямой линіи; между тѣмъ, исходя изъ той точки зрѣнія теоріи познанія, которой мы придерживаемся, мы должны стараться не пользоваться аксіомой непрерывности III, пока мы къ этому не вынуждены необходимостью. Въ первую очередь, здѣсь рѣчь идетъ о слѣдующемъ предложеніи: если изъ двухъ точекъ $A$ и $B$ нѣкоторой прямой $u$ выходятъ по 2 касательныя къ ряду II пор., а изъ двухъ другихъ точекъ этой прямой $C$ и $D$ не выходятъ касательныя, то такія двѣ пары точекъ другъ друга не раздѣляютъ. Однако, доказательства этого предложенія требуютъ развитія обширныхъ подготовительныхъ соображеній, вслѣдствіе чего мы это оставимъ въ сторонѣ *).

---

48) Если мы представимъ себѣ два проективныхъ пучка $M'$ и $N'$ въ плоскости $\eta'$, образующихъ окружность $\varkappa'$, то проекціей этой окружности на плоскость $\eta$ будетъ рядъ, образованный проективными пучками $M$ и $N$, представляющими собой проекціи пучковъ $M'$ и $N'$ изъ точки $S$ на плоскость $\eta$.

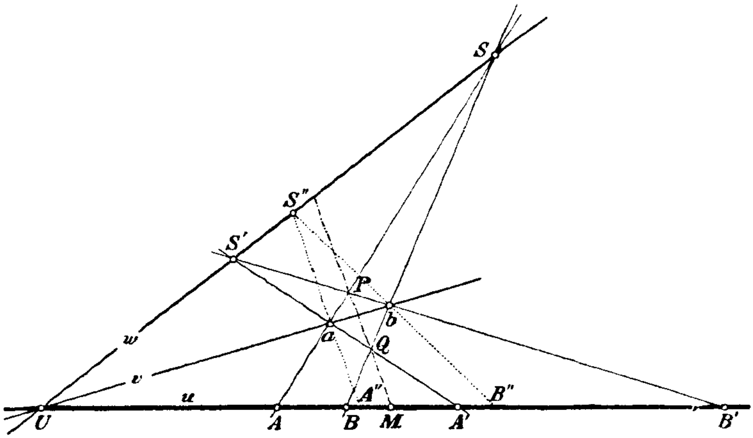
*) См. C. Koehler, Arch. d. Math. und Phys., 3 Reihe, Bd. 6, p. 95.

**2.** Мы обращаемся теперь къ проективной метрикѣ, которая служитъ основой всякаго измѣренія въ эллиптической, гиперболической и параболической геометріяхъ и, въ частности, служитъ основой ученія о подобіи и измѣреніи площадей въ евклидовой геометріи. Въ противоположность евклидовой, проективная метрика плоскости отличается полною двойственностью; это значитъ, что каждому предложенію, касающемуся соотношенія между величинами отрѣзковъ, соотвѣтствуетъ предложеніе, которое устанавливаетъ такое же соотношеніе между величинами угловъ и получается изъ предыдущаго, по существу, замѣною словъ „прямая", „отрѣзокъ", „точка" словами „точка", „уголъ", „прямая". Изъ двухъ двойственныхъ предложеній мы всегда будемъ доказывать только одно; мы настойчиво рекомендуемъ, однако, читателю всегда проводить въ видѣ упражненія доказательство и построенія предложенія, соотвѣтствующаго изложенному по принципу двойственности.

При доказательствѣ основной теоремы намъ пришлось уже воспользоваться развитой выше въ § 15 первой ступенью понятія о величинѣ отрѣзка; впрочемъ, на этой ступени въ синтезѣ упомянутаго понятія мы пользуемся лишь тѣмъ основнымъ положеніемъ, что цѣлое должно считаться больше своей части. Сообразно этому, мы получили возможность сравнивать между собою 2 отрѣзка лишь въ томъ случаѣ, когда одинъ изъ нихъ составляетъ часть другого; для того же случая, когда это не имѣетъ мѣста, мы не имѣемъ никакого критерія. Въ своемъ мѣстѣ мы уже указали, что для полнаго построенія понятія о величинѣ необходимо установить построеніе, которое давало бы критерій, въ какомъ случаѣ два отрѣзка на прямой линіи должны называться равными или неравными. Для этого намъ послужитъ проективное обобщеніе пріема Штейнера для „передвиженія отрѣзка вдоль по прямой линіи", которымъ мы пользовались въ § 5, 2 для построенія конгруэнтныхъ отрѣзковъ $AB$ и $A'B'$ (см. фиг. 5). Проводя три прямыя $u, v, w$ фигуры 5, черезъ произвольную точку $U$, мы получимъ правило передвиженія отрѣзка $AB$ по прямой $u$, служащей его носительницей, съ выдѣленіемъ на послѣдней точки $U$ въ качествѣ „выключенной" ея точки [49]). Подъ отрѣз-

[49]) Пріемъ, посредствомъ котораго Штейнеръ „передвигаетъ" отрѣзокъ на прямой $u$, т. е. откладываетъ на прямой $u$ отъ точки $A$ отрѣзокъ $A'B'$, равный $AB$, заключается въ томъ (фиг. 5), что онъ проводитъ прямыя $v$ и $w$, параллельныя прямой $u$, и изъ произвольной точки $S$ прямой $w$ проектируетъ отрѣзокъ $AB$ на прямую $v$; получивъ, такимъ образомъ, отрѣзокъ $ab$, онъ изъ точки пересѣченія $S'$ прямой $w$ съ прямою $A'a$ проектируетъ отрѣзокъ $ab$ на прямую $u$ и получаетъ требуемый отрѣзокъ $A'B'$.

Въ проективной плоскости параллельныхъ линій нѣтъ; мы замѣняемъ поэтому прямыя $v$ и $w$, пересѣкающія у Штейнера прямую $u$ въ безконечно удаленной точкѣ, двумя прямыми, проходящими черезъ произвольную точку $U$ прямой $u$, и производимъ то же построеніе. Полученный, такимъ образомъ, отрѣзокъ $A'B'$ мы комъ $AB$ *excluso* $U$ мы разумѣемъ тотъ изъ двухъ классовъ, опредѣляемыхъ, согласно аксіомамъ II, на прямой $u$ точками $A$ и $B$, который не содержитъ точки $U$[50]). Отрѣзки $AB$ и $A'B'$, которые могутъ быть преобразованы одинъ въ другой при помощи указаннаго построенія („передвиженія"), мы будемъ называть **равными** *excluso* $U$; при этомъ будемъ мы считать дозволеннымъ буквы $A'B'$ замѣнять другъ другомъ[51]). Теперь необходимо перевести это конструктивное опредѣленіе равенства на языкъ отвлеченныхъ понятій и освободить его отъ вспомогательныхъ линій и точекъ, которыми мы пользовались при этомъ построеніи. Пусть $P$ будетъ




Фиг. 74.

точка пересѣченія прямыхъ $SA$ и $S'B'$, а $Q$ — точка пересѣченія прямыхъ $SB$ и $S'A'$; примѣняя предложеніе 6 § 16 къ полному четырехугольнику

---

принимаемъ **равнымъ** отрѣзку $AB$ *excluso* $U$, въ виду особаго значенія выдѣленной точки $U$. Это есть **опредѣленіе** проективнаго равенства двухъ отрѣзковъ на прямой. Остается только доказать, что положеніе точки $B'$ не зависитъ отъ выбора прямыхъ $v$, $w$ и точки $S$. Съ этой цѣлью авторъ показываетъ, что это построеніе сводится, собственно, къ тому, что мы строимъ точку $M$, которая совмѣстно съ $U$ дѣлитъ гармонически точки $B, A'$, а затѣмъ строимъ точку $B'$, которая совмѣстно съ $A$ дѣлитъ гармонически пару $U, A'$.

[50]) Слѣдующая аналогія выясняетъ нѣсколько эту терминологію. Если мы представимъ себѣ окружность, то каждая пара ея точекъ $A$ и $B$ дѣлитъ ее на двѣ дуги; каждая изъ этихъ двухъ дугъ съ одинаковымъ правомъ могла бы претендовать на названіе дуги $AB$, по каждой изъ этихъ дугъ можно непрерывно пройти отъ точки $A$ къ точкѣ $B$. Но если мы выключимъ изъ окружности одну ея точку $U$, то такой переходъ можно будетъ сдѣлать уже только по одной дугѣ: по той, которая не содержитъ выключенной точки $U$. Въ этомъ смыслѣ, по выключеніи точки $U$, каждой парѣ точекъ $A$ и $B$ отвѣчаетъ уже одинъ отрѣзокъ $AB$; это и есть отрѣзокъ $AB$ *excluso* $U$.

[51]) Иными словами, отрѣзки $AB$ и $BA$ *excluso* $U$ мы будемъ считать также **равными**.

$abSS'$, мы заключаемъ, что точка пересѣченія $M$ прямыхъ $PQ$ и $u$ совокупно съ точкой $U$ дѣлятъ гармонически какъ пару точекъ $A, B'$, такъ и пару $B, A'$; при этомъ предполагается, что отрѣзки $AB$ и $A'B'$, какъ у насъ на фигурѣ, имѣютъ *excluso* $U$ одинаковыя направленія, т. е. группы точекъ $U, A, B$ и $U, A' B'$ образуютъ циклы одного направленія въ томъ смыслѣ, какъ это установлено въ § 16. Сообразно этому, мы можемъ установить слѣдующее определеніе:

Два отрѣзка $AB$ и $A'B'$ прямой $u$, имѣющіе *excluso* $U$ одинаковое направленіе, называются равными *excluso* $U$, если существуетъ такая точка $M$, которая совмѣстно съ $U$ дѣлитъ гармонически какъ пару $A, B'$, такъ и пару $B, A'$, въ предположеніи, что точки каждой пары не сливаются въ одну; два отрѣзка $AB$ и $A'B'$, имѣющіе *excluso* $U$ противоположное направленіе, называются равными *excluso* $U$, если равны сонаправленные отрѣзки съ тѣми же крайними точками.

Такимъ образомъ, отрѣзокъ $A'B'$ опредѣленъ однозначно, если даны точки $U, A, B$ и $A'$ или $B'$ и, если, сверхъ того, установлено, должны ли отрѣзки $AB$ и $A'B'$ имѣть одинаковое направленіе, или нѣтъ. Каждый отрѣзокъ $AB$ равенъ самому себѣ и, кромѣ того, $AB = BA$; напротивъ, отрѣзокъ $AB$ никогда не можетъ быть равенъ своей части $A'B'$, если только оба отрѣзка не имѣютъ точки $U$ общей крайней точкой. Въ самомъ дѣлѣ, два отрѣзка $UA$ и $UA'$ должны всегда считаться равными, какъ въ силу построенія, которымъ осуществляется передвиженіе отрѣзка по прямой, такъ и въ силу приведеннаго выше опредѣленія, равнозначущаго названному построенію[52]); при этомъ совершенно безразлично, который изъ двухъ классовъ точекъ, опредѣляемыхъ точками $U$ и $A$ (а также $U$ и $A'$), мы принимаемъ за „отрѣзокъ" $UA$ (и соотвѣтственно $UA'$)*); если же, напротивъ, ни одна изъ точекъ $A, B, A', B'$ не совпадаетъ съ точкой $U$ и отрѣзокъ $A'B'$, составляя часть отрѣзка $AB$, имѣетъ съ послѣднимъ одинаковое направленіе, то двѣ пары $A, B'$ и $A', B$ раздѣляютъ другъ друга; поэтому, согласно § 16, 6 (конецъ), не можетъ существовать точекъ $U, M$, которыя дѣлили бы гармонически обѣ упомянутыя пары. Два отрѣзка $AB$ и $A''B''$ (*excluso* $U$), равные *excluso* $U$ третьему отрѣзку $A'B'$, равны между собою, ибо наше построеніе, служащее для сравненія отрѣзковъ $AB$ и $A''B''$ съ отрѣзкомъ $A'B'$, можетъ быть выполнено при посредствѣ одного и того же отрѣзка

---

[52]) Если точки $A$ и $A'$ совпадаютъ съ $U$, то мы можемъ сказать, что точки $U, U$ дѣлятъ гармонически какъ пару $AB'$, такъ и пару $A'B$. Точка $M$, которая вмѣстѣ съ $U$ дѣлитъ гармонически названные два отрѣзка, въ этомъ случаѣ всегда существуетъ: она совпадаетъ съ точкой $U$.

*) Дѣло въ томъ, что данное выше опредѣленіе отрѣзка *excluso* $U$ теряетъ содержаніе, когда точка $U$ сама становится крайней точкой отрѣзка.

*ab* на прямой $v$ (ср. фиг. 74)[53]). На основанiи приведенныхъ предположенiй мы имѣемъ возможность относительно любыхъ двухъ отрѣзковъ прямой $u$ рѣшить, будутъ ли они равны или нѣтъ, а въ послѣднемъ случаѣ, который изъ нихъ больше[54]).

**3.** Построенiе, дающее передвиженiе отрѣзка по прямой, вполнѣ достаточно также для того, чтобы устроить масштабъ, раздѣленный на проективно равныя части. Прежде всего мы непосредственно имѣемъ возможность послѣдовательно отложить единицу мѣры $m$ произвольное число разъ (фиг. 75)*). Такимъ образомъ мы получаемъ точки 2, 3, 4, . . . нашей фигуры, если отрѣзокъ 01 представляетъ собой выбранную нами единицу мѣры. Согласно опредѣленiю равенства, точка $n+1$ расположена относительно предшествующихъ точекъ такимъ образомъ, что она совокупно съ точкой $n-1$ дѣлитъ гармонически пару $U$, $n$[55]). Такимъ же образомъ мы опредѣлимъ точки $-1, -2, -3, \ldots$ при помощи условiя, что точки $-(n+1)$ и $-(n-1)$ дѣлятъ гармонически пару $-n$, $U$; построенiе для передвиженiя отрѣзка также непосредственно даетъ этотъ рядъ точекъ. Нужно замѣтить, что нѣтъ необходимости всегда пользоваться для осуществленiя этого построенiя одной и той же парой точекъ прямой $v$; результатъ вѣдь не зависитъ отъ выбора этихъ вспомогательныхъ точекъ. Поэтому ихъ слѣдуетъ выбирать такъ, чтобы было удобно полу-

---

53) Предыдущее опредѣленiе проективнаго равенства двухъ отрѣзковъ можетъ быть интерпретируемо и такъ, что два отрѣзка $AB$ и $A'B'$ на прямой $u$ равны, если они представляютъ собой проекцiи одного и того же отрѣзка $ab$ на прямой $v$ изъ двухъ точекъ прямой $w$. На фигурѣ 74 мы видимъ, что два отрѣзка $AB$ и $A''B''$, равные въ этомъ смыслѣ третьему отрѣзку $A'B'$, представляютъ собой проекцiи одного и того же отрѣзка $ab$ на прямую $u$ изъ двухъ точекъ прямой $w$.

54) Чтобы рѣшить, который изъ двухъ неравныхъ отрѣзковъ больше, нужно ихъ проективно отложить отъ общей точки въ одну и ту же сторону и разсмотрѣть, который изъ нихъ составитъ часть другого.

*) На фигурѣ приведена прямая $QR$, параллельная прямой $u$, чтобы показать, что та точка прямой $u$, которая считается безконечно удаленной въ евклидовой геометрiи, въ проективной скалѣ имѣетъ конечный номеръ; въ нашемъ случаѣ этотъ номеръ падаетъ между 4 и 5, какъ это отчетливо видно на скалѣ прямой $w$ для точки $R$.

55) Положимъ, что мы хотимъ на прямой $u$ при выключенной точкѣ $U$ отложить отрѣзокъ $AB$ отъ точки $B$ въ ту же сторону; иными словами, мы желаемъ построить отрѣзокъ $A'B'$, равный *excluso* $U$ отрѣзку $AB$, такимъ образомъ, чтобы точка $A'$ совпала съ $B$. Найдемъ тогда вспомогательную точку $M$, которая совмѣстно съ $U$ дѣлитъ гармонически какъ пару $A, B'$, такъ и пару $A', B$. Такъ какъ точки послѣдней пары совпадаютъ, то съ ними совпадаетъ и точка $M$; иначе говоря, точка $B$ совмѣстно съ $U$ дѣлитъ гармонически пару $A$, $B'$; поэтому $B'$ есть точка, которая совмѣстно съ $A$ дѣлитъ гармонически пару $U$, $B$.

Этотъ случай и имѣетъ мѣсто при построенiи проективной скалы, когда мы откладываемъ отрѣзокъ $(n, n+1)$, равный отрѣзку $(n-1, n)$; поэтому точка $(n+1)$ совмѣстно съ $(n-1)$ дѣлитъ гармонически отрѣзокъ $U$, $n$.

чить точки дѣленія на прямой $u$. Мы не можемъ входить здѣсь въ разсмотрѣніе различныхъ модификацій, которыя здѣсь возможны. Точки дѣленія постоянно сгущаются по мѣрѣ приближенія къ точкѣ $U$, но онѣ никогда ея не достигаютъ; при этомъ по одну сторону расположены только точки съ положительными индексами, а по другую — съ отрицательными. Изъ какой бы точки прямой $u$ мы ни исходили, мы не имѣемъ возможности достигнуть точки $U$ при помощи конечнаго числа шаговъ, равныхъ между собою *excluso* $U$[56]. Точка $U$ является, такимъ образомъ, съ точки зрѣнія проективнаго равенства, „безконечно удаленной“ точкой прямой $n$.

Фиг. 76.

Если мы выразимъ опредѣленіе точекъ съ положительными и отрицательными индексами въ одномъ предложеніи, именно, что три точки, изъ которыхъ одна *excluso* $U$ равноудалена отъ двухъ другихъ, образуютъ вмѣстѣ съ точкой $U$ гармоническую группу, то мы сейчасъ же сумѣемъ опредѣлить и $n$-ую часть отрѣзка $p, p+1$ нашей скалы; именно, отрѣзокъ $p, p+1$ дѣлится въ точкахъ дѣленія

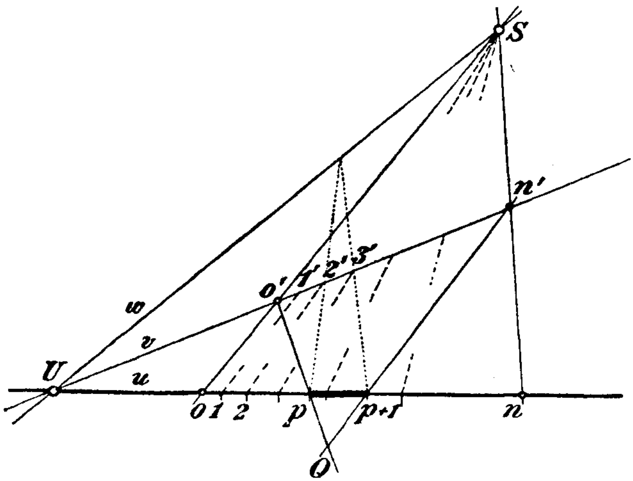
$$p, p+\frac{1}{n}, p+\frac{2}{n}, \ldots, p+\frac{n-1}{n}, p+1$$

на $n$ равныхъ частей, если любыя три послѣдовательныя точки дѣленія образуютъ съ точкой $U$ гармоническую группу, въ которой точка $U$ вмѣстѣ со средней точкой дѣлятъ гармонически двѣ другія. Если мы приведемъ поэтому рядъ точекъ $u$ въ проективное соотвѣтствіе съ

---

[56]) Точка $-(n+1)$, какъ выяснено выше, совмѣстно съ точкой $-(n-1)$ дѣлитъ гармонически пару $(U, n)$; поэтому точки $-(n+1)$ и $-(n-1)$ раздѣляютъ эту пару точекъ; иначе говоря, точка $-(n+1)$ попадаетъ внутрь отрѣзка $(U, -n)$, не содержащаго точки $-(n-1)$; въ этомъ смыслѣ точка $-(n+1)$ приближается къ $U$ въ направленіи $-1, -2, -3 \ldots$, никогда ея не достигая. Въ этомъ же смыслѣ точка $(n+1)$ приближается къ $U$ съ другой стороны.

самимъ собой такимъ образомъ, чтобы точкамъ $U, p, p+\frac{1}{n}$ соотвѣтствовали точки $U$, 0, 1, то точкамъ $p+\frac{2}{n}$, $p+\frac{3}{n}, \ldots, p+\frac{n-1}{n}$, $p+1$ будутъ отнесены точки 2, 3, ..., $n-1$, $n$. Но то же самое проективное соотвѣтствіе будетъ установлено, если мы точкамъ $U, p, p+1$ отнесемъ точки $U, 0, n$, такъ какъ точки $p+1$ и $n$, какъ мы видѣли, отвѣчаютъ другъ другу въ этомъ соотвѣтствіи[57]). Отсюда слѣдуетъ, что нашимъ опредѣленіемъ раздѣленіе отрѣзка $p, p+1$ на $n$ равныхъ *excluso* $U$ частей однозначно опредѣлено; вмѣстѣ съ тѣмъ мы получаемъ слѣдующее построеніе (см. фиг. 76); мы проектируемъ точки 0, 1, ..., $n$ на прямую $v$, проходящую черезъ точку $U$, въ точки $0', 1', 2', \ldots, n'$, соединяемъ точку $0'$ съ точкой $p$, а точку $n'$ съ точкой $p+1$; изъ точки пересѣченія $Q$ полученныхъ такимъ образомъ прямыхъ мы проектируемъ обратно точки $0'$, $1', \ldots, n'$ на прямую $u$; проекціи и представляютъ собою искомыя точки дѣленія. Впрочемъ, вся суть здѣсь заключается въ томъ, что три послѣдовательныя точки $0', 1', 2', \ldots, n'$ совмѣстно съ точкой $U$ образуютъ гармоническую группу; такой рядъ можно построить и непосредственно, выбравъ произвольно точки $0'$ и $1'$.



Фиг. 76.

Исходя, такимъ образомъ, отъ точекъ $U$, 0, 1, мы имѣемъ возможность легко отнести каждому раціональному числу нѣкоторую точку прямой $u$, и къ каждой изъ этихъ точекъ мы приходимъ рядомъ гармоническихъ построеній. При обоснованіи этихъ построеній мы не пользовались основной теоремой проективной геометріи[58]). Когда мы, поэтому, въ дока-

[57]) Въ силу основной теоремы проективной геометріи.

[58]) Авторъ-то собственно пользуется основной теоремой въ томъ пунктѣ, къ которому относится предыдущее примѣчаніе; но справедливо то, что въ этомъ нѣтъ необходимости: можно было непосредственно указать построеніе 77, которое даетъ дѣленіе отрѣзка на $n$ проективно равныхъ частей.

зательствѣ основной теоремы относимъ три точки $A, B, C$ самимъ себѣ и имѣемъ въ виду доказать, что въ такомъ случаѣ при проективномъ соотвѣтствіи и любая другая точка ряда должна отвѣчать самой себѣ, то мы можемъ обозначить эти три точки въ любой послѣдовательности черезъ $U$, 0, 1, а затѣмъ изъ опредѣленія проективнаго соотвѣтствія мы можемъ непосредственно заключить, что каждая точка, имѣющая раціональный номеръ, отвѣчаетъ самой себѣ [59]); дѣйствительная трудность въ доказательствѣ основной теоремы заключается, слѣдовательно, въ томъ, чтобы обнаружить, что и всѣ остальныя точки должны отвѣчать каждая самой себѣ.

**4.** Совершенно ясно, что проективной скалой можно воспользоваться для измѣренія отрѣзковъ совершенно такъ же, какъ и обыкновенной метрической скалой. Если мы на какой-либо прямой развернемъ проективную скалу, то любая точка послѣдней либо совпадаетъ съ какой-либо точкой дѣленія скалы, либо можетъ быть точкой, расположенной сколь угодно близко отъ нея. Слѣдовательно, каждый отрѣзокъ можетъ быть съ любымъ приближеніемъ раціонально выраженъ въ частяхъ единицы скалы [60]), и о числѣ, которое мы такимъ образомъ получаемъ, можно сказать, что оно измѣряетъ раціональный отрѣзокъ въ принятой единицѣ мѣры. Строгаго доказательства этого предложенія мы здѣсь дать не можемъ.

Подобно тому, какъ изъ чиселъ $\alpha$ и $\beta$, измѣряющихъ два отрѣзка $a$, $b$, можно ариѳметически составить новое число $\alpha+\beta$, ихъ сумму, такъ и изъ соотвѣтствующихъ отрѣзковъ $a$ и $b$ можно геометрически построить новый отрѣзокъ, который измѣряется числомъ $\alpha+\beta$ и поэтому называется суммой отрѣзковъ $a$ и $b$. Естественно возникаетъ вопросъ, нельзя ли указать также отрѣзокъ, представляющій собой чисто геометрическую аналогію произведенія $\alpha\beta$. Если бы это оказалось возможнымъ, то мы могли бы чисто геометрически, не пользуясь измѣряющими числами, производить по двумъ различнымъ законамъ такія сопряженія отрѣзковъ, которыя вполнѣ соотвѣтствовали бы сложенію и умноженію чиселъ. Эти два построенія должны были бы поэтому удовлетворять тѣмъ же законамъ, которымъ слѣдуютъ сложеніе и умноженіе чиселъ. Таковыми, въ первую очередь, являются слѣдующія:

---

59) Прямую $u$ мы представляемъ себѣ, слѣдовательно, то какъ рядъ точекъ $X$, то какъ рядъ точекъ $X'$; точки $U$, 0, 1 совпадаютъ каждая съ самою собою — и какъ точка $X$, и какъ точка $X'$. Точка 2 дѣлитъ совмѣстно съ точкой 0 гармонически пару $U$, 1; если поэтому точкѣ 2 отвѣчаетъ въ ряду $X'$ точка 2, то и она должна совмѣстно съ 0 дѣлить гармонически пару $U$, 1; а потому точка $2'$ совпадаетъ съ точкой 2 и т. д.

60) По числу дѣленій проективной скалы, которыя онъ охватываетъ.

A) при сложеніи:

a) законъ перемѣстительный: $a+b=b+a$,

b) законъ сочетательный: $(a+b)+c=a+(b+c)$;

B) при умноженіи:

a) законъ перемѣстительный: $ab=ba$,

b) законъ сочетательный: $(ab)\,c=a\,(bc)$;

C) при соединеніи обѣихъ операцій:

законъ распредѣлительный: $(a+b)\,c=ac+bc$.

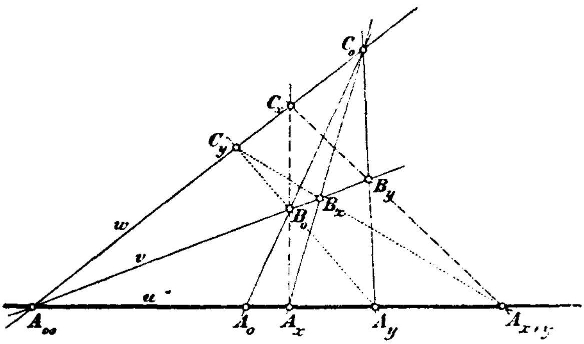
Мы дадимъ здѣсь одну систему построеній, удовлетворяющую этимъ требованіямъ, одинъ видъ такого „исчисленія отрѣзковъ", по выраженію Гильберта.

Равенство отрѣзковъ прямой при выдѣленной на ней точкѣ $U$ мы будемъ считать установленнымъ, какъ въ п. 2. Кромѣ точки $U$, мы выберемъ еще на прямой $u$ совершенно произвольно двѣ другія: „точку нуля" $N$ и „точку единицы" $E$. Всѣ отрѣзки на прямой $u$, которые мы захотимъ сравнивать, мы будемъ представлять себѣ передвинутыми построеніемъ, осуществляющимъ передвиженіе отрѣзка по прямой, такимъ образомъ, чтобы всѣ они имѣли точку $N$ общей конечной точкой. Въ направленіи $UNE$ мы будемъ откладывать положительные отрѣзки, въ направленіи $ENU$ — отрицательные, совершенно такъ же, какъ въ проективной скалѣ, которую мы также будемъ считать нанесенной. Ту точку скалы, которая имѣетъ раціональный номеръ $r$, мы будемъ обозначать черезъ $A_r$, такъ что точки $U, N, E$ придется обозначить черезъ $A_\infty$, $A_0$, $A_1$, вмѣстѣ съ тѣмъ отрѣзокъ $\overline{A_0A_r}$ мы также будемъ обозначать короче черезъ $r$. Если точка $P$ не принадлежитъ къ числу тѣхъ, которыя имѣютъ раціональный номеръ, и если вмѣстѣ съ тѣмъ отрѣзокъ $\overline{A_0P}$, какъ таковой, будемъ отмѣчать буквой $x$, то мы точку $P$ будемъ обозначать соотвѣтственно черезъ $A_x$; точку $A_0$ мы будемъ называть начальной, а точку $A_x$ конечной точкой этого отрѣзка.

**5.** Прежде всего мы опредѣлимъ сложеніе. Чтобы получить конечную точку $A_{x+y}$ отрѣзка, представляющаго собой сумму двухъ отрѣзковъ $A_0A_x$ и $A_0A_y$, мы должны отъ конечной точки одного отрѣзка отложить посредствомъ построенія, служащаго для передвиженія отрѣзковъ, второй отрѣзокъ, сохраняя направленіе послѣдняго. Для этого проводимъ черезъ точку $A_\infty$ еще двѣ вспомогательныя прямыя $v$ и $w$ и изъ произвольной точки $C_0$ прямой $w$ проектируемъ точки $A_0$, $A_x$, $A_y$ на прямую $v$; получаемъ точки $B_0$, $B_x$, $B_y$; затѣмъ, для прибавленія отрѣзка $A_0A_y$ къ отрѣзку $A_0A_x$, мы изъ точки пересѣченія $C_x$ прямыхъ $B_0A_x$ и $w$ проектируемъ точку $B_y$ на прямую $u$ (см. фиг. 77). Чтобы прибавить къ отрѣзку $A_0A_y$ отрѣзокъ $A_0A_x$, мы проектируемъ изъ точки пересѣченія $C_y$ прямыхъ $B_0A_y$ и $w$ точку $B_x$ на прямую $u$. Обѣ проекціи, согласно перемѣстительному закону сложенія отрѣзковъ, должны опредѣлять ту же точку $A_{x+y}$ на прямой $u$. Въ самомъ дѣлѣ, $B_0C_xB_yC_0B_xC_y$ есть частный случай шестиугольника Паскаля[61]); если мы поэтому точку пересѣченія прямыхъ $C_yB_x$ и $C_xB_y$, о которой идетъ рѣчь, обозначимъ черезъ $S$, то схема:

| | | | |
|---|---|---|---|
| сторона: | $B_0C_x$, | $C_xB_y$, | $B_yC_0$ |
| противоположная сторона: | $C_0B_x$, | $B_xC_y$, | $C_yB_0$ |
| точка пересѣченія: | $A_x$, | $S$, | $A_y$ |

обнаруживаетъ, что точка $S$ лежитъ, какъ и требовалось, на прямой $u$. Такимъ образомъ, равенство $x+y=y+x$ остается въ силѣ какъ для




Фиг. 77.

положительныхъ, такъ и для отрицательныхъ отрѣзковъ. Наше построеніе даетъ $\overline{A_0A_x}+\overline{A_0A_0}=\overline{A_0A_x}$; иными словами, отрѣзокъ $A_0A_0$ при сложеніи отрѣзковъ играетъ ту же роль, что и число 0 въ ариѳметикѣ.

Относительно сложенія отрѣзковъ имѣетъ мѣсто слѣдующее важное предложеніе.

Вспомогательное предложеніе I. Имѣетъ мѣсто соотношеніе:

$$u\,(A_\infty A_0A_1A_xA_yA_z\ldots)\;\overline{\wedge}\;u\,(A_\infty A_sA_{1+s}A_{x+s}A_{y+s}A_{z+s}\ldots),$$

гдѣ знакъ $\overline{\wedge}$, происходящій отъ греческой буквы $\pi$, служитъ для обозначенія проективнаго соотвѣтствія. Въ самомъ дѣлѣ, для построенія точки $A_{x+s}$ нужно изъ точки $C_0$ предыдущей фигуры спроектировать точку $A_s$ на прямую $v$, а затѣмъ полученную точку $B_s$ спроектировать на прямую $u$ изъ точки $C_x$. Произведя это построеніе для точекъ $x=\infty$, 0, 1, $x$, $y$, $z$, ... (см. фиг. 78), мы получимъ на прямой $w$ рядъ

61) Это шестиугольникъ Паскаля, вписанный въ рядъ II пор., который представляютъ собой двѣ прямыя $v$ и $w$.

точекъ $w\,(C_\infty C_0 C_1 C_x C_y C_z \ldots)$, который, съ одной стороны, при посредствѣ пучка $B_0$ приведенъ въ перспективное соотвѣтствіе съ рядомъ

$$u\,(A_\infty A_0 A_1 A_x A_y A_z \ldots),$$

а, съ другой стороны, при посредствѣ пучка $B_s$, — съ рядомъ

$$u\,(A_\infty A_s A_{1+s} A_{x+s} A_{y+s} A_{z+s} \ldots).$$

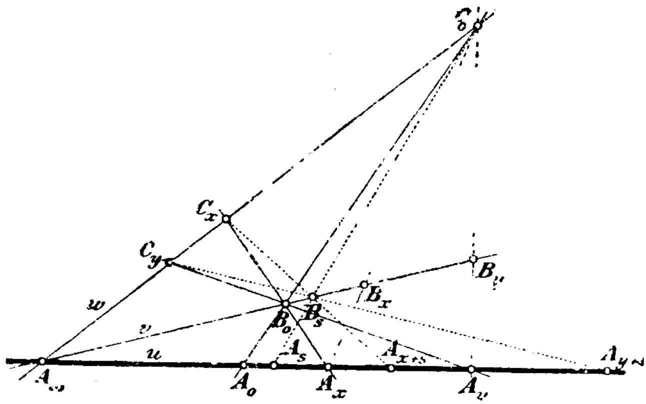
Слѣдовательно, послѣдніе два ряда связаны другъ съ другомъ проективно.

Изъ предложенія I вытекаетъ, съ одной стороны, что

$$u\,(A_\infty A_0 A_{-z} A_x \ldots) \,\overline{\wedge}\, u\,(A_\infty A_y A_{-z+y} A_{x+y} \ldots)$$
$$\overline{\wedge}\, u\,(A_\infty A_{y+z} A_{(-z+y)+z} A_{(x+y)+z} \ldots),$$

а съ другой стороны, что

$$u\,(A_\infty A_0 A_{-z} A_x \ldots) \,\overline{\wedge}\, u\,(A_\infty A_z A_0 A_{x+z} \ldots)$$
$$\overline{\wedge}\, u\,(A_\infty A_{z+y} A_y A_{(x+z)+y} \ldots).$$




Фиг. 78.

Въ виду же доказаннаго только-что закона перемѣстительнаго

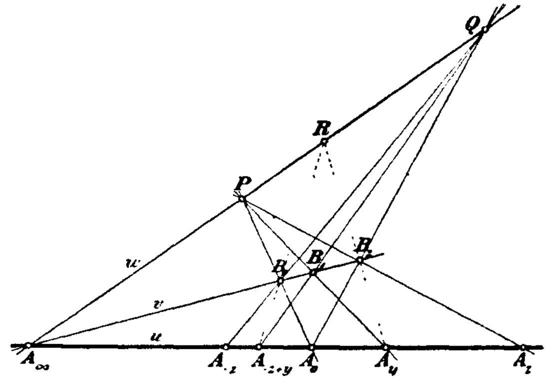
$$u\,(A_\infty A_{y+z} A_{(-z+y)+z} A_{(x+y)+z} \ldots) \,\overline{\wedge}\, u\,(A_\infty A_{y+z} A_y A_{(x+z)+y} \ldots).$$

Пусть $B_0$, $B_y$, $B_z$ (см. фиг. 79) будутъ проекціи точекъ $A_0$, $A_y$, $A_z$ изъ нѣкоторой точки $P$ плоскости на вспомогательную прямую $v$, проходящую черезъ точку $A_\infty$. Пусть $Q$ будетъ точка пересѣченія прямыхъ $A_0B_z$ и $w$. Прямыя $QB_0$ и $QB_y$ пересѣкаютъ прямую $u$ въ точкахъ $A_{-z}$ и $A_{-z+y}$ [62]). Если прямая $w$ встрѣчаетъ прямую $A_{-z+y}B_0$ въ

---

[62]) Если мы обозначимъ точку пересѣченія прямой $QB_0$ съ прямой $u$ черезъ $A_\xi$, то легко убѣдимся, что точка $A_{\xi+z}$ совпадаетъ съ $A_0$, такъ что $\xi$ должно быть равно 0. Такимъ же образомъ докажемъ, что точка пересѣченія прямой $QB_y$ съ прямой $u$ есть точка $A_{-z+y}$.

точкѣ $R$, то прямая $RB_z$ пересѣкаетъ прямую $u$ въ точкѣ $A_{(-z+y)+z}$. Эта точка совпадаетъ съ точкой $A_y$, какъ это обнаруживаетъ шестиугольникъ Паскаля $A_0PA_yRA_{-z+y}Q$. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что въ двухъ проективныхъ рядахъ $u\,(A_\infty A_{y+z}A_{(-z+y)+z}A_{(x+y)+z}\ldots)$ и $u\,(A_\infty A_{y+z}A_yA_{(x+z)+y}\ldots)$ каждый изъ первыхъ трехъ элементовъ отвѣчаетъ самому себѣ; поэтому, въ силу основной теоремы проективной геометріи, каждая точка перваго ряда совпадаетъ съ соотвѣтствующей точкой второго ряда; слѣдовательно, точка $A_{(x+y)+z}$ совпадаетъ съ точкой $A_{(x+z)+y}$; такимъ образомъ, мы доказали, что при сложеніи отрѣзковъ имѣетъ мѣсто также законъ сочетательный:



Фиг. 79.

$$(x+y)+z=(x+z)+y.$$

Сообразно этому, сумма трехъ отрѣзковъ $x$, $y$, $z$ можетъ быть однозначно обозначена черезъ $x+y+z$.

**6.** Отъ точекъ $A_\infty$, $A_0$, $A_1$ мы переходимъ къ точкамъ $A_2, A_3, \ldots, A_n$ при помощи гармоническихъ группъ:

$$A_\infty A_0A_1A_2, \quad A_\infty A_1A_2A_3, \quad A_\infty A_2A_3A_4, \ldots, A_\infty A_{n-2}A_{n-1}A_n.$$

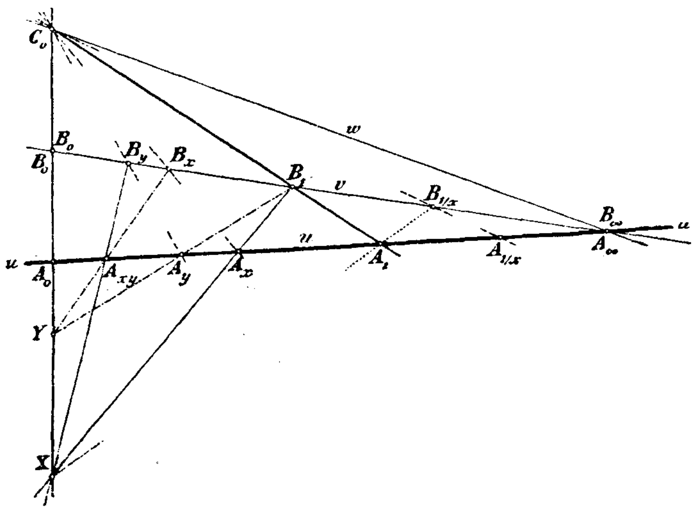
Точно такъ же посредствомъ передвиженія отрѣзковъ мы можемъ получить по точкамъ $A_\infty$, $A_0$, $A_x$ точки $A_{2x}$, $A_{3x}\ldots A_{nx}$; для этого нужно только строить гармоническія группы $A_\infty A_0A_xA_{2x}$, $A_\infty A_xA_{2x}A_{3x}$, $A_\infty A_{2x}A_{3x}A_{4x}, \ldots, A_\infty A_{(n-2)x}A_{(n-1)x}A_{nx}$. Въ каждой изъ этихъ группъ первая и третья точка раздѣляютъ гармонически двѣ другія. Точка $A_{nx}$ строится по точкамъ $A_\infty A_0A_x$ при помощи такого же ряда гармоническихъ группъ, какъ точка $A_n$ по точкамъ $A_\infty A_0A_1$; если мы поэтому установимъ проективное соотвѣтствіе, относящее точкамъ $A_\infty$, $A_0$, $A_1$ точки $A_\infty$, $A_0$, $A_x$, то точкѣ $A_n$ отвѣчаетъ точка $A_{nx}$; поэтому [63])

$$u\,(A_\infty A_0A_1A_n)\;\overline{\wedge}\;u\,(A_\infty A_0A_xA_{nx}).$$

[63]) Точка $A_\infty$ вмѣстѣ съ точкой $A_1$ дѣлитъ гармонически пару $A_0A_2$; если мы, поэтому, установимъ проективное соотвѣтствіе, въ которомъ точкамъ $A_\infty$, $A_0$, $A_1$ отвѣчаютъ точки $A_\infty$, $A_0$, $A_x$, то точкѣ $A_2$ будетъ отвѣчать такая точка, которая вмѣстѣ съ $A_0$ дѣлитъ гармонически пару $A_\infty A_x$; а это и есть точка $A_{2x}$; и т. д.

Это соотношеніе покамѣстъ установлено лишь для цѣлыхъ положительныхъ значеній числа $n$; мы воспользуемся имъ лишь, какъ наведеніемъ для слѣдующаго **опредѣленія** того сопряженія отрѣзковъ, которое мы будемъ называть ихъ **умноженіемъ**: **отрѣзокъ** $xy$ **однозначно опредѣляется по отрѣзкамъ** $x$ **и** $y$ **требованіемъ** $u(A_\infty A_0 A_y A_{xy}) \overline{\wedge} u(A_\infty A_0 A_1 A_x)$. Если $x$ и $y$ суть раціональныя числа, то это опредѣленіе выражаетъ, что отрѣзокъ $xy$ **получается изъ отрѣзка** $y$ **такъ, какъ** $x$ **получается изъ** 1.

Въ этой формѣ часто выражаютъ правило умноженія дробей; вообще проективное исчисленіе отрѣзковъ даетъ интересное освѣщеніе основъ ариѳметики. Вмѣстѣ съ тѣмъ легко усмотрѣть преимущество, которое геометрія представляетъ въ этомъ отношеніи по сравненію съ ариѳметикой: если отрѣзокъ $x$ не представляетъ собой раціональнаго




Фиг. 80.

кратнаго отрѣзка, принятаго за 1, то, исходя отъ точекъ $A_\infty$, $A_0$, $A_1$, невозможно придти къ точкѣ $A_x$ при помощи конечнаго числа гармоническихъ построеній, и ариѳметическое опредѣленіе произведенія $xy$ въ этомъ случаѣ ничего бы не дало. Наше же опредѣленіе произведенія $xy$ оперируетъ надъ самыми отрѣзками $x$ и $y$, а не надъ числами, ихъ измѣряющими; поэтому оно обходитъ указанныя выше затрудненія.

Самое построеніе произведенія $xy$ по отрѣзкамъ $x$ и $y$ вытекаетъ непосредственно изъ опредѣленія умноженія. Изъ произвольной точки плоскости $C_0$ (фиг. 80) проектируемъ точки $A_\infty$, $A_0$, $A_1$, $A_x$ на произвольную прямую $v$, проходящую черезъ точку $A_\infty$, и получаемъ такимъ образомъ точки $B_\infty$, $B_0$, $B_1$, $B_x$. Прямая $B_1 A_y$ опредѣляетъ на прямой $C_0 A_0$ точку $Y$, а прямая $YB_x$ встрѣчаетъ прямую $u$ въ точкѣ $A_{xy}$, ибо

$u(A_\infty A_0 A_1 A_x) \overline{\wedge}\ v(B_\infty B_0 B_1 B_x)$; проектируя же эти послѣднія точки изъ $Y$ на прямую $u$, получаемъ: $v(B_\infty B_0 B_1 B_x) \overline{\wedge}\ u(A_\infty A_0 A_y A_{xy})$; слѣдовательно, $u(A_\infty A_0 A_1 A_x) \overline{\wedge}\ u(A_\infty A_0 A_y A_{xy})$, какъ это требуется опредѣленіемъ. Теперь замѣстимъ исходные элементы $A_x$ и $A_y$ другъ другомъ; именно, проектируя точки $A_\infty$, $A_0$, $A_1$, $A_y$ изъ точки $C_0$ на прямую $v$, мы построимъ точки $B_\infty$, $B_0$, $B_1$, $B_y$, опредѣлимъ затѣмъ точку пересѣченія $X$ прямыхъ $B_1 A_x$ и $C_0 A_0$ и найдемъ точку пересѣченія прямой $XB_y$ съ прямой $u$; эта точка пересѣченія, которую нужно обозначить черезъ $A_{yx}$, совпадаетъ съ точкой $A_{xy}$, такъ какъ въ шестиугольникѣ Паскаля $B_1 A_x B_x A_{xy} B_y A_y$ точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ $B_1 A_x$ и $A_{xy} B_y$, $A_x B_x$ и $B_y A_y$, $B_x A_{xy}$ и $A_y B_1$ должны лежать на одной прямой; такъ какъ двумя послѣдними точками пересѣченія служатъ $C_0$ и $Y$, то первой должна служить точка $X$. Этимъ доказанъ законъ перемѣстительный при умноженіи; $yx = xy$. Изъ опредѣленія умноженія вытекаетъ:

Вспомогательное предложеніе II. Такъ какъ, въ силу опредѣленія умноженія,

$$u(A_\infty A_0 A_1 A_x A_y A_z \ldots) \overline{\wedge}\ u(A_\infty A_0 A_s A_{sx} A_{sy} A_{sz} \ldots),$$

то, съ одной стороны,

$$u(A_\infty A_0 A_1 A_x) \overline{\wedge}\ u(A_\infty A_0 A_y A_{xy}) \overline{\wedge}\ u(A_\infty A_0 A_{yz} A_{(xy)z}),$$

а, съ другой стороны,

$$u(A_\infty A_0 A_1 A_x \overline{\wedge}\ u(A_\infty A_0 A_z A_{xz}) \overline{\wedge}\ u(A_\infty A_0 A_{yz} A_{(xz)y});$$

поэтому

$$u(A_\infty A_0 A_{yz} A_{(xy)z}) \overline{\wedge}\ u(A_\infty A_0 A_{yz} A_{(xz)y});$$

вмѣстѣ съ тѣмъ, въ силу основной теоремы, точка $A_{(xy)z}$ совпадаетъ съ точкой $A_{(xz)y}$. Законъ сочетательный, такимъ образомъ, также выполняется.

Согласно вспомогательнымъ предложеніямъ I и II мы имѣемъ, съ одной стороны,

$$u(A_\infty A_0 A_{-y} A_x) \overline{\wedge}\ u(A_\infty A_0 A_{-yz} A_{xz}) \overline{\wedge}\ u(A_\infty A_{yz} A_0 A_{xz+yz}),$$

а, съ другой стороны,

$$u(A_\infty A_0 A_{-y} A_x) \overline{\wedge}\ u(A_\infty A_y A_0 A_{x+y}) \overline{\wedge}\ u(A_\infty A_{yz} A_0 A_{(x+y)z}),$$

такъ что

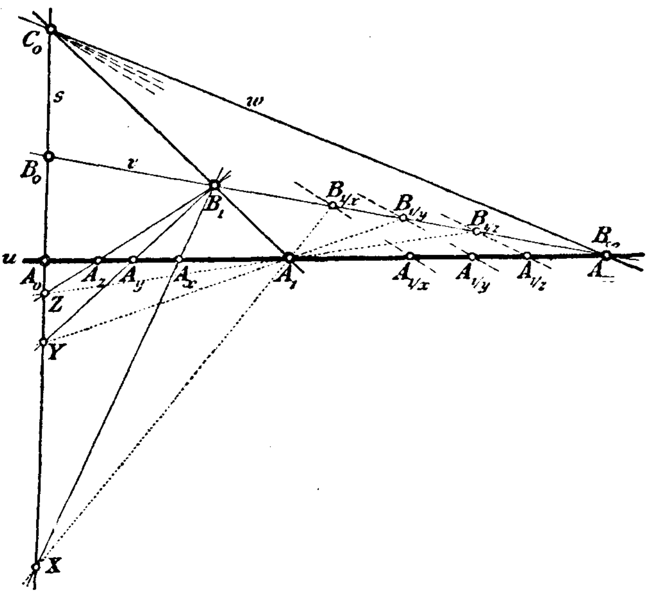
$$u(A_\infty A_{yz} A_0 A_{xz+yz}) \overline{\wedge}\ u(A_\infty A_{yz} A_0 A_{(x+y)z});$$

вмѣстѣ съ тѣмъ, въ силу основной теоремы, точка $A_{xz+yz}$ совпадаетъ съ точкой $A_{(x+y)z}$. Такимъ образомъ доказано также, что и законъ распредѣлительный остается въ силѣ.

**7.** Если на фиг. 80 точка $A_x$ совпадаетъ съ $A_0$, съ $A_1$ или съ $A_\infty$, то точка $X$ на прямой $A_0C_0$, какъ точка пересѣченія послѣдней съ прямой $B_1A_x$, приходитъ въ совмѣщеніе соотвѣтственно съ точками $A_0$, $C_0$, $B_0$; точка же $A_{xy}$ на прямой $u$, какъ точка пересѣченія послѣдней съ прямой $XB_y$, соотвѣтственно совпадаетъ съ точками $A_0$, $A_y$, $A_\infty$. Поэтому

$$0 \,.\, y = 0, \quad 1 \,.\, y = y, \quad \infty \,.\, y = \infty,$$

если только точка $A_y$ сама не совпадаетъ съ точкой $A_\infty$. Если мы присоединимъ еще сюда фактъ, доказанный выше, что въ нашемъ исчисленіи




Фиг. 81.

отрѣзковъ $x + 0 = x$, то выборъ индексовъ точекъ $A_\infty$, $A_0$, $A_1$ найдетъ себѣ полное оправданіе.

Подобно тому, какъ вычитаніе возможно было опредѣлить, какъ прибавленіе отрицательнаго отрѣзка, мы опредѣлимъ теперь дѣленіе на отрѣзокъ $x$, какъ умноженіе на обратный отрѣзокъ $1/x$. Такъ какъ при $y = 1/x$ точка $A_{xy}$ должна совпадать съ точкой $A_1$, то мы получимъ на фиг. 80 точку $A_{1/x}$, если найдемъ пересѣченіе $B_{1/x}$ прямыхъ $XA_1$ и $v$ и спроектируемъ его изъ точки $C_0$ на прямую $u$. На фиг. 81 воспроизведено это простое построеніе отрѣзковъ, обратныхъ отрѣзкамъ $x$, $y$, $z$; для построенія точки $A_{1/x}$ мы находимъ пересѣченіе $X$ прямой $B_1A_x$ съ прямой $C_0A_0$, которую мы будемъ обозначать черезъ $s$, и проектируемъ точку пересѣченія $B_{1/x}$ прямыхъ $XA_1$ и $v$ изъ точки $C_0$ на прямую $u$. Легко усмотрѣть, что по смыслу нашего исчисленія отрѣзковъ $1/0=\infty$, $1/1=1$, $1/\infty=0$. Пучки лучей $B_1$ и $A_1$ проектируютъ точки $A_\infty A_0 A_1 A_x A_y A_z$ и $A_{1/\infty} A_{1/0} A_{1/1} A_{1/x} A_{1/y} A_{1/z}$ въ тѣ же точки $B_0 A_0 C_0 XYZ$ прямой $s$; отсюда вытекаетъ:

Вспомогательное предложеніе III. Имѣетъ мѣсто соотношеніе:

$$u(A_\infty A_0 A_1 A_x A_y A_z \ldots) \overline{\wedge}\, u(A_0 A_\infty A_1 A_{1/x} A_{1/y} A_{1/z} \ldots).$$

Изъ этихъ трехъ вспомогательныхъ предложеній мы вскорѣ выведемъ важныя слѣдствія. Но прежде всего мы подчеркнемъ важный результатъ нашего изслѣдованія, что наше исчисленіе отрѣзковъ слѣдуетъ всѣмъ законамъ четырехъ дѣйствій. Всѣ построенія, необходимыя для полученія отрѣзковъ $x+y$, $x-y$, $xy$, $x/y$, выполняются исключительно при помощи прямыхъ линій. Но результатъ этихъ построеній, какъ оказалось, не зависитъ отъ вспомогательныхъ прямыхъ; онъ зависитъ исключительно отъ выбора трехъ точекъ $A_\infty$, $A_0$, $A_1$ и отъ конечныхъ точекъ тѣхъ отрѣзковъ, надъ которыми мы производимъ наши построенія. Если мы теперь представимъ себѣ, что плоскость $\eta$, въ которой производятся всѣ эти построенія, вмѣстѣ съ прямой $u$, спроектированы на нѣкоторую другую плоскость $\eta'$, а $D_\infty$, $D_0$, $D_1$, $D_{x'}$, $D_{y'}$ суть проекціи точекъ $A_\infty$, $A_0$, $A_1$, $A_x$, $A_y$, то фигурѣ, при посредствѣ которой мы на плоскости $\eta$ по точкамъ $A_x$, $A_y$ строимъ точки $A_{x+y}$, $A_{x-y}$, $A_{xy}$, $A_{x/y}$, отвѣчаетъ на плоскости $\eta'$ фигура, опредѣляющая по точкамъ $D_{x'}$ и $D_{y'}$ соотвѣтственно точку $D_{x'+y'}$, $D_{x'-y'}$, $D_{x'y'}$, $D_{x'/y'}$; если мы спроектируемъ плоскость $\eta'$ на другую вспомогательную плоскость $\eta''$, то тѣ же выводы останутся въ силѣ. Такъ какъ, однако, мы показали, примѣнительно къ фиг. 59, что любое проективное соотвѣтствіе между двумя прямыми $u$ и $u^*$ можетъ быть осуществлено двукратнымъ проектированіемъ, то этимъ доказано:

Предложеніе 1. Если двѣ прямыя $u$ и $u^*$, снабженныя проективными скалами, приведены въ проективное соотвѣтствіе, и основнымъ точкамъ $A_\infty$, $A_0$, $A_1$ прямой $u$ отвѣчаютъ основныя точки $C_\infty$, $C_0$, $C_1$ прямой $u^*$, отрѣзкамъ же $x$, $y$, ... (*excl.* $A_\infty$) прямой $u$ отвѣчаютъ отрѣзки $x^*$, $y^*$, ... (*excl.* $C_\infty$) прямой $u^*$, то

$$1)\ (x+y)^* = x^* \boldsymbol{+} y^*,\quad 2)\ (x-y)^* = x^* \boldsymbol{-} y^*,\quad 3)\ (x\cdot y)^* = x^* \boldsymbol{\cdot} y^*,$$
$$4)\ (x/y)^* = x^* \boldsymbol{/} y^*,$$

гдѣ $\boldsymbol{+}$, $\boldsymbol{-}$, $\boldsymbol{\cdot}$, $\boldsymbol{/}$ суть знаки четырехъ операцій при основныхъ точкахъ $A_\infty$, $A_0$, $A_1$, между тѣмъ какъ знаки $+$, $-$, $\cdot$, $/$ выражаютъ тѣ же дѣйствія при основныхъ точкахъ $C_\infty$, $C_0$, $C_1$.

Иными словами: основныя четыре дѣйствія суть операціи проективныя; такъ, напримѣръ, $A_{x\cdot y}$ и $C_{x^*\cdot y^*}$ суть соотвѣтствующія точки. Такъ какъ $1^2=1$, то и $1^{*2}=1^*$; слѣдовательно, $1^*=1$ [64]), а потому, въ виду

[64]) Если мы тремъ точкамъ $A_\infty$, $A_0$, $A_1$ прямой $u$ отнесемъ точки $C_\infty$, $C_0$, $C_1$ на прямой $u'$, то этимъ будетъ установлено проективное соотвѣтствіе между рядами $u$ и $u'$,

равенства 1): $2^* = 2$, $3^* = 3, \ldots$; поэтому, въ силу соотношенiй 1), 2), 3), 4), $r^* = r$, если $r$ есть рацiональное число; это вытекаетъ, конечно, и изъ того обстоятельства, что мы отъ точекъ $C_\infty$, $C_0$, $C_1$ приходимъ къ точкѣ $C_{r^*}$ совершенно тѣмъ же рядомъ гармоническихъ построенiй, который отъ точекъ $A_\infty$, $A_0$, $A_1$ приводитъ къ точкѣ $A_r$. Такъ какъ каждый отрѣзокъ можетъ быть съ любымъ приближенiемъ выраженъ рацiональнымъ кратнымъ отрѣзка, принятаго за единицу, то и всегда вообще $x^* = x$, если мы подъ $x^*$ и $x$ разумѣемъ числа, измѣряющiя отрѣзки. При всемъ томъ предложенiе 1 отнюдь не является излишнимъ *). Помимо того значенiя этого предложенiя, которое выяснено

---

каждой точкѣ $A_x$ ряда $u$ будетъ отвѣчать нѣкоторая точка $C_{x^*}$ ряда $u'$. Если, однако, $A_\infty$, $A_0$, $A_1$ суть основныя точки проективной скалы на прямой $u$, то индексъ $x$ точки $A_x$ есть опредѣленное число; такимъ же образомъ $x^*$ есть также опредѣленное число. Нужно доказать, что $x^* = x$. Прежде всего $1^* = 1$, ибо мы точкѣ $A_1$ отнесли точку $C_1$ (нѣтъ никакихъ основанiй выводить это, какъ въ текстѣ, изъ того, что $1^{*2} = 1^*$). Но тогда соотношенiе 1) дастъ $(1+1)^* = 1^* + 1^*$, т. е. $2^* = 2$ и т. д.; этимъ доказано соотношенiе $n^* = n$ для всякаго цѣлаго $n$; а тогда при помощи соотношенiя 4) докажемъ его для всѣхъ рацiональныхъ чиселъ.

*) Предложенiе 1 устанавливаетъ внутреннюю связь между основами проективной геометрiи и основами ученiя о числахъ, въ частности, теорiей алгебраическихъ числовыхъ корпусовъ. Такъ какъ въ текстѣ мы не имѣли возможности входить въ эти соображенiя, то мы дадимъ здѣсь нѣкоторыя указанiя по этому вопросу. Формулами 1)—4) Дедекиндъ въ четвертомъ изданiи лекцiй Дирихле по теорiи чиселъ (L. Dirichlet, „Vorlesungen über Zahlentheorie", Supplement XI) совершенно абстрактно опредѣляетъ „перестановки" корпуса $A$, которыя преобразуютъ его въ „сопряженный" корпусъ $A^*$. Затѣмъ въ юбилейной статьѣ „о перестановкахъ корпуса всѣхъ алгебраическихъ чиселъ" Дедекиндъ распространилъ это опредѣленiе и вытекающiя изъ него слѣдствiя на корпусъ всѣхъ алгебраическихъ чиселъ, на корпусъ всѣхъ вещественныхъ, а также на корпусъ всѣхъ комплексныхъ чиселъ. Согласно предложенiю 1, эти перестановки представляютъ собой не что иное, какъ проективныя сопряженiя корпуса $A$ съ самимъ собой, если только онъ совпадаетъ съ сопряженнымъ корпусомъ $A^*$. Въ противномъ случаѣ, четыремъ гармоническимъ точкамъ числового ряда $A$ все же отвѣчаютъ четыре гармоническiя точки ряда $A^*$, но это соотвѣтствiе также не будетъ проективнымъ, ибо свойства расположенiя ряда $A$ не совпадаютъ съ соотвѣтствующими свойствами ряда $A^*$. Наши формулы $1^* = 1$, $2^* = 2, \ldots$ показываютъ, правда, что рацiональныя точки съ однимъ и тѣмъ же номеромъ всегда соотвѣтствуютъ другъ другу, но для иррацiональныхъ точекъ это не всегда имѣетъ мѣсто. Въ качествѣ примѣра разсмотримъ числовой корпусъ (область) всѣхъ чиселъ вида $a + b\sqrt{2}$, гдѣ $a$ и $b$ суть рацiональныя числа. Если мы положимъ $x^* = a - b\sqrt{2}$, то четыремъ гармоническимъ точкамъ $x$ отвѣчаютъ всегда четыре гармоническiя точки $x^*$; вмѣстѣ съ тѣмъ рацiональныя числа $(b = 0)$ соотвѣтствуютъ каждое самому себѣ; но числу $x = \sqrt{2}$ отвѣчаетъ число $x^* = -\sqrt{2}$. Свойства расположенiя, такимъ образомъ, не сохранились. Иначе обстоитъ дѣло въ геометрiи. Это обусловливается тѣмъ, что основная теорема покоится на томъ аксiоматически введенномъ фактѣ, согласно которому любымъ двумъ парамъ точекъ, которыя другъ друга не раздѣляютъ,

въ подстрочномъ примѣчаніи, оно даетъ такое доказательство формулы $x = x^*$, которое лишь косвеннымъ образомъ зависитъ отъ аксіомы о непрерывности; вѣрнѣе, зависитъ отъ послѣдней лишь въ той мѣрѣ, въ какой отъ нея зависитъ основная теорема проективной геометріи. Если $x^*$ удовлетворяетъ алгебраическому уравненію съ раціональными коэффиціентами, то тому же уравненію, въ силу предложенія 1, удовлетворяетъ также $x$; съ другой стороны, такъ какъ точка $A_x$, вслѣдствіе проективности свойствъ расположенія *excluso U*, всегда лежитъ между точками съ тѣми же нумерами, какъ и точка $C_{x^*}$, то число $x^*$ не можетъ быть корнемъ этого уравненія, отличнымъ отъ $x$; поэтому число $x^* = x$.

**8.** Съ помощью вспомогательныхъ предложеній мы теперь докажемъ предложеніе, играющее основную роль во всей метрикѣ.

Предложеніе 2. Проективное ангармоническое отношеніе четырехъ элементовъ ряда перваго или второго порядка, а также пучка перваго или второго класса, не зависитъ отъ выбора трехъ основныхъ точекъ $\infty$, 0, 1.

Понятіе объ ангармоническомъ отношеніи было нами установлено въ § 11, 8. Здѣсь мы называемъ ангармоническое отношеніе проективнымъ потому, что оно должно быть составлено по проективной скалѣ. Будетъ достаточно доказать предложеніе для прямолинейнаго ряда точекъ, такъ какъ вслѣдствіе закона двойственности оно уже будетъ тѣмъ самымъ доказано для пучка перваго класса; отъ пучка же перваго класса оно можетъ быть перенесено на рядъ второго порядка и отсюда на пучекъ его

---

всегда отвѣчаетъ третья пара точекъ $(u, v)$, которая раздѣляетъ гармонически какъ точки одной пары, такъ и точки другой пары. По даннымъ четыремъ точкамъ $u$ и $v$ опредѣляются посредствомъ извлеченія квадратнаго корня. За исключеніемъ того случая, когда въ области $A$ какъ разъ окажется этотъ корень, основная теорема въ области $A$ несправедлива. Чтобы исключить возможность всякихъ перестановокъ, отличныхъ отъ полнаго тождества, было бы необходимо ввести въ область $A$ всѣ вещественные квадратные радикалы, равно какъ и всѣ вообще вещественныя числа, которыя можно получить, послѣдовательно расширяя числовую область путемъ производства раціональныхъ дѣйствій надъ квадратными корнями и извлеченія корня изъ чиселъ, уже полученныхъ тѣмъ же путемъ ранѣе. Однако, такой корпусъ не совпадаетъ съ своими сопряженными корпусами, такъ какъ послѣднія содержатъ также комплексныя числа; поэтому нѣтъ никакого противорѣчія съ основной теоремой въ томъ, что Дедекиндъ для корпуса всѣхъ алгебраическихъ чиселъ обнаруживаетъ существованіе перестановокъ, которыя отличны отъ тождества. Къ тому же эти корпусы не вещественные. Что касается основныхъ двухъ вопросовъ, поставленныхъ въ названной юбилейной статьѣ, то на нихъ мы можемъ отвѣтить, что корпусъ всѣхъ вещественныхъ чиселъ, въ силу основной теоремы, допускаетъ только тождественную перестановку, корпусъ же всѣхъ комплексныхъ чиселъ допускаетъ еще перестановку, которая воспроизводится путемъ взаимнаго замѣщенія чиселъ $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$.

касательныхъ совершенно такъ же, какъ мы перенесли свойства расположенія съ пучка перваго класса на рядъ точекъ второго порядка.

Мы примемъ теперь, что гармоническіе ряды $u$ и $u^*$, о которыхъ идетъ рѣчь въ предложеніи 1, лежатъ на одной прямой. Положимъ, что точкамъ $A_\infty$, $A_0$, $A_1$, $A_{x_n}$ ряда $u$ отнесены точки $C_\infty$, $C_0$, $C_1$, $C_{x_n^*}$ ряда $u^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$; положимъ, что координація $x$ исходитъ отъ основныхъ точекъ $A_\infty$, $A_0$, $A_1$, а координація $x^*$ отъ точекъ $C_\infty$, $C_0$, $C_1$. Въ такомъ случаѣ, какъ мы показали въ п. 7,

$$x^* = x. \tag{1}$$

Положимъ, что отрѣзки $C_0A_\infty$, $C_0A_0$, $C_0A_1$, $C_0A_{x_n}$ при основныхъ точкахъ $C_\infty$, $C_0$, $C_1$ выражаются черезъ $a'$, $b'$, $c'$, $x_n'$, такъ что ихъ конечныя точки суть $C_{a'}$, $C_{b'}$, $C_{c'}$, $C_{x_n'}$. Постараемся установить зависимость между $x_n'$ и $x_n$.

Согласно вспомогательнымъ предложеніямъ I, II, III, мы, исходя отъ ряда точекъ $u(C_\infty, C_0, C_1, C_{x_n^*})$, всегда получимъ проективный съ нимъ рядъ, если мы къ индексамъ всѣхъ точекъ $C$ прибавимъ одно и то же число, положительное или отрицательное, или если мы всѣ эти индексы помножимъ на одно и то же число, или, наконецъ, если замѣнимъ ихъ всѣ обратными значеніями. Этимъ путемъ мы послѣдовательно получимъ слѣдующія соотношенія (вмѣсто точекъ мы вездѣ для краткости пишемъ только ихъ индексы):

$$(\infty, 0, 1, x_n^*) \,\overline{\wedge}\, (\infty, 0, r, rx_n^*) \,\overline{\wedge}\, (\infty, s, r+s, rx_n^*+s)$$
$$\overline{\wedge}\left(0, \frac{1}{s}, \frac{1}{r+s}, \frac{1}{rx_n^*+s}\right) \overline{\wedge}\left(0, \frac{h}{s}, \frac{h}{r+s}, \frac{h}{rx_n^*+s}\right)$$
$$\overline{\wedge}\left(a', \frac{h}{s}+a', \frac{h}{r+s}+a', \frac{h}{rx_n^*+s}+a'\right);$$

отсюда, опуская промежуточные члены, получимъ:

$$(\infty, 0, 1, x_n^*) \,\overline{\wedge}\left(a', \frac{h}{s}+a', \frac{h}{r+s}+a', \frac{h}{rx_n^*+s}+a'\right). \tag{2}$$

Точка, отвѣчающая въ этомъ проективномъ соотвѣтствіи точкѣ $C_\infty$, будетъ $C_{a'}$. Если мы желаемъ, чтобы точкамъ $C_0$ и $C_1$ такимъ же образомъ отвѣчали точки $C_{b'}$ и $C_{c'}$, то нужно положить

$$\frac{h}{s} + a' = b', \quad \frac{h}{r+s} + a' = c',$$

такъ что

$$h = (b' - a')\ (c' - a')\,\omega, \quad r = (b' - c')\,\omega, \quad s = (c' - a')\,\omega,$$

гдѣ $\omega$ есть коэффиціентъ пропорціональности. Въ виду соотношенія (2)

$$u\,(C_\infty, C_0, C_1, C_{x_1^*}, C_{x_2^*}, \ldots) \overline{\wedge} (C_{a'}, C_{b'}, C_{c'}, C_{x_1'}, C_{x_2'}, \ldots), \quad (3)$$

гдѣ

$$x_n' = \frac{h}{r x_n^* + s} + a' = \frac{a'(b'-c')\,x_n^* + b'(c'-a')}{(b'-c')\,x_n^* + (c'-a')}\,; \qquad (4)$$

наконецъ, отсюда, принимая во вниманіе соотношеніе (1), получаемъ:

$$x_n' = \frac{a'(b'-c')\,x_n + b'(c'-a')}{(b'-c') + (c'-a')}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots. \qquad (5)$$

Мы видимъ, что формула (4) и при $x^* = \infty$, 0, 1 даетъ правильно соотвѣтствующія значенія $a'$, $b'$, $c'$, такъ что всѣ безъ исключенія индексы съ правой стороны равенства (3) получаются изъ соотвѣтствующихъ индексовъ лѣвой по тому же закону (4). Если мы положимъ $x_n' = \dfrac{p x_n^* + q}{r x_n^* + s}$, гдѣ

$$p = a'(b'-c')\omega,\ \ q = b(c'-a')\omega,\ \ r = (b'-c')\omega,\ \ s = (c'-a')\,\omega,$$

то эти четыре величины не могутъ быть выбраны совершенно произвольно, ибо количества $a'$, $b'$, $c'$, очевидно, должны быть различны, что эквивалентно тому, что произведеніе

$$(a'-b')\,(b'-c')\,(c'-a') = (ps - qr)\,\omega^{-1}$$

должно быть отлично отъ нуля. Обозначая теперь точки, о которыхъ идетъ рѣчь, не черезъ $C$, а черезъ $A$, мы получаемъ:

Предложеніе 3. Если мы подвергнемъ индексы ряда точекъ $u$ въ проективной скалѣ линейному преобразованію

$$x' = \frac{px+q}{rx+s}\,, \quad ps - qr \neq 0$$

и точкамъ $A_x$ отнесемъ точки $A_{x'}$, то этимъ будетъ установлено проективное соотвѣтствіе.

Формула (5) раскрываетъ искомую зависимость между $x_n$ и $x_n'$:

Предложеніе 4. Переходъ къ новымъ основнымъ точкамъ всегда осуществляется при помощи одного и того же линейнаго преобразованія индексовъ. Если $A_\infty$, $A_0$, $A_1$ суть первоначальныя основныя точки, а $C_\infty$, $C_0$, $C_1$ — новыя, и если въ послѣдней координаціи

$$C_0A_\infty = a', \quad C_0A_0 = b', \quad C_0A_1 = c',$$

то между индексомъ $x$ любой точки $P$, соотвѣтствующимъ первой системѣ основныхъ точекъ, и индексомъ $x'$

той же точки, соотвѣтствующимъ второй системѣ, имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$x' = \frac{a'(b'-c')\,x + b'(c'-a')}{(b'-c')\,x + c' - a'}, \quad x = \frac{x'-b'}{x'-a'} : \frac{c'-b'}{c'-a'}. \tag{6}$$

Если мы теперь составимъ ангармоническое отношеніе $\frac{x_1'-x_2'}{x_1'-x_4'} : \frac{x_3'-x_2'}{x_3'-x_4'}$ четырехъ точекъ

$$x_n' = \frac{px_n + q}{rx_n + s} \quad (n = 1, 2, 3, 4),$$

то простое вычисленіе обнаруживаетъ, что послѣднее равно $\frac{x_1-x_2}{x_1-x_4} : \frac{x_3-x_2}{x_3-x_4}$, Этимъ предложеніе 2 доказано *). Какъ показываетъ примѣръ двухъ паръ точекъ $\infty$, 1 и 0, 2, дѣлящихъ другъ друга гармонически, ангармоническое отношеніе четырехъ гармоническихъ элементовъ равно — 1; этими элементами могутъ служить какъ пучки ряда перваго или второго порядка, такъ и лучи пучка перваго или второго класса. Формула (6) выражаетъ самый индексъ $x$ въ видѣ гармоническаго отношенія. При $a' = \infty$ имѣемъ $x = (x' - b') : (c' - b')$, а потому

$$(x_1 - x_2) : (x_3 - x_4) = (x_1' - x_2') : (x_3' - x_4');$$

это значитъ, что отношеніе двухъ отрѣзковъ на прямой зависитъ только отъ выключенной точки, но не зависитъ отъ точекъ, помѣщенныхъ въ проективномъ мѣроопредѣленіи индексами 0 и 1; индексы $x$ и $x'$ здѣсь относятся къ одной и той же выключенной точкѣ $A_\infty$.

**9.** Развитое здѣсь исчисленіе отрѣзковъ даетъ возможность сравнивать только отрѣзки одной и той же прямой; точно такъ же соотвѣтствующее по принципу двойственности измѣреніе угловъ даетъ только возможность сравнивать углы, образуемые лучами одного и того же пучка. Остающійся здѣсь пробѣлъ можно было бы восполнить введеніемъ проективной окружности, но мы не имѣемъ возможности здѣсь въ это входить. Изложенное измѣреніе отрѣзковъ и угловъ вполнѣ достаточно для обоснованія метрики въ двухъ неевклидовыхъ геометріяхъ; но мы вынуждены ограничиться гиперболической геометріей, такъ какъ въ настоящемъ сочиненіи мы не имѣли возможности изложить теорію мнимыхъ элементовъ въ проективной геометріи; въ гиперболической же геометріи мы по той же причинѣ вынуждены ограничиться только измѣреніемъ отрѣзковъ. Если развить гиперболическую геометрію совершенно элементарно по образцу нашей школьной (евклидовой) геометріи, то она

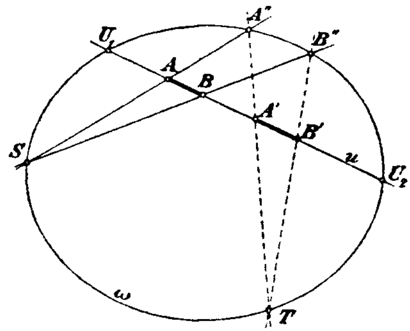
---

*) Другое доказательство далъ Пашъ въ своихъ „Лекціяхъ о новой геометріи", въ § 21.

приводитъ къ доказательству существованія ряда второго порядка $\omega$, на которомъ лежатъ обѣ бозконечно удаленныя точки любой прямой плоскости. Чисто геометрически этотъ рядъ $\omega$ ничѣмъ не отличается отъ другихъ рядовъ; это различіе устанавливается только метрикой, и именно поэтому возможно любой рядъ второго порядка $\omega$ принять за „абсолютный" рядъ второго порядка, т. е. сдѣлать его геометрическимъ мѣстомъ безконечно удаленныхъ точекъ плоскости. Это мы и намѣрены теперь выполнить. Мы ограничимся „внутренней стороной" ряда $\omega$, т. е. совокупностью тѣхъ точекъ, изъ которыхъ нельзя провести къ ряду $\omega$ касательныхъ. Каждая прямая $u$ этой области встрѣчаетъ рядъ $\omega$ въ двухъ точкахъ $U_1$, $U_2$; мы опредѣлимъ теперь, согласно § 11, (17), длину отрѣзка $AB$ на прямой $u$, конечныя точки котораго $A$, $B$ расположены внутри ряда $\omega$, равенствомъ

$$\langle AB\rangle = k \log \left(\frac{AU_1}{AU_2} : \frac{BU_1}{BU_2}\right);$$

за „отрѣзокъ" $AB$ мы принимаемъ здѣсь тотъ изъ двухъ классовъ, опредѣляемыхъ на прямой $u$ точками $A$ и $B$, всѣ точки котораго расположены внутри ряда $\omega$. Ангармоническое отношеніе здѣсь нужно составлять въ смыслѣ проективной метрики, которая, съ нашей точки зрѣнія, представляетъ собой, такъ сказать, первичную метрику и лежитъ въ основѣ такъ называемой абсолютной метрики гиперболической геометріи. Впрочемъ, не мѣшаетъ сравнить эти соображенія съ тѣмъ изложеніемъ гиперболической метрики, которое приведено въ § 11 и ставитъ ее въ зависимость отъ евклидовой метрики[65]). Изъ построеній абсолютной системы измѣренія отрѣзковъ мы приведемъ только самыя необходимыя, именно — построенія, служащія для передвиженія отрѣзковъ по прямой линіи, — главнымъ образомъ, съ тою цѣлью, чтобы вновь показать, что длина отрѣзка представляетъ собой величину, зависящую только отъ масштаба и отъ опредѣленія равенства. Согласно



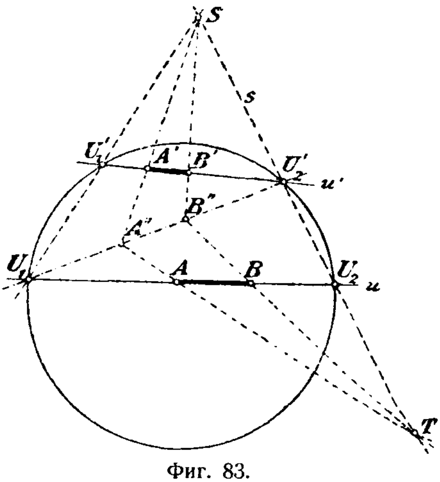
Фиг. 82.

[65]) Въ § 11, при изложеніи гиперболической геометріи въ сѣти сферъ, было указано, какъ въ этой геометріи должно выражаться разстояніе между двумя точками; мы пришли тогда къ тому же выраженію, которое приведено здѣсь въ текстѣ. Но самая сѣть была взята въ евклидовомъ пространствѣ, и все изслѣдованіе предполагало, такимъ образомъ, евклидову геометрію. Здѣсь вопросъ стоитъ иначе: установивъ проективную координацію, мы выбираемъ произвольно рядъ второго порядка, на которомъ сосредоточиваемъ безконечно удален-

опредѣленію длины $\langle AB \rangle$, отрѣзокъ $\langle AB \rangle$ равенъ другому отрѣзку $\langle A'B' \rangle$ на прямой $u$, если точки $A$, $B$ имѣютъ относительно точекъ $U_1$, $U_2$ то же ангармоническое отношеніе, что и точки $A'$, $B'$, такъ что

$$U_1 A B U_2 \barwedge U_1 A' B' U_2 .$$

Если мы спроектируемъ отрѣзокъ $AB$ изъ точки $S$ ряда $\omega$ на этотъ самый рядъ (см. фиг. 82), а полученныя точки $A''B''$ вновь спроектируемъ изъ какой-либо точки ряда $T$ на прямую $u$, то $\langle AB \rangle = \langle A'B' \rangle$, такъ какъ точки $U_1$, $A$, $B$, $U_2$ расположены перспективно относительно пучка $S$; этотъ послѣдній связанъ проективно съ пучкомъ $T$[66]), который, въ свою очередь, расположенъ перспективно относительно точекъ $U_1 A' B' U_2$. Можно безъ труда убѣдиться, что къ точкамъ $U_1$ и $U_2$ нельзя придти конечнымъ числомъ равныхъ шаговъ въ смыслѣ этого мѣроопредѣленія. Два отрѣзка $\langle AB \rangle$ и $\langle A'B' \rangle$ на двухъ различныхъ прямыхъ $u$ и $u'$ съ недоступными точками $U_1$, $U_2$ и $U_1'$, $U_2'$ равны, если $U_1 A B U_2 \barwedge U_1' A' B' U_2'$ (см. фиг. 83).




Фиг. 83.

Чтобы получить точку $B'$, когда даны точки $A$, $B$ и $A'$, мы проектируемъ точку $A'$ изъ точки пересѣченія $S$ прямыхъ $U_1 U_1'$ и $U_2 U_2'$ на прямую $U_1 U_2'$ въ точку $A''$; затѣмъ находимъ точку пересѣченія $T$ прямыхъ $U_2 U_2'$ и $A''A$ и точку пересѣченія $B''$ прямыхъ $TB$ и $U_1 U_2'$; прямая $SB''$ сѣчетъ прямую $u'$ въ искомой точкѣ $B'$. Ясно, что

$$\langle AB \rangle = \langle A''B'' \rangle = \langle A'B' \rangle .$$

Легко убѣдиться, что геометрическое мѣсто точекъ $B$, имѣющихъ отъ неподвижной точки $A$ опредѣленное разстояніе $a$, воспроизводится пересѣченіемъ двухъ проективныхъ пучковъ; гиперболическая окружность представляетъ собой, слѣдовательно, рядъ второго порядка.

---

ныя точки прямыхъ; вмѣстѣ съ тѣмъ мы изучаемъ лишь то многообразіе (если угодно, то пространство), которое составлено изъ точекъ, расположенныхъ внутри выбраннаго ряда; разстояніе между двумя точками этого пространства мы опредѣляемъ приведенной въ текстѣ формулой. Мы должны, однако, сказать, что этотъ вопросъ изложенъ авторомъ, на нашъ взглядъ, слишкомъ сжато; мы не имѣемъ возможности развить всѣ соображенія, которыя необходимы, чтобы эту теорію пополнить, а потому ограничиваемся этимъ замѣчаніемъ.

[66]) Ибо мы можемъ смотрѣть на нашъ рядъ, которому принадлежатъ точки $U_1$, $A''$, $B''$, $U_2$, какъ на образованный проективными пучками $S$ и $T$.

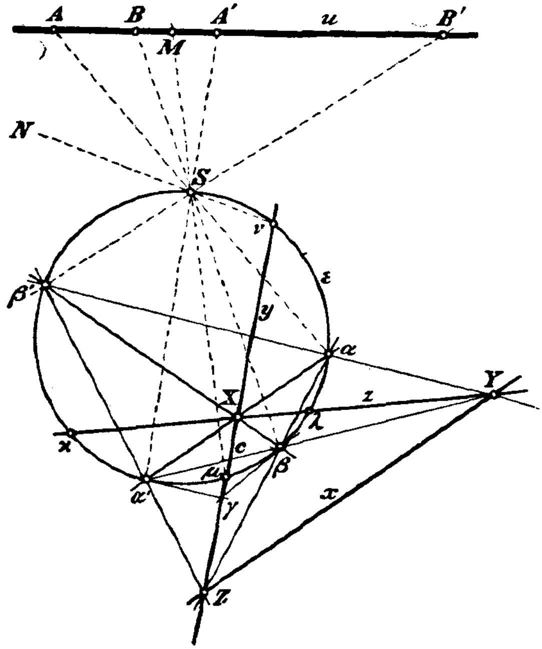
Подробное изложеніе важнѣйшихъ элементарныхъ построеній двухъ неевклидовыхъ геометрій съ точки зрѣнія проективной геометріи далъ М. Гроссманъ *); авторъ пользуется, правда, координатами, но большинство построеній ясно и безъ всякихъ вычисленій.

Мы не хотѣли бы опустить случая указать на интересное различіе этой системы гиперболической геометріи по сравненію съ нашимъ осуществленіемъ послѣдней въ сферической сѣти; именно, двѣ прямыя, которыя не пересѣкаютъ съ внутренней стороны ряда $\omega$, всегда имѣютъ съ внѣшней стороны ряда точку пересѣченія, къ которой нельзя придти, исходя отъ внутренней точки ряда конечнымъ числомъ шаговъ, равныхъ между собой съ точки зрѣнія проективной метрики. Итакъ, здѣсь идеальными точками пересѣченія служатъ дѣйствительныя точки, между тѣмъ какъ въ сферическомъ типѣ гиперболической геометріи онѣ были мнимыми.

**10.** Метрика въ параболической геометріи несравненно проще, нежели въ гиперболической. Параболическая (евклидова) скала на прямой $u$ есть скала проективная, соотвѣтствующая такому (воображаемому) выбору недоступной точки $U$ прямой $u$, которое устанавливается средствами чисто эмпирическаго характера. Именно, мы утверждаемъ прежде всего слѣдующее: если на прямой $u$ даны двѣ пары точекъ $A$, $B$ и $A'$, $B'$, то на ней всегда можно установить проективное мѣроопредѣленіе такъ, что отрѣзки $AB$ и $A'B'$, съ точки зрѣнія этой метрики, будутъ равны. Въ самомъ дѣлѣ, прежде всего мы можемъ распорядиться обозначеніями двухъ точекъ $A'$ и $B'$ такимъ образомъ, чтобы двѣ пары $A$, $B'$ и $A'$, $B$ другъ друга не раздѣляли; пусть далѣе $M$ и $N$ будутъ двѣ точки, которыя въ этомъ предположеніи дѣлятъ гармонически какъ пару $A$, $B'$, такъ и пару $B$, $A'$; каждая изъ этихъ двухъ точекъ можетъ быть принята за основную безконечно удаленную точку. Для построенія точекъ $M$ и $N$ необходимо располагать рядомъ второго порядка $\varepsilon$, находящимся въ какой-либо плоскости, проходящей черезъ прямую $u$. Пусть $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$ будутъ проекціи точекъ $A$, $A'$, $B$, $B'$ изъ какой-либо точки $S$ ряда $\varepsilon$ на этотъ самый рядъ; тогда $M$ и $N$ суть точки пересѣченія прямой $u$ съ прямыми $S\mu$ и $S\nu$, соединяющими точку $S$ съ тѣми двумя точками $\mu$ и $\nu$ ряда $\varepsilon$, которыя дѣлятъ гармонически какъ пару $\alpha$, $\beta'$, такъ и пару $\alpha'$, $\beta$ (фиг. 84). Самыя точки $\mu$ и $\nu$ лежатъ въ пересѣченіи ряда $\varepsilon$ съ прямой $XZ$, соединяющей точку пересѣченія $X$ прямыхъ $\alpha\alpha'$ и $\beta\beta'$ съ точкой пересѣченія $Z$ прямыхъ $\alpha\beta$ и $\alpha'\beta'$. Въ самомъ дѣлѣ, согласно предложенію 6 § 17-го, касательныя къ ряду въ точкахъ $\alpha'$ и $\beta$ пересѣкаются на прямой $XZ$ въ точкѣ $\gamma$; эта точка представляетъ собой полюсъ прямой $\alpha'\beta$ и потому вмѣстѣ съ точкой пе-

*) M. Grossmann. „Die fundamentalen Konstruktionen der Nichteuklidischen Geometrie“, Beilage zum Programm der Thurgauischen Kantonsschule, 1903/04.

ресѣченія $c$ прямыхъ $XZ$ и $\alpha'\beta$ дѣлитъ гармонически пару $\mu$, $\nu$. Двѣ пары точекъ $\alpha'$, $\beta$ и $\mu$, $\nu$ проектируются изъ точки $\alpha'$ двумя парами лучей $\alpha'\gamma$, $\alpha'\beta$ и $\alpha'\mu$, $\alpha'\nu$, которыя, слѣдовательно, проходятъ черезъ точки $\gamma$, $c$ и $\mu$, $\nu$, а потому дѣлятъ другъ друга гармонически. Такимъ образомъ, точки $\mu$ и $\gamma$ дѣйствительно дѣлятъ гармонически какъ пару $\alpha'$, $\beta$, такъ и пару $\beta'$, $\alpha$.—Если теперь двѣ пары точекъ $A$, $B$ и $A'$, $B'$ другъ друга также не раздѣляютъ, то существуетъ и такая пара точекъ $K$ и $L$, которая дѣлитъ гармонически эти послѣднія пары точекъ. Проектируя эту пару изъ точки $S$ на рядъ второго порядка, мы вновь получаемъ двѣ точки $\varkappa$ и $\lambda$, которыя дѣлятъ гармонически какъ пару $\alpha$, $\beta$, такъ и пару $\alpha'$, $\beta'$ и лежатъ на прямой $XY$, соединяющей точку $X$ съ точкой пересѣченія $Y$ прямыхъ $\alpha\beta'$ и $\alpha'\beta$. Если бы прямая $YZ$ имѣла съ рядомъ двѣ общія точки $\pi, \varrho$, то послѣднія раздѣляли бы гармонически какъ пару $\alpha$, $\alpha'$, такъ и пару $\beta$, $\beta'$; вмѣстѣ съ тѣмъ на прямой $u$ существовали бы двѣ точки $P$, $R$, которыя дѣлили бы гармонически какъ пару $A$, $A'$, такъ и пару $B$, $B'$. Но это невозможно, ибо точкѣ $A$ отвѣчаетъ только одна изъ



Фиг. 84.

точекъ $A'$, $B$, $B'$ (скажемъ, $A'$), которая вмѣстѣ съ нею дѣлитъ остальныя двѣ точки; и эти двѣ пары не могутъ дѣлиться гармонически одной и той же третьей парой; напротивъ, на двѣ пары, которыя другъ друга не раздѣляютъ, четыре точки $A$, $B$, $A'$, $B'$ распадаются двояко, чему соотвѣтствуютъ двѣ пары, производящія гармоническое дѣленіе. Такимъ образомъ, на двухъ изъ числа трехъ прямыхъ $XY$, $YZ$, $ZX$ должны лежать точки ряда $\varepsilon$, третья же не пересѣкаетъ ряда $\varepsilon$ вовсе. Такъ какъ $XYZ$ есть полярный треугольникъ, то мы попутно получили слѣдующій результатъ: изъ сторонъ полярнаго треугольника нѣкотораго ряда второго порядка всегда имѣется одна, которая не встрѣчаетъ ряда. Возвращаясь теперь къ отрѣзкамъ $AB$ и $A'B'$, допустимъ, что они были при помощи циркуля взяты „равными“ въ эмпирическомъ смыслѣ слова. Если мы теперь станемъ искать ту пару точекъ $M$, $N$, которая дѣлитъ гармонически какъ пару $A$, $B'$, такъ и пару $A'$, $B$, то лучи $S\mu$ и $S\nu$, направленные къ точкамъ $M$, $N$, будутъ существовать и въ этомъ случаѣ, но одинъ изъ этихъ лучей не встрѣтитъ прямой $u$ на доступномъ разстояніи. Эта покамѣстъ только эмпирически недоступная точка есть „безконечно удаленная“ точка прямой въ параболической геометріи; если мы примемъ ее за точку $A_\infty$ проективной скалы, то она будетъ безконечно удаленной точкой также съ точки зрѣнія этого мѣроопредѣленія *). При этомъ нужно обратить вниманіе на то, что для нашихъ построеній въ области проективной скалы всегда достаточно имѣть двѣ прямыя $v$ и $w$, относительно которыхъ извѣстно, что онѣ проходятъ черезъ точку $A_\infty$; самая же точка $A_\infty$ можетъ лежать внѣ площади нашего чертежа, ибо при производствѣ сложенія и перемноженія отрѣзковъ мы пользовались точкой $A_\infty$ только черезъ посредство прямыхъ $v$ и $w$. Но одинъ лучъ, идущій къ точкѣ $A_\infty$, представляетъ собой $S\nu$; выбирая же иначе точку $S$ на рядѣ $\varepsilon$, мы легко получимъ второй такой же лучъ. Такимъ образомъ, всѣ условія, необходимыя для практическаго производства построеній, на лицо.

**11.** Параболическое измѣреніе отрѣзковъ, какъ проективное, отличается простотой, пока рѣчь идетъ только объ измѣреніяхъ на одной и той же прямой. Напротивъ, перенесеніе единицы мѣры съ одной прямой на другую, какъ мы видѣли въ § 5, дѣло довольно затѣйливое. Какъ мы уже не разъ указывали, любой рядъ второго порядка $\varepsilon$ можетъ быть абстрактно принятъ за окружность; пусть это будетъ тотъ рядъ, о которомъ шла рѣчь въ предыдущемъ пунктѣ. Произвольную точку въ плоскости окружности, изъ которой къ ней нельзя провести касательныхъ, нужно принять за центръ: „радіусы“, выходящіе изъ точки $O$, мы принимаемъ за равные, опредѣливъ предварительно „отрѣзки“, выходящіе изъ точки $O$ путемъ выключенія той точки, которая совокупно съ $O$ дѣлитъ гармонически рядъ $\varepsilon$.

Эти выключенныя точки лежатъ, слѣдовательно, на одной прямой — полярѣ $\omega$ точки $O$ относительно ряда $\varepsilon$; она называется „безконечно удаленной“ прямой плоскости. Она опредѣляетъ на каждой прямой ту точку, которая на ней должна играть роль безконечно удаленной основной точки (проективнаго) измѣренія отрѣзковъ. Прямыя, имѣющія одну и ту же безконечно удаленную точку, называются параллельными. Строго сохраняя понятія и посылки параболической геометріи, можно уста-

*) Сообразно этому, проективная точка зрѣнія на параллелизмъ можетъ быть формулирована такъ: параллельныя прямыя также имѣютъ точку пересѣченія, но послѣдней нельзя достичь конечнымъ числомъ равныхъ (съ точки зрѣнія параболической метрики) шаговъ.

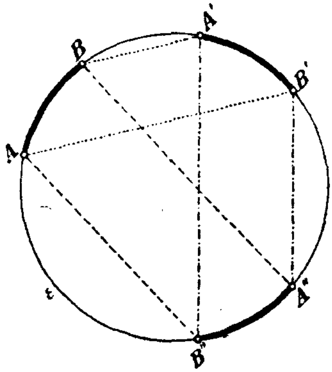
новить метрику такимъ образомъ, чтобы произвольно выбранныя двѣ прямыя оказались параллельными. При другомъ выборѣ трехъ основныхъ точекъ „обыкновенная“ безконечно удаленная точка прямой евклидовой геометріи естественно имѣетъ конечное разстояніе отъ нулевой точки. Пока мы не вводимъ метрики, нѣтъ „близкихъ“ и „далекихъ“ разстояній, ибо — это суть понятія метрическія, не содержащія въ себѣ ничего абсолютнаго; они имѣютъ только относительное содержаніе, зависящее отъ принятой единицы мѣры и отъ законовъ той метрики, которой мы въ тотъ или въ другой моментъ пользуемся. Въ геометрическомъ представленіи наивнаго человѣка практической жизни вмѣстѣ съ отрѣзкомъ фиксируется и его длина. Но что и въ научной разработкѣ геометріи эмпиризмъ играетъ гораздо большую роль, чѣмъ мы склонны это признавать, въ этомъ мы убѣждаемся повседневно. — На двухъ параллеляхъ $u$, $v$ двѣ другія параллели той же плоскости, которыя не параллельны первымъ, отсѣкаютъ равные отрѣзки. Это должно служить о п р е д ѣ л е н і е м ъ [67]). Если два параллельныхъ отрѣзка равны третьему параллельному имъ отрѣзку, то они равны между собой; въ этомъ легко убѣдиться, основываясь на теоремѣ Дезарга о перспективныхъ треугольникахъ. Къ построеніямъ, служащимъ для передвиженій отрѣзка вдоль прямой и для перенесенія отрѣзка на параллельную прямую, присоединяется, въ качествѣ третьяго основного построенія, вращеніе отрѣзка при помощи окружности $\varepsilon$. И здѣсь теорема Дезарга обнаруживаетъ, что два отрѣзка, равные третьему, равны между собой, когда эти три отрѣзка лежатъ на трехъ различныхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ центръ $O$ окружности $\varepsilon$, а вращеніе опредѣлено пріемомъ, указаннымъ на фиг. 6.

**12.** Если измѣреніе отрѣзковъ въ параболической геометріи по существу своему представляетъ проективное мѣроопредѣленіе, устанавливающее разъ на всегда выключенныя точки, то измѣреніе угловъ въ евклидовой геометріи покоится на совершенно иныхъ основныхъ положеніяхъ, которыя только и объясняются живымъ участіемъ непосредственнаго возрѣнія въ ходѣ развитія геометріи. Что отрѣзки могутъ быть больше всякаго разстоянія, какое только можетъ охватить нашъ взглядъ, — это одно изъ наиболѣе древнихъ, наиболѣе естественныхъ пріобрѣтеній нашего опыта; земля представляется наивному человѣку неизмѣримо большой;

---

[67]) При помощи предыдущихъ соглашеній установлены условія равенства отрѣзковъ, если таковые расположены на прямыхъ, проходящихъ черезъ центръ $O$ основной „окружности“; для того, чтобы было возможно сравнивать отрѣзки, лежащіе на произвольно выбранныхъ прямыхъ, нужно еще установить условія равенства отрѣзковъ на параллельныхъ прямыхъ, нужно установить „правило параллельнаго перенесенія“. Это и достигается соглашеніемъ, приведеннымъ въ текстѣ, считать отрѣзки, расположенные на параллельныхъ прямыхъ, р а в н ы м и, если они расположены въ то же время м е ж д у параллельными прямыми.

единица же мѣры составляетъ, примѣрно, одинъ его шагъ. Иначе обстоитъ дѣло съ угломъ. Все угловое пространство, окружающее точку $O$, мы охватываемъ однимъ взглядомъ; его величина должна, „слѣдовательно", быть конечной; и подобно тому, какъ наивный умъ вѣритъ въ абсолютную длину, онъ вѣритъ также въ абсолютную величину угла. Естественное подраздѣленіе углового пространства, окружающаго данную точку $O$ на четыре равныя части, образуютъ двѣ взаимно перпендикулярныя (въ эмпирическомъ смыслѣ слова) прямыя; глазъ не обнаруживаетъ никакого преимущества какой-либо одной изъ этихъ частей передъ другой. Но подобно тому, какъ угловое пространство подходящей системой измѣренія угловъ было сдѣлано конечной величиной, можно было бы и длину прямой линіи сдѣлать конечной при соотвѣтственномъ выборѣ системы измѣренія. Равенство угловъ мы опредѣлили въ § 5 при помощи пріема, который ясно виденъ на фиг. 8. Если въ смыслѣ этого опредѣленія, при замѣнѣ угловъ дугами $AB = A''B''$ и $A'B' = A''B''$, т. е. $AB'' \parallel BA''$ и $A'B'' \parallel B'A'$ (фиг. 85), то въ шестиугольникѣ Паскаля $AB'A''BA'B''$ точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ $AB''$ и $BA''$, а также $A'B''$ и $B'A''$, лежатъ на безконечно удаленной прямой; на той же прямой лежитъ, слѣдовательно, точка пересѣченія сторонъ третьей пары; поэтому и уголъ $AB = A'B'$; иными словами: если изъ трехъ угловъ, имѣющихъ общую вершину, два равны третьему, то они равны между собой.




Фиг. 85.

Чтобы остаться при фигурѣ § 5-го, мы пользовались дѣйствительной окружностью и дѣйствительнымъ центромъ. Но уже самое то обстоятельсто, что доказательство дала намъ теорема Паскаля, обнаруживаетъ, что и при помощи любого ряда второго порядка можно было бы установить систему измѣренія угловъ, по принципамъ евклидовой системы, свободную отъ всякаго противорѣчія, но съ той разницей, что углы, „равные" въ смыслѣ этой метрики, не были бы равны въ эмпирическомъ смыслѣ слова.

Какъ мы видимъ, научно обосновать евклидову метрику не такъ просто, какъ гиперболическую (и эллиптическую). Но недостатокъ симметріи этой системы, обусловливаемый тѣмъ, что она отказывается отъ принципа двойственности, щедро возмѣщается ея большимъ практическимъ значеніемъ. Дѣленіе отрѣзка на произвольное число равныхъ частей въ евклидовой геометріи, благодаря проективному характеру системы измѣренія отрѣзковъ одной и той же прямой, съ точностью выполняется циркулемъ и линейкой; между тѣмъ въ обѣихъ неевклидовыхъ геометріяхъ эта задача столь же сложна, какъ дѣленіе на произвольное число равныхъ частей угла въ евклидовой геометріи. Но зато въ евклидовой геометріи исчисленіе угловъ представляетъ собой предметъ особой дисциплины, тригонометріи, между тѣмъ какъ въ чисто проективной метрикѣ отрѣзки и углы измѣряются по совершенно одинаковымъ законамъ.

Этимъ мы должны закончить настоящее изслѣдованіе и относительно другихъ напрашивающихся здѣсь вопросовъ ограничиться указаніемъ литературы.

## § 19. Приложеніе: литературныя указанія.

Такъ какъ статья большой „Энциклопедіи математическихъ наукъ" объ основаніяхъ геометріи еще не появилась, то нижеслѣдующія литературныя указанія, полагаемъ, будутъ небезполезны[68]). Впрочемъ, эти указанія отнюдь не претендуютъ на полноту. Сочиненій, цитированныхъ въ текстѣ, мы здѣсь уже не называемъ.

### 1. Сочиненія библіографическія.

Libellus post saec. quam Jo. Bolyai de Bolya anno 1802, a. D. Claudiopoli natus est ad celebrandam memoriam eius immort. . . . editus, Claudiopoli, 1902. (Перечень всѣхъ сочиненій по неевклидовой геометріи).

Bonola, Bibliografia sui fondamenti della geometria noneuclidea. Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche, съ 1899 г.

E. Wölffing, Mathematischer Bücherschatz, I. Teil, Leipzig 1903. (Keine Zeitschriften!). См. въ частности: Abt. 2. Philosophie der Mathematik. Abt. 139. Prinzipien der Geometrie. Abt. 140. Parallelentheorie. Abt. 141. Nichteuklidische Geometrie. Abt. 142. $n$-dimensionale Geometrie.

### 2. Исторія и изслѣдованія основъ геометріи.

Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik. 1902 u. 1903.

Simon, M., Euklid und die sechs planimetrischen Bücher. Leipzig 1901.

Reye, Th., Die synthetische Geometrie im Altertum u. in der Neuzeit. Strassburg 1899. (2 Aufl.).

Kewitsch, G., Zweifel an der astronomischen u. geometrischen Grundlage des 60-Systems. Zeitschr. f. Assyriologie, 18, (1904), S. 73.

Stäckel u. Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis Gauss. Leipzig 1895.

Stäckel u. Engel, Urkunden zur Geschichte der Nichteuklidischen Geometrie. Leipzig 1899.

Schmidt u. Stäckel, Briefwechsel zwischen Gauss u. Bolyai. Leipzig 1899.

Stäckel, P., Untersuchungen a. d. absoluten Geometrie. Aus Joh. Bolyais Nachlass Math. u. Nat. Ber. Ungarn, 18. Bd. 1902.

Baltzer, R., Die Elemente der Mathematik. Leipzig 1883. Цѣнныя историческія замѣтки

---

[68]) Въ настоящее время эта статья уже вышла въ свѣтъ; но въ виду того, что большой энциклопедіей въ Россіи имѣютъ возможность воспользоваться лишь немногіе, мы сочли нужнымъ всѣ эти указанія сохранить.

### 3. Теорія познанія математики съ философской точки зрѣнія.

Wundt, W., Logik. 2 Aufl. Stuttgart, 1893.

Cassirer, E., Leibniz' System in seinen wissenschaftlichen Grundlagen. Marburg, 1902.

Stumpf, Über den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung. 1873.

Lipps, G. F., Untersuchungen über d. Grundlagen der Mathematik. Wundts Philos. Studien, Bd. 9.

Erdmann, Die Axiome der Geometrie, eine philos. Untersuchung der Riemann-Helmholtzschen Raumtheorie. Leipzig, 1877.

Baumann, Die Lehren von Raum, Zeit u. Mathematik. 1868/69.

De Tilly, Sur divers points de la philosophie des Sciences mathématiques. Classe des sciences de l'Ac. R. de Belgique (1901).

De Tilly, Essai sur ler principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique, Mémoires de la Société des sciences phys. et nat. de Bordeaux, 2ième série, t. 3. 1878.

### 4. Теорія познанія математики съ математической точки зрѣнія.

Ricci, Greg., Anfänge u. Entwickelung der neueren Auffassungen der Grundlagen der Geometrie. Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 1902.

Rosanes, J., Charakteristische Züge in der Entwickelung der Mathematik des 19. Jahrhunderts. Breslau, 1903.

Wilson, E. B., The so-called Foundations of Geometry. Arch. d. Math. u. Phys. (3) 6, 104—123.

Klein, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie; eine Revision der Prinzipien. Autograph. Vorlesung (1902).

См. также рецензію: Th. Vahlen, Arch. d. Math. u. Phys. (3), 7, 166—170.

Klein, F., Gutachten betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie. Phys.-math. Ges. Kasan, 1897. Abgedruckt: Math. Ann. 50.

Klein, F., Über Arithmetisierung der Mathematik. Göttinger Nachr. 1895.

Hölder, Anschauung und Denken in der Mathematik. Leipzig, 1900.

Hessenberg, G., Über die kritische Mathematik. Arch. d. Math. u. Phys (3), 7, Anhang, p. 21.

Poincaré, H., Wissenschaft u. Hypothese. Deutsch von F. und L. Lindemann. Leipzig, 1904.

Въ оригиналѣ: „La Science et l'hypothèse". Въ русскомъ переводѣ: Г. Пуанкарэ, „Наука и гипотеза". СПБ., 1906.

Poincaré, H., Der Wert der Wissenschaft. Deutsch von E. und H. Weber. Leipzig, 1906.

Въ оригиналѣ: H. Poincaré. „La valeur de la Science." Въ русскомъ переводѣ: Г. Пуанкарэ, „Цѣнность науки".

Liebmann, H. „Nichteuclidische Geometrie". Leipzig, 1905. (Sammlung Schubert. XLIX).

Vahlen, K. Th. Abstrakte Geometrie. Leipzig, 1905.

Couturat, E., Principes des mathematiques. Paris, 1906.

### 5. Работы въ направленіи Больэ и Лобачевскаго.

Stäckel, P., Johann Bolyais Raumlehre. Math. u. Nat. Ber. Ungarn. 19. Bd. 1903.

Kürschák, J. u. Stäckel, P., Johann Bolyais Bemerkungen über Nicolaus Lobatschefskys geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Math. u. Nat. Ber. Ungarn, 18. Bd. 1902.

Engel, Fr. N. I. Lobatschefsky, Zwei geometrische Abhandlungen, aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen u. einer Biographie des Verfassers, Leipzig, 1898/99.

Simon, M., Zu den Grundlagen d. Nichteuklidischen Geometrie. Strassburg. 1891.

Здѣсь обращено особое вниманіе на физіологическую сторону этой задачи, а потому эта книга можетъ быть отнесена также и къ отдѣлу № 6.
Simon, M., Die Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf absolute Geometrie. Strassburg, 1890.
Simon, M., Elementargeometrische Ableitung der Parallelenkonstruktion in der abs. Geometrie. Journ. f. r. u. a. Math. Bd. 107, Heft 1.
Simon, M., Die Geometrie der Zwischenebene. Jahresber. d. Math.-Ver. VII, 1.
Simon, M., Die Trigonometrie der abs. Geom. Journ. f. r. u. a. Math. Bd. 109, Heft 3.
Liebmann, H., Winkel und Streckenteilung in der Lobatschefskyschen Geometrie. Arch. d. Math. u. Phys. (3), 5, p. 213.
Liebmann, H. Рядъ важныхъ статей въ журналѣ: „Leipziger Sitzungsberichte".
Stäckel, P., Zur Nichteuklidischen Geometrie. Arch. d. Math. u. Phys. (3), 3, p. 187.
Engel, Fr., Zur Nichteuklidischen Geometrie. Leipzig. 1898.
Gauss, Werke, Bd. 8.

## 6. Работы въ направленіи Римана-Гельмгольца.

Riemann, B., Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Göttingen, 1854 (Werke, 2. Aufl. XIII, см. также XXII).
Helmholtz, Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen. Nachr. Kgl. Wiss. Ges. Göttingen, Bd. 2. Braunschweig, 1868.
Helmholtz, Über den Ursprung u. d. Bedeutung der geometrischen Axiome. Vorträge u. Reden, Bd. 2. Braunschweig, 1884.
Beltrami, Saggio di interpretazione della geometria noneuclidea. 1868.
Beltrami, Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante. Annali di Math., ser. II, 2. Bd. (1868).
Lie, S., Theorie der Transformationsgruppen. 3. Absch., V. Abt. Leipzig, 1893.
Russell, R. A. W., An. Essay on the foundations of geometry. Cambridge, 1897; см. принадлежащую Штеккелю (Stäckel) рецензію французскаго перевода, сдѣланнаго A. Cadenat, Arch. f. Math. u. Phys., (3) IV, S. 140 ff.
Brill, Bemerkungen über pseudosphärische Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen. Math. Ann. 26.
Schur, F., Über die Deformation der Räume konstanten Riemannschen Krümmungsmasses. Math. Ann. 27, S. 163—176 u. 537—567.
Schur, F., Über den Zusammenhang der Räume konstanten Riemannschen Krümmungsmasses mit den projektiven Räumen. Math. Ann. 27, S. 537 ff.
Voss, Zur Theorie des Riemannschen Krümmungsmasses. Math. Ann. 16.
Monro, S., On flexure of spaces. Proc. Lond. Math. Soc. 9, p. 171 ff.
Schwarzschild, Über das zulässige Krümmungsmass des Raumes. Vortrag auf der Versammlung der Astr. Ges. Heidelberg, 1900.

## 7. Системы евклидовой геометріи (Руководства)[68].

Veronese, Elementi di Geometria. Padova, 1897.
Veronese, Grundzüge der Geometrie, deusch von Schepp.
Peano, Sui fondamenti della Geometria. Rivista di Matematica, vol. IV (1894).
Ingrami, Elementi di Geometria per le scuole secondarie superiori. Bologna, 1899.

[68]) См. также В. Каганъ. Основанія геометріи. Томъ I. Опытъ обоснованія евклидовой геометріи. Томъ II. Историческій очеркъ развитія ученія объ основаніяхъ геометріи (изданіе распродано).

Pieri, Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo. Mem. della Acc. di Torino, 1899.

Enriques, Questioni riguardanti la geometria elementare. Bologna, 1900.

Veronese, G. Nozioni elementari di Geometria intuitiva ad uso dei ginnasi inferiori. Verona-Padova, 1901.

Thieme, Die Umgestaltung der Elementargeometrie. Progr.-Abh. Posen. 1900.

Литературныя указанія относительно теоріи подобія и ученія объ измѣреніи поверхностей и объемовъ мы считаемъ болѣе подходящимъ привести при изложеніи планиметріи и стереометріи.

## 8. Проективная геометрія и проективная метрика.

Cayley, A sixth memoir upon quantics. Phil. Trans., vol. 149 (1859); Coll. pap. vol. 2

Salmon-Fiedler, Analytische Geom. d. Kegelschnitte, II. Bd., Kap. XX.

Klein, F., Arbeiten über Nichteuklidische Geometrie: Math. Ann. 4 (1871), S. 573—625; 5 (1873), S. 112—145; 6 (1873), S. 112; 7 (1874), S. 531—537; 37 (1890). S. 544—572.

Darboux, Math. Ann. 17.

Klein, Vorlesungen über Nichteuklidische Geometrie (литографированныя лекціи).

Killing, Die Nichteuklidische Raumformen in analitischer Behandlung. Leipzig, 1885.

Полное изложеніе всѣхъ трехъ геометрій съ проективной точки зрѣнія даетъ:

Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Bd. II, Teil 1. Leipzig, 1891.

Schor, D. Neuer Beweis eines Satzes aus den „Grundlagen der Geometrie“ von Hilbert. Math. Ann. 58, S. 427.

Wiener, H., Über die Grundlagen u. den Aufbau der Geometrie. Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. Bd. I, S. 45 ff. u. Bd. III, S. 70 ff.

Schur, F., Über den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie. Math. Ann. 51.

Schur, F., Lehrbuch der analytischen Geometrie. Leipzig, 1898.

Zeuthen, Sur le fondement de la Géometrie projektive. Comptes rendus. 1898, p. 213.

Hessenberg, G., Desarguesscher Satz u. Zentralkollineation. Arch. d. Math. u. Phys. (3), 6, S. 123—128.

Hessenberg, G., Über die projektive Geometrie. Arch. d. Math. u. Phys. (3), 5, Anhang, S. 35.

Hessenberg, G., Über Beweise von Schnittpunktsätzen. Arch. d. Math. u. Phys. (3), 3, S. 121 u. S. 316.

ГЛАВА IV.

# Планиметрія.

## § 20. Основныя предложенія.

**1.** Геометрія, по Платону *), есть „познаніе вѣчно сущаго", т. е., въ противоположность механикѣ, астрономіи и физикѣ, это есть познаніе того пространственнаго распорядка, который сохраняется при всѣхъ происходящихъ перемѣнахъ. Это познаніе мы почерпаемъ работой чистой мысли изъ немногихъ основныхъ законовъ и аксіомъ, при посредствѣ которыхъ между основными пространственными образами, — именно, между точками, прямыми и плоскостями, —устанавливаются основныя регулирующія соотношенія. Этихъ основныхъ образовъ достаточно, чтобы при ихъ посредствѣ, помощью чисто отвлеченныхъ опредѣленій, однозначно описывать формы чувственно воспринимаемыхъ нами образовъ и надѣлять ихъ закономѣрностью такъ, чтобы каждый, кому эти формы не были извѣстны, имѣлъ возможность ихъ воспроизвести, исходя только изъ опредѣленій, совершенно независимо отъ опыта; но чувственно воспринимаемая нами форма самихъ основныхъ образовъ не поддается опредѣленію средствами чистаго мышленія. Представленіе о точкѣ, прямой и о плоскости можетъ быть вызвано и передано намъ только при помощи подходящихъ моделей и осуществляетъ эти идеи лишь весьма несовершенно.—Воззрѣніе, по Платону, есть параклетъ, возбуждающій мышленіе, его подвижной, наводящій помощникъ, часто предвосхищающій результатъ. Оно находится въ такомъ же отношеніи къ чистому мышленію, какъ напримѣръ, искусство къ наукѣ; подобно задаткамъ къ искусству, оно поддается развитію и усовершенствованію и уже именно поэтому не представляетъ собой послѣдней инстанціи въ дѣлѣ установленія геометрической истины. Воззрѣніе не можетъ замѣнить мышленія посредствомъ понятій; напротивъ, такое мышленіе должно регулировать воззрѣніе, дѣлать его болѣе точнымъ. Постояннымъ упражненіемъ можно развить въ себѣ способность къ воз-

*) Politeia VII, 527 b; *τοῦ γὰρ ἀεὶ ὄντος ἡ γεωμετρικὴ γνῶσίς ἐστιν.*

зрѣнію не только въ области геометріи, но и въ области ариѳметики, графической статики и физики; безъ него мышленіе было бы безпомощнымъ и безплоднымъ.

2. Построеніе учебной системы евклидовой геометріи существенно зависитъ отъ того, какую позицію мы займемъ относительно понятія о параллелизмѣ. Античному опредѣленію, согласно которому параллельными просто называются такія прямыя на плоскости, которыя вовсе не пересѣкаются, въ настоящее время все настойчивѣе противоставляется проективная точка зрѣнія, согласно которой всѣ безъ исключенія прямыя, расположенныя въ одной плоскости, другъ друга пересѣкаютъ, но что въ случаѣ параллельныхъ линій точка пересѣченія не можетъ быть достигнута конечнымъ числомъ шаговъ, имѣющихъ конечную д л и н у и равныхъ между собой съ точки зрѣнія евклидовой м е т р и к и. Эти двѣ точки зрѣнія старается примирить третья, номиналистическая, которая приписываетъ параллельнымъ прямымъ „несобственную" точку пересѣченія и этимъ о б о р о т о м ъ р ѣ ч и достигаетъ законченной закономѣрности проективной точки зрѣнія, не принимая собственно с у щ е с т в о в а н і я (въ понятіи) точки пересѣченія. Къ этому нужно прибавить, что признавать абсолютное отсутствіе пересѣченія параллельныхъ линій въ геометріи нѣтъ необходимости, и нигдѣ мы этимъ не пользуемся; всюду мы опираемся только на недоступность точки пересѣченія въ смыслѣ метрики[1]). Съ чисто научной стороны проективная точка зрѣнія на параллелизмъ имѣетъ несомнѣнное преимущество, ибо она проще античной и дѣлаетъ законъ, по которому двѣ прямыя на плоскости всегда пересѣкаются, справедливымъ б е з ъ в с я к и х ъ и с к л ю ч е н і й. Законы же, недопускающіе исключеній, должны, конечно, всегда составлять идеалъ науки, основанной на чистыхъ понятіяхъ. Съ проективной точки зрѣнія, параллелизмъ теряетъ всякую тѣнь таинственнаго и непонятнаго, онъ становится одной изъ внутреннихъ составныхъ частей метрики, противъ которой критика теоріи познанія не въ состояніи ничего возразить; аксіома о параллельности спускается на степень п р а в и л а — установить метрику такимъ образомъ, чтобы нѣкоторой опредѣленной плоскости невозможно было достичь, слѣдуя прямолинейному пути и исходя изъ какой бы то ни было точки, не принадлежащей этой плоскости, конечнымъ числомъ шаговъ, имѣющихъ при этой метрикѣ равныя длины. Абстрактно такое исключительное положеніе можетъ быть присвоено любой плоскости; въ частности, на каждой прямой за „безконечную удаленную" можетъ быть принята любая точка, которая съ точки зрѣнія метрики, согласованной съ тѣмъ, что доступно нашему зрѣнію и нашему осязанію, лежитъ на конечномъ отъ насъ раз-

[1]) Мы рѣшительно не можемъ съ этимъ согласиться: во всякомъ случаѣ, нужна совершенно иная постановка всей дисциплины, чтобы эта точка зрѣнія была пріемлема.

стоянiи (ср. фиг. 75 въ гл. III). Метрику можно всегда установить такъ, чтобы любое тѣло, ограниченное шестью плоскостями, въ понятiи представляло собой „кубъ“; если заданъ такой „кубъ“, то этимъ конструктивно уже установлена метрика, такъ что мы абстрактно можемъ выполнять совершенно точныя построенiя метрическаго характера. Если мы положимъ въ основу послѣднихъ „дѣйствительный“ кубъ, то мы получимъ дѣйствительное евклидово мѣроопредѣленiе.

**3.** Съ изложенной точки зрѣнiя, аксiома о параллельности представляетъ собой какъ бы вторженiе въ свободу проективной геометрiи, отдающее параболической метрикѣ предпочтенiе передъ гиперболической и эллиптической. Какъ было уже выяснено выше въ главѣ III, проективная геометрiя имѣетъ возможность собственными средствами воспроизвести всѣ три мѣроопредѣленiя. Такимъ образомъ, съ чисто научной точки зрѣнiя, проективная геометрiя могла бы считаться единственно истинной элементарной геометрiей, и ее можно было бы также, пользуясь непрерывностью, изложить вполнѣ элементарно. Но по настоящее время всѣ попытки водворить проективную геометрiю на мѣсто традицiонной системы потерпѣли крушенiе; мы вынуждены вслѣдствiе этого отказаться отъ строго научной точки зрѣнiя. Въ частности, мы должны отказаться отъ того, чтобы смотрѣть на конгруэнтность и на параллелизмъ, какъ на проблемы, которыя геометрiя должна разрѣшить собственными средствами, путемъ построенiя собственной метрики; напротивъ, мы всѣ эти вещи постулируемъ, принимая аксiомы Гильберта; строго говоря, требовать при помощи аксiомъ слѣдовало бы только то, чего нельзя ввести, какъ положенiя, которыя наша мысль сама ставитъ. При помощи аксiомъ конгруэнтности мы требуемъ того, что можно было бы дать при помощи аксiомъ сопряженiя, расположенiя (въ проективной модификацiи) и непрерывности; что особенно важно, въ аксiомахъ конгруэнтности, въ частности, коренится основная теорема геометрiи положенiя. Это отнюдь не находится въ противорѣчiи съ тѣмъ, что Гильбертъ въ § 11 своихъ „Основанiй геометрiи“ доказалъ независимость аксiомъ конгруэнтности. Въ указанномъ мѣстѣ Гильбертъ показываетъ только, что по введенiи его аксiомъ I, II, IV и V, мы еще сохраняемъ почти полную свободу въ выборѣ метрики; если бы мы опустили также аксiому IV, то мы могли бы еще выбирать, между прочимъ, между параболической, эллиптической и гиперболической метрикой. Именно аксiомы III и IV Гильберта подчиняютъ проективную геометрiю такимъ требованiямъ, которыя заставляютъ изъ многообразныхъ мѣроопредѣленiй, какiя могутъ быть построены при помощи остальныхъ аксiомъ, принять одну опредѣленную. Только въ этомъ смыслѣ аксiомы конгруэнтности не зависятъ отъ остальныхъ.

**4.** Въ аксiомахъ конгруэнтности коренится далѣе и теорема Дезарга, единственное предложенiе плоской проективной геометрiи, которое можетъ быть доказано только при помощи пространственныхъ соображеній. Поэтому планиметрію, къ которой мы теперь обращаемся, возможно обосновать при помощи аксіомъ Гильберта, не покидая плоскости. При этомъ выборѣ аксіомъ геометрія оказывается въ такой мѣрѣ подчиненной идеѣ измѣренія, что ее часто опредѣляютъ, какъ науку о пространственныхъ величинахъ. Въ дѣйствительности же, метрическая геометрія представляетъ собой только частный случай чисто проективной геометріи. — Такъ, напримѣръ, въ „Геометріи положенія" Райэ предложенія евклидовой геометріи, опирающіяся на метрическія соображенія, появляются только въ видѣ приложеній, и то въ видѣ частныхъ случаевъ гораздо болѣе общихъ теоремъ. Синтетическая геометрія въ своихъ неметрическихъ предложеніяхъ пользуется числомъ, только какъ количествомъ предметовъ (multitudo), а не какъ результатомъ измѣренія (magnitudo)*); между тѣмъ какъ проективная метрика приводитъ къ высшей наиболѣе чистой точкѣ зрѣнія на „число", къ точкѣ зрѣнія строго качественной, которая подчиняетъ себѣ, съ одной стороны, обыкновенное число, а, съ другой стороны, — величину отрѣзка; проективная метрика воспроизводитъ „сумму", „разность", „произведеніе" и „частное" отрѣзковъ чисто конструктивно, безъ посредства измѣряющихъ ихъ чиселъ, какъ это было показано въ § 18.

**5.** Гильбертовы аксіомы евклидовой геометріи перечислены и подробно разобраны въ двухъ первыхъ главахъ. Было бы слишкомъ утомительно, если бы мы попытались развить здѣсь для учебныхъ цѣлей систему элементарной геометріи, удовлетворяющую болѣе строгимъ требованіямъ и основанную только на понятіяхъ; для этого неизбѣжно пришлось бы повторять предложенія, изложенныя въ предыдущихъ параграфахъ, — да и самая система необходимо была бы пространнѣе обыкновенныхъ учебниковъ элементарной геометріи. Къ тому же и самое изслѣдованіе основаній геометріи еще находится въ полномъ ходу, а предложенныя системы еще недостаточно элементарны. Вслѣдствіе этого мы дадимъ лишь краткій рефератъ объ основныхъ предложеніяхъ и только мѣстами, гдѣ это неизбѣжно, войдемъ въ бóльшія подробности.

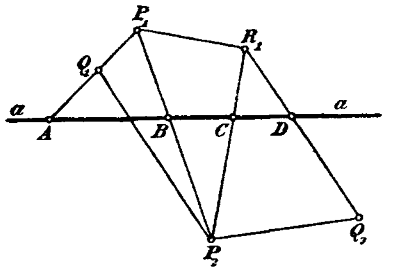
Наиболѣе важнымъ слѣдствіемъ аксіомъ расположенія является слѣдующее предложеніе.

Предложеніе 1. Плоскость раздѣляется каждой прямой *a*, въ ней расположенной, на двѣ области, которыя называются двумя „сторонами" прямой и обладаютъ слѣдующими свойствами: каждая точка плоскости, кото-

*) Это различеніе ведетъ свое начало отъ Лейбница и Ньютона. Лейбницъ подошелъ очень близко къ той качественной точкѣ зрѣнія на число, какъ на систему положеній для выраженія взаимоотношеній, которую мы встрѣтили въ § 18. Ср. Newton, Arithm. univ., Sect. I, cap. 2 и сочиненіе Кассирера, цитированное въ § 19.

рая не лежитъ на прямой $a$, принадлежитъ одной и только одной изъ этихъ областей; отрѣзокъ, соединяющій двѣ точки, принадлежащія одной и той же области, не встрѣчаетъ прямой $a$; отрѣзокъ же, соединяющій любую точку одной области съ любой точкой другой области, встрѣчаетъ прямую $a$ въ одной точкѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $P_1$ будетъ произвольная точка плоскости, не лежащая на прямой $a$, и пусть $A$ будетъ точка этой прямой; въ такомъ случаѣ, согласно аксіомѣ $\mathrm{II}_2$ Гильберта, отрѣзокъ $AP_1$ содержитъ такую точку $Q_1$, что точка $A$ не принадлежитъ отрѣзку $P_1Q_1$. Мы утверждаемъ, что точки $P_1$ и $Q_1$, въ смыслѣ предложенія 1-го, принадлежатъ одной и той же области. Дѣйствительно, если $R_1$ есть такая точка, что отрѣзокъ $P_1R_1$ не встрѣчаетъ прямой $a$, то и отрѣзокъ $Q_1R_1$ не можетъ встрѣтить этой прямой (аксіома $\mathrm{II}_4$ въ примѣненіи къ треугольнику $P_1Q_1R_1$). Если теперь $B$ есть произвольная точка прямой $a$, хотя бы даже и совпадающая съ $A$, то на прямой $P_1B$, въ силу аксіомы $\mathrm{II}_2$, имѣется также такая точка $P_2$, что точка $B$ принадлежитъ отрѣзку $P_1P_2$. Такая точка $P_2$ принадлежитъ второй области, ибо отрѣзокъ $P_2R_1$, напримѣръ, долженъ встрѣчать прямую $a$ въ нѣкоторой точкѣ $C$, въ силу аксіомы $\mathrm{II}_4$ въ ея примѣненіи къ треугольнику $P_1P_2R_1$; если же точка $Q_2$ принадлежитъ той же области, что и $P_2$, а, слѣдовательно, отрѣзокъ $P_2Q_2$ не содержитъ ни одной точки прямой $a$, то отрѣзокъ $R_1Q_2$ долженъ имѣть съ прямой $a$ общую точку (аксіома $\mathrm{II}_4$ въ примѣненіи къ треугольнику $P_2Q_2R_1$). Такимъ образомъ, точки $P_1, Q_1, R_1$ принадлежатъ одной, $P_2, Q_2$ и т. д. — другой области.




Фиг. 86.

Въ эллиптической геометріи это предложеніе уже несправедливо; эллиптическая плоскость представляетъ собой поверхность, возвращающуюся въ себя самое, которая прямой линіей не разлагается на двѣ раздѣльныя области.

**6.** Какъ изъ аксіомъ конгруэнтности вытекаютъ основныя предложенія о конгруэнтности, можно прочитать у Гильберта. Эти предложенія гласятъ:

Два треугольника конгруэнтны, если слѣдующіе элементы одного треугольника равны соотвѣтственнымъ элементамъ другого треугольника:

I. либо двѣ стороны и заключенный между ними уголъ;

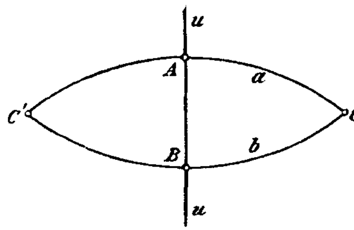
II. либо сторона и прилежащіе два угла;

III. **либо три стороны;**

IV. **либо двѣ стороны и уголъ, противолежащій большей изъ нихъ.**

Интересное обоснованіе геометріи безъ помощи понятія объ углѣ недавно далъ Моллерупъ (Mollerup)*); оно сравнительно просто приводитъ къ предложеніямъ о конгруэнтности треугольниковъ. Естественнѣе всего выводить конгруэнтность изъ симметріи, такъ какъ послѣдняя имѣетъ происхожденіе болѣе первичное, нежели конгруэнтность. Мы встрѣчаемъ ее, какъ основной принципъ строительства у наиболѣе первобытныхъ народовъ. На аксіомахъ симметрію обосновалъ, между прочимъ, Пеано**). Лейбницъ вывелъ теоремы о конгруэнтности треугольниковъ изъ „аксіомы", что двѣ фигуры конгруэнтны, если соотвѣтственно конгруэнтны части, которыми эти фигуры опредѣляются***).

7. Параллелизмъ можетъ быть введенъ слѣдующими соображеніями. Въ двухъ точкахъ $A$ и $B$ прямой $u$ возставимъ перпендикуляры $a$ и $b$. Если бы послѣдніе пересѣкались въ точкѣ $C$, которая опредѣляла бы на прямыхъ $a$ и $b$ конечные отрѣзки $CA$ и $CB$, то въ евклидовой и гиперболической геометріи можно было бы подобрать точку $C'$ на прямой $a$ такимъ образомъ, чтобы точка $A$ принадлежала отрѣзку $CC'$, и чтобы въ то же время $AC' \cong AC$. Треугольники $BAC$ и $BAC'$ были бы въ такомъ случаѣ конгруэнтны, ибо $C'A \cong CA$, $AB \cong AB$, $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle BAC'$, а потому мы имѣли бы также $\sphericalangle C'BA \cong \sphericalangle CBA$ и эти углы были бы прямыми, вслѣдствіе этого отрѣзокъ $C'B$ лежалъ бы на прямой $BC$. Прямыя $a$ и $b$ имѣли бы въ такомъ случаѣ двѣ точки пересѣченія, что противорѣчитъ Гильбертовой аксіомѣ $\mathrm{I}_2$. Однако, этого противорѣчія не было бы, если бы точка $C'$ совпадала съ точкой $C$, такъ что прямая $u$ не раздѣляла бы плоскости, какъ того требуетъ предложеніе 1 п. 6 (эллиптическая геометрія), а также I) если бы точки $C$ и $C'$ были безконечно удалены [2]) и, наконецъ, II) если бы прямыя $a$ и $b$ вовсе




Фиг. 87.

*) Mollerup, J., Studier over den plane Geometris Aksiomer (Diss.), Kjöbenhavn 1903 und Math. Ann. 58, 479.

**) Peano, Sui fondamenti della Geometria, Rivista di Matematica, vol. IV, 55 (1894).

***) Si determinantia sunt congrua, talia erunt etiam determinata posito scilicet eodem determinandi modo (C. J. Gerhardt, Leibnizens Math. Schriften, V, 172).

[2]) Мы вынуждены повторить здѣсь то, на что указывали въ предыдущемъ примѣчаніи; вѣдь Гильбертъ въ аксіомахъ сопряженія ничего не говоритъ о конечныхъ и безконечно большихъ разстояніяхъ; да онъ и не можетъ объ этомъ

не пересѣкались. Если точка $C$ лежитъ безконечно далеко, такъ что точки $A$ и $C$ уже не опредѣляютъ отрѣзка на прямой $a$, который можно было бы строить по аксіомамъ конгруэнтности, то точку $C'$ нельзя ввести. Случаи I) и II) свойственны параболической и гиперболической геометріи. Смотря по тому, положимъ ли мы въ евклидовой геометріи въ основу ученія о параллелизмѣ проективную или античную точку зрѣнія, будетъ имѣть мѣсто соотвѣтственно случай I) или II), а другой будетъ исключенъ. Мы получаемъ, такимъ образомъ, въ евклидовой геометріи предложеніе:

Предложеніе 2. Двѣ прямыя $a$ и $b$ (въ одной плоскости), перпендикулярныя къ третьей, параллельны.

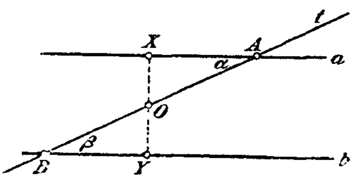
Это предложеніе допускаетъ въ евклидовой геометріи обращеніе:

Предложеніе 3. Если изъ двухъ параллельныхъ прямыхъ $a$ и $b$ (въ одной плоскости), первая перпендикулярна къ третьей прямой $u$, то и вторая перпендикулярна къ послѣдней.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ, по аксіомѣ о параллельности, черезъ точку $A$ прямой $a$ не могутъ быть проведены двѣ прямыя $a$ и $u$, параллельныя прямой $b$, а между тѣмъ прямая $a$ параллельна послѣдней, то прямая $u$ должна пересѣкать прямую $b$ въ метрически доступной точкѣ $B$; вмѣстѣ съ тѣмъ перпендикуляръ $b'$, возставленный изъ точки $B$ къ прямой $u$, согласно предложенію 2, параллеленъ прямой $a$, а потому, согласно аксіомѣ о параллельности, долженъ совпасть съ прямой $b$.

Предложеніе 4. Двѣ прямыя $a$ и $b$, перпендикулярныя къ третьей прямой $c$ той же плоскости, параллельны,

ибо онѣ имѣютъ общій перпендикуляръ $u$. Если поэтому прямыя $a$ и $b$ расположены въ одной и той же плоскости и параллельны, а третья прямая $t$ встрѣчаетъ прямую $a$ въ точкѣ $A$ (см. фиг. 88), то она встрѣчаетъ также прямую $b$ въ нѣкоторой точкѣ $B$. Если мы опустимъ изъ середины $O$ отрѣзка $AB$ перпендикуляръ $OX$ на прямую $a$, то послѣдній, согласно предложенію 3, будетъ также перпендикуляренъ къ прямой $b$; пусть $Y$ будетъ точка пересѣченія прямыхъ $OX$ и $b$. Вмѣстѣ съ тѣмъ прямоугольные треугольники $OXA$ и $OYB$ будутъ конгруэнтны, а потому $\sphericalangle XAO$ (или $\alpha$) будетъ равенъ $\sphericalangle YBO$ (или $\beta$). Эти углы, вслѣдствіе своего расположенія относительно прямыхъ $a$, $b$, $t$, называются внутренними накрестъ лежащими углами.



Фиг. 88.

говоритъ, такъ какъ для установленія самаго этого понятія уже нужна разработанная метрика. Вообще, такое легкое отношеніе къ безконечно удаленнымъ элементамъ представляетъ собой весьма скользкій путь.

Предложенiе 5. Двѣ параллельныя прямыя при пересѣченiи съ третьей, образуютъ равные внутреннiе накрестъ лежащiе углы.

Обратно:

Предложенiе 6. Если углы $\alpha$ и $\beta$ равны, то линiи параллельны.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы черезъ середину $O$ отрѣзка $AB$ проведемъ прямую и $X$, $Y$ будутъ точки ея пересѣченiя съ прямыми $a$ и $b$, то

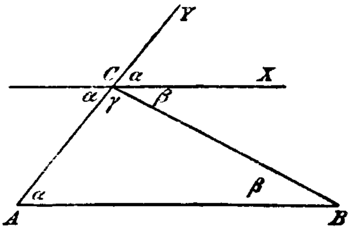
$$\sphericalangle\, XOA = \sphericalangle\, YOB,\ \alpha = \beta,\ OA = OB;$$

поэтому $\triangle\, OXA = \triangle\, OYB$, $\sphericalangle\, OXA = \sphericalangle\, OYB$; если прямая $OX$ перпендикулярна къ прямой $a$, то она перпендикулярна также къ прямой $b$, а потому прямыя $a$ и $b$ параллельны (предл. 2).

Это основныя предложенiя ученiя о параллельныхъ линiяхъ; непосредственнымъ слѣдствiемъ изъ нихъ является характерное для евклидовой геометрiи предложенiе:

Предложенiе 7. Сумма угловъ въ треугольникѣ равна $2d$.

Въ самомъ дѣлѣ, черезъ вершину $C$ треугольника $ABC$ (фиг. 89) проведемъ прямую, параллельную основанiю $AB$; въ такомъ случаѣ углы $\alpha$ и $\beta$ при вершинѣ $C$ будутъ накрестъ лежащими относительно угловъ $CAB$ и $CBA$, а потому сумма угловъ, какъ это видно при вершинѣ $C$, будетъ дѣйствительно равна выпрямленному углу. Если вмѣсто угла $\alpha$ при вершинѣ $C$ возьмемъ уголъ $XCY$, вертикальный относительно $\alpha$, то получимъ:



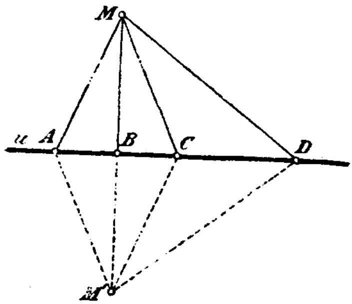
Фиг. 89.

Предложенiе 8. Каждый внѣшнiй уголъ треугольника равенъ суммѣ внутреннихъ, съ нимъ несмежныхъ угловъ: $\sphericalangle\, YCB = \alpha + \beta$.

**8.** Чтобы имѣть возможность строить геометрическiе образы, евклидова геометрiя должна стараться возможно скорѣе придти къ окружности, между тѣмъ какъ чисто проективная геометрiя выполняетъ основныя свои построенiя линейкой, т. е. исключительно при помощи прямой линiи. Окружность опредѣляется, какъ геометрическое мѣсто точекъ на плоскости, отстоящихъ на одно и то же разстоянiе отъ нѣкоторой неподвижной точки — ея центра. Графически невозможно воспроизвести окружность исключительно на основанiи этого опредѣленiя [3]). Для этого нужно располагать особымъ инструментомъ,

[3]) Вообще графически нельзя, конечно, построить ничего, опираясь исключительно на опредѣленiя; для этого всегда потребуется инструментъ.

при помощи котораго можно переносить равные отрѣзки, — циркулемъ. Однако, выше мы видѣли, что въ плоскости циркуль безусловно необходимъ только для нанесенія одной единственной окружности, при посредствѣ которой остальныя окружности воспроизводятся уже исключительно при помощи прямыхъ линій; но даже и въ этой окружности циркуль необходимъ лишь для того, чтобы установить два „взаимно перпендикулярныхъ“ и „равныхъ“ діаметра. По этимъ частямъ при помощи одной только линейки можно уже построить окружность; иными словами, по даннымъ діаметрамъ возможно исключительно при помощи прямыхъ линій построить произвольное число точекъ и касательныхъ кривой. Если бы мы захотѣли при развитіи геометріи дѣйствительно ограничить себя этими требованіями, то мы были бы вынуждены сильно уклониться отъ установившагося учебнаго плана геометріи. Мы останемся, поэтому, при пріемахъ Евклида, который предполагаетъ равенство отрѣзковъ повсюду на плоскости даннымъ вмѣсто того, чтобы его устанавливать на основаніи понятій. Окружность „пересѣкается“ каждой прямой, проходящей черезъ ея центръ, въ двухъ точкахъ; это значитъ, что прямая содержитъ двѣ точки окружности (аксіома $III_1$); ограниченный ими отрѣзокъ называется „діаметромъ“, или „поперечникомъ“, окружности, а отрѣзокъ отъ центра до одной изъ точекъ окружности называется „радіусомъ“, или „полупоперечникомъ“.




Фиг. 90.

Прямая $u$, не проходящая черезъ центръ окружности $M$, также можетъ имѣть съ окружностью не болѣе двухъ общихъ точекъ. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что точка $A$ окружности (фиг. 90) лежитъ на прямой $u$, а $D$ есть любая другая точка той же прямой; разсмотримъ треугольникъ $AM'D$, конгруэнтный треугольнику $AMD$, вершина котораго $M'$ расположена по другую сторону прямой $u$. Существованіе этого треугольника легко доказать, основываясь на аксіомахъ конгруэнтности; легко также обнаружить, что прямая $MM'$ перпендикулярна къ прямой $u$; пусть $B$ будетъ точка, въ которой она пересѣкаетъ послѣднюю. Если теперь $C$ есть точка прямой $u$, отличная отъ $A$ и расположенная такимъ образомъ, что $BC \cong AB$ (аксіома $III_1$), то треугольникъ $MCB \cong MAB$, а потому $MC = MA$, т. е. $C$ также представляетъ собою точку окружности, совпадающую съ $A$ лишь въ томъ случаѣ, если послѣдняя, въ свою очередь, совпадаетъ съ основаніемъ $B$ перпендикуляра $MM'$. Если бы на прямой $u$ лежала еще одна точка окружности, — скажемъ, $D$, — то мы бы имѣли: $MD \cong MC$, $M'D \cong M'C$,

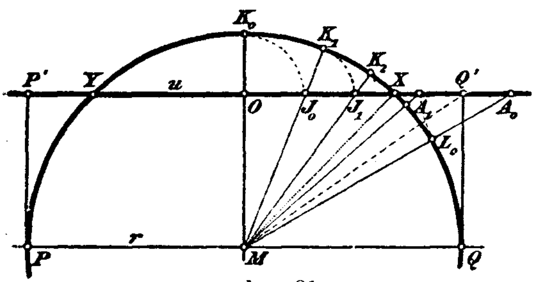
$MM' \cong MM'$; поэтому треугольникъ $MCM' \cong MDM'$ по третьему предложенію о конгруэнтности треугольниковъ; но въ такомъ случаѣ оказалось бы, что $\sphericalangle BMC \cong \sphericalangle BMD$, что противорѣчитъ аксіомѣ $\mathrm{III}_4$, если только точка $D$ не совпадаетъ ни съ $A$ ни съ $C$. Этимъ, помимо высказаннаго утвержденія, еще доказано, что каждая прямая, которая перпендикулярна къ радіусу въ конечной его точкѣ $B$, т. е. въ той точкѣ радіуса, которая принадлежитъ окружности, не имѣетъ съ окружностью другихъ общихъ точекъ. Такого рода прямыя называются „касательными", а точка $B$ называется „точкою касанія". Для окружности (а также и для всѣхъ вообще кривыхъ второго порядка) касательныя могутъ быть опредѣлены просто, какъ прямыя, имѣющія съ окружностью одну общую точку. Трудности, съ которыми связано опредѣленіе понятія о касательной, выступаютъ только, когда рѣчь идетъ о кривыхъ болѣе высокаго порядка.

Если бы на нашей фигурѣ отрѣзокъ $MB$ былъ больше радіуса окружности $r$, то для каждой точки $A$ прямой $u$, отличной отъ $B$, во всякомъ случаѣ, было бы $MA > r$ *); это значитъ: если разстояніе (такъ называютъ перпендикуляръ $MB$) прямой $u$ отъ центра окружности больше радіуса, то прямая не имѣетъ съ окружностью вовсе общихъ точекъ; если же это разстояніе равно радіусу, то прямая касается окружности. Такимъ образомъ, пересѣченіе можетъ имѣть мѣсто только, если разстояніе меньше радіуса; что въ этомъ послѣднемъ случаѣ пересѣченіе дѣйствительно всегда происходитъ, это доказать не такъ просто. Пусть $M$ будетъ центръ окружности, $O$ основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ точки $M$ на данную прямую $u$ (фиг. 91); положимъ, что $OM < r$. Если $K_0$ есть конечная точка радіуса $MO$, и мы отложимъ на прямой $u$ отрѣзокъ $OJ_0 \cong OK_0$, то $MJ_0$ будетъ больше $MO$, но все же $MJ_0 < r$, согласно предложенію, которое также попутно получается при доказательствѣ о конгруэнтности треугольниковъ и заключается въ томъ, что каждая сторона треугольника меньше суммы двухъ другихъ сторонъ и больше ихъ разности. Если такимъ же образомъ $K_1$ есть конечная точка радіуса $MJ_0$, и на прямой $u$ на продолженіи отрѣзка $OJ_0$ мы отложимъ отрѣзокъ $J_0J_1 \cong J_0K_1$, то въ силу той же вспомогательной теоремы $MJ_1 > MJ_0 > MO$, но все еще $MJ_1 < r$. Повторяя этотъ рядъ заключеній, мы получимъ на окружности точки $K_2, K_3, \ldots$, а на прямой $u$ отрѣзки $J_1J_2 \cong J_1K_2$, $J_2J_3 \cong J_2K_3, \ldots$, а вмѣстѣ съ тѣмъ

$$MO < MJ_0 < MJ_1 < MJ_2 < MJ_3 < \ldots < r. \qquad (a)$$

*) Въ силу предложенія, что въ треугольникѣ противъ бо̀льшаго угла лежитъ также и бо̀льшая сторона; это предложеніе выводится совмѣстно съ предложеніями о конгруэнтности треугольниковъ въ качествѣ леммы.

Точно такъ же и для любой другой точки $S$ отрѣзковъ $OJ_0, OJ_1, OJ_2, \ldots$ имѣемъ мѣсто соотношеніе $MS < r$. Съ другой же стороны не трудно показать существованіе на прямой $u$ и такихъ точекъ, разстояніе которыхъ отъ $M$ больше, нежели $r$; въ самомъ дѣлѣ, прямая, проходящая черезъ точку $M$ параллельно прямой $u$, какъ діаметръ, должна имѣть съ окружностью двѣ общія точки $P$ и $Q$; если мы изъ послѣднихъ опустимъ перпендикуляры $PP'$ и $QQ$ на прямую $u$, то въ силу вспомогательнаго предложенія, которымъ мы выше пользовались, $MP' > r$, $MQ' > r$. Если $A_0$ есть точка прямой $u$, для которой $OA_0 > OQ'$, то тѣмъ болѣе $MA_0 > r$. На прямой $u$ оказываются, такимъ образомъ, двѣ группы точекъ: „внутреннія“ точки, которыхъ разстоянія отъ $M$ меньше, чѣмъ $r$, и „внѣшнія“ точки, разстоянія которыхъ отъ $M$ больше, чѣмъ $r$. Если мы на отрѣзкѣ $OA_0$ отложимъ отрѣзокъ $A_0A_1 \cong A_0L_0$, гдѣ $L_0$ есть точка окружности, лежащая на радіусѣ $MA_0$, то $MA_1$ будетъ также больше, нежели $r$, но $MA_1 < MA_0$. Повторяя это построеніе, мы получимъ на прямой $u$ точки $A_0$, $A_1$, $A_2$, для которыхъ



Фиг. 91.

$$MA_0 > MA_1 > MA_2 > \ldots > r. \qquad \text{(b)}$$

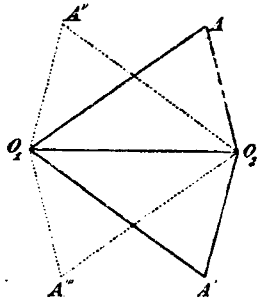
Такимъ образомъ, точки $J_n$ и $A_n$ съ возрастаніемъ индекса $n$ приближаются къ одной и той же предѣльной точкѣ $X$, для которой $MX = r$. Этотъ результатъ можно съ точностью вывести изъ соотношеній (a) и (b), какъ на основаніи аксіомы Архимеда[4]), такъ и на основаніи аксіомы Дедекинда.

Но такъ какъ точки пересѣченія прямой съ окружностью въ томъ случаѣ, когда не имѣетъ мѣста касаніе, должны быть парныя, то **каждая прямая въ плоскости окружности, разстояніе которой отъ центра меньше радіуса, встрѣчаетъ послѣднюю въ двухъ точкахъ.**

**9.** **Двѣ окружности не могутъ имѣть болѣе двухъ общихъ точекъ.** Въ самомъ дѣлѣ, если $O_1$ и $O_2$ суть центры двухъ окружностей (фиг. 92), а $A$ есть общая точка обѣихъ окружностей, то можно тотчасъ же указать другую общую точку $A'$: согласно аксіомѣ $\mathrm{III}_4$, по другую

[4]) Мы полагаемъ, что это можно вывести только при помощи аксіомы Дедекинда, — при помощи аксіомы Архимеда этого сдѣлать нельзя.

сторону прямой $O'O_2$ существуетъ уголъ, конгруэнтный углу $O_2O_1A$; на его сторонѣ, отличной отъ $O_1O_2$, имѣется такая точка $A'$, что $O_1A' \cong O_1A$. Въ такомъ случаѣ, согласно первой теоремѣ о конгруэнтности треугольниковъ, имѣемъ $O_1A'O_2 \cong O_1AO_2$, и потому не только $O_1A' \cong O_1A$, но и $O_2A' \cong O_2A$; иными словами, точка $A'$ лежитъ на обѣихъ окружностяхъ. Этотъ выводъ теряетъ свою силу только въ томъ случаѣ, если $O_1AO_2$ не есть треугольникъ; если, слѣдовательно, точка $A$ лежитъ на прямой $O_1O_2$. Обратно, если $A''$ есть произвольная точка, которая одновременно принадлежитъ обѣимъ окружностямъ (сверхъ точекъ $A$ и $A'$), то, въ силу третьей теоремы о конгруэнтности треугольника, должны быть конгруэнтны треугольники $O_1AO_2$, $O_1A'O_2$, $O_1A''O_2$. Точка $A''$ должна лежать по одну сторону прямой $O_1O_2$ либо съ точкой $A$, либо съ точкой $A'$ (предложенie 1). Мы можемъ принять первое; тогда равенства



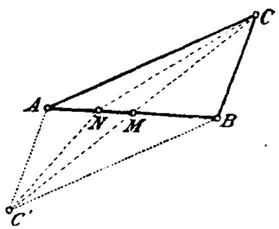

Фиг. 92.

$$\sphericalangle O_2O_1A'' \cong \sphericalangle O_2O_1A \quad \text{и} \quad \sphericalangle O_1O_2A'' \cong \sphericalangle O_1O_2A$$

возможны только въ томъ случаѣ, если прямая $O_1A''$ совпадаетъ съ прямой $O_1A$, а прямая $O_2A''$ — съ прямой $O_2A$, что и требовалось доказать. Если точка $A$ лежитъ на прямой $O_1O_2$, то перпендикуляръ, возставленный изъ точки $A$ къ этой прямой, перпендикуляренъ къ радiусамъ $O_1A$ и $O_2A$, а потому касается обѣихъ окружностей; въ этомъ случаѣ говорятъ, что обѣ окружности соприкасаются въ точкѣ $A$. Обратно, если двѣ окружности соприкасаются, т. е. имѣютъ одну и только одну общую точку, то точка соприкосновенія лежитъ на прямой, соединяющей центры, — на „линіи центровъ", и общая касательная перпендикулярна къ линіи центровъ. Въ силу извѣстной теоремы о сторонахъ треугольника мы получаемъ:

Предложеніе 9. Если двѣ окружности пересѣкаются, то линія центровъ меньше суммы и больше разности радіусовъ обѣихъ окружностей и обратно.

Не такъ легко, однако, доказать обратную теорему. Если линія центровъ $C_1C_2$ меньше суммы радіусовъ $r_1$ и $r_2$ двухъ окружностей $C_1$, $C_2$, но больше ихъ разности $r_1 - r_2$ ($r_1 > r_2$), то, хотя въ этомъ случаѣ на прямой $c$ имѣются такія точки $J$ и $A$ второй окружности, что $C_1J < r_1$ и $C_1A > r_1$, но здѣсь мы не имѣемъ возможности доказать, не опираясь на аксіомы о непрерывности, что обѣ окружности необходимо должны пересѣкаться. Входить здѣсь въ подробности этого доказательства нѣтъ нужды, но не безынтересно будетъ указать на то, что основныя построенія элементарной геометріи, относящіяся къ отложенію отрѣзковъ и угловъ, къ дѣленію послѣднихъ пополамъ можно выполнить, не опираясь на обращеніе предыдущаго предложенія. Достаточно будетъ выяснить это на задачѣ о дѣленіи на двѣ равныя части даннаго отрѣзка $AB$ (фиг. 93). Пусть $C$ будетъ произвольная точка плоскости, не лежащая на прямой $AB$. Согласно аксіомамъ о конгруэнтности, на плоскости той стороны прямой $AB$, съ которой точка $C$ не лежитъ, имѣется уголъ $C'AB \cong ABC$, а на его сторонѣ, отличной отъ $AB$, имѣется отрѣзокъ $AC' \cong CB$. Въ такомъ случаѣ треугольникъ $AC'B \cong ABC$, а потому $BC' \cong AC$; слѣдовательно, окружности, имѣющія центры $A$ и $B$ и радіусы соотвѣтственно $BC$ и $AC$, должны проходить черезъ несомнѣнно существующую точку $C'$, т. е. должны пересѣкаться.




Фиг. 93.

Изъ двухъ точекъ пересѣченія этихъ окружностей для нашей цѣли пригодна лишь та, которая расположена относительно точки $C$ по другую сторону прямой $AB$. Согласно предложенію 1, отрѣзокъ $CC'$ имѣетъ съ прямой $BA$ общую точку $M$. Эта точка представляетъ собою середину отрѣзка $BA$, т. е. $AM \cong MB$. Въ самомъ дѣлѣ, если бы отрѣзку $MB$ былъ равенъ не отрѣзокъ $AM$, а отрѣзокъ $AN$, то изъ конгруэнтности треугольниковъ $ANC$ и $BMC'$, $BMC$ и $ANC'$ вытекало бы, что $CN \cong C'M$, $C'N \cong CM$; но въ такомъ случаѣ въ треугольникѣ $CNC'$ сторона $CC'$ была бы равна суммѣ двухъ другихъ, — обстоятельство, которое можетъ имѣть мѣсто безъ противорѣчія съ другими извѣстными предложеніями только въ томъ случаѣ, когда точка $M$ совпадаетъ съ $N$. Этимъ доказано существованіе и построеніе середины отрѣзка.

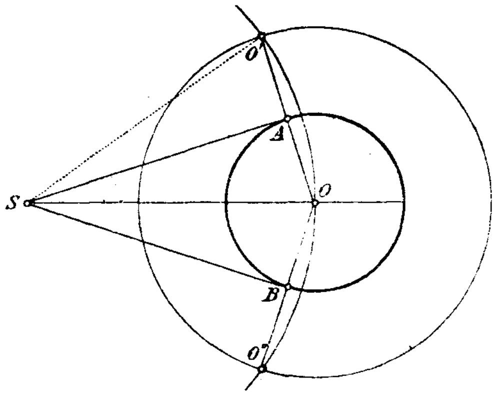
Когда намъ извѣстно, что отрѣзокъ $AB$ имѣетъ середину, то мы можемъ себѣ представить въ послѣдней вершину прямого угла, одна сторона котораго лежитъ на прямой $AB$; существуетъ, слѣдовательно, перпендикуляръ, возставленный изъ середины отрѣзка $AB$. Если мы теперь изъ точекъ $A$ и $B$ опишемъ двѣ окружности однимъ и тѣмъ же радіусомъ, бо̀льшимъ, нежели половина отрѣзка $AB$, то каждая изъ этихъ окружностей должна пересѣчь упомянутый выше перпендикуляръ, и при томъ въ тѣхъ же самыхъ точкахъ. Въ самомъ дѣлѣ, если $Z$ есть точка пересѣченія первой окружности съ перпендикуляромъ, то $ZB \cong ZA$. Этимъ доказано и обычное построеніе середины отрѣзка, но лишь во вторую очередь.

**10.** Принимая теперь обращеніе предложенія 9, мы имѣемъ въ виду изложить рѣшеніе задачи о проведеніи изъ точки $S$ касательныхъ къ окружности $O$; это рѣшеніе, ведущее свое начало, по существу, отъ Евклида*), тѣмъ болѣе замѣчательно, что оно остается

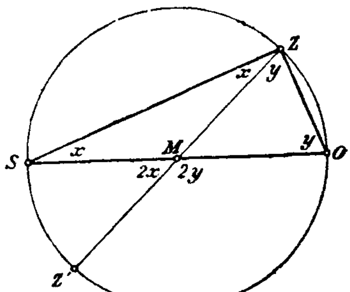
*) „Начала", III, 7.

справедливымъ и въ неевклидовой геометрiи. Пусть $SA$ (фиг. 94) будетъ касательная къ окружности $O$; она будетъ, слѣдовательно, перпендикулярна къ прямой $OA$. Если мы примемъ во вниманiе, что, опуская перпендикуляръ изъ точки $O$ на прямую $SA$, намъ всегда приходится пользоваться точкой $O'$, симметричной съ точкой $O$ относительно прямой $SA$, то мы придемъ къ мысли, что цѣлесообразно ввести въ нашу фигуру также точку $O'$. Такъ какъ $OSO'$ есть равнобедренный треугольникъ, то $SO = SO'$ и $OO' = 2OA$; поэтому точка $O'$ лежитъ какъ на окружности, имѣющей центръ въ точкѣ $S$ и радiусъ $SO$, такъ и на окружности, которая имѣетъ центръ въ точкѣ $O$ и радiусъ которой равенъ дiаметру данной окружности. Такихъ точекъ будетъ двѣ — $O'$ и $O''$, которымъ соотвѣтствуютъ двѣ точки соприкосновенiя $A$ и $B$, а, слѣдовательно, и двѣ касательныя $SA$ и $SB$.

Другое весьма распространенное рѣшенiе этой задачи сводится непосредственно къ разысканiю геометрическаго мѣста точекъ $A$ и $B$ (неза-




Фиг. 94.




Фиг. 95.

висимо отъ радiуса данной окружности). Согласно предложенiю, которое черезъ Евклида восходитъ къ Ѳалесу Милетскому (около 600 г. до Р. Х.), геометрическое мѣсто вершинъ прямыхъ угловъ, стороны которыхъ проходятъ черезъ двѣ неподвижныя точки $S$ и $O$, есть окружность, имѣющая отрѣзокъ $SO$ своимъ дiаметромъ. Сообразно этому, точка $A$ лежитъ на окружности, имѣющей центръ въ серединѣ $M$ отрѣзка $SO$ и радiусъ $MO$. И дѣйствительно, если $Z$ есть произвольная точка этой окружности (фиг. 95), то $MS = MZ = MO$; $ZMS$ и $ZMO$ суть равнобедренные треугольники, а потому

$$\sphericalangle MSZ \cong \sphericalangle MZS, \quad \sphericalangle MOZ \cong \sphericalangle MZO;$$

если мы поэтому обозначимъ общую величину первыхъ двухъ угловъ черезъ $x$, а величину вторыхъ двухъ черезъ $y$, то, по теоремѣ о внѣшнемъ углѣ, $\sphericalangle SMZ' \cong 2x$, $\sphericalangle Z'MO \cong 2y$, а, слѣдовательно, $2x + 2y = 2d$, $x + y = d$; поэтому $SZO$ есть прямой уголъ, что и требовалось доказать. Данная окружность пересѣкаетъ окружность $M$ въ точкахъ $A$ и $B$, и задача, такимъ образомъ, рѣшена.

**11.** Предложенiе Ѳалеса содержится, какъ частный случай, въ предложенiи, которое извѣстно подъ названiемъ теоремы о вписанномъ углѣ и заключается въ слѣдующемъ: вписанные углы, опирающiеся на одну и ту же дугу, равны между собою. На понятiяхъ, входящихъ въ эту теорему, а также и на ея доказательствѣ, которое можно вести совершенно аналогично доказательству теоремы Ѳалеса, мы не станемъ здѣсь останавливаться, такъ какъ все это не представляетъ никакихъ затрудненiй. Напротивъ, опредѣленiе „равенства" дугъ окружности представляетъ нѣкоторое затрудненiе, если мы не хотимъ опираться при этомъ на эмпирическое наложенiе этихъ фигуръ. Говорятъ: равнымъ центральнымъ угламъ окружности отвѣчаютъ равныя дуги. Что это — теорема или опредѣленiе? Эмпирики „доказываютъ" это предложенiе, ссылаясь на воззрѣнiе (движенiе). Но въ геометрiи, основанной на понятiяхъ, сущность ученiя о величинѣ и объ ея измѣренiи именно и заключается въ самомъ установленiи понятiя о равенствѣ при помощи понятiй же, какъ мы это видѣли въ § 15, 8 и въ § 18, 2, гдѣ мы опредѣленнымъ конструктивнымъ прiемомъ установили равенство отрѣзковъ. Предложенiе, о которомъ идетъ теперь рѣчь, очевидно, присваиваетъ и дугамъ характеръ величины: и этимъ характеромъ онѣ дѣйствительно обладаютъ, ибо мы легко можемъ перенести на дуги соображенiя, изложенныя въ § 15, 8 относительно понятiя „между". Но, чтобы установить это вполнѣ, намъ не хватаетъ еще конструктивнаго прiема, устанавливающаго равенство. Ясно, что естественнѣе всего было бы опредѣлить равенство тѣмъ, что равнымъ центральнымъ угламъ должны соотвѣтствовать равныя дуги. Можно было бы приведенное выше на стр. 265 положенiе Лейбница возвести на степень опредѣленiя равенства. Если же отклонить оба эти предложенiя, то остается только путь, ведущiй черезъ общее понятiе о длинѣ дуги кривой линiи; это понятiе, въ свою очередь, должно быть опредѣлено, но это настолько трудно, что мы вынуждены были отказаться отъ включенiя его въ настоящiй критическiй очеркъ основъ геометрiи, хотя мы не всегда ограничивались здѣсь строго элементарными вопросами. Поэтому въ элементарной геометрiи предложенiе, о которомъ идетъ рѣчь, должно служить опредѣленiемъ.

**12.** О ближайшихъ слѣдствiяхъ изъ перечисленныхъ выше предложенiй и объ ихъ примѣненiяхъ къ рѣшенiю задачъ на построенiе мы не намѣрены здѣсь распространяться. Обыкновенные учебники геометрiи и сборники задачъ даютъ для этого обширный матерiалъ и многочисленныя указанiя.

## § 21. Подобіе.

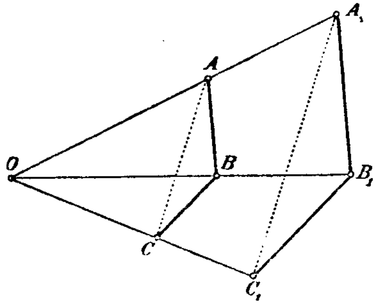
**1.** Чтобы отъ болѣе или менѣе яснаго представленія, которое мы связываемъ со словомъ „подобіе" въ примѣненіи къ плоскимъ фигурамъ, перейти къ точному понятію, мы замѣтимъ прежде всего, что подобіе представляетъ собою нѣкоторое отображеніе: двѣ подобныя фигуры въ силу именно своего подобія поставлены другъ къ другу въ такое соотвѣтствіе, такъ „отображены" другъ въ другѣ, что каждой точкѣ одной фигуры отвѣчаетъ одна опредѣленная точка другой фигуры. Но этого, конечно, недостаточно для опредѣленія подобія, ибо двѣ фигуры, связанныя круговымъ сопряженіемъ (или инверсіей, § 8, 4), также приведены въ однозначное соотвѣтствіе другъ съ другомъ; онѣ, однако, не обладаютъ тѣмъ, что называютъ подобіемъ. При инверсіи прямой линіи можетъ отвѣчать окружность и обратно. Поэтому мы будемъ ближе къ цѣли, если скажемъ, что подобіе есть коллинеація, т. е. точкамъ прямой въ подобной фигурѣ опять-таки отвѣчаютъ точки, расположенныя на одной прямой, и обратно. Однако, примѣры аффинныхъ сопряженій, съ которыми мы познакомимся въ начертательной геометріи, показываютъ, что и коллинеація не охватываетъ понятія о подобіи: прямоугольный треугольникъ не всегда преобразуется коллинеаціей въ прямоугольный же треугольникъ. Подобіе предполагаетъ еще одно свойство, которое коренится въ этомъ представленіи и которое съ нимъ соединяетъ и нематематикъ, — именно, преобразованіе при посредствѣ подобія сохраняетъ тѣ же углы*). Сообразно этому мы прежде всего установимъ слѣдующее опредѣленіе: подобнымъ преобразованіемъ одной плоскости въ другую называется такая коллинеація, которая не мѣняетъ угловъ[5]).

**2.** Прежде всего необходимо доказать, что подобіе, требуемое этимъ опредѣленіемъ, дѣйствительно возможно. Мы попытаемся осуществить это сопряженіе, или соотвѣтствіе, такимъ образомъ, чтобы всѣ прямыя, соединяющія двѣ соотвѣтствующія другъ другу точки, проходили черезъ постоянную точку $O$, отвѣчающую себѣ самой. Положимъ, что эта точка выбрана совершенно произвольно, и что такъ же произвольно выбрана одна пара соотвѣтствующихъ другъ другу точекъ $A$ и $A_1$ на прямой, проходящей черезъ точку $O$. Если теперь $B$ есть еще одна точка, не лежащая на прямой $OA$ (фиг. 96), то соотвѣтствующая ей точка $B_1$ должна, во всякомъ случаѣ, лежать на прямой $OB$ и притомъ такъ, чтобы $\sphericalangle B_1A_1O \cong \sphericalangle BAO$, а это значитъ, что прямая $B_1A_1$ параллельна

*) По крайней мѣрѣ, сохраняетъ прямые углы.

[5]) Т. е. углы между двумя прямыми равны угламъ между соотвѣтственными прямыми преобразованной фигуры.

прямой $BA$. Точка $B_1$ этимъ вполнѣ опредѣляется, а вмѣстѣ съ тѣмъ углы треугольника $OAB$ конгруэнтны соотвѣтствующимъ угламъ треугольника $OA_1B_1$. Въ этихъ предѣлахъ наше опредѣленіе, такимъ образомъ, выполняется; но спрашивается, если мы возьмемъ еще третью точку $C$, не лежащую ни на одной изъ прямыхъ $OA, AB, BO$, то не приведетъ ли это построеніе соотвѣтствующей точки $C_1$ къ противорѣчію? Въ самомъ дѣлѣ, въ виду равенства соотвѣтственныхъ угловъ должно быть, съ одной стороны, $B_1C_1 \parallel BC$, а, съ другой стороны, $A_1C_1 \parallel AC$. Но эти два требованія дѣйствительно выполняются въ силу предложенія Дезарга, которое мы формулировали въ § 10 и которое мы здѣсь будемъ принимать. Итакъ, подобіе въ смыслѣ установленнаго нами опредѣленія существуетъ, и именно въ томъ болѣе широкомъ смыслѣ слова, что не только двѣ какія-нибудь фигуры, но вся плоскость отображена подобно на самой себѣ или на другой плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, какъ бы ни была расположена точка $C$ въ плоскости треугольника $OAB$, указанное построеніе однозначно относитъ ей соотвѣтствующую точку $C_1$; тотъ случай, когда точка $C$ какъ разъ лежитъ на одной изъ прямыхъ $OA, AB, BO$, послѣ всего сказаннаго легко исчерпать.



Фиг. 96.

**3.** Конгруэнтность представляетъ собою лишь частный случай подобія, ибо конгруэнтность всегда можетъ быть опредѣлена, какъ коллинеація, сохраняющая углы (т. е. подобіе), и требующая, кромѣ того, конгруэнтности соотвѣтственныхъ отрѣзковъ. Но, такъ какъ, съ другой стороны, конгруэнтныя фигуры не всегда имѣютъ то взаиморасположеніе, которое указано въ предыдущемъ пунктѣ, то ясно, что тамъ мы имѣли дѣло съ частнымъ случаемъ подобія, именно со случаемъ подобія при подобномъ расположеніи. Точка $O$, отвѣчающая при такихъ условіяхъ самой себѣ, называется центромъ подобія, и притомъ внѣшнимъ или внутреннимъ, смотря по тому, расположены ли двѣ соотвѣтствующія другъ другу точки по одну сторону точки $O$ или по разныя (аксіомы $II_4$). Сообразно этому, подобіе при подобномъ расположеніи однозначно опредѣлено, если заданы: I. либо центръ подобія и, сверхъ того, пара соотвѣтствующихъ другъ другу точекъ, либо II. двѣ пары соотвѣтствующихъ другъ другу точекъ. Если въ случаѣ II должны другъ другу соотвѣтствовать точки $A$ и $A'$, $B$ и $B'$, которыя не всѣ расположены на одной прямой, то центръ подобія опредѣляется пересѣченіемъ прямыхъ $AA'$ и $BB'$, но при этомъ прямыя $A'B'$ и $AB$, конечно, должны быть параллельны. Однако, это наше условіе можетъ быть выполнено еще и такимъ образомъ, что всѣ четыре точки $A, B, A', B'$ лежатъ на одной прямой $u$. Если мы тогда построимъ треугольникъ $ABC$ и подобный ему треугольникъ $A'B'C'$, то точки $C$ и $C'$ будутъ соотвѣтствовать другъ другу и въ первоначальномъ подобномъ соотвѣтствіи[6]); поэтому прямыя $AA'$ и $CC'$ пересѣкутся въ центрѣ подобія. Такимъ образомъ случай II приводится къ случаю I.

Изъ опредѣленія подобія вытекаетъ непосредственно: если двѣ фигуры подобны третьей, то онѣ подобны другъ другу. Положимъ теперь, что фигуры $OABC\ldots$ и $O'A'B'C'\ldots$ подобны другъ другу; положимъ далѣе, что фигуры $O'A_1B_1C_1$ и $O'A'B'C'$ не только подобны, но и подобно расположены (при центрѣ подобія $O'$); въ такомъ случаѣ фигуры $O'A_1B_1C_1$ и $OABC$ подобны. Это же соотношеніе переходитъ въ конгруэнтность, если $O'A_1 \cong OA$; но если даны точки $O'$ и $A_1$, то фигура $O'A_1B_1C_1\ldots$, конгруэнтная фигурѣ $OABC\ldots$, опредѣлена, если не вполнѣ, то во всякомъ случаѣ настолько, что возможно еще только отраженіе относительно прямой $O'A_1$; это значитъ: существуютъ двѣ фигуры, конгруэнтныя фигурѣ $OABC\ldots$, — скажемъ, $O'A_1B_1C_1\ldots$ и $O'A_1B_1^*C_1^*\ldots$, — расположенныя симметрично относительно прямой $O'A_1$; но по каждой изъ этихъ двухъ фигуръ мы однозначно получаемъ фигуру $O'A'B'C'$, если даны точки $O'$ и $A'$, и если еще установлено, по какую сторону прямой $O'A'$ должна лежать точка $B'$. Отсюда слѣдуетъ: фигура $P'Q'\ldots$, подобная фигурѣ $PQ\ldots$, двумя парами соотвѣтственныхъ точекъ $P$ и $P'$, $Q$ и $Q'$ опредѣляется въ такой мѣрѣ, что остается возможнымъ только еще отраженіе отъ прямой $P'Q'$. Этимъ вмѣстѣ съ тѣмъ доказано: 1) что установленное нашимъ опредѣленіемъ понятіе о подобіи имѣетъ полный смыслъ и не содержитъ въ себѣ ничего несогласнаго съ евклидовой геометріей, и 2) что всякое подобное сопряженіе плоскости съ собою самой или съ другой плоскостью можетъ быть осуществлено при посредствѣ одного конгруэнтнаго сопряженія и одного подобнаго сопряженія, сохраняющаго подобное расположеніе фигуръ[7]); поэтому подобіе по существу можно изучать на этомъ послѣднемъ частномъ случаѣ.

**4.** Если два соотвѣтственныхъ отрѣзка двухъ подобныхъ фигуръ конгруэнтны, то и всѣ соотвѣтственные отрѣзки попарно равны. Если одинъ

[6]) Ибо оно сохраняетъ углы.

[7]) Иначе говоря: всякое преобразованіе фигуры въ подобную ей фигуру можно произвести, если перенести первую фигуру въ нѣкоторое другое положеніе, а затѣмъ подвергнуть ее подобному преобразованію съ сохраненіемъ подобнаго расположенія, т. е. относительно нѣкотораго центра $O$.

отрѣзокъ въ три раза больше соотвѣтствующаго ему отрѣзка, то и **каждый** отрѣзокъ первой фигуры въ три раза больше соотвѣтствующаго ему отрѣзка второй фигуры. Вообще имѣетъ мѣсто слѣдующее положеніе: **если одинъ отрѣзокъ одной фигуры составляетъ раціональное кратное соотвѣтствующаго отрѣзка второй фигуры, то и каждый отрѣзокъ первой фигуры конгруэнтенъ такому же раціональному кратному**[8]) **соотвѣтствующаго отрѣзка подобной фигуры**; если, стало быть, $a, b, c$ суть отрѣзки одной изъ такихъ двухъ фигуръ, $a', b', c', \ldots$ соотвѣтствующіе отрѣзки другой фигуры, то $a' \cong \omega a$, $b' \cong \omega b$, $c' \cong \omega c, \ldots$, гдѣ $\omega$ — раціональное и положительное число. Все это можно доказать, не пользуясь аксіомой о непрерывности. Съ другой стороны, можно обнаружить, что діагональ квадрата не представляетъ собой раціональнаго кратнаго его стороны; если, поэтому, мы примемъ сторону и діагональ квадрата за соотвѣтственные отрѣзки двухъ подобныхъ фигуръ, то наше предложеніе не можетъ непосредственно найти себѣ примѣненія къ этимъ фигурамъ; можно только обнаружить, что діагонали $a$ и сторонѣ $a'$ квадрата съ любымъ приближеніемъ отвѣчаетъ такое раціональное число $\omega$, что $a' \cong \omega a$. Но отъ этихъ **приближенныхъ** равенствъ теорія подобія переходитъ къ предложеніямъ, которыя справедливы **въ точности**. Въ этомъ есть нѣчто, логически не удовлетворительное; устранить это удалось лишь въ послѣднее время путемъ совершенно новаго построенія теоріи подобія. Если $a' \cong \omega a$ и $\omega$ есть раціональное число, т. е. частное двухъ цѣлыхъ чиселъ $m$ и $n$, то отрѣзокъ $a'$ представляетъ собой $m$-кратную величину отрѣзка $a/n$, который мы будемъ обозначать черезъ $\mu$; тогда $a$ есть $n$-кратное отрѣзка $\mu$. Этотъ отрѣзокъ $\mu$, котораго кратны оба отрѣзка $a$ и $a'$, называется **общей мѣрой** двухъ отрѣзковъ. Отрѣзки же $a$ и $a'$ называются „соизмѣримыми". Если же предыдущее соотношеніе при раціональномъ $\omega$ можетъ существовать только приближенно, то нѣтъ и точной общей мѣры $\mu$, отрѣзки $a$ и $a'$ „несоизмѣримы". Рѣчь идетъ, слѣдовательно, о томъ, чтобы устранить изъ геометріи тѣ трудности, которыя связаны съ понятіемъ о соизмѣримости и объ общей мѣрѣ. Этого можно достигнуть только такимъ образомъ, что мы либо разовьемъ самое ученіе о дѣйствіяхъ надъ отрѣзками на основаніи чисто геометрическихъ построеній, какъ это уже и было намѣчено для проективной геометріи въ § 18, либо же постараемся охватить чисто геометрически весь относящійся сюда матеріалъ; послѣднее всегда должно быть возможно, ибо число, поскольку ими пользуется геометрія въ своей метрикѣ, можетъ быть разсматриваемо,

---

[8]) Подъ **раціональнымъ кратнымъ** отрѣзка $a$ разумѣютъ отрѣзокъ $a'$, составленный изъ $m$ отрѣзковъ, каждый изъ которыхъ составляетъ $n$-ую часть отрѣзка $a$, при чемъ $m$ и $n$ суть цѣлыя числа.

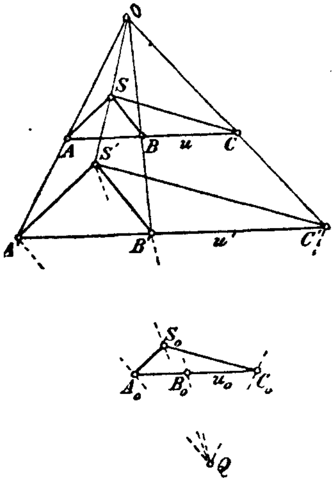
только какъ система, служащая лишь для выраженія различныхъ соотношеній съ чисто качественной стороны.

5. Метрика въ теоріи подобія основана на подобіи „системъ прямолинейныхъ отрѣзковъ"; мы разумѣемъ подъ этимъ слѣдующее: положимъ, что на двухъ прямыхъ $u$ и $u'$ даны отрѣзки $x, y, z, \ldots$ и соотвѣтственно $x', y', z', \ldots$ въ одинаковомъ числѣ (но, по крайней мѣрѣ, по два на каждой прямой), которые мы отнесемъ другъ къ другу въ качествѣ соотвѣтственныхъ, какъ это видно уже по обозначеніямъ. Мы будемъ говорить, что системы отрѣзковъ $u(x, y, z, \ldots)$ и $u'(x', y', z', \ldots)$ подобны, или символически

$$u(x, y, z, \ldots) \sim u'(x', y', z', \ldots),$$

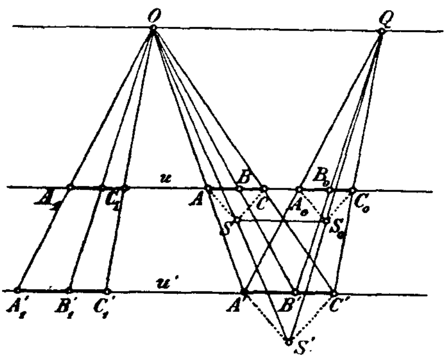
если мы можемъ разсматривать $u$ и $u'$, какъ соотвѣтственныя прямыя двухъ подобныхъ фигуръ, въ которыхъ отнесенные другъ къ другу выше отрѣзки $x$ и $x'$, $y$ и $y'$, $z$ и $z'$ также являются соотвѣтственными. Этимъ мы расширяемъ прежнее опредѣленіе подобія, которое теряетъ содержаніе, когда обѣ фигуры состоятъ исключительно изъ отрѣзковъ, соотвѣтственно расположенныхъ на двухъ прямыхъ, такъ какъ въ этомъ случаѣ нѣтъ никакихъ угловъ.

Пусть $S$ будетъ точка, не лежащая на прямой $u$ (фиг. 97), а $A, B, C, D, \ldots$ точки, ограничивающія отрѣзки $x, y, z, \ldots$ на прямой $u$; $A', B', C', D', \ldots$ суть соотвѣтствующія точки на прямой $u'$; если мы построимъ треугольникъ $S'A'B'$, подобный треугольнику $SAB$, то треугольники $SAC$ и $S'A'C'$, $SBC$ и $S'B'C'$ и т. д. должны быть соотвѣтственно подобны; отсюда можно сдѣлать двоякій выводъ: 1) если на прямой $u$ даны всѣ отрѣзки, то на прямой $u'$ можно выбрать произвольно только одинъ отрѣзокъ $A'B'$, ибо подобіе треугольниковъ $SAB$ и $S'A'B'$ опредѣляетъ точку $S'$, а чрезъ ея посредство, опять-таки вслѣдствіе подобія треугольниковъ $SAC$ и $S'A'C'$, опредѣляется точка $C'$ и т. д.; 2) если существуетъ одна такая пара точекъ $S$ и $S'$, что съ присоединеніемъ ихъ мы получаемъ подобныя фигуры ($SABC\ldots$ и $S'A'B'C'\ldots$), то любой точкѣ $S$ можно (двоякимъ образомъ) отнести точку $S'$, такъ что упомянутыя фигуры окажутся подобными. Наше расширеніе понятія о подобіи является, слѣдовательно, допустимымъ. Два положенія точки $S'$ симметричны относительно прямой $u'$.




Фиг. 97.

Такимъ образомъ, изъ четырехъ отрѣзковъ $x, y$ и $x', y'$ на прямыхъ $u$ и $u'$ въ силу подобія этихъ системъ одинъ всегда опредѣляется тремя остальными; этотъ четвертый отрѣзокъ по величинѣ и положенію не зависитъ отъ выбора вспомогательной точки $S$; онъ зависитъ, слѣдовательно, только отъ взаимнаго расположенія опредѣляющихъ его отрѣзковъ на прямыхъ $u$ и $u'$. Если двѣ фигуры подобны третьей фигурѣ и подобно относительно нея расположены, то онѣ также подобны между собой и подобно расположены одна относительно другой, какъ это легко получается изъ теоремы Дезарга [9]). Положимъ теперь (фиг. 97), что фигуры $SABC\ldots$ и $S'A'B'C'\ldots$, а также $SABC\ldots$ и $S_0A_0B_0C_0\ldots$ соотвѣтственно подобны и имѣютъ подобное расположеніе. Если сверхъ того фигура $A_0B_0\ldots$ конгруэнтна фигурѣ $AB\ldots$, то и фигура $SABC\ldots$ конгруэнтна фигурѣ $S_0A_0B_0C_0\ldots$, ибо отрѣзки $SS_0, AA_0, BB_0, CC_0, \ldots$ параллельны; слѣдовательно, величины отрѣзковъ $x, y, x', y'$ не зависятъ отъ разстоянія между прямыми $u$ и $u'$ и отъ точки $O$ [10]). Но болѣе того: если мы совмѣстимъ прямую $u_0$ съ прямой $u$ (фиг. 98), не совмѣщая точки $A_0$ съ точкой $A$, то согласно установленному выше предложенію *), прямая $SS_0$ будетъ параллельна прямой $u$; если поэтому $Q$ есть центръ подобія фигуръ $S'A'B'C'\ldots$ и $S_0A_0B_0C_0\ldots$, то и прямая $OQ$ будетъ параллельна прямой $SS_0$ [11]), а, слѣдовательно, и прямой $u$. Если мы еще проведемъ прямую $OA_1$ параллельно $QA_0$, прямую $OB_1$ параллельно




Фиг. 98.

[9]) На фиг. 97 каждая изъ фигуръ $S_0A_0B_0$ и $SAB$ подобна и подобно расположена относительно фигуры $S'A'B'$. Стороны треугольниковъ $S_0A_0B_0$ и $SAB$ соотвѣтственно параллельны сторонамъ треугольника $S'A'B'$, а потому $S_0A_0 \parallel SA$, $S_0B_0 \parallel SB$ и $A_0B_0 \parallel AB$. Это тотъ частный случай теоремы Дезарга, когда точки пересѣченія соотвѣтственныхъ сторонъ лежатъ на безконечно удаленной прямой. Поэтому прямыя $S_0S, A_0A, B_0B$ проходятъ черезъ одну точку — центръ подобія фигуръ $SAB$ и $S_0A_0B_0$.

[10]) Если $A'B'$ и $B'C'$ суть, скажемъ, отрѣзки $x'$ и $y'$, а $AB$ есть отрѣзокъ $x$, то $BC$ есть отрѣзокъ $y$, опредѣляемый подобіемъ двухъ системъ; но если $A_0B_0 \cong AB$, то $B_0C_0 \cong BC$. Иначе говоря, отрѣзокъ $y$ остается одинъ и тотъ же, возьмемъ ли мы $x$ на прямой $u$ или на прямой $u_0$.

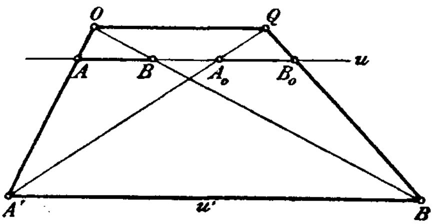
*) Справедливость этого предложенія въ настоящемъ частномъ случаѣ легко обнаружить при помощи предложенія Дезарга.

[11]) Если мы возьмемъ треугольники $AA'A_0$ и $SS'S_0$, то прямыя, соединяющія соотвѣтственныя вершины, пересѣкаются въ одной и той же безконечно-удаленной

$QB_0$, $OC_1$ параллельно $QC_0$ и т. д. и найдемъ проекціи $A_1'$, $B_1'$, $C_1'$, ... точекъ $A_1$, $B_1$, $C_1$, ... изъ точки $O$ на прямую $u'$, то мы получимъ фигуру $OA_1B_1C_1A_1'B_1'C_1'$.... Эта фигура будетъ конгруэнтна фигурѣ $QA_0B_0C_0A'B'C'$ ..., такъ что

$$A_1'B_1' \cong A'B',\ B_1'C_1' \cong B'C', \ldots.$$

Этимъ во 1) доказано построеніе, которое было указано въ § 5 (фиг. 5) для передвиженія фигуры вдоль по прямой и которое можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ: каждая прямая, параллельная основанію трапеціи, пересѣкаетъ боковыя стороны и діагонали послѣдней въ четырехъ точкахъ, которыя служатъ концами равныхъ отрѣзковъ ($AB \cong A_0B_0$ на фиг. 99); во 2) мы замѣчаемъ, что и расширенныя системы отрѣзковъ $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, ... и $A'A'_1$, $B'B_1'$, $C'C'_1$, ... взаимно-подобны; если поэтому $AB \cong x$, $CD \cong y$, и отрѣзокъ $A_1B_1$, какъ выше, конгруэнтенъ отрѣзку $AB$, то и отрѣзокъ $A_1'B_1'$ конгруэнтенъ отрѣзку $A'B'$, конгруэнтенъ, слѣдовательно, отрѣзку $y'$. Такимъ образомъ, каждый изъ четырехъ отрѣзковъ $x, x', y, y'$ опредѣляется не только соотношеніемъ $u\,(AB, CD) \sim u'\,(A'B', C'D')$, но также и соотношеніемъ: $u\,(A_1B_1, CD) \sim u'\,(A_1'B_1', C'D')$; это значитъ: подобіемъ двухъ




Фиг. 99.

системъ отрѣзковъ $u\,(x, y)$ и $u'\,(x', y')$ между величинами четырехъ отрѣзковъ $x, x'. y, y'$ устанавливается такое соотношеніе, которое совершенно не зависитъ отъ выбора прямыхъ $u$ и $u'$ и отъ того положенія, которое отрѣзки занимаютъ на этихъ прямыхъ; это соотношеніе опредѣляется, слѣдовательно, исключительно величинами трехъ изъ этихъ отрѣзковъ. То именно обстоятельство, что величина отрѣзковъ зависитъ исключительно отъ трехъ изъ нихъ, мы будемъ выражать слѣдующимъ образомъ: пара отрѣзковъ $x$, $y$ подобна парѣ $x'$, $y'$, или символически $(x, y) \sim (x', y')$; равнозначущимъ этому мы будемъ также считать соотношеніе $(y, x) \sim (y', x')$. Но мы еще разъ подчеркиваемъ, что это должно имѣть только слѣдующее значеніе: если мы отложимъ на прямой $u$ отрѣзки $AB \cong x$ и $CD \cong y$, а на прямой $u'$, параллельной первой, отложимъ отрѣзокъ $A'B' \cong x'$, найдемъ точку пересѣченія $O$ лучей $AA'$ и $BB'$, а затѣмъ точки пересѣ-

---

точкѣ; поэтому точки пересѣченія соотвѣтственныхъ сторонъ: $AA'$ и $SS'$ $(O)$, $A'A^0$ и $S'S_0$ $(Q)$, а также безконечно удаленныя точки пересѣченія прямыхъ $AA_0$ и $SS_0$, лежатъ на одной прямой; иными словами, прямая $OQ$ проходитъ черезъ безконечно удаленную точку пересѣченія параллелей $AA_0$ и $SS_0$, т. е. параллельна имъ.

ченія $C'$ и $D'$ прямыхъ $OC$ и $OD$ съ прямой $u'$, то $C'D' \cong y'$ и притомъ независимо во 1) отъ разстоянія прямыхъ $u$ и $u'$ и во 2) отъ расположенія трехъ опредѣляющихъ отрѣзковъ на этихъ прямыхъ. Теперь мы можемъ дать общее опредѣленіе: „свободную" систему отрѣзковъ $(x, y, z, \ldots)$ мы будемъ считать подобной „свободной" же системѣ отрѣзковъ $(x', y', z', \ldots)$, если въ смыслѣ прежняго опредѣленія существуютъ двѣ „связанныя" системы отрѣзковъ $u\,(x, y, z, \ldots)$ и $u'\,(x', y', z', \ldots)$, подобныя между собой; связанными же мы будемъ называть наши прежнія системы отрѣзковъ въ томъ смыслѣ, что отрѣзки каждой системы должны лежать на одной прямой, и мы разсматриваемъ взаиморасположеніе отрѣзковъ на этихъ прямыхъ [12]).

**6.** Намъ нужно теперь показать, что мы дѣйствительно выдѣлили ядро тѣхъ предложеній, которыя обычно выражаются съ помощью пропорцій, при посредствѣ метрическихъ соотношеній, между тѣмъ какъ мы старались дать этимъ соотношеніямъ качественное выраженіе; это вытекаетъ теперь непосредственно изъ того, что мы можемъ, исходя изъ нашихъ опредѣленій, придти къ обычнымъ предложеніямъ о подобіи и къ относящимся сюда построеніямъ.

Предложенія о подобіи треугольниковъ: два треугольника подобны, если выполняется одно изъ слѣдующихъ четырехъ условій; и обратно, если треугольники подобны, то имѣютъ мѣсто слѣдующіе четыре предложенія.

I. Два угла одного треугольника равны двумъ угламъ другого треугольника.

II. Одинъ уголъ одного треугольника равенъ углу другого треугольника, а стороны, заключающія эти углы, образуютъ двѣ пары подобныхъ отрѣзковъ.

---

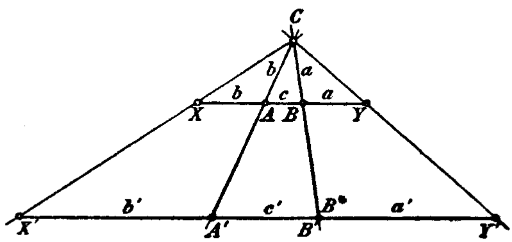
[12]) Хотя основное опредѣленіе уже дважды формулировано въ текстѣ, мы считаемъ полезнымъ еще разъ пояснить сущность дѣла. Авторъ показываетъ слѣдующее: если мы возьмемъ двѣ параллели $u$ и $u'$, на одной изъ нихъ отложимъ два отрѣзка $x\,(AB)$ и $y\,(CD)$, а на другой возьмемъ отрѣзокъ $x'\,(A'B')$ и произведемъ построеніе, указанное выше въ текстѣ, то мы получимъ отрѣзокъ $y'(C'D')$, не зависящій ни отъ разстояній между параллелями, ни отъ того, какъ мы расположили наши отрѣзки на соотвѣтственныхъ параллеляхъ; отрѣзокъ $C'D'$ однозначно опредѣляется тремя остальными, и только то обстоятельство, что онъ именно этимъ путемъ получается по тремъ остальнымъ отрѣзкамъ, мы и будемъ впредь разумѣть, говоря, что пара $(AB, CD)$ подобна парѣ $(A'B', C'D')$, или $(x, y) \sim (x', y')$; но болѣе того: если отрѣзки $x, y, x'$ и $y'$ расположены какъ угодно, но, будучи перенесены на двѣ параллели, три изъ нихъ указаннымъ построеніемъ даютъ четвертый, то мы все же будемъ говорить, что пара $(x, y)$ подобна парѣ $(x', y')$; наконецъ, мы будемъ говорить, что система $(x, y, z \ldots)$ подобна системѣ $(x', y', z', \ldots)$, если каждая пара одной системы подобна соотвѣтствующей парѣ другой системы.

III. Двѣ стороны одного треугольника образуютъ съ двумя сторонами другого подобныя пары отрѣзковъ, уголъ же, противолежащій большему отрѣзку одной пары, равенъ углу, противолежащему большему отрѣзку другой пары.

IV. Три стороны одного треугольника образуютъ съ тремя сторонами другого треугольника подобную систему отрѣзковъ.

Къ предложенію I. Для доказательства предложенія I достаточно замѣтить, что въ этомъ случаѣ и третій уголъ одного треугольника равенъ третьему углу другого, такъ какъ сумма угловъ какъ въ одномъ, такъ и въ другомъ треугольникѣ равна $2d$. Значитъ, по опредѣленію треугольники подобны, и обратно.

Для доказательства обращеній остальныхъ предложеній мы построимъ два треугольника, конгруэнтные даннымъ подобнымъ треугольникамъ, и притомъ такъ, чтобы они имѣли также подобное расположеніе; именно вершину $C$ одного треугольника $ABC$ мы примемъ за центръ подобія, такъ что вершина $C'$ подобнаго треугольника $A'B'C'$ должна будетъ совпасть съ $C$ (фиг. 100). Тогда точки $A'$ и $B'$ будутъ лежать на прямыхъ $CA$ и $CB$, а прямая $A'B'$ будетъ параллельна прямой $AB$. На прямой $AB$ мы отложимъ отрѣзки



Фиг. 100.

$AX \cong AC$, $BY \cong BC$. Пусть $X'$, $Y'$ будутъ точки пересѣченія прямыхъ $CX$, $CY$ съ прямою $A'B'$. Въ такомъ случаѣ треугольники $X'A'C$ и $XAC$ будутъ подобны, равно какъ и треугольники $Y'B'C$ и $YBC$; поэтому $X'A'C$ и $Y'B'C$ суть равнобедренные треугольники, и потому $A'X' \cong A'C$, $B'Y' \cong B'C$. Если мы обозначимъ стороны треугольника $ABC$, противолежащія вершинамъ $A$, $B$, $C$, черезъ $a$, $b$, $c$ и аналогично стороны треугольника $A'B'C'$ обозначимъ черезъ $a'$, $b'$, $c'$, то $BY \cong a$, $AX \cong b$, $AB \cong c$ и $B'Y' \cong a'$, $A'X' \cong b'$, $A'B' \cong c'$, такъ что $(a, b, c)$ и $(a', b', c')$ суть подобныя системы (обращеніе предложеній II, III, IV).

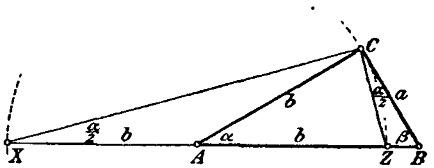
Къ предложенію II. Обращаясь теперь къ прямой теоремѣ II, положимъ, что $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle A'C'B'$. На сторонѣ $CA$ мы отложимъ отъ точки $C$ отрѣзокъ, равный $C'A'$, и конечную точку его опять-таки обозначимъ черезъ $A'$; затѣмъ на прямой $CB$ мы выберемъ точку $B^*$ такъ, чтобы прямая $A'B^*$ была параллельна прямой $AB$; наконецъ, мы отложимъ на прямой $AB$ отрѣзокъ $AX$, конгруэнтный $AC$, и отрѣзокъ $BY$, конгруэнтный $BC$; точку пересѣченія прямыхъ $A'B^*$ и $CX$ мы обозначимъ черезъ $X'$, точку же пересѣченія прямыхъ $A'B^*$ и $CY$ — черезъ $Y'$. Въ такомъ случаѣ треугольники $X'A'C$ и $XAC$ будутъ подобны (I), равно какъ и треугольники $Y'B^*C$ и $YBC$; поэтому $A'X' \cong A'C \cong b'$, $B^*Y' \cong B^*C$; съ другой стороны, $(a, b, c)$ и $(B^*Y', A'X', A'B^*)$ суть подобныя системы, или, что насъ собственно здѣсь только интересуетъ, $(a, b) \sim (B^*Y', A'X)$, такъ что $(a, b) \sim (B^*Y', b')$, но по условію прямой теоремы II $(a, b) \cong (a', b')$; слѣдовательно, $B^*Y' \cong a'$, а такъ какъ мы уже нашли, что $B^*Y' \cong B^*C$, то $B^*C \cong a'$. Такимъ образомъ, точка $B^*$ совпадаетъ съ точкой $B'$, гдѣ $B'C \cong a'$, и треугольникъ $A'B'C'$ дѣйствительно подобенъ треугольнику $ABC$, такъ какъ треугольникъ $A'B^*C$ не только подобенъ треугольнику $ABC$, но и имѣетъ съ нимъ подобное расположеніе.

Къ предложенію III. Положимъ, что $c > b$, $c' > b'$, $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle A'C'B'$ и $(b, c) \sim (b', c')$. Мы можемъ принять, что оба треугольника имѣютъ общую вершину $C$, что точка $A'$ лежитъ на прямой $AC$, точка $B'$ на прямой $BC$. Нужно только доказать, что прямая $A'B'$ параллельна прямой $AB$. Положимъ, что прямая, проходящая черезъ точку $A'$ параллельно $AB$, встрѣчаетъ прямую $CB$ въ точкѣ $B^*$; тогда дѣло сводится къ тому, чтобы обнаружить, что точка $B^*$ совпадаетъ съ $B'$. Если мы вновь отложимъ отрѣзокъ $AX \cong AC \cong b$, и если $X'$ будетъ точка пересѣченія прямыхъ $A'B^*$ и $CX$, то $X'A' \cong A'C \cong b'$. Поэтому $(XA, AB) \sim (X'A', A'B^*)$, т. е. $(b, c) \sim (b', A'B^*)$; такъ такъ по условію $(b, c) \sim (b', c')$, то $(A'B^*) \cong c'$. Треугольникъ $A'B^*C$ имѣетъ съ треугольникомъ $A'B'C$ двѣ соотвѣтственно равныя стороны ($A'C \cong A'C$, $A'B^* \cong A'B'$) и общій уголъ $\gamma$, противолежащій какъ въ одномъ, такъ и въ другомъ треугольникѣ большей сторонѣ. Эти треугольники, слѣдовательно, конгруэнтны, и точка $B^*$ совпадаетъ съ $B'$. Но, такъ какъ треугольники $A'B^*C$ и $ABC$ подобны и подобнымъ образомъ расположены, то прямая теорема III доказана.

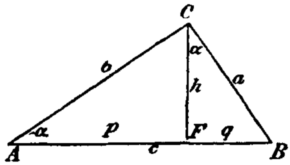
Къ предложенію IV. Дано, что $(a, b, c) \sim (a', b', c')$. Изъ отрѣзковъ $a, b, c$ мы построимъ треугольникъ $ABC$ и попрежнему отложимъ $AX \cong b$, $BY \cong a$, $CA' \cong b'$ и черезъ точку $A'$ проведемъ прямую, параллельную $XY$, которая пересѣчетъ прямую $CX$ въ точкѣ $X'$, прямую $CB$ въ точкѣ $B'$, наконецъ, прямую $CY$ въ точкѣ $Y'$. Мы должны доказать, что $CB' \cong a'$ и $A'B' \cong c'$. Изъ параллельности прямыхъ $X'A'$ и $XA$ слѣдуетъ, что $X'A'C$ и $XAC$ суть равнобедренные треугольники, а потому $X'A' \cong b'$; но вслѣдствіе подобія системъ $(XA, AB)$ и $(X'A', A'B')$ имѣемъ, съ одной стороны, $(b, c) \sim (b', A'B')$; а, съ другой стороны, по условію, $(b, c) \sim (b', c')$; поэтому $A'B' \cong c'$. Далѣе, съ одной стороны, $(AB, BY) \sim (A'B', B'Y')$, или $(c, a) \sim (c', B'Y')$; съ другой стороны, по условію $(c, a) \sim (c', a')$, а потому $B'Y' \cong a'$; вмѣстѣ съ тѣмъ $B'C \cong a'$, что и требовалось доказать.

Изъ изложеннаго доказательства видно также, какъ нужно строить треугольникъ $A'B'C'$ въ каждомъ изъ четырехъ случаевъ.

7. Какъ бы странной ни казалась эта система изложенія, можно съ полною точностью доказать, что она вполнѣ передаетъ содержаніе тѣхъ предложеній, которыя обыкновенно излагаются въ метрической формѣ. Мы переведемъ еще только важныя предложенія Пиѳагора и Аполлонія на языкъ нашей качественной метрики. Пусть $ABC$ (фиг. 101) будетъ треугольникъ съ прямымъ угломъ при вершинѣ $C$. Пусть $\alpha, \beta, a, b, c$




Фиг. 101.




Фиг. 102.

имѣютъ обычныя значенія. На прямой $AB$ отложимъ отрѣзки $AX \cong AC$ и $AZ \cong AC$; въ такомъ случаѣ углы $\sphericalangle CXA$ и $\sphericalangle ZCB$ равны каждый $\alpha/2$, а потому, согласно первой теоремѣ о подобіи треугольниковъ, треугольникъ $XCB$ подобенъ треугольнику $CZB$. Слѣдовательно, $(XB, BC) \sim (CB, BZ)$, т. е.

$$(c + b, a) \sim (a, c - b). \tag{1}$$

Изъ точки $C$ (фиг. 102) мы опустимъ перпендикуляръ $h$ на прямую $AB$; основаніе его $F$ дѣлитъ гипотенузу $AB$ на отрѣзки $AF$ и $FB$, которые мы будемъ обозначать черезъ $p$ и $q$. Въ такомъ случаѣ треугольникъ $AFC \sim CFB$, а потому

$$(h, p) \sim (q, h), \tag{2}$$

и треугольникъ $AFC \sim ACB$, а потому

$$(p, b) \sim (b, c). \tag{3}$$

Эти три соотношенія воспроизводятъ предложенія Пиѳагора съ ихъ слѣдствіями, которыя въ старой системѣ обозначеній гласятъ:

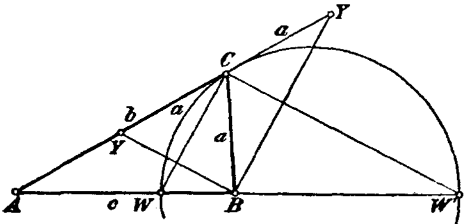
$$(c + b) : a = a : (c - b), \quad \text{или} \quad c^2 = a^2 + b^2, \tag{1'}$$

$$h : p = q : h, \quad \text{или} \quad h^2 = pq, \tag{2'}$$

$$p : b = b : c, \quad \text{или} \quad b^2 = pc. \tag{3'}$$

Здѣсь нужно, однако, замѣтить слѣдующее: въ соотношеніяхъ (1), (2), (3) $a, b, c, p, q, h$ представляютъ собой не болѣе, какъ соотношенія, обозначающія отрѣзки, и „формулы" (1), (2), (3) выражаютъ только извѣстныя соотношенія въ расположеніи отрѣзковъ при надлежащихъ построеніяхъ. Напротивъ, въ соотношеніяхъ (1′), (2′), (3′) $a, b, c, p, q, h$ выражаютъ не отрѣзки, а измѣряющія ихъ числа; упомянутыя же формулы содержатъ утвержденія, касающіяся только этихъ чиселъ.

Въ видахъ другого примѣненія теоріи подобія системъ отрѣзковъ мы построимъ въ треугольникѣ $ABC$ (фиг. 103) равнодѣлящія угловъ при вершинѣ $C$ и обозначимъ черезъ $W$ и $W'$ точки пересѣченія ихъ съ противолежащей стороной; на прямой $CA$ отложимъ отрѣзки $CY \cong CY' \cong CB$; въ такомъ случаѣ $CW \perp BY$, $CW' \perp BY$; поэтому $CW \parallel Y'B$, $CW' \parallel YB$, а потому $ACW \sim AY'B$, и кромѣ того, $ACW' \sim AYB$, т. е. 1) $(AW, AB) \sim (AC, AY')$ и 2) $(AW', AB) \sim (AC, AY)$.



Фиг. 103.

Такъ какъ далѣе изъ соотношенія $(x, y) \sim (x', y')$ всегда вытекаетъ также $(x, y, x+y, x-y) \sim (x', y', x'+y', x'-y')$, какъ это легко усмотрѣть изъ построенія, дающаго передвиженіе отрѣзка по прямой (фиг. 99)[13]), то вслѣдствіе соотношенія 1) $(AW, AB - AW) \sim (AC, AY' - AC)$ или $(WA, WB) \sim (b, a)$; вслѣдствіе же соотношенія 2) $(AW', AW' - AB) \sim (AC, AC - AY)$, или $(W'A, W'B) \sim (b, a)$. Соединяя полученные результаты, получаемъ:

$$(WA, WB) \sim (W'A, W'B) \sim (b, a), \text{ иными словами:}$$

Равнодѣлящія угловъ при вершинѣ $C$ треугольника $ABC$ встрѣчаютъ противоположную сторону $AB$ въ такихъ двухъ точкахъ $W$ и $W'$, что

$$(WA, WB) \sim (W'A, W'B) \sim (CA, CB).$$

Такъ какъ равнодѣлящія $CW$ и $CW'$ двухъ смежныхъ угловъ при вершинѣ $C$ взаимно перпендикулярны, то черезъ точки $C$, $W$ и $W'$ проходитъ окружность, имѣющая отрѣзокъ $WW'$ своимъ діаметромъ. Если мы, кромѣ точекъ $A$ и $B$, закрѣпимъ также точки $W$ и $W'$, то точка $C$

---

[13]) На этомъ чертежѣ $(A_1B_1, B_1C_1) \sim (A_1'B_1', B_1'C_1')$, а въ то же время $(A_1B_1, A_1C_1) \sim (A_1'B_1', B_1'C_1')$ и $(B_1C_1, A_1C_1) \sim (B_1'C_1', A_1'C_1')$.

можетъ перемѣщаться только по названной окружности. Это приводитъ къ слѣдующему предложенію:

Если между точками $A$, $B$, $W$, расположенными на одной прямой, имѣетъ мѣсто соотношеніе $(WA,\ WB) \sim (W'A,\ W'B)$, то окружность, имѣющая своимъ діаметромъ отрѣзокъ $WW'$, представляетъ собою геометрическое мѣсто точекъ $C$, для которыхъ

$$(CA,\ CB) \sim (WA,\ WB).$$

Это такъ называемая Аполлоніева окружность.

**8.** Какъ было уже сказано выше, понятіе о подобіи системъ отрѣзковъ было бы вполнѣ достаточно, чтобы установить, основываясь исключительно на чисто качественныхъ понятіяхъ, свойства плоскихъ фигуръ, облекаемыя обыкновенно въ метрическую форму; тѣмъ не менѣе эта система изложенія представляла бы слишкомъ большое отступленіе отъ обычной и была бы мало примѣнима для вычисленій, относящихся къ практическимъ примѣрамъ. Однако, можно безъ труда свести принятую нами здѣсь символистику къ обычной системѣ пропорцій; это выполняется чисто формально, внѣшнимъ образомъ, при чемъ подъ знаками $a, b, c \ldots$ все-таки не приходится разумѣть ничего, кромѣ отрѣзковъ. Съ этою цѣлью достаточно только, какъ это уже выяснилось въ § 7 при доказательствѣ теоремы Пиѳагора, соотношеніе

$(x, y) \sim (x', y')$ выражать черезъ $x : y = x' : y'$ [14]). (1)

Такъ какъ подобіе представляетъ собою взаимное свойство фигуръ, то мы можемъ, когда имѣетъ мѣсто соотношеніе (1), писать также:

$x' : y' = x : y$ соотвѣтственно прежнему обозначенію: $(x', y') \sim (x, y)$. (2)

Въ виду п. 5 и соотношенія (1) отсюда вытекаетъ также:

$$(y, x) \sim (y', x'), \text{ т. е. } y : x = y' : x'. \tag{3}$$

Тамъ же было доказано, что изъ соотношенія (1) слѣдуетъ также

$$(x, y, x+y, x-y) \sim (x', y', x'+y', x'-y'), \tag{4}$$

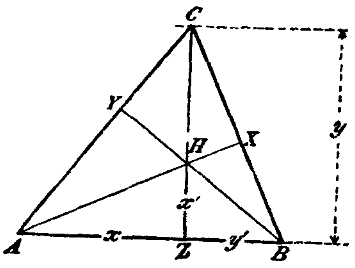
или въ новыхъ обозначеніяхъ

$$x : (x \pm y) = x' : (x' \pm y'),\ (x \pm y) : (x \mp y) = (x' \pm y') : (x' \mp y'). \quad (5).$$

---

[14]) Иными словами, отвлекаясь отъ того содержанія, которое мы раньше соединили съ пропорціей $x : y = x' : y'$, мы условимся впредь подъ этимъ знакоположеніемъ разумѣть лишь то соотношеніе четырехъ отрѣзковъ, которое мы до сихъ поръ выражали знакоположеніемъ $(x, y) \sim (x', y')$.

Очень легко доказать, что перпендикуляры, возставленные изъ серединъ трехъ сторонъ треугольника, проходятъ черезъ одну точку. Примѣняя это предложеніе къ треугольнику, который получимъ, если черезъ три вершины даннаго треугольника проведемъ прямыя, параллельныя противолежащимъ сторонамъ, получаемъ предложеніе: **три высоты треугольника** (т. е. перпендикуляры, опущенные изъ вершинъ на противолежащія стороны) **пересѣкаются въ одной точкѣ**, въ такъ называемой точкѣ „высотъ“ (фиг. 104).



Фиг. 104.

Если обозначимъ черезъ $H$ эту точку въ треугольникѣ $ABC$, а основанія перпендикуляровъ обозначимъ черезъ $X, Y, Z$, то

a) $AZC \sim HZB$, а потому $(ZC,\ ZA) \sim (ZB,\ ZH)$;
b) $BZC \sim HZA$, а потому $(ZC,\ ZB) \sim (ZA,\ ZH)$.

Съ другой стороны, мы можемъ совершенно произвольно отложить отрѣзки $ZA \cong x$, $ZB \cong y'$, затѣмъ провести прямую $ZH \perp AB$ и на ней отложить отрѣзокъ $ZH \cong x'$, изъ точекъ $A$ и $B$ опустить перпендикуляры $AY$ и $BX$ на прямыя $HB$ и $HA$ и опредѣлить точку пересѣченія $C$ этихъ перпендикуляровъ. Тогда $H$ есть точка высотъ треугольника $ABC$; а потому, если мы обозначимъ отрѣзокъ $CZ$ черезъ $y$, то

a): $(y,\ x) \sim (y',\ x')$; b): $(y,\ y') \sim (x,\ x')$.

Отсюда вытекаетъ важная формула, выражающая законъ перестановленія членовъ:

$$\text{Если } (x,\ y) \sim (x',\ y'), \text{ то } (x,\ x') \sim (y,\ y'), \text{ или:} \qquad (6)$$
$$\text{Если } x : y = x' : y', \text{ то } x : x' = y : y'.$$

Для полноты мы еще отмѣтимъ:

$$\text{Если } x : y = x' : y', \quad y : z = y' : z', \quad \text{то } x : z = x' : z'. \qquad (7)$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ по условію $(x, y) \sim (x', y')$ и $(y, z) = (y', z')$, то, какъ было выяснено въ п. 5 (фиг. 98), $(x, y, z) \sim (x', y', z')$.

**9.** Соотношеніемъ $a : b = x : c$ длина отрѣзка $x$ однозначно опредѣляется. Мы будемъ разсматривать ее, какъ „преобразованіе“ „дроби“ $a : b$ или $a/b$ къ „знаменателю“ $c$[15]). Такъ какъ при „одноименныхъ“

---

[15]) Дробь вида $a/b$ вводится здѣсь просто, какъ нѣкоторый символъ, составляемый изъ двухъ отрѣзковъ, для котораго формально устанавливаются правила сравненія и операцій. Такъ, условіе равенства двухъ дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{a'}{b'}$ заключается въ

дробяхъ $a/c$ и $b/c$ опредѣленіе сложенія и вычитанія напрашивается само собой:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}, \tag{8}$$

то мы имѣемъ возможность въ силу этого складывать и вычитать любыя дроби. Въ виду соотношенія (7) мы имѣемъ возможность опредѣлить умноженіе и дѣленіе равенствами:

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}=\frac{x}{z}, \quad \frac{x}{z}:\frac{y}{z}=\frac{x}{y}. \tag{9}$$

Напримѣръ, чтобы образовать произведеніе $a/b \cdot c/d$, мы полагаемъ $a=x$, $b=y$, $c/d=y/z$; этимъ отрѣзокъ $z$ однозначно опредѣляется; тогда $a/b \cdot c/d=x/z$, такъ что вспомогательный отрѣзокъ $y$ совершенно выключается.

Для нашихъ цѣлей этихъ указаній достаточно. Изъ сказаннаго уже совершенно ясно, что этой символической системѣ операцій надъ отрѣзками можно вполнѣ присвоить законы сопряженія чиселъ; не хватаетъ только еще опредѣленія, согласно которому производилось бы сравненіе этихъ „дробей", но это достигается положеніемъ, которое само собою разумѣется: $a/c<b/c$, если $a<b$; можно также устранить знаменателей путемъ введенія отрѣзка „единицы", $e$ или 1; этотъ послѣдній отрѣзокъ не долженъ мѣняться въ предѣлахъ одного и того же изслѣдованія, и въ качествѣ знаменателя, который всегда подразумѣвается, его всегда можно ставить или опускать по желанію. Изъ соотношенія $a/b=c/d$ слѣдуетъ, напримѣръ:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{e}=\frac{c}{d}\cdot\frac{b}{e}, \frac{a}{e}=\frac{c}{d}\cdot\frac{b}{e}(9), \quad \frac{a}{e}\cdot\frac{d}{e}=\frac{d}{e}\frac{c}{d}\frac{b}{e}, \frac{a}{e}\frac{d}{e}=\frac{b}{e}\frac{c}{e}(9),$$

или, наконецъ, $ad=bc$; при этомъ, правда, принимается, что законъ перемѣстительный при умноженіи дробей совмѣстимъ съ остальными нашими опредѣленіями; это, впрочемъ, легко доказать.

Доказательство законовъ сопряженія мы здѣсь оставимъ; намъ нужно еще только возвратиться къ теоремѣ Дезарга, которая составляетъ основу всей нашей системы конструктивнаго исчисленія. Какъ мы видѣли въ § 10, 1, это предложеніе легко доказать, опираясь на аксіомы I и II и принимая также аксіому о параллельности; но при этомъ приходится пользоваться трехмѣрнымъ пространствомъ. Однако, тотъ, кто принципіально

томъ, чтобы $(a, b) \sim (a', b')$. Привести дробь $a/b$ къ знаменателю $c$—значитъ составить дробь $a'/c$, равную дроби $a/b$. Остальныя критеріи сравненія и правила дѣйствій въ общихъ чертахъ намѣчены въ текстѣ; полная теорія этого исчисленія требуетъ довольно продолжительныхъ разсужденій.

желалъ бы, чтобы планиметрія была предоставлена своимъ собственнымъ силамъ, естественно будетъ искать такого доказательства, которое было бы построено только на аксіомахъ плоскости: но, повидимому, врядъ ли существуетъ такого рода доказательство, которое такъ или иначе не было бы связано съ исчисленіемъ отрѣзковъ; если мы, поэтому, желаемъ ограничить себя аксіомами плоскости, то для этого необходимо поставить ученіе о подобіи на совершенно другую основу. Но для этого необходима болѣе сложная система исчисленія отрѣзковъ, какъ напримѣръ, система, предложенная Гильбертомъ; это задача, надъ упрощеніемъ которой въ настоящее время много работаютъ*).

Тригонометрія съ формальной своей стороны также можетъ быть построена независимо отъ понятія объ общей мѣрѣ, т. е. независимо отъ Архимедовой аксіомы, какъ это обнаруживаетъ исчисленіе отрѣзковъ съ помощью „проекціоннаго параметра“, предложенное Моллерупомъ**). Собственно, только въ примѣненіи геометріи къ спеціальнымъ случаямъ, представляемымъ практической жизнью или естествознаніемъ, можетъ быть интересно обращаться къ измѣренію и къ числамъ, къ которымъ оно приводитъ; но во всѣхъ этихъ случаяхъ можно всегда удовольствоваться приближенной общей мѣрой $\mu$ двухъ отрѣзковъ, которая должна существовать въ силу аксіомы Архимеда. Въ этихъ предѣлахъ геометрія, какъ образъ чистаго мышленія, можетъ, собственно, совершенно отказаться отъ ирраціональнаго, что дословно означаетъ „не имѣющее отношенія (къ единицѣ)“, а это сдѣлало бы ея формальное развитіе элементарнѣе обычнаго. Тѣмъ не менѣе ирраціональное часто представляется для нашего воззрѣнія натуральнѣе и яснѣе, и рѣшительно нельзя утверждать, что въ школьномъ обученіи геометрія, основанная на понятіяхъ, должна замѣнить собой наглядное изложеніе. Напротивъ того, было бы оченъ жаль, если бы вздумали ввести въ школу чисто абстрактную геометрію; это было былучшимъ средствомъ задушить въ зародышѣ непосредственную радость отъ творчества созерцающей фантазіи, столь свойственную юношеству, и воспитать людей, бѣдныхъ духомъ. Развѣ только въ старшихъ классахъ, когда производится повтореніе элементарной геометріи, въ связи съ введеніемъ въ теорію познанія, было бы умѣстно указать на логическое построеніе геометріи, ибо ариѳметика и геометрія, построенныя на чистыхъ понятіяхъ, именно и могутъ дать ключъ къ пони-

*) Важнѣйшая литература:
Hilbert, Grundlagen, § 13 ff., § 22 ff.
J. Mollerup, Studien over den plane geometrie axiomer, Kopenhagen 1903, также Math. Ann. 56 и 58;
F. Schur, Math. Ann. 57;
A. Kneser, Arch. für Math. u. Phys. (3. Reihe) Bd. 2.

**) См. ссылку на стр. 265.

манію теоріи познанія,въ особенности той, которую создали Платонъ, Декартъ, Лейбницъ, Кантъ.

## § 22. Измѣреніе площадей.

1. Периферія треугольника, квадрата, прямоугольника, а также окружность представляютъ собой простѣйшіе примѣры линій, которыя разлагаютъ плоскость на двѣ „раздѣльныя части" такимъ образомъ, что всякая точка плоскости, не лежащая на соотвѣтствующей линіи $\lambda$, всегда принадлежитъ одной и только одной изъ этихъ двухъ частей; кромѣ того, точка одной части не можетъ быть соединена съ точкой другой части такой ломаной линіей, которая не встрѣчаетъ линіи $\lambda$, производящей это дѣленіе; двѣ же точки, принадлежащія одной и той же части, всегда могутъ быть соединены отрѣзкомъ или ломаной линіей, не встрѣчающей этой линіи $\lambda$. Этотъ фактъ представляетъ собой непосредственное слѣдствіе аксіомъ сопряженія и выведеннаго изъ нихъ предложенія 1-го § 20. Линія $\lambda$, обладающая указаннымъ свойствомъ, называется „однократно замкнутой" линіей *); двѣ же части, о которыхъ идетъ рѣчь, обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что одна изъ нихъ — „внѣшняя" — содержитъ цѣликомъ безчисленное множество прямыхъ линій; другая же — „внутренняя" — не содержитъ цѣликомъ ни одной прямой. Внутренняя часть „окружается" линіей $\lambda$; она образуетъ „ограниченную площадь" — „плоскую фигуру".

2. Потребности практической жизни, какъ напримѣръ, опредѣленіе стоимости участка земли, окрашиваніе или золоченіе стѣны и т. п., вынудили присвоить каждой ограниченной плоской фигурѣ величину [которая въ случаѣ поля можетъ измѣряться временемъ, потребнымъ для обработки (Morgen), или числомъ необходимыхъ вспомогательныхъ силъ (Iugera, Ioch, Ochsen), въ случаѣ окрашиванія стѣны — вѣсомъ затраченнаго матеріала и т. п.]; лишь гораздо позже это наглядное представленіе претворилось въ точное понятіе. Только въ самое послѣднее время, въ особенности благодаря изслѣдованіямъ Шура и Гильберта, удалось овладѣть понятіемъ о площади, по крайней мѣрѣ, въ тѣхъ предѣлахъ, въ какихъ это необходимо для элементарной геометріи.

Всякое опредѣленіе величины относительно; именно, оно всегда зависитъ отъ точки зрѣнія, съ которой намъ угодно производить сравненіе. Для измѣренія величины площадей имѣло рѣшающее значеніе то практическое требованіе, что площади фигуръ, ограничиваемыхъ конгруэнтными линіями, должны считаться равными, между тѣмъ какъ площадь ограниченной фигуры $A$, которая цѣликомъ принадлежитъ другой

*) Въ противоположность $n$-кратно замкнутымъ линіямъ, раздѣляющимъ плоскости на $n+1$ частей.

фигурѣ $B$, не охватывая послѣдней цѣликомъ, должна считаться меньше, нежели площадь фигуры $B$. Если фигура $B$, въ свою очередь, принадлежитъ цѣликомъ третьей фигурѣ $C$, не охватывая послѣдней цѣликомъ, то и фигура $A$ содержится въ фигурѣ $C$; если, слѣдовательно, $A < B$ и $B < C$, то $A < C$, какъ этого требуетъ общее понятіе о величинѣ. Сравнимъ теперь совершенно аналогичное положеніе дѣла, исходя отъ котораго, мы пришли въ проективной геометріи къ синтезу понятія о величинѣ отрѣзковъ; тамъ, какъ и здѣсь, мы могли сравнивать $A$ съ $B$ только въ томъ случаѣ, когда $A$ составляетъ часть $B$; и подобно тому, какъ тамъ, мы получили возможность сравнивать два отрѣзка, не имѣющіе общихъ точекъ, лишь послѣ того, какъ условно ввели пріемъ, которымъ устанавливалось равенство отрѣзковъ въ понятіи и въ (чистомъ) воззрѣніи, такъ и здѣсь, чтобы сообщить замкнутымъ фигурамъ характеръ величины, мы должны прежде всего установить законъ, который опредѣлялъ бы равенство площадей. По Гильберту („Основанія геометріи", § 18) для этого необходимо понятіе „о равносоставленныхъ фигурахъ" *). Два „многоугольника", т. е. фигуры, ограниченныя прямыми линіями **), мы будемъ называть **равносоставленными**, если они могутъ быть разбиты каждый на конечное число треугольниковъ такимъ образомъ, чтобы каждому составляющему треугольнику въ одномъ многоугольникѣ отвѣчалъ конгруэнтный ему составляющій треугольникъ въ другомъ многоугольникѣ. Послѣ этого опредѣленіе **равенства площадей, или равновеликости**, по Гильберту, гласитъ: два многоугольника называются **равновеликими**, если къ нимъ можно присоединить два равносоставленныхъ многоугольника такимъ образомъ, чтобы полученные послѣ этого многоугольники, въ свою очередь, оказались равносоставленными. Трудность сравненія площадей заключается въ томъ произволѣ, который допускается этимъ опредѣленіемъ. При проективномъ сравненіи отрѣзковъ мы имѣли вполнѣ опредѣленное построеніе, которое разрѣшаетъ вопросъ о равенствѣ ихъ. Въ настоящемъ же случаѣ совершенно невозможно обозрѣть всѣ возможныя разложенія; à priori нѣтъ даже увѣренности въ томъ, что опредѣленія равносоставленныхъ и равновеликихъ фигуръ имѣютъ смыслъ, такъ какъ можно даже предположить, что, согласно этимъ опредѣленіямъ, всѣ многоугольники окажутся равновеликими между собою. Устранить это сомнѣніе невоз-

*) Понятіе о равносоставленныхъ фигурахъ впервые введено В. Больэ (W. Bolyai) въ его „Tentamen". Къ задачѣ о равносоставленныхъ фигурахъ возвратился потомъ Шёнеманъ (Schönemann. Soest, Pr. 1884 и 1888). Основательно вопросъ разобранъ въ журналѣ „Mathem. Annalen" Рети (Réthy; т.т. 38, 42 и 45 названнаго журнала), Раузенбергеромъ (Rausenberger; т. 43 названнаго журнала) и Добринеромъ (Dobriner; т. 42 названнаго журнала); см. также сочиненіе послѣдняго „Leitfaden der Geometrie", Leipzig, 1898.

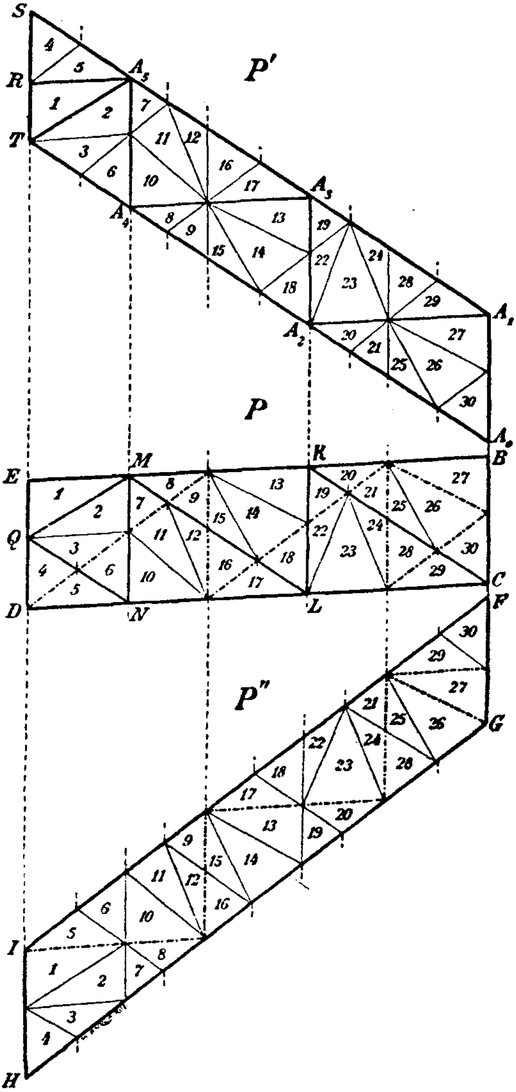
**) Мы принимаемъ, что многоугольникъ ограниченъ однократною замкнутой ломаной.

можно безъ довольно пространныхъ подготовительныхъ разужденій, по крайней мѣрѣ, если мы желаемъ, какъ мы это дѣлали въ теоріи подобія, обходиться безъ прямого примѣненія аксіомы о непрерывности; съ этимъ послѣднимъ требованіемъ съ точки зрѣнія идеальной геометріи безусловно необходимо считаться, если это только возможно, потому что иначе, ссылаясь на непрерывность, мы безъ нужды вводимъ болѣе сложное понятіе объ ирраціональномъ.

**3.** Изъ опредѣленій Гильберта слѣдуетъ:

Предложеніе 1. Если два многоугольника равносоставлены съ третьимъ, то они равносоставлены также другъ съ другомъ; если два многоугольника равновелики третьему, то они и другъ съ другомъ равновелики.

Въ самомъ дѣлѣ, если многоугольники $P'$ и $P''$ равносоставлены каждый съ многоугольникомъ $P$ (фиг. 105), то послѣдній разбивается, съ одной стороны,




Фиг. 105.

на треугольники $\Delta_1'$, $\Delta_2'$, $\Delta_3'$, . . . , $\Delta_p'$, которые въ другой группировкѣ составляютъ многоугольникъ $P'$ *), а, съ другой стороны,—на треуголь-

*) О конгруэнтныхъ треугольникахъ мы здѣсь говоримъ, что это тѣ же треугольники.

ники $\Delta_1''$, $\Delta_2''$, $\Delta_3''$, ..., $\Delta_q''$, которые въ иной группировкѣ воспроизводятъ многоугольникъ $P''$. Если мы себѣ теперь представимъ, что въ многоугольникѣ $P$ одновременно произведены оба эти разложенія, то это, вообще говоря, уже не будетъ разложеніе на треугольники; но, присоединяя новыя отрѣзки, мы можемъ обратить его въ разложеніе на треугольники [16]); при этомъ, какъ каждый изъ треугольниковъ $\Delta'$, такъ и каждый изъ треугольниковъ $\Delta''$ разложится на меньшіе треугольники $\delta$. Это разложеніе соотвѣтственныхъ треугольниковъ $\Delta'$ и $\Delta''$ мы произведемъ также на многоугольникахъ $P'$ и $P''$; тогда многоугольникъ $P'$, какъ и многоугольникъ $P''$, представятъ собою аггрегатъ треугольниковъ $\delta$, изъ которыхъ составляется также многоугольникъ $P$. Этимъ доказана первая часть предложенія 1.

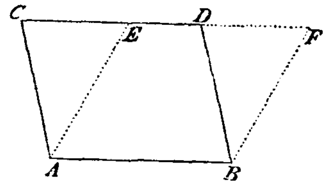
На фиг. 105, которая предназначена еще и для другой цѣли, стороны треугольниковъ $\Delta'$ отмѣчены жирными линіями; стороны треугольниковъ $\Delta''$ отмѣчены штриховымъ пунктиромъ, когда онѣ не принадлежатъ периферіи многоугольниковъ $P'$ или $P''$; конгруэнтные треугольники $\delta$ помѣчены однимъ и тѣмъ же номеромъ, арабскими цифрами.

Во второй части предложенія 1-го намъ даны два многоугольника $p'$ и $p''$, которые равновелики третьему многоугольнику $p$; это значитъ: если мы къ многоугольникамъ $p'$ и $p$ одновременно присоединимъ нѣкорые треугольники $\Delta_1'$, $\Delta_2'$, $\Delta_3'$, ..., $\Delta_h'$, то „расширенные“ такимъ образомъ многоугольники $P'$ и $P_1$ равносоставлены; слѣдовательно, они могутъ быть составлены изъ однихъ и тѣхъ же треугольниковъ $D_1'$, $D_2'$, ... Точно такъ же къ многоугольникамъ $p''$ и $p$ можно одновременно присоединить треугольники $\Delta_1''$, $\Delta_2''$, $\Delta_3''$, ..., $\Delta_k''$ такимъ образомъ, чтобы расширенные многоугольники $P''$ и $P_2$ разлагались на одни и тѣ же треугольники $D_1''$, $D_2''$, .... Мы представимъ себѣ теперь, что къ многоугольнику $p$ одновременно присоединены, какъ треугольники $\Delta_1'$, $\Delta_2'$, ..., $\Delta_h'$, такъ и треугольники $\Delta_1''$, $\Delta_2''$, $\Delta_3''$, ..., $\Delta_k''$ въ такомъ видѣ, въ какомъ они расположены соотвѣтственно въ многоугольникахъ $P'$ и $P''$. Можетъ случиться, что ни одинъ изъ треугольниковъ $\Delta'$ не покрываетъ ни одного изъ треугольниковъ $\Delta''$; можетъ, конечно, имѣть мѣсто и обратное. Если бы нѣкоторые треугольники $\Delta'$ и $\Delta''$ другъ друга покрывали, то фигуру $\Pi$, которая образуется при ихъ взаимномъ наложеніи, мы разобьемъ на сѣть треугольниковъ; но въ такомъ случаѣ фигура $\Pi$ можетъ быть получена, какъ изъ многоугольника $P'$ путемъ присоединенія нѣкоторыхъ треугольниковъ $\delta_1$, $\delta_2$, ... этой сѣти, такъ и изъ многоугольника $P''$ присоеди-

[16]) Если мы нанесемъ на многоугольникѣ $P$ какъ одну, такъ и другую сѣть треугольниковъ, то периферіи тѣхъ и другихъ треугольниковъ разложатъ многоугольникъ $P$ на многоугольники, которые мы діагоналями можемъ вновь разбить на треугольники.

неніемъ нѣкоторыхъ треугольниковъ $\delta_\nu$, $\delta_{\nu+1}$, ... той же сѣти. Если мы присоединимъ первые треугольники къ многоугольнику $P'$, а вторые къ многоугольнику $P''$, то расширенныя фигуры $\Pi_1$ и $\Pi_2$ равносоставлены съ фигурой $\Pi$, а, слѣдовательно, и другъ съ другомъ; поэтому многоугольники $p'$ и $p''$ равновелики, что и требовалось доказать.

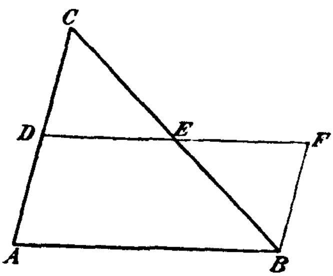
Если два параллелограмма $ABCD$ и $ABEF$ (фиг. 106) имѣютъ общее основаніе $AB$, а верхнія основанія $CD$ и $EF$ расположены на одной прямой, то мы можемъ получить изъ нихъ одну и ту же трапецію $ABCF$, разъ присоединяя къ первому параллелограмму треугольникъ $DBF$, а другой разъ присоединяя ко второму параллелограмму треугольникъ $CAE$, конгруэнтный треугольнику $DBF$; слѣдовательно, оба параллелограмма равновелики. Очень простое обобщеніе этого результата даетъ намъ такимъ образомъ:



Фиг. 106.

Предложеніе 2. Параллелограммы, имѣющіе равныя основанія и равныя высоты, равновелики.

Если мы черезъ середину $E$ стороны $CB$ треугольника $ABC$ проведемъ прямую, параллельную основанію $AB$ (фиг. 107), то она, согласно аксіомѣ $\mathrm{II}_4$, должна встрѣтить сторону $CA$ въ нѣкоторой точкѣ $D$; эта точка представляетъ собой середину этой стороны, такъ какъ треугольники $CED$ и $CBA$ подобны и $CB = 2 \cdot CE$. Если теперь точка $F$ расположена на прямой $DE$ такимъ образомъ, что $E$ есть середина отрѣзка $DF$, то треугольники $CDE$ и $BEF$ конгруэнтны, $ABDF$ есть параллелограммъ. Если мы къ параллелограмму присоединимъ треугольникъ $DEC$ или же къ треугольнику $ABC$ присоединимъ треугольникъ $FEB$, конгруэнтный предыдущему, то мы въ томъ и въ другомъ случаѣ получаемъ многоугольникъ $CABFEC$; отсюда слѣдуетъ:



Фиг. 107.

Предложеніе 3. Каждый треугольникъ равносоставленъ съ нѣкоторымъ параллелограммомъ, имѣющимъ такое же основаніе и вдвое меньшую высоту.

Отсюда слѣдуетъ:

Предложеніе 4. Треугольники, имѣющіе равныя основанія и равныя высоты, равновелики, ибо они равновелики параллелограммамъ, которые также имѣютъ равныя основанія и равныя высоты.

Предложеніе 5. При наличности Архимедовой аксіомы параллелограммы, имѣющіе одинаковыя основанія и одинаковыя высоты, равносоставлены.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть (фиг. 105) $P$ и $P'$ суть данные параллелограммы и точки $E$, $D$, $T$, $S$ пусть будутъ расположены на одной и той же прямой; проведемъ $A_1A_2 \parallel BE$, $A_2A_3 \parallel A_0A_1$, $A_3A_4 \parallel BE$, $A_4A_5 \parallel A_0A_1, \ldots$, $A_{2\nu}A_{2\nu+1} \parallel A_0A_1$, $A_{2\nu+1}A_{2\nu+2} \parallel BE. \ldots$; такимъ образомъ, мы получимъ на прямой $A_0T$ конгруэнтные отрѣзки $A_0A_2$, $A_2A_4$, $A_4A_6, \ldots$. Согласно аксіомѣ Архимеда, между этими отрѣзками долженъ быть одинъ $A_{2n}A_{2n+2}$, который содержитъ точку $T$. Положимъ сначала, что $n > 1$; напримѣръ, на фиг. 105 $n = 2$. Если мы теперь черезъ точку $A_{2n+1}$ проведемъ прямую, параллельную $BE$, то послѣдняя встрѣтитъ уже не отрѣзокъ $A_0T$, а отрѣзокъ $TS$ въ точкѣ, которую мы обозначимъ черезъ $R$. Аналогично этому въ параллелограммѣ $P$ проведемъ отрѣзки $CK$, $LM$, $NQ$, параллельные $A_0T$. Въ такомъ случаѣ $QM \parallel TA_{2n+1}(TA_5)$, параллелограммы же $P$ и $P'$ оказываются равносоставленными, если мы примемъ за составляющіе треугольники тѣ, которые обведены жирными штрихами, ибо $A_0A_1A_2 \cong CBK$, $A_1A_2A_3 \cong CKL, \ldots$ [17]). Можно было бы думать, что намъ здѣсь пришлось прибѣгнуть къ аксіомѣ Архимеда только вслѣдствіе особенности нашей фигуры, такъ что при другомъ построеніи мы, быть можетъ, могли бы этого избѣгнуть. Однако, Гильбертъ въ § 18 своихъ „Основаній“ строго доказалъ, что это не такъ. Изъ предложеній 3 и 5 безъ труда выводится:

Предложеніе 6. При наличности аксіомы Архимеда треугольники, имѣющіе одинаковыя основанія и одинаковыя высоты, равносоставлены.

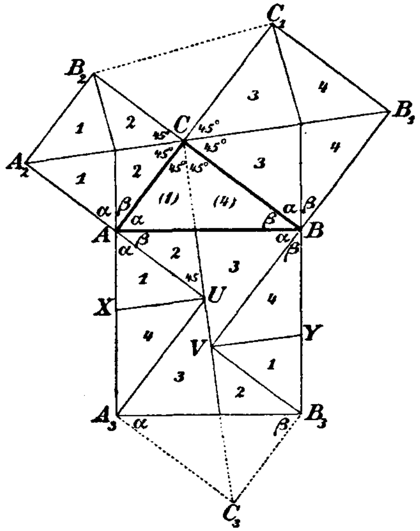
**4.** Такъ какъ мы не желаемъ пользоваться аксіомой Архимеда въ теоріи площадей, то мы здѣсь не будемъ пользоваться предложеніями 5 и 6. Изъ различныхъ слѣдствій, которыя вытекаютъ изъ предложеній 1 — 4, мы упомянемъ наиболѣе важное, а именно теорему Пиѳагора:

Квадратъ, построеннный на гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на его катетахъ.

Для доказательства построимъ (фиг. 108) на гипотенузѣ $AB$ квадратъ $ABB_3A_3$ и квадраты $ACB_2A_2$ и $BCC_1B_1$ на катетахъ. Проведемъ также прямую $B_2C_1$ и при сторонѣ $A_3B_3$ построимъ треугольникъ $A_3B_3C_3$, конгруэнтный $ABC$, такимъ образомъ, чтобы онъ былъ расположенъ внѣ квадрата, построеннаго на гипотенузѣ. Если мы повернемъ четыреугольникъ $A_2ABB_1$ вокругъ вершины $A$ такимъ образомъ, чтобы точка $A_2$ упала въ точку $C$, то точка $B$ упадетъ въ точку $A_3$, точка $B_1$ — въ точку $C_3$. Такимъ же образомъ четырехугольникъ $A_2ABB_1$

[17]) Въ послѣдней части $A_4TA_5 \cong MQN$, $A_5RS \cong NDQ$, $TA_5R \cong QME$.

вращеніемъ вокругъ точки $B$ можетъ быть приведенъ въ совмѣщеніе съ четырехугольникомъ $C_3B_3BC$. Такъ какъ, далѣе, четырехугольникъ $AA_2B_1B$ конгруэнтенъ четырехугольнику $A_2B_2C_1B_1$, то шестиугольникъ $A_2ABB_1C_1B_2$ конгруэнтенъ шестиугольнику $CAA_3C_3B_3B$; но каждый изъ этихъ шестиугольниковъ содержитъ по два данныхъ прямоугольныхъ треугольника $\Delta$, ибо $\Delta \cong ABC \cong B_2CC_1 \cong A_3B_3C_3$. Отнимая по $2\Delta$ отъ обоихъ шестиугольниковъ, мы получаемъ равновеликія фигуры, именно, съ одной стороны, сумму квадратовъ, построенныхъ на катетахъ, а съ другой стороны,—квадратъ, построенный на гипотенузѣ *).



Фиг. 108.

П. Эпштейнъ (P. Epstein) замѣтилъ, что это доказательство легко превратить въ такое, которое даетъ самое разложеніе **). Достаточно только продолжить прямыя $AA_3$ и $BB_3$ до пересѣченія съ прямой $A_2CB_1$ и принять во вниманіе точки $U$ и $V$, съ которыми совмѣстится вершина $C$ при упомянутыхъ выше вращеніяхъ четырехугольника $A_2ABB_1$; какъ легко усмотрѣть по соотношеніямъ между углами, отмѣченными на фигурѣ, эти точки лежатъ на прямой $CC_3$; тѣ части фигуръ, которыя отмѣчены пунктиромъ, теперь, конечно, можно опустить. Если мы еще проведемъ $UX \parallel A_2CB_1 \parallel VY$, то квадратъ, построенный на гипотенузѣ, распадается на 8 попарно конгруэнтныхъ треугольниковъ, которые въ другомъ расположеніи составляютъ также сумму квадратовъ, построенныхъ на катетахъ.

**5.** Хотя основныя предложенія теоріи площадей такимъ образомъ легко доказываются, въ особенности, если мы пользуемся аксіомой Архимеда, мы все же не должны себя обманывать; нельзя думать, что одно лишь только опредѣленіе равенства и неравенства площадей, а также сложенія (посредствомъ приложенія), уже претворяетъ совокупности площадей въ величину; напротивъ, для этого требуется еще, чтобы было

---

*) Пиѳагоръ жилъ въ VI столѣтіи до Р. Х., но уже приблизительно за 1200 лѣтъ до этого времени египтянамъ былъ извѣстенъ частный случай, именно, прямоугольный треугольникъ со сторонами 3, 4 и 5; весьма вѣроятно, что имъ пользовались для нанесенія прямыхъ угловъ. Ср. M. Cantor, „Über die älteste indische Mathematik (Archiv der Math. u. Phys„ [3] 8, 63—72).

**) Ср. „Zeitschr. f. math u. naturw. Unterr". XXXVII (1906).

возможно опредѣлить и „умноженіе“; требуется также доказательство, что операціи, названныя сложеніемъ и умноженіемъ, подчиняются тѣмъ же законамъ сопряженія, какъ и въ ариѳметикѣ; наконецъ, нужно еще, чтобы существовало по одному и только одному значенію, представляющему аналогію нуля и единицы. Въ проективной системѣ измѣренія отрѣзковъ мы строго провели всѣ эти требованія. Въ настоящемъ случаѣ прямой путь въ этомъ отношеніи привелъ бы къ слишкомъ большимъ трудностямъ. Гильбертъ въ своихъ „Основаніяхъ“ (§ 20) далъ гораздо болѣе простой пріемъ, который, правда, на первый взглядъ представляется нѣсколько страннымъ [18]).

Если $a, b, c$ суть стороны треугольника $\varDelta$, а $h_a, h_b, h_c$ суть соотвѣтственныя высоты, то $a : h_b = b : h_a$, $a : h_c = c : h_a$, такъ что

$$a \,.\, h_a = b \,.\, h_b = c \,.\, h_c$$ [19]).

Произведеніе изъ стороны треугольника на соотвѣтствующую ей высоту не зависитъ отъ выбора стороны; точно такъ же и половина этого произведенія. Это послѣднее мы назовемъ мѣрой площади треугольника $\varDelta$ и будемъ обозначать черезъ $J(\varDelta)$, такъ что:

$$J(\varDelta) = \frac{1}{2}\, a \,.\, h_a = \frac{1}{2}\, b \,.\, h_b = \frac{1}{2}\, c \,.\, h_c\,.$$

Умѣстность коэффиціента $\frac{1}{2}$ вскорѣ обнаружится. Теперь мы многоугольникамъ присвоимъ характеръ величины такимъ путемъ, что мы и имъ, какъ и треугольнику, присвоимъ мѣру площади. Доказательство же того, что площади дѣйствительно имѣютъ характеръ величины, необходимо для того, чтобы обнаружить допустимость опредѣленія равновеликихъ многоугольниковъ, такъ какъ à priori не лишено возможности и такое предположеніе, что всѣ многоугольники, быть можетъ, равновелики. Когда Евклидъ при доказательствѣ обращенія предложеній 2 и 4 пользуется общимъ положеніемъ *καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστι* (цѣлое больше части), то этимъ именно онъ и постулируетъ, какъ указываетъ Гильбертъ, что площади имѣютъ характеръ величины.

**6.** Отрѣзокъ, который соединяетъ вершину $S$ треугольника $\varDelta$ съ точкой противоположной стороны $g$, называется трансверсалью треугольника. Трансверсаль производитъ трансверсальное дѣленіе треугольника на два составляющихъ треугольника, которые имѣютъ точку $S$ общей

---

[18]) См. дополненіе II „Объ измѣреніи площадей и объемовъ“ въ концѣ книги.

[19]) На каждое изъ этихъ произведеній можно смотрѣть двояко: либо какъ на произведеніе чиселъ, измѣряющихъ соотвѣтствующіе отрѣзки, — и тогда это равенство гласитъ, что три произведенія даютъ одно и то же число, либо какъ на произведеніе отрѣзковъ въ смыслѣ указаннаго выше исчисленія отрѣзковъ, — въ такомъ случаѣ это равенство гласитъ, что указанныя три произведенія выражаются однимъ и тѣмъ же отрѣзкомъ. Авторъ указываетъ ниже, что онъ предпочитаетъ послѣднюю точку зрѣнія.

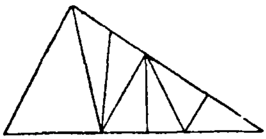
вершиной, а основанія которыхъ $g_1$ и $g_2$ лежатъ на прямой $g$. Оба составляющихъ треугольника имѣютъ одну и ту же высоту $h$, вслѣдствіе чего мы получаемъ:

$$J(\Delta) = \frac{1}{2} hg = \frac{1}{2} h (g_1 + g_2) = J(\Delta_1) + J(\Delta_2).$$

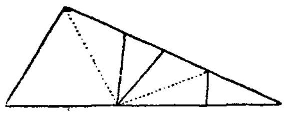
Повторное примѣненіе этой формулы даетъ:

Вспомогательное предложеніе. Если треугольникъ $\Delta$ раздѣленъ на составляющіе треугольники такимъ образомъ, что всѣ вершины послѣднихъ расположены на двухъ сторонахъ даннаго треугольника, то мѣра площади треугольника $\Delta$ равна суммѣ мѣръ площадей составляющихъ треугольниковъ (фиг. 109).

Если, напротивъ, треугольникъ $\Delta$ разложенъ на составляющіе треугольники $\alpha$ такимъ образомъ, что нѣкоторыя вершины послѣднихъ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ расположены внутри треугольника $\Delta$, а не на его сторонахъ (тогда



Фиг. 109.



Фиг. 110.

какъ другія вершины расположены на сторонахъ треугольника $\Delta$), то мы соединимъ вершину $S$ треугольника $\Delta$ съ точками $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и продолжимъ эти прямыя до пересѣченія съ основаніемъ треугольника $\Delta$ въ точкахъ $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Вслѣдствіе этого треугольникъ $\Delta$ разбивается на $n+1$ треугольниковъ $\delta, \delta_1, \ldots, \delta_n$, имѣющихъ ту же вершину и ту же высоту; поэтому, согласно нашему вспомогательному предложенію, мѣра площади треугольника $\Delta$ равняется суммѣ мѣръ площадей этихъ составляющихъ треугольниковъ. Обозначеніе вершинъ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ могло быть выбрано такимъ образомъ, чтобы ни въ одномъ изъ $n+1$ треугольниковъ $\delta$ не было внутри вершинъ $A$. Каждый изъ треугольниковъ $\delta$ разобьется поэтому на треугольники и четыреугольники, вершины которыхъ лежатъ на его сторонахъ (фиг. 110). Если мы каждый изъ четыреугольниковъ при помощи діагонали разобьемъ на треугольники, то мѣра площади треугольника $\delta$, согласно вспомогательному предложенію, равняется суммѣ мѣръ площадей составляющихъ треугольниковъ $\varepsilon$. Такимъ образомъ, $J(\Delta)$ можетъ быть представлено въ видѣ суммы мѣръ площадей всѣхъ треугольниковъ $\varepsilon$, которые въ совокупности образуютъ треугольники $\delta$. Но изъ тѣхъ же треугольниковъ $\varepsilon$ составляются также треугольники $\alpha$ первоначальнаго разложенія, и при томъ по типу фигуры 105, ибо трансверсали $SB_1, SB_2, \ldots,$ выходящія изъ вершины $S$, не лежащей внутри какого-либо изъ треугольниковъ $a$, производятъ дѣленіе именно по типу фигуры 105. Слѣдовательно, сумма мѣръ площадей всѣхъ треугольниковъ $a$ равняется суммѣ мѣръ площадей всѣхъ составляющихъ треугольниковъ $\varepsilon$. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы получаемъ окончательно:

Предложеніе 7. Если треугольникъ какимъ бы то ни было образомъ раздѣленъ на конечное число составляющихъ треугольниковъ, то мѣра площади этого треугольника равняется суммѣ мѣръ площадей составляющихъ треугольниковъ; $J(\varDelta) = \Sigma J(a)$.

Если многоугольникъ разбивается разъ на треугольники $\varDelta_1, \varDelta_2, \ldots \varDelta_p$, другой разъ на треугольники $\varDelta_1', \varDelta_2', \ldots, \varDelta_q'$, и мы одновременно произведемъ оба разложенія, то треугольники $\varDelta$ и $\varDelta'$, какъ показано на фиг. 105, могутъ быть разбиты на одни и тѣ же составляющіе треугольники $\delta_1, \ldots, \delta_n$; вслѣдствіе этого

$$\Sigma J(\varDelta) = \Sigma J(\delta) = \Sigma J(\varDelta').$$

Если мы поэтому опредѣлимъ мѣру площади $J(P)$ многоугольника $P$, какъ сумму мѣръ площадей всѣхъ составляющихъ треугольниковъ $\varDelta$, на которые послѣдніе разбиваются при какомъ-либо одномъ опредѣленномъ разложеніи, то $J(P)$ не зависитъ отъ характера разложенія: $J(P) = \Sigma J(\varDelta) = \Sigma J(\varDelta')$; оно вполнѣ опредѣляется самимъ многоугольникомъ. Для многоугольника $X + Y$, состоящаго изъ частей $X$ и $Y$, $J(X + Y) = J(X) + J(Y)$. Въ виду же предложенія 7 мы получаемъ:

Предложеніе 8. Равносоставленные многоугольники имѣютъ одинаковую мѣру площади.

Пусть далѣе $P$ и $Q$ будутъ равновеликіе многоугольники; въ такомъ случаѣ, согласно опредѣленію равновеликихъ многоугольниковъ, существуютъ два такихъ равносоставленныхъ многоугольника $P'$ и $Q'$, что многоугольникъ $(P + P')$, состоящій изъ многоугольниковъ $P$ и $P'$, равносоставленъ съ многоугольникомъ $(Q + Q')$, состоящимъ изъ многоугольниковъ $Q$ и $Q'$. Поэтому, согласно предложенію 7:

$$J(P') = J(Q'), \quad J(P + P') = J(Q + Q');$$

такъ какъ, съ другой стороны, $J(X + Y) = J(X) + J(Y)$, то отсюда слѣдуетъ:

$$J(P) = J(Q'), \text{ т. е.}$$

Предложеніе 9. Равновеликіе многоугольники имѣютъ одинаковую мѣру площади.

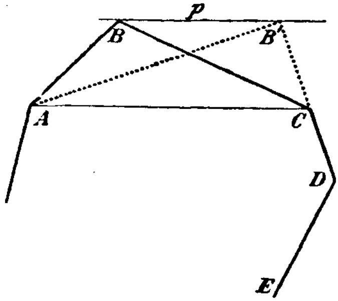
**7. Теперь нетрудно доказать обращенія предложеній 2 и 4:**

**Предложеніе 10. Равновеликіе параллелограммы съ равными основаніями имѣютъ равныя высоты.**

**Предложеніе 11. Равновеликіе треугольники съ равными основаніями имѣютъ равныя высоты.**

Въ самомъ дѣлѣ, если $g$ обозначаетъ общее основаніе, $h$ и $h_1$—высоты, то, въ случаѣ предложенія 10, $gh = gh_1$, а, въ случаѣ предложенія 11, $\frac{1}{2} gh = \frac{1}{2} gh_1$. Въ томъ и въ другомъ случаѣ, слѣдовательно, $h = h_1$.

Если мы черезъ вершину $B$ многоугольника $ABCD\ldots$ (фиг. 111) проведемъ прямую $p$, параллельную прямой $AC$, соединяющей несмежныя вершины $A$ и $C$, то нашъ многоугольникъ равновеликъ всякому другому многоугольнику $ABCDE\ldots$, вершина котораго $B$ лежитъ на прямой $p$ (предложеніе 4). Если поэтому точка $B$ лежитъ одновременно также на сторонѣ многоугольника $DC$ или на ея продолженіи, то многоугольникъ $AB'CDE\ldots$ или $AB'DE\ldots$ имѣетъ одной вершиной ($C$) меньше. Повторяя этотъ же самый пріемъ достаточное число разъ, мы необходимо придемъ къ треугольнику $\varDelta$, который равновеликъ данному многоугольнику, а потому имѣетъ съ нимъ одинаковую мѣру площади (предл. 9).



Фиг. 111.

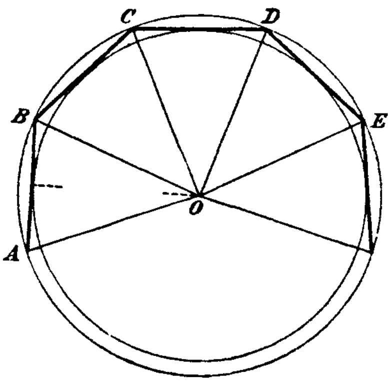
Двумъ многоугольникамъ $P$ и $P'$, имѣющимъ одинаковую мѣру площади $J$, отвѣчаютъ въ такомъ случаѣ два треугольника $\varDelta$ и $\varDelta'$, имѣющіе одинаковую мѣру площади. Пусть $A$, $B$, $C$ будутъ вершины одного изъ этихъ треугольниковъ, $A'$, $B'$, $C'$ — вершины другого. Изъ точекъ $A$ и $A'$ радіусомъ $g$, бóльшимъ, нежели стороны $AC$ и $A'C'$, мы опишемъ окружности. Въ такомъ случаѣ каждая изъ этихъ окружностей пересѣчетъ прямую $p$ и соотвѣтственно $p'$, проходящую черезъ вершину $C$ и соотвѣтственно черезъ $C'$, параллельно основанію треугольника; если $Z$ есть одна изъ точекъ пересѣченія на прямой $p$, а $Z'$ одна изъ точекъ пересѣченія на прямой $p'$, то треугольники $AZB$ и $A'Z'B'$ имѣютъ ту же мѣру площади $J$; но, такъ какъ сверхъ того ихъ стороны $AZ$ и $A'Z'$ также равны между собой, именно, равны числу $g$, то при соотвѣтствующихъ этимъ сторонамъ высотахъ $h$ и $h'$, $\frac{1}{2} gh = \frac{1}{2} gh'$, а потому $h = h'$; треугольники $AZB$ и $A'Z'B'$, такимъ образомъ, равновелики (предложеніе 4), а вмѣстѣ съ тѣмъ равновелики треугольники $\varDelta$ и $\varDelta'$, а, слѣдовательно, и многоугольники $P$ и $P'$. Мы получаемъ, такимъ образомъ, слѣдующее обращеніе предложенія 9.

**Предложеніе 12. Многоугольники, имѣющіе одинаковую мѣру площади, равновелики.**

Произведеніе $gh$ и $\frac{1}{2}gh$ мы здѣсь постоянно понимаемъ въ смыслѣ символическаго исчисленія § 21, оперирующаго надъ самыми отрѣзками, а не надъ измѣряющими ихъ числами. Такимъ образомъ, доказано важное предложеніе 9 и его обращеніе 12, откуда явствуетъ тождество равновеликости съ равенствомъ мѣры площади; вмѣстѣ съ тѣмъ этимъ вполнѣ установлено, что площадь многоугольника имѣетъ характеръ величины. Терминъ, введенный Гильбертомъ,—мѣра площади,— нужно понимать, конечно, не въ метрическомъ смыслѣ этого слова, т. е. не какъ измѣряющее число, а какъ произведеніе въ смыслѣ исчисленія отрѣзковъ, развитаго въ § 21. $\frac{1}{2}gh$ является, слѣдовательно, равнозначащимъ съ $\frac{1}{2}\cdot g/e\cdot h/e$, гдѣ $e$ есть отрѣзокъ, принятый за единицу. Коэффиціентъ $\frac{1}{2}$ введенъ въ выраженіе мѣры площади треугольника, очевидно, съ той цѣлью, чтобы мѣра площади квадрата, имѣющаго сторону $e$, выражалась черезъ $e^2$. Символическія формулы геометрическихъ операцій надъ отрѣзками при этихъ условіяхъ вполнѣ совпадаютъ съ тѣми формулами, которыя мы получаемъ, оперируя, какъ обыкновенно, надъ числами, измѣряющими отрѣзки. Если въ какомъ-либо треугольникѣ мы увеличимъ всѣ длины въ какомъ-нибудь отношеніи, то его площадь возрастетъ въ отношеніи, равномъ квадрату этого числа. Разлагая многоугольникъ на треугольники, мы отсюда получаемъ: въ подобныхъ многоугольникахъ мѣры площадей относятся, какъ квадраты сходственныхъ длинъ.

## § 23. Правильные многоугольники и окружность.

1. Изъ различныхъ примѣненій, которыя находитъ понятіе о подобіи площади, мы изложимъ здѣсь лишь самыя важныя, именно тѣ, которыя относятся къ дѣленію окружности на равныя части и къ ея измѣренію.




Фиг. 112.

Многоугольникъ называется правильнымъ, если всѣ его стороны равны и заключаютъ равные углы. Мы разумѣемъ при этомъ углы, содержащіеся между послѣдовательными сторонами: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDE = \cdots$ (фиг. 112). Если $O$ есть точка пересѣченія биссектриссъ угловъ при вершинахъ $A$ и $B$, то вслѣдствіе равенства этихъ угловъ $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA$, а потому $OA = OB$; вмѣстѣ съ тѣмъ треугольники $COB$ и $COA$ конгруэнтны, такъ какъ они имѣютъ общую сторону $OB$, $BC = BA$ и углы, содержащіеся между равными сторонами, равны; поэтому $OC = OB$ и $\sphericalangle OCB = \sphericalangle OBC$. Теперь мы такимъ же образомъ обнаруживаемъ равенство треугольниковъ $BOC$ и $COD$, ...; отсюда слѣдуетъ, что точка $O$ одинаково удалена отъ вершинъ многоугольника. Изъ конгруэнтности треугольниковъ $AOB$, $BOC$, ... вытекаетъ также равенство перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки $O$ на стороны $AB$, $BC$, ... Эти факты мы можемъ выразить такъ:

Предложенiе 1. Каждому правильному многоугольнику соотвѣтствуетъ „описанная окружность" (на которой лежатъ его вершины) и вписанная окружность (которой касаются ея стороны); эти окружности имѣютъ общiй центръ $O$.

Точка $O$ называется центромъ многоугольника. Отрѣзки, соединяющiе центръ съ вершинами правильнаго $n$-угольника, дѣлятъ его на $n$ равныхъ равнобедренныхъ треугольниковъ. Если данъ одинъ изъ этихъ треугольниковъ, то мы можемъ воспроизвести весь многоугольникъ. Сообразно этому его называютъ „опредѣляющимъ треугольникомъ". Уголъ при вершинѣ $O$ опредѣляющаго треугольника въ правильномъ $n$-угольникѣ составляетъ $n$-ую часть четырехъ прямыхъ, т. е. $\frac{4d}{n}$, гдѣ $d$, по обыкновенiю, обозначаетъ прямой уголъ; за вершину мы всегда будемъ принимать центръ многоугольника. Дѣля углы при вершинѣ $O$ пополамъ, мы изъ правильнаго $n$-угольника получаемъ правильный $2n$-угольникъ; изъ него получаемъ $4n$-угольникъ и т. д. Съ древнихъ временъ извѣстны 4 ряда правильныхъ многоугольниковъ, которые получаются путемъ послѣдовательнаго удвоенiя отъ правильныхъ треугольника, четыреугольника, пятиугольника и пятнадцатиугольника.

Рядъ треугольника. Изъ правильнаго треугольника получается путемъ удвоенiя прежде всего правильный 6-угольникъ, въ которомъ опредѣляющiй треугольникъ имѣетъ при вершинѣ уголъ, равный $4d/6 = 2d/3$. Такъ какъ $2d/3 + 2d/3 + 2d/3 = 2d$, то $2d/3$ есть уголъ равносторонняго треугольника. Сторона правильнаго шестиугольника равна, слѣдовательно, радiусу,— обстоятельство, благодаря которому этотъ многоугольникъ можно построить. Это было уже извѣстно древнимъ ассирiянамъ. Первая, третья и пятая вершина правильнаго шестиугольника опредѣляютъ правильный треугольникъ.

Рядъ квадрата. Уголъ при вершинѣ опредѣляющаго треугольника прямой. На этомъ рядѣ многоугольниковъ не приходится поэтому долго останавливаться. Правильные 4-угольники (квадраты) очень часто встрѣчаются у древнихъ египтянъ въ орнаментахъ, а также въ качествѣ формы различныхъ предметовъ обихода.

**2.** Рядъ пятиугольника. Какъ и въ случаѣ треугольника, для построенiя этого ряда мы исходимъ не отъ перваго его многоугольника, а отъ второго, на что мы обратили уже вниманіе при алгебраической разработкѣ ученія о дѣленія угла на равныя части. (Томъ I, § 106). Опредѣляющій треугольникъ $AOB$ правильнаго 10-угольника имѣетъ при вершинѣ $O$ уголъ $\omega = 4d/10 = 2d/5$. Углы при вершинахъ $A$ и $B$ (фиг. 113) составляютъ въ совокупности $2d - 2d/5 = 8d/5$; каждый же изъ нихъ въ отдѣльности равенъ $4d/5 = 2\omega$. Равнодѣлящая угла $BAO$ встрѣчаетъ поэтому сторону $OB$ въ нѣкоторой точкѣ $C$ такимъ образомъ, что треугольникъ $BAC$, какъ и треугольникъ $AOB$, имѣетъ углы $\omega$, $2\omega$ и $2\omega$. Какъ треугольникъ $BAC$, такъ и треугольникъ $ACO$ оказываются равнобедренными; слѣдовательно, $OC = CA = AB = s_{10}$, если $s_n$ вообще обозначаетъ сторону правильнаго $n$-угольника. Радіусъ описанной окружности мы будемъ постоянно обозначать черезъ $r$. Изъ подобія треугольниковъ $BAC$ и $AOB$ вытекаетъ подобіе системъ отрѣзковъ ($BC$, $AB$) и ($AB$, $OA$), или:

$$(r - s_{10},\ s_{10}) \sim (s_{10},\ r), \text{ откуда } (r,\ s_{10}) \sim (s_{10} + r,\ r), \tag{1}$$

или въ обычныхъ обозначеніяхъ:

$$r : s_{10} = (s_{10} + r) : r, \quad r^2 = s_{10}(s_{10} + r). \tag{2}$$

Эти подобныя пары отрѣзковъ тотчасъ же напоминаютъ намъ доказательство Пиѳагоровой теоремы, приведенное въ § 21, и наводятъ на мысль воспользоваться той же фигурой для построенія стороны $s_{10}$ *). Приспособляя эту фигуру къ даннымъ настоящаго случая, мы получаемъ слѣдующее построеніе стороны $s_{10}$ по радіусу $r$. Изъ точки $O$ проводимъ перпендикуляръ $OV$ къ прямой $OU$, откладываемъ на немъ отрѣзокъ $OV = r/2$ и изъ точки $V$, какъ центра, описываемъ окружность радіусомъ, равнымъ $VO$. Эта окружность встрѣчаетъ отрѣзокъ $UV$ въ нѣкоторой точкѣ $X$ (а его продолженіе въ точкѣ $Y$); въ такомъ случаѣ $UX$ есть искомая сторона правильнаго 10-угольника. Дѣйствительно, треугольники $UXO$ и $UOY$ имѣютъ равные углы, а потому подобны. Вмѣстѣ съ тѣмъ $(UO, UX) \sim (UY, UO)$, или $(r, s_{10}) \sim (r + s_{10}, r)$. Связь этого построенія съ построеніемъ правильнаго десятиугольника видна на фигурѣ 113.

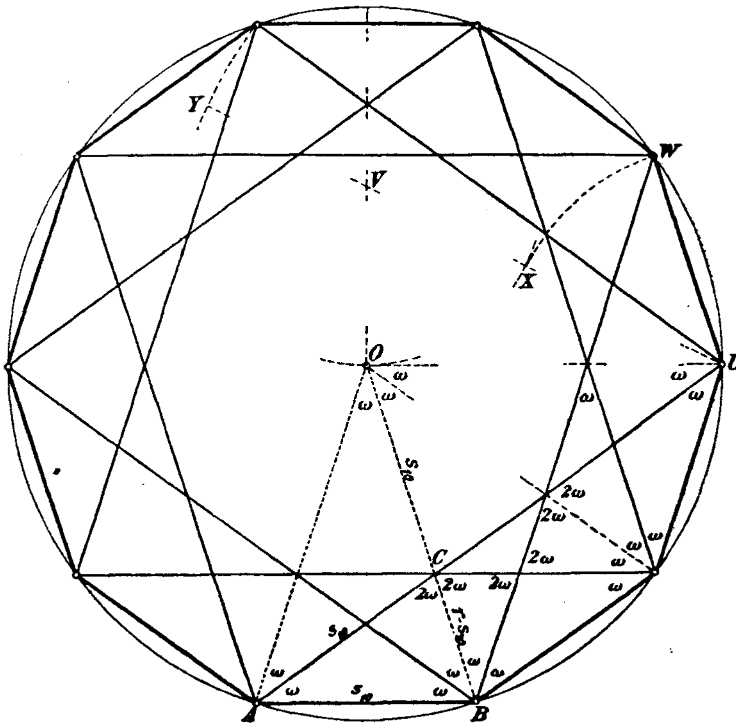
По поводу этой фигуры слѣдуетъ еще замѣтить, что точка $C$ дѣлитъ радіусъ $OB$ на двѣ части, обладающія слѣдующимъ свойствомъ: пара отрѣзковъ, состоящая изъ большей и меньшей части, подобна парѣ, состоящей изъ большей части и всего отрѣзка $OB$ или, согласно равенству (1), въ формулахъ:

$$(r - s_{10},\ s_{10}) \sim (s_{10},\ r), \quad (r - s_{10}) : s_{10} = s_{10} : r.$$

---

*) Здѣсь можно было бы воспользоваться предложеніемъ о сѣкущихъ и касательной, выходящихъ изъ одной точки; однако, это предложеніе будетъ выведено только въ слѣдующемъ параграфѣ.

Такъ какъ при чтеніи послѣдней пропорціи къ члену $s_{10}$ правой части перваго отношенія примыкаетъ также членъ $s_{10}$ лѣвой части второго отношенія, то въ такихъ случаяхъ говорятъ о непрерывной пропорціи, каковая въ общемъ случаѣ имѣетъ слѣдующій видъ: $x : y = y : z$; подъ пропорціей мы разумѣемъ, какъ и въ ариѳметикѣ, равенство двухъ дробей или „отношеній", — понятіе, совершенно утратившее важное значеніе, которое оно прежде имѣло, такъ какъ новая элементарная геометрія обходится безъ метрическихъ соотношеній отрѣзковъ. Часто говорятъ также, что точка $C$




Фиг. 113.

дѣлитъ отрѣзокъ $OB$ непрерывно, или что она производитъ золотое сѣченіе (sectio aurea); золотымъ это сѣченіе (дѣленіе отрѣзка) называется вслѣдствіе того значенія, которое оно имѣетъ въ геометріи и въ эстетикѣ: утверждаютъ, что эллипсъ или же прямоугольникъ производятъ на глазъ наиболѣе пріятное впечатлѣніе, если оси или, соотвѣтственно, стороны выбраны такимъ образомъ, что, будучи приложены другъ къ другу на одной прямой, онѣ образуютъ золотое сѣченіе того отрѣзка, которое онѣ совмѣстно составляютъ. Нѣкоторые утверждаютъ, что и въ другихъ случаяхъ наиболѣе пріятныя метрическія соотношенія находятся въ связи съ непрерывнымъ дѣленіемъ отрѣзковъ (ср. томъ I, стр. 128).

Мы займемся еще опредѣленіемъ численнаго отношенія частей $OC$ и $CB$ на фиг. 113. Изъ соотношенія $s_{10}^2 = r(r - s_{10})$ слѣдуетъ:

$$s_{10} = -1/2 \cdot r + \sqrt{r^2/4 + r^2} = 1/2 \cdot r(\sqrt{5} - 1);$$

$$(r - s_{10}) : s_{10} = (3 - \sqrt{5}) : (\sqrt{5} - 1) = (\sqrt{5} - 1) : 2.$$

Сообразно этому имѣемъ приближенно:

$$(r - s_{10}) : s_{10} = 0{,}618 = 3/5.$$

Сравненіемъ угловъ на фиг. 113 можно обнаружить много весьма изящныхъ свойствъ правильнаго десятиугольника. Такъ напримѣръ, прямая $AC$ должна проходить черезъ вершину $U$ 10-угольника; при золотомъ сѣченіи радіуса $r$ отрѣзокъ $UY = r + s_{10}$, появляющійся одновременно съ отрѣзкомъ $UX = s_{10}$, равенъ отрѣзку $UA$, а потому представляетъ собой сторону правильнаго звѣзднаго десятиугольника. Треугольниковъ съ углами $\omega$, $2\omega$, $2\omega$ и $\omega$, $\omega$, $3\omega$ можно найти на этой фигурѣ почти неисчислимое количество; то же самое относится и къ правильному 5-угольнику, въ которомъ уголъ при вершинѣ опредѣляющаго треугольника равенъ $2\omega$.

**3.** Рядъ 15-угольника. Уголъ при вершинѣ опредѣляющаго треугольника въ правильномъ 15-угольникѣ составляетъ 1/15 четырехъ прямыхъ или, такъ какъ $1/15 = 1/6 - 1/10$, $2d/3 - 2d/5$. Это есть разность угловъ при вершинѣ, которые соотвѣтствуютъ правильнымъ 6-угольнику и 10-угольнику. Отсюда непосредственно вытекаетъ самое построеніе. Путемъ удвоенія мы получаемъ правильные 30-угольникъ, 60-угольникъ и т. д.

Математикамъ естественно представлялось заманчивымъ найти, помимо этихъ четырехъ рядовъ правильныхъ многоугольниковъ, построеніе циркулемъ и линейкой и другихъ правильныхъ многоугольниковъ и прежде всего правильнаго 7-угольника. Напрашивалась также мысль пользоваться при этомъ не только дѣленіемъ угла пополамъ, но и дѣленіемъ его на 3 части. Лишь послѣ обоснованія современной алгебры, даннаго Гауссомъ и Абелемъ, можно строго доказать, что дѣленіе угла на 3 части, а также построеніе правильныхъ многоугольниковъ выполняется циркулемъ и линейкой только въ немногихъ исключительныхъ случаяхъ. Въ частности, 7-угольникъ и 11-угольникъ не могутъ быть построены; напротивъ того, правильный 17-угольникъ, какъ показалъ Гауссъ, можетъ быть построенъ. Отсылаемъ читателей къ XVIII и XIX главамъ I-го тома.

**4.** Какъ теоретическая геометрія не нуждается въ постоянномъ масштабѣ, такъ она не нуждается и въ постоянной мѣрѣ угловъ, тѣмъ болѣе, что тригонометрія, а также указанное въ § 21 изслѣдованіе Моллерупа, обнаруживаютъ, что измѣреніе угловъ можетъ быть вовсе исключено изъ геометріи. Перешедшее къ намъ отъ грековъ дѣленіе окружности на 360 градусовъ и прямого угла на 90 градусовъ исходитъ изъ Вавилона; еще незадолго до Евклида писателю астроному Аутолику оно было неизвѣстно и введено, повидимому, Гипсиклесомъ Александрійскимъ (между 200 и 100 годами). Дѣленіе окружности на $360 = 6.60$ частей, или градусовъ, изъ которыхъ каждый дѣлится на 60 меньшихъ подраздѣленій (минутъ), каковыя вновь дѣлятся далѣе на 60 секундъ,— это подраздѣленіе имѣетъ во всякомъ случаѣ искусственное происхожденіе; по весьма вѣроятнымъ соображеніямъ М. Кантора, оно принадлежитъ астрономамъ. Весьма возможно, что мы имѣемъ здѣсь грубое приближеніе числа дней къ году. Съ подраздѣленіемъ секстанта на 60 частей должна, повидимому, находиться въ какой-то связи 60-ричная система вавилонянъ; послѣдніе представляютъ цѣлыя числа въ формѣ: $a + a_1 \cdot 60 + a_2 \cdot 60^2 + \cdots$, гдѣ $a, a_1, a_2, \ldots$ суть цѣлыя числа, меньшія 60-ти. Какъ цѣлому числу, написанному въ десятиричной системѣ: $z = b + b_1 \cdot 10 + b_2 \cdot 10^2 + \cdots (b, b_1, b_2 \ldots < 10)$ натурально отвѣчаетъ десятичная дробь, точно такъ же и 60-ричной системѣ въ томъ же порядкѣ идей отвѣчаетъ представленіе дробей въ видѣ:

$$\zeta = \cdots + c_3 60^3 + c_2 60^2 + c_1 60 + c + \gamma_1 60^{-1} + \gamma_2 60^{-2} + \cdots$$

по убывающимъ степенямъ числа 60. Однако, это изображеніе чиселъ врядъ ли проистекло отъ практиковавшагося пріема счета *), ибо въ такомъ случаѣ и названія чиселъ у вавилонянъ должны были бы соотвѣтствовать 60-ричной системѣ; между тѣмъ названія эти у вавилонянъ, какъ у всѣхъ народовъ кавказской расы, сообразованы съ десятиричной системой. Къ тому же и начертаніе чиселъ по 60-ричной системѣ встрѣчается въ перемежку съ 10-ричной. Египтяне, которые еще раньше вавилонянъ выдѣлились изъ общей семитской семьи и въ древнѣйшихъ формахъ языка весьма близки къ вавилонянамъ, имѣли десятичное наименованіе чиселъ.

Построеніе углового градуса въ точности не выполняется циркулемъ и линейкой, но оно можетъ быть выполнено такимъ образомъ, что требуется только однократное дѣленіе угла на три равныя части. Въ самомъ дѣлѣ, уголъ при вершинѣ опредѣляющаго треугольника въ правильномъ 10-угольникѣ содержитъ $36^0$; соотвѣтствующій уголъ правильнаго 12-угольника содержитъ $30^0$; разность между ними 6 градусовъ; раздѣляемъ ее пополамъ, получаемъ $3^0$; наконецъ, дѣленіе на 3 равныя части даетъ намъ $1^0$.

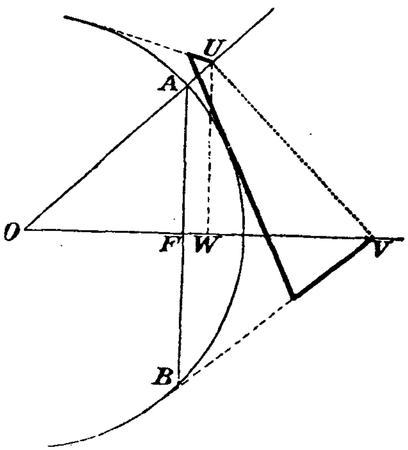
---

*) Въ журналѣ Zeitschrift für Assyriologie (Bezold) **12**, стр. 73—95, Кевичъ (G. Kewitsch) указываетъ на то, какъ недостовѣрны еще наши свѣдѣнія по этому вопросу, и пытается обратно свести 60-ричную систему счисленія и дѣленіе окружности на 360 частей къ какой-либо искусственной системѣ счета.

**5.** Мы переходимъ теперь къ одной изъ труднѣйшихъ и знаменитѣйшихъ задачъ элементарной геометріи — къ выпрямленію окружности и квадратурѣ круга. — Многоугольникъ, вершины котораго лежатъ на окружности, называется вписаннымъ; многоугольникъ, стороны котораго касаются окружности, называется описаннымъ; относительно этихъ многоугольниковъ имѣетъ мѣсто слѣдующее предложеніе:

Предложеніе 2. Каждый многоугольникъ, описанный около окружности, имѣетъ большій периметръ, нежели любой многоугольникъ, вписаннный въ ту же окружность.

Для доказательства этого важнаго предложенія мы соединимъ центръ $O$ окружности со всѣми вершинами $A, B, \ldots$ вписаннаго $n$-угольника $\mathfrak{E}$ и опустимъ изъ точки $O$ перпендикуляры на всѣ его стороны; эти $2n$ прямыхъ раздѣляютъ плоскость на $2n$ областей, каждая изъ которыхъ содержитъ также кусокъ периметра описаннаго многоугольника $\mathfrak{U}$. Этотъ кусокъ представляетъ собою ломаную линію, которая начинается въ нѣкоторой точкѣ $U$ на лучѣ, ограничивающемъ область, и оканчивается въ нѣкоторой точкѣ $V$ на другомъ лучѣ, ограничивающемъ ту же область (фиг. 114). Отрѣзокъ $UV$ въ такомъ случаѣ меньше этой ломаной и, во всякомъ случаѣ, не превышаетъ ея. Пусть $OV$ будетъ лучъ, перпендикулярный къ одной изъ сторонъ $AB$ вписаннаго многоугольника $\mathfrak{E}$; если мы проведемъ еще $UW \perp OV$, то отрѣзокъ $UV$, какъ гипотенуза прямоугольнаго треугольника $UWV$ больше, нежели $UW$, или равенъ $UW$, если точки $U$, $V$, $W$ располагаются на одной прямой; такимъ образомъ, та часть $t$ периферіи многоугольника $\mathfrak{U}$, которая расположена между лучами $OA$ и $OF$, во всякомъ случаѣ больше, чѣмъ $UW$, или равна $UW$; съ другой стороны, точка $U$, принадлежащая периферіи многоугольника $\mathfrak{U}$, во всякомъ случаѣ не лежитъ внутри окружности; поэтому $OU \geqq OA$ и $UW \geqq AF$, $t > AF$. Равенство отрѣзковъ $t$ и $AF$ исключено, такъ какъ оно могло бы имѣть мѣсто только въ томъ случаѣ, если бы отрѣзокъ $t$ совпадалъ съ $UV$, а послѣдній совпадалъ бы съ $AF$; но это невозможно, потому что точка $F$ лежитъ внутри окружности. Вмѣстѣ съ тѣмъ и сумма $2n$ частей $t$ больше, нежели сумма соотвѣтствующихъ имъ отрѣзковъ $AF$, т. е. периферія многоугольника $\mathfrak{U}$ больше, нежели периферія многоугольника $\mathfrak{E}$.



Фиг. 114.

**6.** Предложенie 3. Согласно предложенiю 2, разность между периметрами описаннаго и вписаннаго многоугольниковъ есть положительная величина; эта разность можетъ быть подходящимъ выборомъ многоугольниковъ сдѣлана меньше сколь угодно малаго отрѣзка $\varepsilon$.

Иными словами, она имѣетъ нижней границей 0. Очевидно, достаточно доказать, что разность $U_n - u_n$ между периметрами правильнаго вписаннаго и правильнаго описаннаго $n$-угольниковъ падаетъ ниже всякаго предѣла $\varepsilon$, когда число сторонъ $n$ неограниченно возрастаетъ. Доказательство можно вести такъ: если мы проведемъ касательныя къ окружности, параллельныя сторонамъ правильнаго вписаннаго $n$-угольника, то получающiйся такимъ образомъ правильный описанный $n$-угольникъ подобенъ вписанному и подобно съ нимъ расположенъ. Если мы еще опустимъ изъ центра $O$ (фиг. 115) перпендикуляры $r$ и $\varrho_n$, то $(U_n, r) \sim (u_n, \varrho_n)$, или $U_n : r = u_n : \varrho_n$, такъ что $U_n = r u_n / \varrho_n$. Поэтому

$$U_n - u_n = u_n (r - \varrho_n) / \varrho_n.$$

Мы навѣрное увеличимъ правую сторону, если мы справа 1) вмѣсто $u_n$ подставимъ периметръ $8r$ правильнаго описаннаго четырехугольника, котораго $u_n$ ни при какомъ $n$, конечно, достичь не можетъ, и 2) въ знаменателѣ вмѣсто $\varrho_n$ подставимъ наименьшее значенiе $r/2$, какое онъ способенъ принять (при $n = 3$). Слѣдовательно, $U_n - u_n < 8r(r - \varrho_n)/(r/2)$, или

$$U_n - u_n < 16\,(r - \varrho_n).$$

Разность $U_n - u_n$ станетъ меньше $\varepsilon$, если мы сдѣлаемъ $16\,(r - \varrho_n) = \varepsilon$; т. е. $\varrho_n = r - \varepsilon/16$. Съ этою цѣлью достаточно построить хорду, разстоянiе которой отъ центра $O$ было бы равно $r - \varepsilon/16$, и откладывать ее вдоль по окружности. Если она отложится $m$ разъ и не отложится $m+1$ разъ, то достаточно выбрать $n > m$, чтобы $U_n - u_n$ было меньше $\varepsilon$, какъ это и требовалось.

Если на („полу“-) прямой $g$, ограниченной одной точкой $O$, мы будемъ откладывать послѣдовательно отъ точки $O$ периметры вписанныхъ и описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ, и если $E_1, E_2, E_3, \ldots$ суть конечныя точки периметровъ вписанныхъ многоугольниковъ, а $U_1, U_2, U_3, \ldots$ — конечныя точки периметровъ вписанныхъ многоугольниковъ, то каждый периметръ $OE$ меньше каждаго периметра $OU$. Разность же $OU - OE$ можетъ сдѣлаться меньше любого сколь угодно малаго отрѣзка $\varepsilon$. Согласно § 25 тома I, отсюда слѣдуетъ, что существуетъ нѣкоторая точка $K$, которая одновременно служитъ верхней границей точекъ $E$ и нижней границей точекъ $U$. Поэтому, если мы хотимъ и окружности приписать опредѣленную длину, то таковой можетъ служить только отрѣзокъ $OK$, къ которому неограниченно приближаются, какъ периметры вписанныхъ, такъ и периметры описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ при неограниченномъ увеличенiи числа сторонъ. Отсюда слѣдуетъ:

Предложенiе 4. Длина окружности больше периметра любого вписаннаго въ него многоугольника и меньше периметра любого описаннаго около него многоугольника.

**7.** Теперь каждому вписанному и описанному многоугольнику окружности $\varkappa$, которую мы до сихъ поръ разсматривали, мы отнесемъ подобный многоугольникъ другой окружности $\varkappa'$ и периметры многоугольниковъ, принадлежащихъ окружности $\varkappa'$, будемъ откладывать на другомъ лучѣ $g'$, выходящемъ изъ точки $O'$. Тогда каждой точкѣ $E$ или $U$ прямой $g$ будетъ однозначно отнесена точка $E'$ или $U'$ прямой $g'$; вслѣдствiе подобiя соотвѣтствующiе отрѣзки прямыхъ $g$ и $g'$ относятся, какъ радiусы $r$ и $r'$ окружностей $\varkappa$ и $\varkappa'$. Въ частности отрѣзку $OK$ прямой $g$ отвѣчаетъ отрѣзокъ $O'K'$ прямой $g'$, измѣряющiй периферiю окружности $\varkappa'$, а вмѣстѣ съ тѣмъ $OK : O'K' = r : r'$.

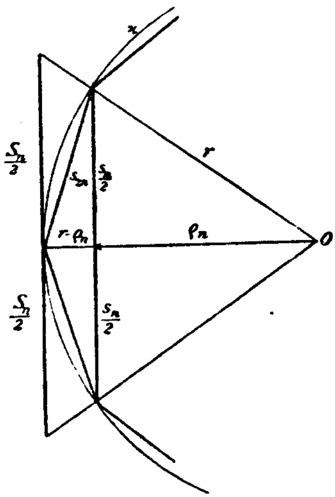
Съ этимъ вполнѣ согласуется та точка зрѣнiя, что на самыя окружности нужно смотрѣть, какъ на подобныя линiи. Прямая $c$, соединяющая центры $O$ и $O'$ окружностей $\varkappa$ и $\varkappa'$, встрѣчаетъ окружность $\varkappa$, скажемъ, въ точкахъ $A$ и $B$ и окружность $\varkappa'$ въ точкахъ $A'$ и $B'$. Пусть $C$ будетъ любая третья точка окружности $\varkappa$; черезъ точку $A'$ проведемъ прямую, параллельную $AC$, черезъ $B'$ прямую, параллельную $BC$; пусть $C'$ будетъ точка пересѣченiя этихъ параллелей. Въ такомъ случаѣ $\sphericalangle A'C'B' = \sphericalangle ACB$, а такъ какъ послѣднiй уголъ вписанъ въ полуокружность и, слѣдовательно, представляетъ собой прямой уголъ, то $\sphericalangle A'C'B'$ также есть прямой и, слѣдовательно, точка $C'$ лежитъ на окружности $\varkappa'$. Каждой точкѣ $C$ окружности $\varkappa$ отвѣчаетъ, такимъ образомъ, опредѣленная точка окружности $\varkappa'$, при чемъ всегда $A'C' \parallel AC$, $B'C' \parallel BC$. Изъ теоремы о вписанныхъ углахъ слѣдуетъ, что соотвѣтствующiя хорды обѣихъ окружностей всегда параллельны. Окружности представляютъ собой, слѣдовательно, подобныя и подобнымъ образомъ расположенныя фигуры.

Окружность круга $\varkappa'$, имѣющаго радiусъ $r' = 1$, мы обозначимъ черезъ $2\pi$. Тогда $OK = r \cdot O'K' / r' = 2\pi r$; итакъ:

Предложенiе 5. Длина окружности радiуса $r$ равна $2\pi r$, гдѣ $\pi$ есть половина длины окружности радiуса 1 или длина цѣлой окружности дiаметра 1.

**8.** Какъ периметры, такъ и площади многоугольниковъ $\mathfrak{E}$, вписанныхъ въ окружность $\varkappa$, имѣютъ верхнюю границу, которая совпадаетъ съ нижней границей площадей многоугольниковъ $\mathfrak{U}$, описанныхъ около той же окружности. Въ самомъ дѣлѣ, если мы соединимъ вершины этихъ многоугольниковъ съ центромъ $O$, то они разбиваются на треугольники;

опустивъ изъ точки $O$ перпендикуляры на противолежащія стороны и суммируя площади треугольниковъ, мы найдемъ, что площадь многоугольника $\mathfrak{U}$ равняется $\frac{1}{2}r \cdot U$, гдѣ $U$ есть периметръ многоугольника $\mathfrak{U}$. Съ другой стороны, относительно многоугольника $\mathfrak{E}$ можно утверждать, что его площадь во всякомъ случаѣ больше, нежели $\frac{1}{2}\varrho \cdot E$, гдѣ $E$ означаетъ периметръ многоугольника $\mathfrak{E}$, а $\varrho$ есть наименьшій изъ перпендикуляровъ, который можно опустить изъ точки $O$ на стороны многоугольника $\mathfrak{E}$. Такъ какъ, съ другой стороны, $\varrho$ имѣетъ верхней границей $r$, величины же $U$ отдѣляются отъ величинъ $E$ общей границей $2\pi\varrho$, то $\frac{1}{2}r \cdot 2\pi r = r^2\pi$ представляетъ собой одновременно верхнюю границу площадей многоугольниковъ $\mathfrak{E}$ и нижнюю границу площадей многоугольниковъ $\mathfrak{U}$; этой границы $r^2\pi$ не достигаютъ площади ни тѣхъ, ни другихъ многоугольниковъ; она принимается за площадь самого круга, который раздѣляетъ многоугольники съ большей площадью отъ многоугольниковъ съ меньшей площадью.



Фиг. 115.

**9.** Для опредѣленія числа $\pi$ уже Архимедъ пользовался тѣмъ обстоятельствомъ, что разность $U_n - u_n$ периметровъ описаннаго и вписаннаго правильныхъ многоугольниковъ при неограниченномъ возрастаніи числа $n$ падаетъ ниже всякой границы $e$.

Возрастаніе числа $n$ по Архимеду проще всего достигается путемъ послѣдовательнаго удвоенія числа сторонъ.

По сторонѣ $s_n$ правильнаго вписаннаго $n$-угольника $s_{2n}$ легко опредѣляется съ помощью теоремы Пиѳагора. Какъ видно изъ фиг. 115,

$$s_{2n}^2 = (r - \varrho_n)^2 + (s_n/2)^2,$$

гдѣ

$$\varrho_n^2 = r^2 - (s_n/2)^2 = (4r^2 - s_n^2)/4,$$

такъ что

$$s_{2n}^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - s_n^2/4},$$

$$s_{2n} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2/r^2}}. \qquad (1)$$

Въ виду подобія треугольниковъ, фигурирующихъ на фиг. 115,

$$S_n : r = s_n : \varrho_n,$$

или

$$S_n = rs_n/\varrho_n = 2s_n/\sqrt{4 - s_n^2/r^2}. \qquad (2)$$

Съ помощью формулы (1) по какой-либо извѣстной намъ сторонѣ $s_n$ можно вычислить сначала $s_{2n}$, по ней $s_{4n}$, затѣмъ $s_{8n}$ и т. д.; помощью же формулы (2) мы соотвѣтственно находимъ $S_n, S_{2n}, S_{4n}, \ldots$ и, наконецъ, $U_m = m.S_m$ и $u_m = m.s_m$, при $m = 2n, 4n, 8n, \ldots$.

Вводя еще діаметръ $d = 2r$, мы имѣемъ: $u_m < \pi d < U_m$, при
$$m = n,\ 2n,\ 4n,\ 8n, \ldots.$$

Исходя отъ случая $n = 6$, гдѣ $s_6 = r$, мы получаемъ приближенно:

| | |
|---|---|
| $u_6 = 3{,}00000d$ | $U_6 = 3{,}46410d$ |
| $u_{12} = 3{,}10583d$ | $U_{12} = 3{,}21539d$ |
| $u_{24} = 3{,}13263d$ | $U_{24} = 3{,}15966d$ |
| $u_{48} = 3{,}13935d$ | $U_{48} = 3{,}14609d$ |
| $u_{96} = 3{,}14103d$ | $U_{96} = 3{,}14271d$ |
| $u_{192} = 3{,}14145d$ | $U_{192} = 3{,}14187d$ |
| $u_{384} = 3{,}14156d$ | $U_{384} = 3{,}14166d$ |
| $u_{768} = 3{,}14158d$ | $U_{768} = 3{,}14161d$ |
| $u_{1536} = 3{,}14159d$ | $U_{1536} = 3{,}14160d.$ |

Ограничиваясь поэтому 4-мя десятичными знаками, мы имѣемъ $\pi = 3{,}1416$.

**10.** Число $\pi$ имѣетъ почти четырехтысячелѣтнюю исторію, которую можно раздѣлить на 3 періода.

Первый періодъ. Геометрическое вычисленіе числа $\pi$. Самымъ древнимъ приближеннымъ значеніемъ числа $\pi$, повидимому, было $\pi = 3$, которое было принято у семитскихъ народовъ еще до ихъ раздѣленія и отъ нихъ, вѣроятно, перешло къ китайцамъ. Значеніе $\pi = 3$ встрѣчается въ Библіи два раза: въ первой книгѣ Царей (7, 23) и во второй книгѣ Паралипоменонъ (4, 2) сказано, что большой бассейнъ, который, какъ „литое море", украшалъ передній дворъ Соломонова храма (построеннаго около 1000 л. до Р. Х.), имѣлъ въ ширину „отъ края до края 10 локтей", а „шнурокъ въ 30 локтей обнималъ его кругомъ"; слѣдовательно, $\pi = 3$.

О первыхъ шагахъ древнихъ египтянъ въ геометріи мы имѣемъ свѣдѣнія изъ папируса Ринда, принадлежащаго Британскому музею и описаннаго Эйзенлоромъ *). „Сочинена была эта книга", какъ сообщено въ самомъ ея предисловіи, при царѣ Раусѣ по образцу сочиненій изъ временъ царя Раенмата писаремъ Ахмесомъ **). Здѣсь мы въ первый

---

*) A. Eisenlohr. „Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter" (Leipzig, 1877).

**) У Эйзенлора эти имена даны въ транскрипціи: Ra-a-us, Ra-en-mat, Ahmes. Но транскрипція Айзенлора, которая удержалась въ литературѣ по исторіи разъ (въ №№ 41—43, 48, 50) встрѣчаемся съ квадратурой круга въ истинномъ значеніи слова, т. е. съ задачей о превращеніи круга въ равновеликій квадратъ. Сторона послѣдняго принимается равной діаметру, уменьшенному на $^1/_9$ его величины; такимъ образомъ,

$$(2r \cdot 8/9)^2 = r^2\pi, \quad \pi = 3{,}16\ldots.$$

Это значеніе, возникшее, повидимому, вслѣдствіе ожиданія раціональнаго значенія для стороны квадрата $S = r\sqrt{\pi}$, врядъ ли имѣетъ чисто эмпирическое значеніе и представляется по настоящее время загадочнымъ. У Герона Александрійскаго (около 100 л. до Р. Х.), много почерпавшаго изъ древне-египетскихъ источниковъ, мы этого значенія не находимъ. Послѣ долгихъ и тщетныхъ попытокъ греческихъ математиковъ превратить площадь круга въ равновеликій квадратъ Архимедъ Сиракузскій (287—212 г.г. до Р. Х.) въ своемъ знаменитомъ сочиненіи объ измѣреніи окружности (*Κύκλου μέτρησις*) далъ приблизительно ту теорію измѣренія окружности, которая и по настоящее время излагается въ школахъ. При помощи правильныхъ 96-угольниковъ, вписаннаго и описаннаго, онъ нашелъ, что $3^{10}/_{71} < \pi < 3^1/_7$ или

$$3{,}1408\ldots < \pi < 3{,}1428\ldots;$$

этому результату нужно тѣмъ болѣе удивляться, что числовыя вычисленія въ ту пору (безъ десятичныхъ дробей) были сопряжены съ чрезвычайными затрудненіями. Знаменитый авторъ Альмагеста (*μεγάλη σύνταξις*) Клавдій Птолемей (приблизительно между 87 и 165 г. г. по Р. Х.) нашелъ съ помощью (вавилонской) 60-ричной дроби $\pi = 3^0 8' 30''$, т. е. $\pi = 3 + 8/60 + 30/60^2 = 3{,}14166\ldots$ — Римляне, какъ извѣстно, въ математикѣ дали мало и въ дѣло измѣренія окружности также не внесли ничего. Можно было бы ожидать, что индусы, располагавшіе прекрасной системой счисленія, разработаютъ дальше идею, указанную Архимедомъ. И дѣйствительно, Аріабатта (латинская транскрипція Aryabhatta, род. въ 476 г. п. Р. Хр.), исходя отъ стороны 6-угольника, провелъ вычисленіе дальше 96-угольника и дошелъ до 384-угольника и значенія $\pi = 31416/10000$. Почти въ ту же пору мы встрѣчаемъ также болѣе грубое приближеніе $\pi = \sqrt{10} = 3{,}162\ldots$ Переселеніе народовъ вызвало сильный регрессъ въ научной культурѣ. Въ средніе вѣка арабы первые опять подвинули впередъ задачу объ измѣреніи круга путемъ построенія обширныхъ тригонометрическихъ таблицъ. Наиболѣе выдающійся изъ христіанскихъ ученыхъ этой эпохи Леонардъ Пизанскій первый ушелъ дальше Архимеда; именно, въ своемъ сочиненій „Practica

---

математики, основывается на такомъ чтеніи нѣкоторыхъ іероглифовъ, принимаемыхъ за гласныя буквы или за гласные слоги съ придыханіемъ, которое въ настоящее время признано неправильнымъ.

geometriae“ (1220), ограничиваясь также, какъ и Архимедъ, 96-угольникомъ, онъ заключилъ все же число $\pi$ въ болѣе узкіе предѣлы, именно: между числами $1440/458\frac{1}{5} = 3,1408 \ldots$ и $1440/458\frac{4}{9} = 3,1428 \ldots$ — Слѣдующія два столѣтія не подвинули впередъ рѣшенія этой задачи. Въ промежутокъ времени между 1450 и 1460 г.г. кардиналъ Николай Кузанскій снова обратилъ вниманіе широкихъ круговъ на задачу объ измѣреніи окружности и (по примѣру арабско-индусскихъ ученыхъ?) внесъ въ ея разрѣшеніе новую идею; именно, — онъ предложилъ обратно, исходя отъ даннаго отрѣзка, строить правильные треугольники, шестиугольники, 12-угольники и т. д., периметры которыхъ равны этому отрѣзку, приближаясь, такимъ образомъ, къ окружности (аркуфикація прямой). Его построеніямъ отвѣчаетъ значеніе $\pi = 3,1423 \ldots$. Менѣе удачными оказались его прямыя вычисленія; при этомъ, какъ и нѣкоторые изъ ближайшихъ его предшественниковъ, онъ впалъ въ ту ошибку, что принялъ значеніе $\pi$, получаемое путемъ включенія его въ опредѣленные предѣлы, за точное. Та же ошибка впослѣдствіи неоднократно вновь выплываетъ. Великіе люди эпохи Возрожденія не получили здѣсь ничего новаго. Къ концу этой эпохи Адріанъ Мецій (Adrianus Metius) начинаетъ періодъ, въ который съ большимъ увлеченіемъ занимались различными вычисленіями, при чемъ дать значеніе $\pi$ съ возможно большимъ числомъ десятичныхъ знаковъ было дѣломъ особаго честолюбія. Адріанъ далъ значеніе $\pi$, которое легко запоминается по схемѣ 113/355, именно $\pi = 355/113 = 3,1415929 \ldots$, неправильное только въ седьмомъ десятичномъ знакѣ. Въ томъ же порядкѣ идей работалъ Адріанъ Романусъ (Adrianus Romanus, умеръ въ 1616 году), который дошелъ до многоугольника, имѣющаго $2^{30}$ сторонъ (!), и, такимъ образомъ, обезпечилъ 15 десятичныхъ знаковъ. Далѣе Лудольфъ ванъ Цейленъ (Ludolf van Ceulen) *) при помощи многоугольника о $60 \cdot 2^{29}$ сторонахъ (!) ушелъ дальше предыдущаго автора на пять десятичныхъ знаковъ. Всѣ трое суть вычислители, не внесшіе никакихъ новыхъ идей. Иначе обстоитъ дѣло съ великимъ французскимъ математикомъ Віета (Vieta, 1540—1606); послѣдній впервые далъ точное аналитическое выраженіе числа $\pi$ (въ формѣ безконечнаго произведенія; къ этому мы еще возвратимся). Онъ принадлежитъ уже къ математикамъ ближайшаго великаго періода, которые стараются опредѣлить число $\pi$ при помощи аналитическихъ выраженій. Геометрическій періодъ исторіи числа $\pi$ завершили Снелліусъ (Snellius, 1580—1626) и Гюйгенсъ (Huygens, 1629—1695), которые впервые послѣ Архимеда внесли существенное улучшеніе въ пріемъ вычисленія $\pi$ при помощи вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ. Сдѣланный ими шагъ впередъ заключался въ томъ, что они при помощи правильнаго описаннаго и вписаннаго $n$-угольника суживали предѣлы, въ которыхъ заключается число $\pi$, не удваивая

*) Ср. прим. къ § 135 въ I томѣ (стр. 569).

числа сторонъ; выражаясь современнымъ языкомъ, они вычисляли первые члены ряда для функціи arcsinus. Научно болѣе проницательнымъ мыслителемъ здѣсь является Гюйгенсъ; его сочиненіе (De circuli magnitudine inventa, 1654) Рудіо (Rudio) называетъ одной изъ наиболѣе прекрасныхъ, наиболѣе значительныхъ работъ по элементарной геометріи, которыя когда-либо были написаны*). Отъ Гюйгенса ведутъ свое начало многія приближенныя построенія для спрямленія дугъ окружности, которыя послѣ этого были неоднократно вновь открыты и еще по настоящее время находятъ себѣ примѣненіе въ различныхъ отдѣлахъ прикладной математики. Мы къ этому еще вернемся въ концѣ настоящаго параграфа.

**11.** Второй періодъ: аналитическое выраженіе числа $\pi$ (ср. гл. XXV тома I). О формулѣ Віета мы уже упоминали выше. Съ развитіемъ анализа безконечныхъ въ методахъ вычисленія длины окружности происходитъ большой переворотъ. При помощи безконечныхъ рядовъ, произведеній и непрерывныхъ дробей оказалось возможнымъ тѣ предѣльные процессы, которые по Архимеду приходилось производить надъ геометрическими образами, замѣнить аналитическими формулами; да и весь пріемъ Архимеда можно было выразить формулой. На другихъ основаніяхъ покоится формула Валлиса (Vallis, 1516—1703), которая была сообщена въ § 137 тома I. Рядъ, выражающій arctangens, открытый Грегори (Gregory, 1670) и Лейбницемъ (1673), далъ возможность совершенно отдѣлить вычисленіе числа $\pi$ отъ геометріи. Основываясь на теоремѣ сложенія функціи arctangens, можно при помощи пріема, указаннаго въ § 134 тома I, получить очень быстро сходящіеся ряды, которыми различные вычислители дѣйствительно воспользовались, чтобы опредѣлить нѣсколько сотенъ десятичныхъ знаковъ числа $\pi$ (ср. т. I, § 134). Важнѣе еще, нежели эти выраженія числа $\pi$ при помощи рядовъ, было открытіе, сдѣланное Леонардомъ Эйлеромъ (Leonhard Euler, 1707—1783), которому тригонометрія обязана современнымъ своимъ развитіемъ. Въ своемъ сочиненіи „Introductio in analysin infinitorum“, I, стр. 104, Эйлеръ указалъ связь функцій $\sin x$ и $\cos x$ съ показательнымъ рядомъ, выражаемую формулами:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \qquad e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

(т. I, § 127), которыя, совмѣстно съ соотношеніемъ $e^{2\pi i} = 1$, содержатъ въ себѣ всю тригонометрію. На этихъ формулахъ позже было построено доказательство трансцендентности числа $\pi$.

---

*) Архимедъ, Гюйгенсъ, Лежандръ, Ламбертъ. „О квадратурѣ круга“. Съ приложеніемъ исторіи вопроса, составленной проф. Ф. Рудіо. Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей и съ примѣчаніями прив.-доц. С. Бернштейна. Одесса, 1911. Изд. „Mathesis“. Составляя настоящій историческій очеркъ по М. Кантору и по Ганкелю, мы неоднократно пользовались и этой прекрасной книгой.

**12.** Третій періодъ: изслѣдованіе числового характера числа $\pi$. Мы совершенно не въ состояніи представить себѣ громаднаго впечатлѣнія, которое должны были произвести поразительныя открытія анализа на всѣ мыслящіе умы. Въ теченіе столѣтій удавалось отвоевывать тайны математики лишь путемъ тяжкаго труда, а тутъ она внезапно стала изливать свои истины въ поразительномъ обиліи. При всемъ томъ не удавалось найти квадратуру круга въ узкомъ смыслѣ этого слова. Подъ этимъ разумѣли теоретически совершенно точное построеніе квадрата, равновеликаго кругу, съ помощью обычныхъ конструктивныхъ средствъ элементарной геометріи, т. е. при помощи однихъ только циркуля и линейки и при томъ конечнымъ числомъ операцій. Въ то время, какъ наиболѣе серьезные математики стали приходить къ убѣжденію, что такая квадратура невозможна, что число $\pi$ трансцендентно, диллетанты все настойчивѣе стали заниматься этимъ предметомъ. Врядъ ли какая-либо задача въ геометріи сдѣлалась столь популярной, какъ эта. Ея смыслъ безъ дальнѣйшихъ поясненій казался понятнымъ каждому диллетанту. Слишкомъ преувеличивая значеніе численнаго вычисленія $\pi$ для геометріи, спеціалисты и неспеціалисты старались найти „четыреугольникъ круга“ *). Въ 1766 году Ламбертъ (J. H. Lambert, род. въ Мюльгаузенѣ въ Эльзасѣ въ 1728 году, умеръ въ Берлинѣ въ 1777 году) весьма кстати опубликовалъ свое сочиненіе „Предварительныя свѣдѣнія для тѣхъ, которые ищутъ квадратуру и ректификацію круга **). Въ этомъ сочиненіи онъ доказалъ слѣдующее: если $x$ есть раціональное число, отличное отъ нуля, то ни $e^x$, ни $\operatorname{tg} x$ не могутъ имѣть раціональнаго значенія. Но такъ какъ $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, то отсюда вытекаетъ ирраціональность числа $\pi$. Этимъ, конечно, еще не была доказана невозможность квадратуры круга въ узкомъ смыслѣ этого слова, ибо число $\pi$ могло бы выражаться, напримѣръ, квадратнымъ корнемъ изъ цѣлаго числа, каковой всегда можетъ быть построенъ конечнымъ числомъ операцій при помощи циркуля и линейки на основаніи теоремы Пиѳагора. Но этимъ былъ данъ первый толчекъ и первыя основанія къ тому, чтобы изслѣдовать численный характеръ $\pi$; къ тому же Ламбертъ поставилъ задачу о томъ, чтобы доказать, что число $\pi$ не можетъ служить корнемъ алгебраическаго уравненія съ раціональными коэффиціентами. Числа, удовлетворяющія такимъ уравненіямъ, называются алгебраическими. Къ нимъ принадлежатъ и раціональныя числа, какъ рѣшенія уравненія 1-ой степени съ раціональными

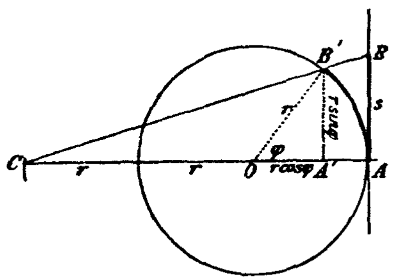
*) Насколько многочисленны были эти попытки, можно судить по тому, что Парижская Академія Наукъ уже въ 1755 году была вынуждена заявить, что она не принимаетъ къ разсмотрѣнію никакихъ рѣшеній квадратуры круга.

**) Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen“.

коэффиціентами; $\pi$ должно быть, такимъ образомъ, **неалгебраическимъ**, т. е. **трансцендентнымъ числомъ**. Въ 1840 году Ліувиллю (Liouville) удалось доказать существованіе транцсцендентныхъ чиселъ. Въ 1873 году Эрмиту (Hermite) удалось доказать трансцендентность числа $e$, основанія натуральныхъ логариѳмовъ, послѣ того, какъ Ліувилль обнаружилъ, что ни $e$, ни $e^2$ не могутъ удовлятворять квадратному уравненію. Наконецъ, Ф. Линдеманнъ (F. Lindemann) въ 1889 году, опираясь на работу Эрмита, **доказалъ трансцендентность числа** $\pi$ и тѣмъ привелъ къ концу древнюю задачу о квадратурѣ круга.

**13.** Изъ трансцендентности числа $\pi$ вытекаетъ, что построить его циркулемъ и линейкой при помощи конечнаго числа операцій теоретически совершено точно — невозможно, ибо всѣ отрѣзки, которые можно точно построить посредствомъ циркуля и линейки, могутъ быть выражены при помощи извлеченія квадратныхъ корней изъ отрѣзковъ, уже найденныхъ (по существу это выполняется на основаніи теоремы Пиѳагора). Отрѣзокъ, построеніе котораго въ этомъ смыслѣ выполнимо, можетъ быть поэтому выраженъ при помощи ряда квадратныхъ корней, соединяемыхъ другъ съ другомъ или извлекаемыхъ одинъ изъ другого, а потому всегда удовлетворяетъ алгебраическому уравненію.

Если, такимъ образомъ, точное построеніе числа $\pi$ въ указанномъ смыслѣ невозможно, то во многихъ случаяхъ практической геометріи дѣло сводится къ тому, чтобы дать достаточно точные **приближенные пріемы** для выпрямленія окружности и ея частей. Во многихъ случаяхъ значеніе $\pi = 22/7$ даетъ удовлетворительные результаты. На томъ способѣ выпрямленія окружности, который основывается на этомъ значеніи, намъ, конечно, не приходится останавливаться. Однако, этотъ пріемъ можно считать простымъ только въ томъ смыслѣ, что онъ легко обосновывается.



Фиг. 116.

Много легче и короче другой пріемъ, который Гюйгенсъ приводитъ въ указанномъ выше своемъ сочиненіи въ видѣ предложенія XIII-го, хотя доказать его гораздо труднѣе. Пріемъ этотъ заключается въ слѣдующемъ: чтобы выпрямить дугу $AB'$ (фиг. 116), нужно на радіусѣ $OA$ отложить отрѣзокъ $OC$, равный діаметру, такимъ образомъ, чтобы точка $O$ была расположена между $A$ и $C$; затѣмъ отыскать точку пересѣченія $B$ прямой $CB'$ съ касательной въ точкѣ $A$; если $B$ есть точка пересѣченія, то **приближенно** $AB = \text{arc } AB'$. Доказательство мы проведемъ аналитически.

Если мы еще опустимъ перпендикуляръ $B'A'$ на прямую $CA$, то изъ подобія треугольниковъ $CA'B'$ и $CAB$ слѣдуетъ:

$$s/r \sin\varphi = 3r/(2r + r\cos\varphi), \qquad s = 3r \cdot \sin\varphi/(2 + \cos\varphi),$$

гдѣ подъ $\varphi$ мы разумѣемъ уголъ $B'OA$; точнѣе подъ $\varphi$ мы разумѣемъ здѣсь дугу, которая въ кругѣ радіуса 1 соотвѣтствуетъ центральному углу $AOB'$. Эту дугу называютъ абсолютной мѣрой угла. Въ такомъ случаѣ $\operatorname{arc} AB' = r\varphi$, и для оцѣнки точности построенія остается только опредѣлить разность $\Delta = r\varphi - s$ между истинной длиной дуги $r\varphi$ и ея приближеннымъ значеніемъ $s$. Съ этой цѣлью развернемъ выраженіе $3\sin\varphi/(2+\cos\varphi)$ въ рядъ по возрастающимъ степенямъ $\varphi$. Для этого нужно сюда подставить ряды, полученные въ § 118 т. I для $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, и произвести дѣленіе. Простое вычисленіе даетъ:

$$s = r \cdot \frac{3\sin\varphi}{2+\cos\varphi} = r\left(\varphi - \frac{\varphi^5}{180} + \frac{\varphi^7}{1512} - \ldots\right)$$

$$\Delta = r\varphi - s = \frac{r\varphi^5}{180}\left(1 - \frac{\varphi^2}{9}\right).$$

„Погрѣшность“ $\Delta$ этого приближенія, такимъ образомъ, положительна и примѣрно пропорціональна 5-ой степени угла $\varphi$ и 1-ой степени радіуса $r$. Для угла въ $60^0$ дуга $\varphi = 2\pi/6 = 1{,}05$; при $30^0$ дуга $\varphi = 0{,}52$. Изъ послѣдняго же уравненія получаемъ:

при $\varphi = 1:\quad \Delta = r/200$ (приближенно)

„ $\varphi = 1/2:\quad \Delta = r/5900$ „ .

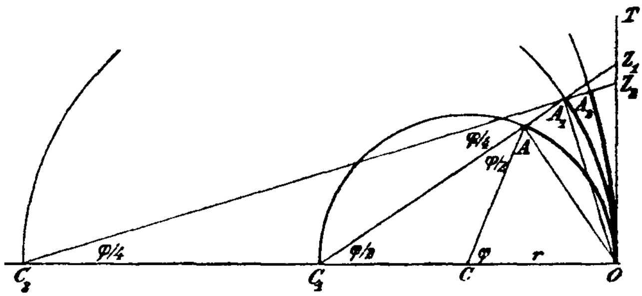
Для угловъ, которые не превышаютъ $30^0$, точность, такимъ образомъ, чрезвычайно велика. Можно спокойно взять радіусъ въ 100 сантиметровъ, не рискуя сдѣлать замѣтной ошибки. Увеличивая въ 12 разъ выпрямленную дугу въ $30^0$, мы получимъ периферію круга. Въ большей части случаевъ въ начертательной геометріи, гдѣ радіусъ рѣдко превышаетъ 5 сантиметровъ, этотъ пріемъ можно примѣнять даже къ дугѣ въ $60^0$.

Гюйгенсъ даетъ еще другой пріемъ, для выпрямленія дуги (задача III 1. c.), практически менѣе удобный, погрѣшность котораго также пропорціональна радіусу и 5-ой степени центральнаго угла, но меньше, нежели въ указанномъ выше построеніи.

Недавно Лампе (Lampe, „Mathesis“ (2) 7, 1897) и Штекель (Stäckel, Arch. d. Math. u Phys. (3), 11) занялись обобщеніемъ формулы $s = 3r\sin\varphi/(2+\cos\varphi)$, которое, впрочемъ, ведетъ свое начало еще отъ Николая Кузанскаго.

**14.** Въ заключеніе укажемъ еще одинъ пріемъ выпрямленія окружности, который геометрически собственно долженъ былъ бы быть предпочтенъ пріему Архимеда. Этотъ пріемъ заслуживалъ бы даже того, чтобы положить его въ основу элементарнаго вычисленія длины окружности и, если мы этого не дѣлаемъ, то только потому, что пріемъ Архимеда болѣе приспособленъ къ самому понятію о длинѣ дуги, ибо всегда будетъ казаться наиболѣе естественнымъ опредѣлять длину дуги, какъ предѣлъ вписанной въ нее правильной ломаной линіи при неограниченномъ увеличеніи числа ея сторонъ.

Положимъ, что нужно выпрямить дугу $OA$ окружности $C$ радіуса $r$, т. е. нужно превратить ее въ прямолинейный отрѣзокъ той же длины (фиг. 117). Діаметръ $OC$ встрѣчаетъ окружность въ точкѣ $C_1$, такъ что $\sphericalangle AC_1O = \sphericalangle ACO/2 = \varphi/2$, гдѣ $\varphi$ есть абсолютная мѣра угла $ACO$. Тогда $\operatorname{arc} AO = r\varphi$; если мы опишемъ окружность изъ точки $C$, какъ изъ центра, радіусомъ $C_1O$, то діаметръ $C_1A$ встрѣтитъ послѣднюю въ



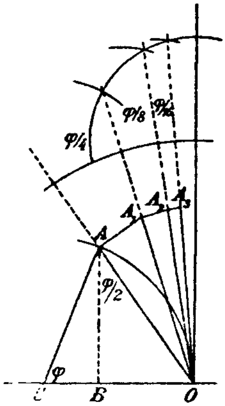

Фиг. 117.

точкѣ $A_1$ такимъ образомъ, что $OA_1 = 2r \cdot \varphi/2 = r\varphi$; такимъ образомъ, $\operatorname{arc} OA = \operatorname{arc} OA_1$. Этотъ пріемъ можно повторить неограниченное число разъ: беремъ $C_1C_2 = C_1O$; изъ точки $C_2$, какъ изъ центра, радіусомъ $C_2O$ описываемъ окружность и находимъ точку пересѣченія послѣдней $A_2$ съ радіусомъ $C_2A_1$. Тогда $\operatorname{arc} OA_2 = \operatorname{arc} OA_1 = \operatorname{arc} OA \ldots$ Окружности постоянно возрастаютъ; $OC_3 = 2\,OC_2$; $OC_4 = 2\,OC_3 \ldots$; $\operatorname{arc} OA = \operatorname{arc} OA_1 = \operatorname{arc} OA_2 = \operatorname{arc} OA_3 = \operatorname{arc} OA_4 = \cdots$; дуги же остаются равными и становятся постоянно болѣе плоскими и неограниченно приближаются къ отрѣзку $OA_n$; чѣмъ больше $n$, тѣмъ болѣе отрѣзокъ $OA_n$ приближается къ дугѣ $OA$. Однако, въ этомъ видѣ построеніе практически невыполнимо, такъ какъ точки $C$ уходятъ за предѣлы того пространства, которымъ мы располагаемъ на чертежѣ. Это неудобство можно устранить слѣдующимъ простымъ соображеніемъ: $A_1A_2 \perp OA_1$, $A_2A_3 \perp OA_2$, $A_3A_4 \perp OA_3 \ldots$; кромѣ того лучъ $OA_1$ дѣлитъ пополамъ $\sphericalangle AOT$*), лучъ $OA_2$ дѣлитъ пополамъ

*) $T$ есть произвольная точка на касательной въ точкѣ $O$, взятая съ той стороны прямой $OC$, съ которой расположенъ радіусъ $AC$.

$\sphericalangle A_2OT$ и т. д. Отсюда вытекаетъ построеніе, которое непосредственно видно на чертежѣ 118; оно у насъ прервано на отрѣзкѣ $OA_3$.

Если мы проведемъ еще $AB \perp CO$, то



Фиг. 118.

$$AB = r\sin\varphi, \qquad OA = BA : \cos\varphi/2,$$
$$OA_1 = OA : \cos\varphi/4, \qquad OA_2 = OA_1 : \cos\varphi/8, \ldots.$$

Поэтому

$$OA_n = \frac{r\sin\varphi}{\cos\varphi/2\cdot\cos\varphi/4\cdot\cos\varphi/8\cdots\cos\varphi/2^{n+1}},$$

если $\varphi$ меньше двухъ прямыхъ, т. е. если $\varphi < \pi$. Что эта формула съ возрастаніемъ $r$ дѣйствительно воспроизводитъ все точнѣе дугу $OA = \varphi$, вытекаетъ изъ извѣстной Эйлеровой формулы

$$\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi/2\cdot\cos\varphi/4\cdot\cos\varphi/8\cdots \text{ad inf.}}$$

(Opuscula anal. I, pag. 346). При $\varphi = \pi/2$ мы получаемъ отсюда выраженіе для $\pi/2$, данное Віета и указанное нами выше. Его можно очень наглядно получить по отрѣзку $OA_n$.

Наконецъ, укажемъ еще, что въ прямоугольномъ треугольникѣ $OA_nC_{n+1}$ (фиг. 118) гипотенуза $OC_{n+1} = 2^{n+1}r$, катетъ $A_nC_{n+1} = \sqrt{(2^{n+1}r)^2 - s_n^2}$, гдѣ $s_n = OA_n$, такъ что

$$A_nA_{n+1} = C_{n+1}A_{n+1} - C_{n+1}A_n = C_{n+1}O - C_{n+1}A_n$$
$$= 2^{n+1}r - \sqrt{(2^{n+1}r)^2 - s_n^2};$$

а потому въ прямоугольномъ треугольникѣ $OA_nA_{n+1}$

$$s_{n+1}^2 = OA_{n+1}^2 = s_n^2 + A_nA_{n+1}^2 = s_n^2 + (2^{n+1}r - \sqrt{(2^{n+1}r)^2 - s_n^2})^2.$$

Такимъ образомъ, съ помощью одной только теоремы Пиѳагора и теоремы о вписанномъ углѣ мы имѣемъ возможность вычислять отрѣзки $OA_n = s_n$ по отрѣзку $OA = s$:

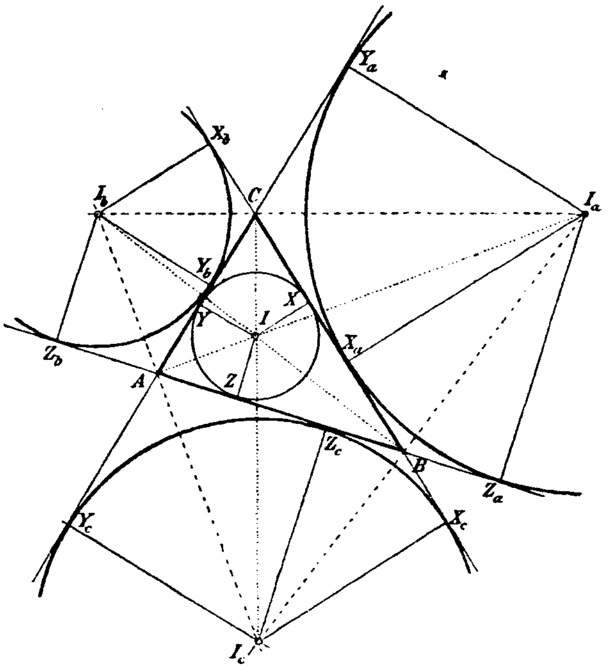
$$s_{n+1}^2 = s_n^2 + (2^{n+1}r - \sqrt{(2^{n+1}r)^2 - s_n^2})^2;$$

эти отрѣзки съ возрастаніемъ $n$ приближаются къ дугѣ $OA$. Въ этомъ пространномъ вычисленіи длины дуги можно было бы легко указать верхнюю границу въ видѣ отрѣзковъ $OZ_n$, которое ограничиваютъ прямыя $C_{n+1}A_n$ на касательной $OT$. При помощи бинома Ньютона можно также на основаніи послѣдней формулы сдѣлать оцѣнку разности $s_{n+1} - s_n$, которая имѣетъ рѣшающее значеніе въ вопросѣ о сходимости указаннаго процесса.

## § 24. Предложенія и задачи, относящіяся къ окружности.

**1.** Въ видѣ примѣненія основныхъ предложеній, а также для установленія связи съ тѣми элементарными соображеніями, которыя были вплетены въ изложенныя выше основы геометріи, мы разсмотримъ здѣсь нѣкоторыя задачи, относящіяся къ геометріи круга.

Равнодѣлящія угловъ $\alpha, \beta, \gamma$ треугольника $ABC$ и смежныхъ съ ними угловъ пересѣкаются по три въ четырехъ точкахъ $I, I_a, I_b, I_c$ — въ центрахъ четырехъ окружностей, которыя касаются всѣхъ сторонъ треугольника или ихъ продолженій. Пусть $I$ будетъ центръ „внутренней“




Фиг. 119.

вписанной окружности, $I_a$ центръ „внѣвписанной“ окружности, касающейся стороны $a$ и продолженія двухъ другихъ сторонъ (фиг. 119). Соотвѣтственно этому мы обозначимъ:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| точку пересѣченія окружности | $I$ | $I_a$ | $I_b$ | $I_c$, |
| съ прямой $a$ черезъ | $X$ | $X_a$ | $X_b$ | $X_c$, |
| „ „ $b$ „ | $Y$ | $Y_a$ | $Y_b$ | $Y_c$, |
| „ „ $c$ „ | $Z$ | $Z_a$ | $Z_b$ | $Z_c$. |

Постараемся опредѣлить отрѣзки, на которые эти точки дѣлятъ стороны, по даннымъ сторонамъ треугольника. Вслѣдствіе конгруэнтности треугольниковъ $AYI$ и $AZI$ имѣемъ: $AY = AZ$; точно такъ же $BZ = BX$, $CX = CY$.

Если мы два равныхъ отрѣзка, выходящихъ изъ вершины $A$, обозначимъ черезъ $s_a$, отрѣзки, выходящіе изъ вершины $B$, черезъ $s_b$ и отрѣзки, выходящіе изъ вершины $C$, черезъ $s_c$, то

$$a = s_b + s_c, \quad b = s_c + s_a, \quad c = s_a + s_b; \qquad (1)$$

поэтому

$$s_a = s - a, \quad s_b = s - b, \quad s_c = s - c, \quad \text{гдѣ} \quad a + b + c = 2s. \qquad (2)$$

Далѣе имѣемъ:

$$a = CX_c - BX_c, \quad b = CY_c - AY_c, \quad c = AZ_c + BZ_c.$$

И, такъ какъ $CY_c = CX_c$, $AZ_c = AY_c$, $BX_c = BZ_c$, то

$$a = CX_c - BZ_c, \quad b = CX_c - AZ_c, \quad c = AZ_c + BZ_c.$$

Поэтому

$$CX_c = CY_c = s, \ AY_c = AZ_c = s - b, \ BZ_c = BX_c = s - a, \qquad (3)$$

откуда, между прочимъ, слѣдуетъ, что $AZ = BZ_c$; это значитъ:

Предложеніе 1. Двѣ точки касанія, расположенныя внутри одной и той же стороны треугольника, расположены симметрично относительно концовъ этой стороны.

Такъ какъ $BX_c = BZ_c = s_a$, $CX_b = CY_b = AY = s_a$, то мы имѣемъ аналогично:

Предложеніе 2. Двѣ точки пересѣченія, расположенныя на продолженіи одной и той же стороны, лежатъ симметрично относительно концовъ этой стороны.

При изслѣдованіяхъ метрическаго характера цѣлесообразно присвоить касательной изъ точки $P$ къ окружности $\varkappa$ длину, принимая за таковую длину отрѣзка $PQ$, гдѣ $Q$ есть точка касанія. Тогда первая изъ формулъ (3) даетъ:

Предложеніе 3. Касательныя изъ вершины треугольника къ внѣвписанной окружности, касающейся противоположной стороны, равны каждая полупериметру $s$.

Если присмотримся внимательно къ формуламъ (1) и (2), то мы легко выразимъ при помощи этихъ предложеній отрѣзки на фиг. 121 черезъ стороны $a$, $b$, $c$.

Теперь легко также рѣшить задачи, поставленныя въ предыдущихъ параграфахъ, построить треугольникъ по даннымъ $c$, $a + b - c = 2s_c$ и по радіусу $r$ описаннаго круга, а также по даннымъ $c, s$ и $r$; такъ какъ $s_c = s - c$, то эти двѣ задачи эквивалентны. Если даны $r$ и $c$, то, по теоремѣ о вписанномъ углѣ, уголъ $\gamma$ опредѣляется, какъ уголъ, вписанный въ окружность радіуса $r$ и опирающійся на хорду $c$. На сторонахъ угла $\gamma$ отложимъ отъ вершины, которую обозначимъ черезъ $C$, отрѣзки $CY_c = CX_c = s$ (фиг. 119) и построимъ окружность $I_c$, касающуюся сторонъ въ точкахъ $X_c$ и $Y_c$; если теперь на сторонахъ $CX_c$ и $CY_c$ отложимъ отрѣзки $CX$ и $CY$, равные каждый $s - c$, то перпендикуляры, возставленные изъ точекъ $X$, $Y$ къ сторонамъ угла, пересѣкутся въ центрѣ $I$ вписаннаго круга. Прямую $AB$ мы найдемъ, какъ общую касательную къ окружностямъ $I$ и $I_c$. Чтобы рѣшеніе было возможно, необходимо, чтобы ни одна изъ окружностей не пересѣкала другой и не заключала ее внутри себя, т. е. необходимо, чтобы величина $2s_c$ не превышала опредѣленной границы $\delta$.

**2.** Изъ подобія треугольниковъ $CYI$ и $CY_cI_c$ на фиг. 119, если мы обозначимъ радіусы окружностей $I$, $I_a$, $I_b$, $I_c$ черезъ $\varrho$, $\varrho_a$, $\varrho_b$, $\varrho_c$, вытекаетъ:

$$\varrho : s_c = \varrho_c : s.$$

Съ другой стороны, треугольники $AZI$ и $I_cZ_cA$ также подобны, такъ какъ эти треугольники прямоугольные, а прямыя $I_cA$ и $AI$ взаимно перпендикулярны; поэтому

$$\varrho : s_a = s_b : \varrho_c.$$

Перемножая эти двѣ формулы, получаемъ: $\varrho^2 : s_a s_c = s_b : s$, или $\varrho^2 = s_a s_b s_c : s$; дѣля же эти пропорціи почленно, получимъ: $s_a : s_c = \varrho_c^2 : s s_b$, или $\varrho_c^2 = s s_a s_b : s_c$.

Предложеніе 4. Между радіусами четырехъ описанныхъ окружностей и отрѣзками $s$, $s_a$, $s_b$, $s_c$, составленными изъ сторонъ $a$, $b$, $c$, имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$\varrho = \sqrt{s_a s_b s_c / s}, \quad \varrho_a = \sqrt{s s_b s_c / s_a}, \quad \varrho_b = \sqrt{s s_c s_a / s_b}, \quad \varrho_c = \sqrt{s s_a s_b / s_c}. \tag{4}$$

Такъ какъ треугольникъ $ABC$ состоитъ изъ треугольниковъ $AIB$, $BIC$, $CIA$, то его площадь $J$ равна $c\varrho/2 + a\varrho/2 + b\varrho/2 = s\varrho$. А такъ какъ $ABC = AI_cC + BI_cC - AI_cB$, то $J = b\varrho_c/2 + a\varrho_c/2 - c\varrho_c/2 = s_c\varrho_c$.

Предложеніе 5. По даннымъ предыдущаго предложенія $J$ вычисляется по формуламъ:

$$J = s\varrho = s_a\varrho_a = s_b\varrho_b = s_c\varrho_c. \tag{5}$$

Въ частности изъ предложеній (4) и (5) получается извѣстная формула для площади треугольника

$$J = \sqrt{s s_a s_b s_c}, \tag{6}$$

найденная Герономъ Александрійскимъ.

По опредѣленію мѣры площади

$$J = a h_a/2 = b h_b/2 = c h_c/2, \tag{7}$$

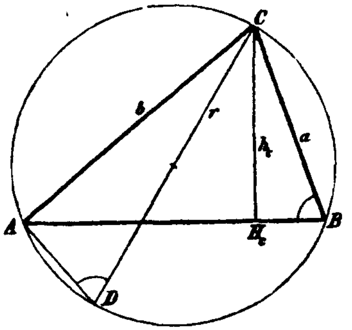
гдѣ $h_a$, $h_b$, $h_c$ суть высоты треугольника. При помощи соотношенiй (6) ихъ можно вычислить по даннымъ $s$, $s_a$, $s_b$, $s_c$.

Съ радiусомъ описаннаго круга $O$ стороны треугольника также связаны зависимостью, которую легко указать (фиг. 120). Если $D$ есть вторая конечная точка дiаметра $OC$, то $DAC$ есть прямой уголъ и $\sphericalangle\, ADC = \sphericalangle\, ABC$, какъ вписанные углы, опирающiеся на одну и ту же дугу $AC$. Поэтому треугольники $CAD$ и $CH_cB$ ($H_c$ есть основанiе высоты $h_c$) подобны; слѣдовательно,

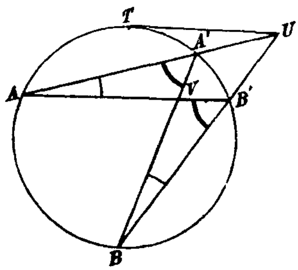
$$2r : b = a : h_a, \quad 2r = ab : h_c = abc : ch_c = abc : 2J, \quad \text{или}$$

$$4r = abc/J. \tag{8}$$

**3.** Полезнымъ преобразованiемъ теоремъ о подобiи являются предложенiя о хордахъ и сѣкущихъ. Если двѣ хорды $AB'$ и $BA'$ одной и той же окружности пересѣкаются въ точкѣ $V$ (фиг. 121), то отрѣзки




Фиг. 120.




Фиг. 121.

$VA$ и $VB'$ называются отрѣзками хорды $AB'$; точно такъ же $UA$, $UA'$ суть отрѣзки, которые точка $U$ опредѣляетъ на хордѣ $AA'$, также и въ томъ случаѣ, когда точка $U$ лежитъ внѣ окружности. Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ слѣдующее предложенiе:

Предложенiе 6. Если изъ точки $P$ проходятъ двѣ хорды или сѣкущiя къ одной и той же окружности, то произведенiе отрѣзковъ, которые точка $P$ опредѣляетъ на одной изъ этихъ двухъ прямыхъ, равно произведенiю отрѣзковъ, которые та же точка опредѣляетъ на другой прямой. Обратно: если равны эти произведенiя, то четыре крайнiя точки этихъ четырехъ отрѣзковъ, кромѣ точки $P$, лежатъ на одной окружности.

Доказательство. Если точка $U$ лежитъ внѣ окружности на сѣкущихъ $AA'$ и $BB'$, то изъ подобiя треугольниковъ $AB'U$ и $BA'U$ (фиг. 121) слѣдуетъ: $UA : UB' = UB : UA'$, или $UA \cdot UA' = UB \cdot UB'$.

Доказательство остается правильнымъ и въ томъ случаѣ, если точки $A$ и $A'$ сливаются въ одну точку $T$, такъ что сѣкущая $UA$ обращается въ касательную: $UT^2 = UA \cdot UA'$. Если данная точка $V$ лежитъ внутри окружности (фиг. 121), то изъ подобія треугольниковъ $AVA'$ и $BVB'$ такимъ же образомъ слѣдуетъ: $VA \cdot VB' = VB \cdot VA'$. — Обратное предложеніе доказывается отъ противнаго. На этомъ предложеніи основывается все содержаніе § 9, планиметрическую часть котораго было бы умѣстно помѣстить здѣсь; это ученіе о степени точки относительно окружности, объ инверсіи и о пучкахъ окружностей.

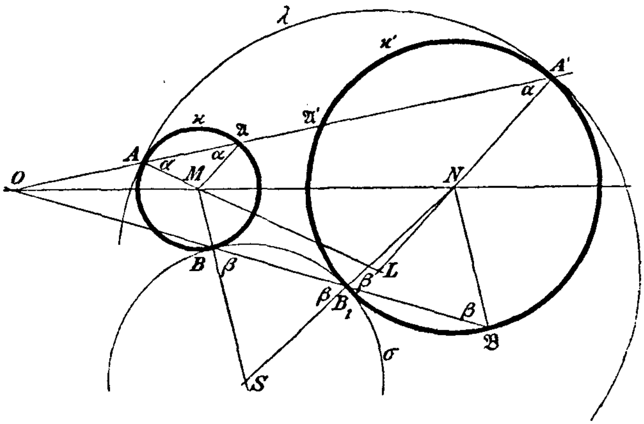
**4.** Изъ предложеній, относящихся къ инверсіи, мы вновь напомнимъ ту теорему, что каждой окружности $\varkappa$, всегда отвѣчаетъ окружность же $\varkappa'$, которая иногда вырождается въ прямую. Касательныя, выходящія изъ центра инверсіи $O$ къ окружности $\varkappa$, должны касаться также окружности $\varkappa'$. Центръ инверсіи является, такимъ образомъ, также центромъ подобія двухъ взаимнообратныхъ окружностей.

Обратно: если даны двѣ окружности $\varkappa$ и $\varkappa'$ и мы проведемъ изъ одного изъ центровъ подобія $O$ касательныя $a$ и $b$ къ окружности, которыя касаются окружности $\varkappa$ въ точкахъ $A$ и $B$ и окружности $\varkappa'$ въ точкахъ $A'$ и $B'$, то $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$ есть степень инверсіи, которая имѣетъ центръ въ точкѣ $O$ и превращаетъ окружность $\varkappa$ въ окружность $\varkappa'$. Итакъ:

Предложеніе 7. Двѣ окружности $\varkappa$ и $\varkappa'$ опредѣляютъ всегда двѣ инверсіи, преобразовывающія эти двѣ окружности другъ въ друга. Центрами инверсіи служатъ внутренній и внѣшній центры подобія. Взаимнообратными всегда являются двѣ точки, принадлежащія одному „лучу подобія“ (такъ называется всякая прямая, проходящая черезъ центръ подобія), но не расположенныя на параллельныхъ радіусахъ.

**5.** Предложеніе 8. Если двѣ окружности касаются третьей, то точки касанія представляютъ собой двѣ взаимнообратныя точки (въ одной изъ инверсій, опредѣляемыхъ, согласно предыдущему предложенію, первыми двумя окружностями).

Пусть $\varkappa$ и $\varkappa'$ будутъ данныя двѣ окружности (фиг. 122 и 123), а $\lambda$ (или $\sigma$) пусть будетъ окружность, касающаяся обѣихъ данныхъ окружностей. Пусть $M, N, L, (S)$ будутъ центры окружностей $\varkappa$ и $\varkappa'$, $\lambda$ (и $\sigma$). Наконецъ, пусть $A$ и $A'$ будутъ точки, въ которыхъ окружность $\lambda$ касается окружностей $\varkappa$ и $\varkappa'$. (Точно такъ же пусть $B$ и $B_1$ будутъ точки, въ которыхъ окружность $\sigma$ касается окружностей $\varkappa$ и $\varkappa'$). Точки касанія всегда лежатъ на центральной прямой; слѣдовательно, — точка $A$ на прямой $ML$, точка $A'$ на прямой $NL$ (точка $B$ на прямой $MS$, точка $B_1$ на прамой $NS$). Такъ какъ $ALA'$ ($BSB_1$) есть равнобедренный треугольникъ, то $\sphericalangle LAA' = \sphericalangle LA'A$. Эти углы мы обозначимъ черезъ $\alpha$. Положимъ, что прямая $AA'$ встрѣчаетъ окружность $\varkappa$ въ точкѣ $\mathfrak{A}$. Въ такомъ случаѣ имѣетъ мѣсто также равенство $M\mathfrak{A} = MA$ и, слѣдовательно, $\sphericalangle M\mathfrak{A}A = \sphericalangle MA\mathfrak{A} = \alpha$; поэтому $M\mathfrak{A} \parallel NA'$, т. е. точки $\mathfrak{A}$, $A'$ отвѣчаютъ другъ другу въ подобномъ соотвѣтствіи, которое относитъ другъ другу точки $M$ и $N$; прямая $AA'$ проходитъ, слѣдовательно, черезъ одинъ изъ центровъ подобія окружностей $\varkappa$ и $\varkappa'$; а такъ какъ




Фиг. 122.

$\mathfrak{A}$ и $A'$ суть соотвѣтствующія точки и $A$ есть вторая точка, въ которой прямая $\mathfrak{A}A'$ встрѣчаетъ окружность $\varkappa$, то точки $A$ и $A'$ взаимно обратны (точно такъ же точки $B$ и $B_1$). На фиг. 122 изображено подобіе съ внѣшнимъ центромъ, на фиг. 123 — съ внутреннимъ центромъ.

Отсюда слѣдуетъ, что общая точка двухъ соприкасающихся окружностей $\varkappa$ и $\varkappa'$ обратна самой себѣ въ каждой изъ двухъ инверсій, превращающихъ эти окружности другъ въ друга.

**6.** Какъ мы видѣли при доказательствѣ предложенія 8, прямая, соединяющая двѣ точки, въ которыхъ двѣ окружности $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ касаются третьей окружности $\lambda$, всегда проходитъ черезъ внутренній или внѣшній центръ подобія $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$; согласно же предложенію 7, точки касанія взаимно обратны въ инверсіи, имѣющей центромъ $O$ упомянутый центръ подобія, но всѣ окружности, относительно которыхъ точка $O$ имѣетъ характерную для этой инверсіи степень, принадлежатъ связкѣ, опредѣляющей собой и самую инверсію. Эту связку мы будемъ называть „связкой центра подобія $O$“, или, короче, „связкой подобія $O$“. Мы можемъ теперь сказать:

Предложеніе 9. Окружности, касающіяся двухъ окружностей $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, принадлежатъ одной изъ двухъ связокъ подобія окружностей $\varkappa_1$, $\varkappa_2$.

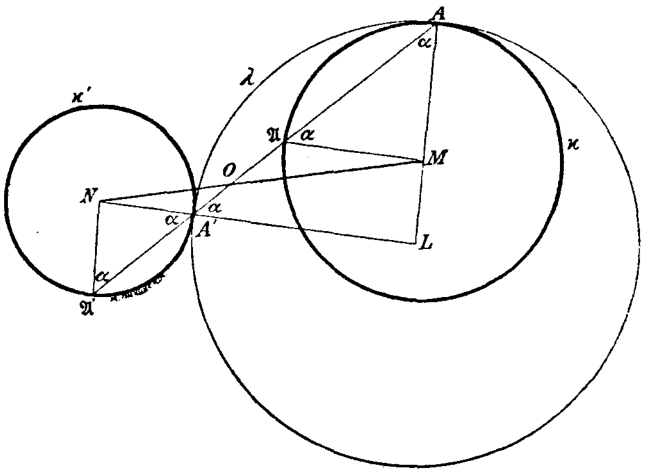
Предложеніе 10. Каждая окружность $\lambda$, принадлежащая одной изъ связокъ подобія двухъ окружностей $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и пересѣкающая одну изъ нихъ, пересѣкаетъ также вторую и при томъ подъ тѣмъ же угломъ.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ окружность $\lambda$ (въ связкѣ) обратна самой себѣ, окружности же $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ переходятъ одна въ другую, то и углы $(\varkappa_1, \lambda)$ и $(\varkappa_2, \lambda)$ взаимно обратны, а потому и равны.

Предложеніе 10 допускаетъ обращеніе и содержитъ въ себѣ предложеніе 9, какъ частный случай.

Предложеніе 11. Каждая окружность $\lambda$, пересѣкающая окружности $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ подъ равными углами, принадлежитъ одной изъ связокъ подобія $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$.

Эту теорему можно доказать прямо при помощи фигуры, частными случаями которой при $\varphi = 0$ являются фигуры 122 и 123. Можно вести




Фиг. 123.

доказательство также и слѣдующимъ образомъ. Каждая инверсія $J$, центръ которой $C$ лежитъ на окружности $\lambda$, обращаетъ $\lambda$ въ прямую $\lambda'$, которая пересѣкаетъ обратныя окружности $\varkappa_1'$ и $\varkappa_2$ подъ тѣми же углами, что и окружности $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$; прямая $\lambda'$ проходитъ поэтому черезъ одинъ изъ центровъ подобія $S'$ окружностей $\varkappa_1'$ и $\varkappa_2'$. Связка инверсіи, превращающей окружности $\varkappa_1'$ и $\varkappa_2'$ другъ въ друга, а прямую $\lambda'$ въ самое себя, преобразовывается инверсіей $J$ въ связку такой инверсіи, которая превращаетъ окружности $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ другъ въ друга, а окружность $\lambda$ въ себя самое; это есть одна изъ инверсій, которая отвѣчаетъ связкамъ подобія окружностей $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, а потому окружность $\lambda$ принадлежитъ одной изъ этихъ связокъ.

7. Изъ сказаннаго слѣдуетъ:

Предложеніе 12. **Всѣ окружности, которыя пересѣкаютъ три окружности $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$, не принадлежащія одному пучку, подъ одинаковыми углами, образуютъ въ совокупности четыре пучка.**

Всѣ окружности, пересѣкающія подъ одинаковыми углами какъ окружности $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, такъ и окружности $\varkappa_2$ и $\varkappa_3$, пересѣкаютъ также окружности $\varkappa_3$ и $\varkappa_1$ подъ равными углами. Отсюда слѣдуетъ, что всякая окружность, которая принадлежитъ какой-либо связкѣ подобія $S_{12}$ окружностей $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, а также какой-либо связкѣ подобія $S_{23}$ окружностей $\varkappa_2$ и $\varkappa_3$ и въ то же время пересѣкаетъ одну изъ этихъ окружностей, необходимо принадлежитъ также одной изъ связокъ подобія $S_{31}$ окружностей $\varkappa_3$ и $\varkappa_1$. Но общія окружности двухъ связокъ $S_{12}$ и $S_{23}$ образуютъ пучекъ, который долженъ принадлежать также связкѣ $S_{31}$. Такъ какъ центры $S_1, S_2, S_3$ связокъ $S_{23}, S_{31}, S_{12}$ имѣютъ одну и ту же степень относительно всѣхъ окружностей пучка, то эти три точки лежатъ на радикальной оси пучка. Итакъ, шесть центровъ подобія трехъ окружностей расположены по три на одной прямой — на „оси подобія". Теперь ясно, что каждая окружность, принадлежащая связкамъ $S_{12}$ и $S_{23}$, необходимо принадлежитъ также связкѣ $S_{31}$, даже и въ томъ случаѣ, если она не пересѣкаетъ ни одну изъ трехъ окружностей $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$; въ самомъ дѣлѣ, она принадлежитъ нашему пучку, всѣ окружности котораго принадлежатъ также связкѣ $S_{31}$. Но, такъ какъ имѣются двѣ связки $S_{12}$ и двѣ связки $S_{23}$, то имѣются четыре пучка, окружности которыхъ пересѣкаютъ подъ равными углами три окружности $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$. — Четыремъ пучкамъ отвѣчаютъ четыре оси подобія — радикальныя оси этихъ пучковъ. Если $K_1, K_2, K_3$ суть центры окружностей $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$, то можно проще всего найти центры подобія, проведя параллельные радіусы $K_1A_1 \parallel K_2A_2 \parallel K_3A_3$ и разыскавъ точки пересѣченія съ центральною осью прямыхъ, соединяющихъ соотвѣтственныя пары точекъ. Если отрѣзки $K_1A_1$ и $K_2A_2$ имѣютъ противоположное направленіе, если противоположное направленіе имѣютъ также отрѣзки $K_2A_2$ и $K_3A_3$, то отрѣзки $K_1A_1$ и $K_3A_3$ имѣютъ одинаковое направленіе, т. е. двумъ внутреннимъ центрамъ подобія въ качествѣ третьяго всегда отвѣчаетъ внѣшній центръ подобія, лежащій на одной съ ними прямой; это не что иное, какъ предложеніе Дезарга въ примѣненіи къ треугольникамъ $K_1K_2K_3$ и $A_1A_2A_3$ *). Если, такимъ обра-

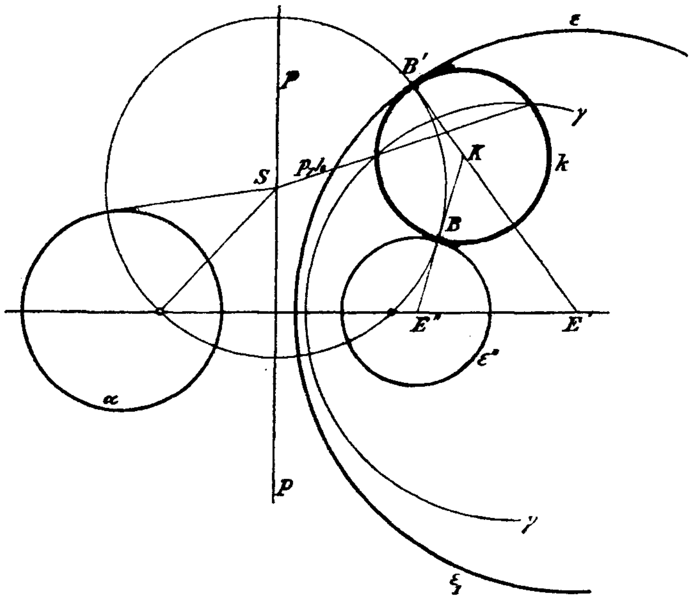
*) Сонаправленность отрѣзковъ на одной и той же прямой можетъ быть опредѣлена, какъ указано въ § 15; сонаправленность же параллельныхъ прямыхъ опредѣляется ортогональной проекціей одной прямой на другую.

зомъ, $J_{hk}$ есть внутренній, $A_{hk}$ — внѣшній центръ подобія окружностей $K_h$ и $K_k$, то соотвѣтственно расположены по одной прямой:

$$\begin{array}{ccc} A_{12} & A_{23} & A_{31}, \\ A_{12} & J_{23} & J_{31}, \\ J_{12} & A_{23} & J_{31}, \\ J_{12} & J_{23} & A_{31}. \end{array}$$

Два внѣшнихъ центра подобія не могутъ быть расположены на одной прямой съ внутреннимъ; въ самомъ дѣлѣ, если сонаправлены какъ радіусы $K_1A_1$ и $K_2A_2$, такъ и радіусы $K_2A_2$ и $K_3A_3$, то и радіусы $K_1A_1$ и $K_3A_3$ имѣютъ одинаковое направленіе.

**8.** Къ четыремъ пучкамъ, о которыхъ идетъ рѣчь въ предложеніи 12, принадлежатъ также окружности, касающіяся всѣхъ трехъ данныхъ




Фиг. 124.

окружностей $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, если таковыя существуютъ. Такъ какъ эти четыре пучка легко найти, то задача Аполлонія сводится лишь къ тому, чтобы въ данномъ пучкѣ окружностей найти тѣ, которыя касаются данной окружности $\varkappa_1$ (или $\varkappa_2$, или $\varkappa_3$). Эту задачу, имѣющую важное значеніе для ученія о коническихъ сѣченіяхъ, намъ теперь легко разрѣшить. Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ будутъ окружности даннаго пучка, $k$ — та окружность, которой должна касаться нѣкоторая окружность пучка $\varepsilon$. Радикальная ось $p_{\alpha k}$ окружностей $\alpha$ и $k$ встрѣчаетъ радикальную ось $b$ пучка въ нѣкоторой точкѣ $S$, имѣющей одинаковую степень какъ относительно всѣхъ окружностей пучка, такъ и относительно окружностей $\alpha$ и $k$; слѣдовательно, эта точка имѣетъ ту же степень относительно окружностей $\beta$ и $k$, $\gamma$ и $k$, и т. д. Поэтому радикальныя оси $p_{\beta k}$, $p_{\gamma k}$, ..., $p_{\varepsilon k}$ всѣ проходятъ черезъ точку $S$. Съ другой стороны, радикальная ось $p_{\varepsilon k}$ есть общая касательная окружностей $\varepsilon$ и $k$ въ точкѣ ихъ соприкосновенія. Она проходитъ черезъ точку $S$, и такъ какъ эту послѣднюю точку легко построить, то задача по существу разрѣшена. На практикѣ же наиболѣе простое рѣшеніе заключается въ слѣдующемъ (фиг. 124). Находимъ радикальную ось $p$ пучка, выбираемъ произвольно нѣкоторую окружность пучка $\gamma$, пересѣкающую окружность $k$; проводимъ общую хорду послѣднихъ двухъ окружностей $\gamma$ и $k$, которая будетъ въ то же время ихъ общей радикальной осью $p_{\gamma k}$. Точка пересѣченія прямыхъ $p_{\gamma k}$ и $p$ и есть точка $S$; мы проводимъ изъ нея касательную къ одной изъ окружностей пучка*) (или окружности $k$), для чего, въ случаѣ гиперболическаго пучка, можетъ также служить просто отрѣзокъ, идущій изъ точки $S$ къ предѣльной точкѣ пучка. Наконецъ, изъ точки $S$, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ ея разстоянію отъ точки касанія, проводимъ окружность, которая пересѣкаетъ окружность $k$ въ искомыхъ точкахъ соприкосновенія $B'$ и $B''$. Если $K$ есть центръ окружности $k$, то прямыя $KB'$ и $KB''$ пересѣкаютъ центральную ось пучка въ точкахъ $E'$, $E''$, которыя служатъ центрами двухъ искомыхъ окружностей $\varepsilon'$, $\varepsilon''$**). — Чтобы существовала точка $S$, радикальная ось $p_{\gamma k}$ не должна совпадать съ $p$; окружность $k$ не должна принадлежать пучку.

**9.** Послѣ этихъ предварительныхъ соображеній рѣшеніе Аполлоніевой задачи уже не представляетъ затрудненія***). Пусть $K_1$, $K_2$, $K_3$ будутъ центры трехъ данныхъ окружностей $k_1$, $k_2$, $k_3$ (фиг. 125). При помощи трехъ параллельныхъ радіусовъ $K_1L_1$, $K_2L_2$, $K_3L_3$ мы построимъ четыре оси подобія. Пусть $p$ будетъ одна изъ нихъ, $S_{12}$, $S_{23}$, $S_{31}$ пусть будутъ лежащіе на ней центры подобія. Намъ нужно найти соотвѣтствующій пучокъ. Положимъ, что произвольный лучъ, проходящій черезъ точку $S_{12}$, встрѣчаетъ окружности $k_1$, $k_2$ въ точкахъ $C_1$, $C_2$; лучъ же $S_{23}C_2$ встрѣчаетъ окружность $k_3$ въ точкѣ $C_3$; въ такомъ случаѣ точки $C_1$ и $C_2$ суть взаимнообратныя точки въ связкѣ подобія $(S_{12})$, соотвѣтствующей центру $S_{12}$; точно такъ же $C_2$, $C_3$ суть взаимнообратныя точки

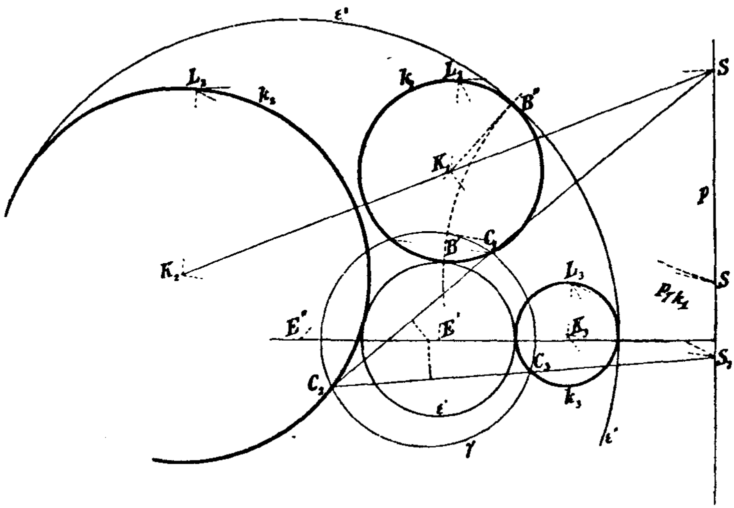
*) При этой модификаціи рѣшеніе пригодно даже въ томъ частномъ случаѣ, когда $k$ есть прямая.

**) Фиг. 125 соотвѣтствуетъ гипорболическому пучку, когда построеніе сложнѣе; въ случаѣ эллиптическаго пучка мы непосредственно имѣемъ радикальную ось $b$.

***) По Масфеллеру (Massfeller, Archiv d. Math. u. Phys. (3) 3, 189).

въ связкѣ $(S_{23})$. Слѣдовательно, окружность $\gamma$, проходящая черезъ точки $C_1$, $C_2$, $C_3$, принадлежитъ связкамъ $S_{12}$ и $S_{23}$, а, слѣдовательно, и пучку, соотвѣтствующему радикальной оси $p$; $p$ есть радикальная ось этого пучка, и намъ нужно отыскать окружности $\varepsilon'$ и $\varepsilon''$ пучка, касающіяся, скажемъ, окружности $k_1$, а вмѣстѣ съ тѣмъ и окружностей $k_2$, $k_3$. Съ этою цѣлью слѣдуетъ отождествить, скажемъ, окружность $k_1$ съ окружностью $k$ на фиг. 124, радикальную ось $p$ съ прямой, имѣющей то же наименованіе на этой фигурѣ и, наконецъ, окружность $\gamma$ съ окружностью $\gamma$ на той же фигурѣ; тогда мы легко найдемъ касательныя окружности $\varepsilon'$, $\varepsilon''$.

Четыремъ осямъ подобія отвѣчаютъ четыре пары касательныхъ окружностей. Предѣльные случаи, когда одна или нѣсколько изъ данныхъ окружностей переходятъ въ точки или въ прямыя, приводятъ къ много-




Фиг. 125.

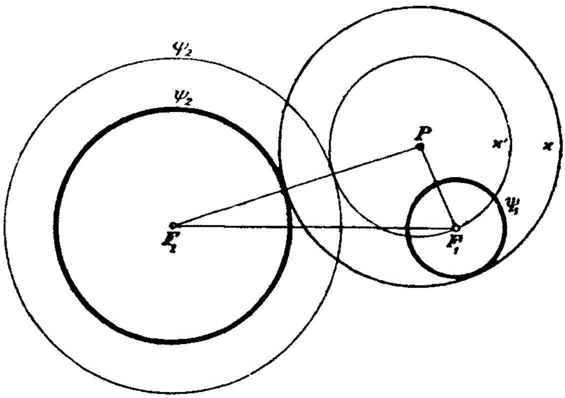
численнымъ частнымъ случаямъ, въ которыхъ, однако, приведенное построеніе по существу остается въ силѣ. Если данныя окружности принадлежатъ одному пучку, то это построеніе, какъ было указано выше въ концѣ п. 8, становится непригоднымъ. Но въ такомъ случаѣ касательнаго круга $\varepsilon$ и не существуетъ вовсе, ибо одна и та же окружность $\varkappa$ можетъ касаться не болѣе двухъ окружностей пучка.

**10.** Рѣшеніе Аполлоніевой задачи поразительно освѣщается, если мы построимъ соотвѣтствующую окружностямъ $k_1$, $k_2$, $k_3$ ортогональную или діаметральную окружность $O$ и къ полученной связкѣ $O$ примѣнимъ данную въ § 10 интерпретацію двухъ взаимнообратныхъ точекъ, какъ псевдоточекъ, и окружностей пучка, какъ псевдопрямыхъ. Окружности

$k_1$, $k_2$, $k_3$ становятся въ такомъ случаѣ псевдопрямыми гиперболической или эллиптической геометріи, смотря по тому, имѣетъ ли связка $O$ ортогональную или діаметральную окружность. Но въ этой псевдогеометріи каждая псевдоокружность состоитъ изъ двухъ дѣйствительныхъ окружностей, взаимнообратныхъ въ связкѣ $O$. Аполлоніева задача теперь гласитъ: построить четыре псевдоокружности, касающіяся трехъ псевдопрямыхъ $k_1$, $k_2$, $k_3$. Это — задача, разсмотрѣнная въ п. 1 о построеніи окружности, вписанной въ треугольникъ, и трехъ внѣвписанныхъ окружностей. Мы должны только имѣть въ виду, что въ случаѣ гиперболической связки стороны $k_1$, $k_2$, $k_3$ могутъ и не пересѣкаться въ дѣйствительныхъ точкахъ. Въ такомъ случаѣ вершинами треугольника служатъ идеальныя точки, но построеніе, данное въ п. 1, остается примѣнимымъ и въ этомъ случаѣ, если мы говоримъ не о равнодѣлящихъ угловъ, а объ осяхъ симметріи трехъ паръ сторонъ треугольника. Предложеніе 8 настоящаго параграфа, согласно которому двумъ окружностямъ всегда отвѣчаютъ двѣ инверсіи, превращающія эти окружности другъ въ друга, обращается въ нашей псевдогеометріи въ предложеніе, что двѣ псевдопрямыя всегда могутъ быть преобразованы одна въ другую при помощи двухъ псевдосимметрій совершенно такъ же, какъ это имѣетъ мѣсто въ евклидовой геометріи. Если мы ограничимся наиболѣе нагляднымъ случаемъ, когда три связки подобія $S_{12}$, $S_{23}$, $S_{31}$ имѣютъ каждая дѣйствительную ортогональную окружность $\omega_{12}$, $\omega_{23}$, $\omega_{31}$, то въ нашей псевдогеометріи $\omega_{12}$, $\omega_{23}$, $\omega_{31}$ являются псевдоосями симметріи или равнодѣлящими угловъ, образуемыхъ прямыми $k_1$, $k_2$, $k_3$. Онѣ пересѣкаются въ псевдоцентрѣ псевдоокружности $\varepsilon$, касающейся псевдопрямыхъ $k_1$, $k_2$, $k_3$ и состоящей изъ двухъ дѣйствительныхъ окружностей $\varepsilon'$ и $\varepsilon''$. Относительно „отрѣзковъ", которые псевдоточки касанія опредѣляютъ на „сторонахъ" псевдотреугольника $k_1$, $k_2$, $k_3$, остаются въ силѣ тѣ же предложенія, которыя были приведены въ п. 1. Переводя ихъ обратно на языкъ обыкновенной геометріи, мы получимъ рядъ прекрасныхъ тригонометрическихъ формулъ, выводъ которыхъ завелъ бы насъ, однако, слишкомъ далеко. Всѣ пріемы построенія, указаннаго въ п. 9, получаютъ очень простую интерпретацію. Здѣсь вновь сказывается большое значеніе геометріи, построенной на понятіяхъ въ смыслѣ экономіи мышленія. Кто умѣетъ построить четыре касательныхъ круга въ треугольникѣ и владѣетъ тѣми немногими предложеніями, которыя необходимы, чтобы интерпретировать геометрію связки окружностей, какъ неевклидову геометрію, тотъ можетъ разрѣшить Аполлоніеву задачу, не затрачивая новой работы мысли, и при томъ самымъ простымъ образомъ. Даже гораздо болѣе общая задача о построеніи окружности, пересѣкающей три данныя окружности $k_1$, $k_2$, $k_3$ подъ данными углами $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, претворяется въ простую задачу, относящуюся къ треугольнику, и получаетъ простое рѣшеніе.

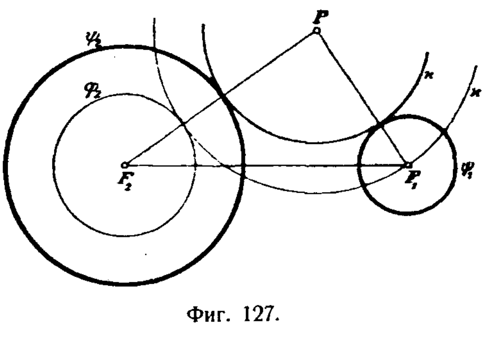
## § 25. Элементарная теорія коническихъ сѣченій.

**1.** Аполлоніева задача о касательной окружности является одной изъ плодотворнѣйшихъ задачъ элементарной геометріи. Съ одной стороны, ея рѣшеніе опирается на теорію радикальныхъ осей и центровъ подобія окружностей, пучковъ и связокъ окружностей; съ другой стороны, она находится въ связи съ двумя неевклидовыми геометріями, такъ какъ оказывается возможнымъ привести ее къ болѣе простой задачѣ о построеніи вписанной и внѣписанныхъ окружностей въ треугольникъ. Мы хотимъ еще показать, что эта задача вводитъ насъ также въ ученіе о коническихъ сѣченіяхъ. Въ самомъ дѣлѣ, сама собой напрашивается мысль придти къ рѣшенію Аполлоніевой задачи такимъ образомъ, чтобы найти предварительно геометрическое мѣсто центровъ окружностей $\varkappa$, которыя касаются двухъ данныхъ окружностей $\psi_1$ и $\psi_2$. Это геометрическое мѣсто можно опредѣлить нѣсколько проще; если $F_1$, $F_2$ суть центры, $r_1$ и $r_2$—радіусы данныхъ окружностей, $P$—центръ, $r$—радіусъ окружности $\varkappa$, то точка $P$ будетъ также служить центромъ окружности $\varkappa'$,



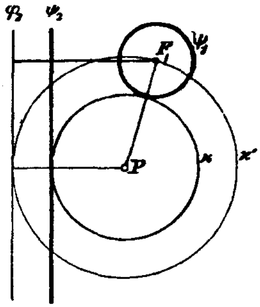

Фиг. 126.

проходящей черезъ точку $F_1$ и касающейся нѣкоторой окружности $\varphi_2$, концентричной съ окружностью $\psi_2$ и имѣющей радіусомъ $r_1 + r_2$ или $r_1 - r_2$, смотря по роду касанія (фиг. 126 и 127). Если окружность $\psi_2$ вырождится въ прямую, то окружность $\varphi_2$ обращается въ параллельную ей прямую, отстоящую отъ нея на разстояніи $r_1$ и расположенную по ту или иную сторону ея, смотря по роду касанія (фиг. 128 и 129). Дѣло сводится, такимъ образомъ, къ тому, чтобы изслѣдовать **геометрическое мѣсто центровъ всѣхъ окружностей** $\varkappa'$, **приходящихъ черезъ неподвиж-**

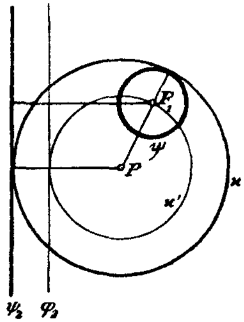



Фиг. 127.

ную точку $F_1$ и касающихся неподвижной окружности $\varphi_2$, которая можетъ иногда выродится и въ прямую. Это геометрическое мѣсто мы опредѣлимъ, какъ коническое сѣченіе; именно, мы будемъ его называть эллипсомъ или гиперболой, смотря по тому, расположена ли точка $F_1$ внутри или внѣ окружности $\varphi_2$, и параболой, если $\varphi_2$ есть прямая. Если точка $F_1$ лежитъ на окружности $\varphi_2$, то коническое



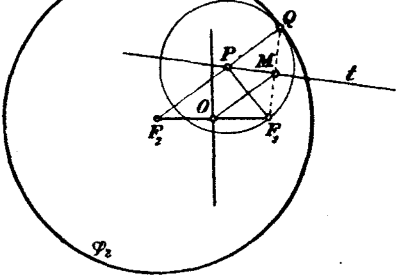

Фиг. 128.



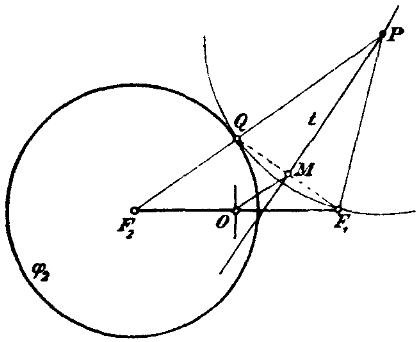

Фиг. 129.

сѣченіе вырождается въ прямую, ортогональную къ $\varphi_2$ въ точкѣ $F_1$. Намъ нужно будетъ потомъ доказать, что опредѣленныя такимъ образомъ коническія сѣченія дѣйствительно представляютъ собой сѣченія кругового конуса плоскостью.

**2.** Исходя изъ нашего опредѣленія, можно легко построить сколько угодно точекъ коническаго сѣченія, если даны $F_1$ и $\varphi_2$; если $\varphi_2$ есть окружность, то мы будемъ обозначать ея радіусъ черезъ $2a$, ея центръ

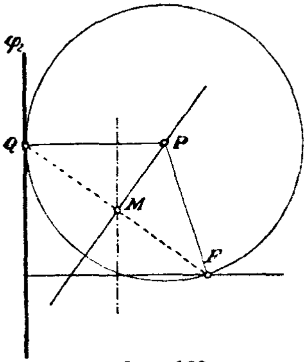



Фиг. 130.

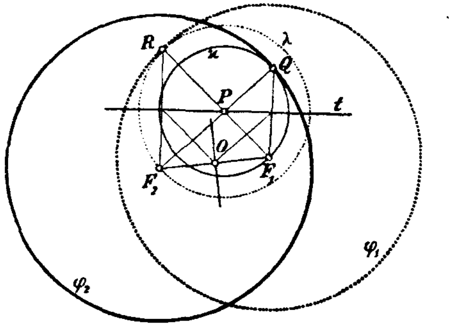



Фиг. 131.

— черезъ $F_2$. Если зададимъ на $\varphi_2$ точку касанія $Q$ окружности $\varkappa$, проходящей черезъ точку $F_1$ и касающейся $\varphi_2$, то ея центръ $P$ лежитъ, съ одной стороны, на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ середины отрѣзка $F_1Q$; съ другой стороны, онъ лежитъ на радіусѣ $F_2Q$, если $\varphi_2$ есть окружность (фиг. 130 и 131), или, если $\varphi_2$ вырождается въ прямую,—на прямой, перпендикулярной къ $\varphi_2$ въ точкѣ $Q$ (фиг. 132). Если, въ случаѣ эллипса или гиперболы, мы изъ точки $P$, какъ изъ центра, проведемъ окружность $\lambda$, проходящую черезъ точку $F_2$ (фиг. 133 и 134), то прямая $F_1P$ всегда встрѣчаетъ эту окружность въ одной такой точкѣ $R$, что $RF_1 = QF_2$ равно радіусу $2a$ окружности $\varphi_2$. Окружность $\lambda$ проходитъ, такимъ образомъ, черезъ точку $F_2$ и касается нѣкоторой неподвижной окружности $\varphi_1$, имѣющей

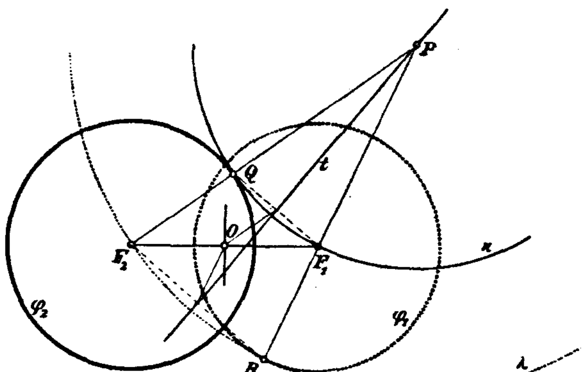



Фиг. 132.




Фиг. 133.

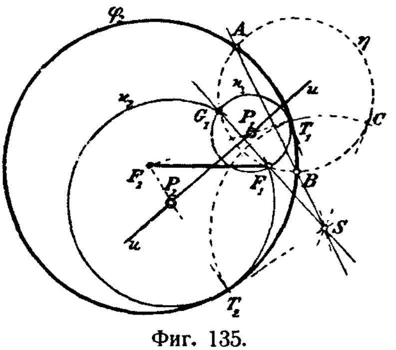
центръ въ точкѣ $F_1$ и радіусъ $2a$. Эллипсъ и гипербола являются, слѣдовательно, геометрическимъ мѣстомъ центровъ какъ тѣхъ окружностей, которыя проходятъ черезъ точку $F_2$ и касаются окружности $\varphi_1$, такъ и тѣхъ окружностей, которыя проходятъ черезъ точку $F_1$ и касаются окружности $\varphi_2$. Такъ какъ опредѣляющіе элементы $F_1$ и $\varphi_2$ коническаго сѣченія путемъ отраженія отъ перпендикуляра, возставленнаго изъ середины отрѣзка $F_1F_2$, переходятъ въ опредѣляющіе элементы $F_2$ и $\varphi_1$, то всѣ его точки расположены симметрично относительно этого перпендикуляра; такъ какъ, съ другой стороны, при отраженіи относительно прямой $F_1F_2$ эти элементы преобразуются сами въ себя, то и прямая $F_1F_2$ дѣлитъ коническое сѣченіе на двѣ симметрично равныя части. Эллипсъ и гипербола имѣютъ, такимъ образомъ, двѣ взаимноперпендикулярныя оси симметріи;




Фиг. 134.

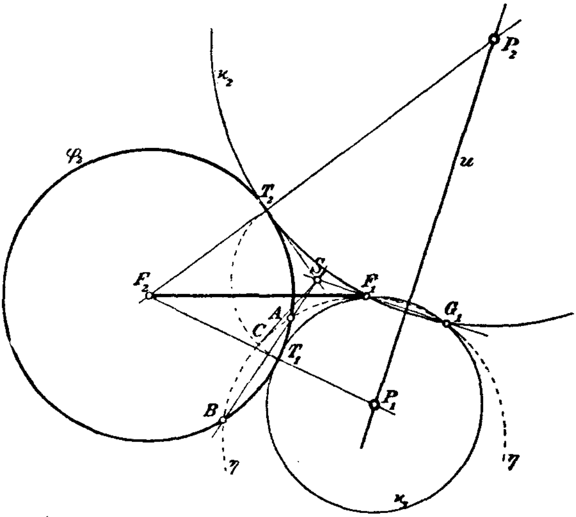
на одной изъ нихъ лежатъ точки $F_1$, $F_2$ — такъ называемые „фокусы" коническаго сѣченія, изъ которыхъ ни одинъ, согласно вышеизложенному, ни имѣетъ никакого предпочтенія передъ другимъ, какъ это могло бы казаться по опредѣленію. Теперь не трудно также указать и другое опредѣленіе этихъ двухъ типовъ коническихъ сѣченій, пользующихся одинаково, обоими фокусами; именно въ случаѣ эллипса, какъ видно на фиг. 130, $PF_1 + PF_2 = F_2Q = 2a$; въ случаѣ же гиперболы, какъ видно на фиг. 131, либо $PF_1 - PF_2$, либо $PF_2 - PF_1 = 2a$. Итакъ: эллипсъ и, соотвѣтственно, гипербола, есть геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ отъ двухъ неподвижныхъ точекъ $F_1$ и $F_2$ — „фокусовъ" — имѣютъ постоянную сумму или, соотвѣтственно, постоянную разность. Аналогично этому, парабола есть геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, равноотстоящихъ отъ нѣкоторой неподвижной точки $F_1$ — „фокуса" — и неподвижной прямой — „директриссы", — какъ это можно непосредственно видѣть изъ построенія точекъ параболы на фиг. 132. Совершенно ясно, что эти свойства разстояній могли бы служить для *опредѣленія* коническихъ сѣченій, при чемъ линію $\varphi_2$, о которой идетъ рѣчь въ первоначальномъ опредѣленіи, было бы всякій разъ нетрудно указать. На основаніи этого новаго опредѣленія можно было бы безъ труда доказать, какъ мы и сдѣлаемъ въ начертательной геометріи, пользуясь такъ называемыми Данделеновыми сферами, что опредѣляемыя такимъ образомъ коническія сѣченія могутъ быть получены, какъ сѣченія круговыхъ конусовъ, а, слѣдовательно, какъ проекціи окружностей или же какъ образованіе проективныхъ пучковъ.

**3.** Возвращаясь теперь къ первоначальному опредѣленію, данному въ п. 1, мы займемся теперь задачей о разысканіи точекъ пересѣченія коническаго сѣченія, заданнаго фокусомъ $F_1$ и направляющей $\varphi_2$, съ прямой $u$ (фиг. 135, 136, 137). Въ силу нашего опредѣленія это значитъ, что намъ нужно найти на прямой $u$ центры окружностей $\varkappa$, проходящихъ черезъ точку $F_1$ и касающихся $\varphi_2$; но всѣ окружности, имѣющія центры на прямой $u$ и проходящія черезъ точку $F_1$, проходятъ еще черезъ одну постоянную точку $G_1$, симметричную съ $F_1$ относительно прямой $u$. Эти окружности образуютъ поэтому пучекъ, и мы возвращаемся, такимъ образомъ, къ задачѣ, разрѣшенной уже раньше, о построеніи окружностей пучка, касающихся данной окружности $\varphi_2$. Это даетъ слѣдующее рѣшеніе нашей



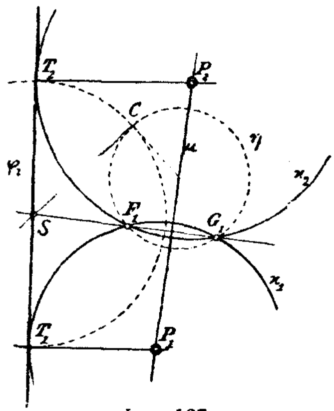
Фиг. 135.

задачи для случая эллипса или гиперболы. Черезъ точки $F_1$ и $G_1$ проведемъ вспомогательную окружность $\eta$, пересѣкающую окружность $\varphi_2$ въ двухъ точкахъ $A$ и $B$; изъ точки пересѣченія $S$ прямыхъ $F_1G_1$ и $AB$ проведемъ касательныя къ окружности $\varphi_2$; радіусы $F_2T_1$ и $F_2T_2$ окружности $\varphi_2$, проходящей черезъ точки касанія $T_1$ и $T_2$, встрѣчаютъ прямую $u$ въ искомыхъ точкахъ $P_1$ и $P_2$*). Такимъ образомъ, прямая можетъ имѣть съ эллипсомъ или гиперболой не болѣе двухъ общихъ точекъ. Чтобы эти двѣ точки $P_1$ и $P_2$ слились въ одну и прямая $u$ сдѣлалась касательной коническаго сѣченія, точки $T_1$ и $T_2$ должны совпадать, что возможно только въ томъ случаѣ, когда въ ту же точку падаетъ также точка $S$, т. е. когда точка $G_1$ лежитъ на окружности $\varphi_2$.



Фиг. 136.

Прямая $u$ представляетъ собой касательную къ эллипсу или гиперболѣ, если точка $Q$, симметричная съ однимъ изъ фокусовъ относительно прямой $u$, лежитъ на окружности $\varphi_2$. На фиг. 130 и 131 прямая $MP$ является касательной, а $P$ есть точка касанія. Если $O$ есть середина отрѣзка $F_1F_2$ (фиг. 130 и 131), а $M$ — середина отрѣзка $F_1Q$, то $OM \parallel F_2Q$, такъ что $OM = \frac{1}{2}F_2Q = a$. Основанія $M$ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ фокусовъ эллипса или гиперболы на касательныя послѣдней, лежатъ, слѣдовательно, на окружности, имѣющей своимъ центромъ „центръ“ эллипса $O$ и ра-



Фиг. 137.

*) Если прямая $u$ проходитъ черезъ точку $F_2$, то точки $T_1$ и $T_2$ просто опредѣляются, какъ пересѣченіе прямой $u$ съ окружностью $\varphi_2$, ибо въ этомъ случаѣ $AB \parallel F_1G_1$.

діусомъ $a$. Касательная къ эллипсу въ нѣкоторой точкѣ $P$ дѣлитъ пополамъ уголъ $F_1PF_2$, составленный лучами $PF_1$ и $PF_2$, или соотвѣтственно смежный уголъ.

**4.** Съ незначительными измѣненіями всѣ эти предложенія справедливы также и относительно параболы. Если мы измѣнимъ построеніе, указанное на фиг. 135 и 136, такимъ образомъ, что проведемъ изъ точки $S$ касательную не къ $\varphi_2$, а къ вспомогательной окружности $\eta$, и если $C$ есть одна изъ точекъ касанія, то послѣдняя вмѣстѣ съ точками $T_1$ и $T_2$ лежитъ на окружности, имѣющей центръ въ точкѣ $S$. Въ этой модификаціи построеніе, указанное на фиг. 135 и 136, примѣнимо и къ параболѣ (фиг. 137), когда $\varphi_2$ вырождается въ прямую. Чтобы найти точку пересѣченія прямой $u$ съ параболой, опредѣляемой фокусомъ $F_1$ и направляющей $\varphi_2$, мы опускаемъ перпендикуляръ изъ точки $F_1$ на прямую $u$ и находимъ точку его пересѣченія $S$ съ директриссой; изъ произвольной точки прямой $u$, какъ изъ центра, проводимъ окружность $\eta$ *), проходящую черезъ точку $F_1$, и къ ней проводимъ касательную $SC$ изъ точки $S$. Окружность, имѣющая центръ въ точкѣ $S$ и проходящая черезъ точку $C$, пересѣкаетъ прямую $\varphi_2$ въ двухъ точкахъ $T_1$ и $T_2$, перпендикуляры же, возставленные изъ точекъ $T_1$, $T_2$ къ прямой $\varphi_2$, пересѣкаютъ прямую $u$ въ точкахъ $P_1$ и $P_2$, которыя прямая $u$ имѣетъ общими съ параболой.

Прямая $u$ становится касательной къ параболѣ, когда точки $P_1$ и $P_2$ совпадаютъ, когда совпадаютъ, слѣдовательно, точки $T_1$ и $T_2$ на прямой $\varphi_2$ (фиг. 132). Геометрическое мѣсто основаній $M$ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ фокуса $F_1$ на касательныя къ параболѣ, есть прямая, параллельная директриссѣ $\varphi_2$ и дѣлящая пополамъ разстояніе послѣдней отъ фокуса.

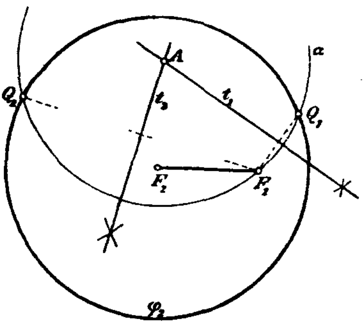
Эта параллель сама также представляетъ собой касательную въ такъ называемой вершинѣ параболы, т. е. въ точкѣ ея пересѣченія съ осью симметріи.

**5.** Подобно тому, какъ коническое сѣченіе можетъ имѣть съ прямой не болѣе двухъ общихъ точекъ, такъ изъ любой точки $A$ могутъ проходить не болѣе, чѣмъ двѣ касательныя коническаго сѣченія, какъ мы это сейчасъ обнаружимъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $Q$ будетъ точка (фиг. 138), симметричная съ $F_1$ относительно прямой $u$; если $u$ есть касательная, то точка $Q$ находится на $\varphi_2$, при чемъ $AQ = AF_1$. Отсюда слѣдуетъ, что *точка $Q$ лежитъ на окружности $\alpha$*, имѣющей центръ въ точкѣ $A$ и проходящей черезъ точку $F_1$. Съ другой стороны, точка $Q$ лежитъ на окружности $\varphi_2$; слѣдовательно, существуютъ двѣ точки $Q_1$ и $Q_2$, расположенныя такимъ образомъ, что перпендикуляры, возста-

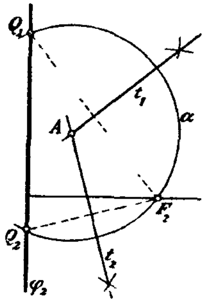
*) Окружность $\eta$ можетъ и не встрѣчать прямой $\varphi_2$.

вленные изъ railcrossingъ отрѣзковъ $F_1Q_1$ и $F_1Q_2$, служатъ касательными и, какъ радіусы круга $a$, проходятъ черезъ точку $A$. Построеніе остается въ силѣ и въ случаѣ параболы (фиг. 139).

Если точки $F_1$ и $F_2$ совпадаютъ, а $\varphi_2$ есть окружность радіуса $2a$, то коническое сѣченіе представляетъ собой окружность съ радіусомъ $a$. Приведенное выше построеніе касательной переходитъ при этомъ въ

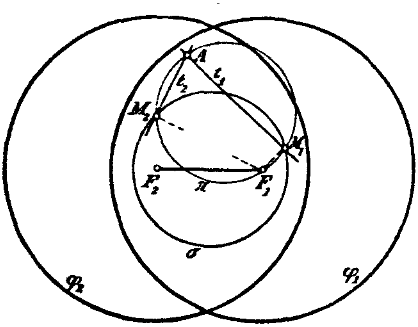


Фиг. 138.

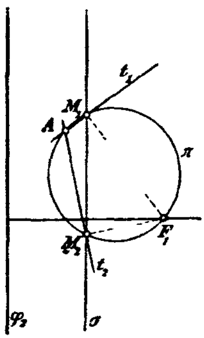


Фиг. 139.

старое, указанное Евклидомъ, построеніе окружности, которое остается въ силѣ и въ обѣихъ неевклидовыхъ геометріяхъ. И второе построеніе касательной къ окружности, которое основано на томъ, что радіусъ, проведенный въ точку касанія, перпендикуляренъ къ касательной, можетъ быть распространено на коническія сѣченія (фиг. 140 и 141). Основаніе $M$ перпендикуляра, который мы можемъ опустить изъ точки $F_1$ на каса-



Фиг. 140.



Фиг. 141.

тельную $u$ къ коническому сѣченію, лежитъ, какъ мы видѣли, въ случаѣ эллипса и гиперболы, на окружности $\sigma$, имѣющей центръ въ центрѣ коническаго сѣченія и радіусъ $a$. Въ случаѣ параболы эта окружность переходитъ въ касательную въ вершинѣ. Другимъ геометрическимъ мѣстомъ точки $F$ является окружность, имѣющая отрѣзокъ $AF_1$ своимъ діаметромъ.

Обѣ эти окружности опредѣляютъ два положенія точки $M$, чѣмъ наша задача разрѣшена.

Если точки $F_1$ и $F_2$ вновь сливаются въ одну точку $O$, такъ что коническое сѣченіе обращается въ окружность, то первое геометрическое мѣсто совпадаетъ съ этой самой окружностью, а второе — съ окружностью, имѣющей діаметръ $AO$.

Этими метрическими предложеніями и построеніями мы ограничимся. Дальнѣйшія детали можно найти въ спеціальныхъ учебникахъ, изъ которыхъ мы укажемъ книгу Цейтена*), которую тѣмъ охотнѣе рекомендуемъ, что авторъ положилъ въ основу то же опредѣленіе, которымъ пользовались мы.

---

*) Zeuthen. „Grundriss einer elementargeometrischen Kegelschittslehre".

# ДОПОЛНЕНІЯ

# I. О безконечно удаленныхъ элементахъ.

Врядъ ли есть въ области геометріи вопросъ, относительно котораго царитъ такая путаница и который вызываетъ столько недоумѣнія, какъ вопросъ о безконечно удаленныхъ элементахъ. Оно и понятно почему. Для того, чтобы эти понятія не вызывали сомнѣній, было бы необходимо указать, каковы тѣ логическія положенія, которыми эти элементы вводятся въ геометрію, т. е. каковы тѣ формальныя свойства этихъ образовъ, которыми мы пользуемся, когда ведемъ то или иное о нихъ разсужденіе. Но этого мало. Для того, чтобы была увѣренность, что введеніе въ геометрію безконечно удаленныхъ образовъ не можетъ привести къ противорѣчію съ основными положеніями геометріи, нужно знать эти послѣднія, т. е. нужна логическая формулировка тѣхъ основныхъ положеній, изъ которыхъ чисто формально можетъ быть развита геометрія. Но, какъ извѣстно, есть еще очень мало сочиненій, въ которыхъ геометрія выводится чисто логически изъ строго формулированныхъ посылокъ. Коль скоро же этого нѣтъ, то нѣтъ и тѣхъ средствъ, помощью которыхъ можно было бы **доказать**, что введеніе безконечно удаленныхъ элементовъ не можетъ привести къ противорѣчію; болѣе того, не имѣетъ опредѣленнаго содержанія и самый вопросъ, ибо неизвѣстно, съ чѣмъ, собственно, не должно быть противорѣчія. Такого рода сомнѣнія возникаютъ, конечно, и во всѣхъ остальныхъ частяхъ геометріи у всякаго, кто хочетъ найти въ ней строго логическую дисциплину; но тому, кто интересуется фактической стороной при изученіи другихъ частей геометріи, приходитъ на помощь интуиція, непосредственное воззрѣніе, наглядныя представленія, которыя онъ связываетъ съ геометрическими образами. Но всѣ эти средства отказываются служить, когда дѣло касается безконечно удаленныхъ элементовъ. Какъ представить себѣ, что параллельныя линіи, которыя, по опредѣленію своему, не имѣютъ общихъ точекъ, все же пересѣкаются въ нѣкоторой безконечно удаленной точкѣ? Какъ представить себѣ, что на прямой имѣется **только одна** безконечно удаленная точка, а на плоскости **только одна** безконечно удаленная прямая? Какъ представить себѣ, что въ пространствѣ имѣется **только одна** безконечно удаленная плоскость? Гдѣ, съ какой стороны пространства она расположена? Представить же себѣ, что плоскость окружаетъ все пространство, мы также не можемъ. Итакъ, когда рѣчь идетъ о безконечно удаленныхъ элементахъ, то мы не имѣемъ ни тѣхъ логическихъ основъ, исходя изъ которыхъ мы могли бы дѣлать о нихъ формальные выводы, ни наглядныхъ представленій, которыя руководятъ нами при изученіи другихъ вопросовъ геометріи въ тѣхъ случаяхъ, когда мы не имѣемъ достаточной логической почвы.

Между тѣмъ введеніе безконечно удаленныхъ элементовъ несомнѣнно приноситъ часто значительную пользу. Въ однихъ случаяхъ это приводитъ къ обобщенію предложеній; такъ, напримѣръ, съ введеніемъ безконечно удаленныхъ точекъ теорема Дезарга обобщается и на тотъ случай, когда прямыя, соединяющія соотвѣтствующія вершины двухъ треугольниковъ, параллельны; въ другихъ случаяхъ мы быстрѣе приходимъ къ результату, пользуясь безконечно удаленными элементами. Для проективной же геометріи введеніе безконечно удаленныхъ элементовъ совершенно необходимо, такъ какъ проективное преобразованіе пространства было бы совершенно невозможно, если бы не учитывать безконечно удаленныхъ элементовъ [1]). Съ другой стороны, если мы будемъ всегда трактовать безконечно удаленныя точки такъ же, какъ и обыкновенныя точки, то мы легко можемъ придти къ абсурду. Было бы, напримѣръ, несправедливо сказать, что изъ любой безконечно удаленной точки можно, какъ и изъ любой конечной точки, опустить перпендикуляръ на любую прямую или на любую плоскость; а въ тѣхъ случаяхъ, когда изъ безконечно удаленной точки можно провести перпендикуляръ на прямую или на плоскость, таковыхъ можетъ быть не одинъ, а безчисленное множество. При такихъ условіяхъ естественно возникаетъ вопросъ: въ какихъ же предѣлахъ можно пользоваться безконечно удаленными элементами, не рискуя придти къ абсурду.

Всѣ эти вопросы въ настоящее время можно считать совершенно разрѣшенными въ томъ смыслѣ, что никакихъ принципіальныхъ затрудненій они уже не вызываютъ. Но сочиненій, въ которыхъ этотъ вопросъ былъ бы достаточно выясненъ, очень мало, и они не принадлежатъ къ числу элементарныхъ [2]).

---

[1]) Вѣрнѣе: не вводя безконечно удаленныхъ элементовъ, можно было бы сохранить только тѣ проективныя соотвѣтствія, которыя сводятся къ движеніямъ и къ подобнымъ преобразованіямъ; аналитически это сводится къ тому, что можно было бы разсматривать только тѣ проективныя соотвѣтствія, которыя выражаются алгебраически цѣлыми линейными преобразованіями.

[2]) Е. Буницкій. „Безконечно удаленные элементы въ геометріи положенія“. Записки Императорскаго Новороссійскаго Университета. Т. 92. 1903.

F. Schur. „Ueber die Einführung der sogenannten idealen Elemente in die projektive Geometrie“. Mathem. Annalen. XXXIX. 1891.

(Продолж. на слѣд. стр.).

Нужно сказать, что и въ настоящемъ сочиненіи авторъ относится къ этому вопросу очень легко, и врядъ ли указанія на стр. 114, 118, 148 и др. могутъ удовлетворить читателя. Мы не имѣемъ возможности въ предѣлахъ настоящей статьи исчерпать вопросъ до конца, но полагаемъ, что нижеслѣдующія строки прольютъ нѣкоторый свѣтъ на этотъ вопросъ.

---

Въ настоящемъ сочиненіи авторъ неоднократно выясняетъ ту мысль, что одна и та же формально построенная логическая система можетъ находить себѣ примѣненіе къ различнымъ многообразіямъ, т. е. къ различнымъ комплексамъ объектовъ или образовъ. Такія два многообразія, которыя равно подходятъ подъ одну и ту же логическую систему, между которыми можно, слѣдовательно, установить однозначное соотвѣтствіе такимъ образомъ, чтобы соотвѣтственные элементы, какъ объекты примѣненія этой логической системы, играли въ ней одну и ту же роль, мы будемъ называть **подобными относительно этой логической системы**. Такимъ образомъ, напримѣръ, совокупность всѣхъ комплексныхъ чиселъ представляетъ собой многообразіе, подобное многообразію всѣхъ точекъ на плоскости относительно ариѳметики комплексныхъ чиселъ; ибо, какъ извѣстно, между этими многообразіями можетъ быть установлено соотвѣтствіе такимъ образомъ, чтобы каждой точкѣ отвѣчало одно и только одно комплексное число (его аффиксъ) и обратно; вмѣстѣ съ тѣмъ ариѳметическія дѣйствія надъ точками могутъ быть установлены такъ, чтобы они вполнѣ соотвѣтствовали дѣйствіямъ надъ ихъ аффиксами; обѣ системы представляютъ собой комплексы объектовъ, къ которымъ примѣняется ариѳметика комплексныхъ чиселъ.

Такимъ же образомъ совокупность комплексныхъ чиселъ по отношенію къ той же логической системѣ представляетъ собой многообразіе, подобное многообразію всѣхъ векторовъ на плоскости, выходящихъ изъ одной точки.

Чтобы это важное понятіе, на которомъ основаны всѣ нижеслѣдующія соображенія, вполнѣ отчетливо выяснить, укажемъ еще нѣкоторые геометрическіе примѣры. Во-первыхъ, въ примѣчаніи на стр. 37—41 было приведено многообразіе, подобное многообразію точекъ относительно евклидовой геометріи. Оставляя цѣлый рядъ другихъ примѣровъ, которые авторъ разсматриваетъ въ текстѣ настоящаго сочиненія въ примѣненіи къ различнымъ геометрическимъ системамъ, разсмотримъ еще слѣдующій примѣръ.

---

F. Amodeo. „Sulla introduzione dei elementi infiniti alla geometria projectiva". Giornale di Matematiche. XXXIV. 1896.

M. Pasch. „Vorlesungen über neuere Geometrie". Leipzig. 1882.

Возьмемъ многообразіе всѣхъ лучей, выходящихъ въ (евклидовомъ) пространствѣ изъ одной точки $O$, т. е. такъ называемую связку лучей. При этомъ подъ лучемъ мы разумѣемъ полупрямую, т. е. каждую изъ двухъ частей, на которыя точка $O$ дѣлитъ прямую. Представимъ себѣ далѣе сферу произвольнаго радіуса, имѣющую центръ въ точкѣ $O$. Каждый изъ нашихъ лучей встрѣчаетъ сферу въ одной точкѣ, которую мы будемъ считать точкой сферы, соотвѣтствующей этому лучу. Такимъ образомъ, между связкой лучей и многообразіемъ точекъ нашей сферы установлено однозначное соотвѣтствіе. Каждому образу (совокупности точекъ) на сферѣ отвѣчаетъ образъ (совокупность лучей въ связкѣ). Такъ, напримѣръ, дугѣ большого круга на сферѣ будетъ соотвѣтствовать въ связкѣ плоскій уголъ, т. е. точкамъ, заполняющимъ на сферѣ дугу большого круга, будутъ соотвѣтствовать лучи, заполняющіе плоскій уголъ. Цѣлому большому кругу будетъ соотвѣтствовать совокупность лучей, заполняющихъ цѣлую плоскость. Сферическому треугольнику будетъ соотвѣтствовать въ этомъ смыслѣ трехгранный уголъ. Каждое движеніе на сферѣ опредѣленнымъ образомъ замѣщаетъ точки сферы другими точками той же связки. Вмѣстѣ съ тѣмъ каждое предложеніе, выражающее свойство сферическихъ фигуръ, выражаетъ также свойство соотвѣтствующихъ образовъ въ связкѣ, если подъ терминами, фигурирующими въ предложеніи, разумѣть тѣ образы, которые имъ соотвѣтствуютъ въ связкѣ. Такимъ образомъ, напримѣръ, условія равенства сферическихъ треугольниковъ выразятъ условія равенства трехгранныхъ угловъ и т. д. Многообразіе лучей, представляемое связкой, и многообразіе точекъ на сферѣ подобны относительно той логической системы, которую мы называемъ сферической геометріей.

Выяснивши это понятіе, мы постараемся теперь показать, что совокупность точекъ, прямыхъ и плоскостей евклидова пространства представляетъ собой многообразіе, подобное совокупности всѣхъ возможныхъ связокъ, прямыхъ и плоскостей въ пространствѣ относительно той логической системы, которую составляетъ совокупность аксіомъ сопряженія.

Какъ было выяснено въ текстѣ настоящаго сочиненія, Гильбертъ въ своей системѣ геометріи подраздѣляетъ аксіомы на пять группъ, изъ которыхъ первая состоитъ изъ слѣдующихъ восьми аксіомъ, называемыхъ аксіомами сопряженія.

$I_1$. Двѣ различныя точки $A$ и $B$ всегда опредѣляютъ прямую.

$I_2$. Прямая опредѣляется также любыми двумя различными своими точками.

$I_3$. На каждой прямой всегда имѣются, по меньшей мѣрѣ, двѣ точки, на каждой плоскости, по меньшей мѣрѣ, три точки, не расположенныя на одной прямой.

$I_4$. Три точки, не лежащія на одной прямой, всегда опредѣляютъ плоскость.

$I_5$. Плоскость опредѣляется также любыми тремя своими точками, не расположенными на одной прямой.

$I_6$. Если двѣ точки прямой лежатъ на плоскости, то всѣ точки этой прямой лежатъ на этой плоскости.

$I_7$. Если двѣ плоскости имѣютъ общую точку, то онѣ имѣютъ, по крайней мѣрѣ, еще одну общую точку.

$I_8$. Существуютъ, по крайней мѣрѣ, четыре точки, не расположенныя въ одной плоскости.

Подъ связкой прямыхъ мы будемъ разумѣть совокупность прямыхъ (не лучей), проходящихъ черезъ одну точку.

Условимся теперь называть каждую связку прямыхъ точкой. Мы будемъ всегда писать это слово въ разрядку, когда будемъ употреблять его въ этомъ новомъ для него значеніи. Ясно, что каждой обыкновенной точкѣ пространства отвѣчаетъ связка, т. е. точка въ новомъ значеніи этого термина. Въ этомъ новомъ многообразіи точекъ, т. е. многообразіи всѣхъ связокъ евклидова пространства, мы будемъ подъ прямой и плоскостью разумѣть то же, что и обыкновенно въ геометріи; мы будемъ часто писать и эти термины въ разрядку только съ тою цѣлью, чтобы подчеркнуть, что мы разсматриваемъ ихъ теперь въ иной концепціи (въ многообразіи точекъ). Мы будемъ говорить, что прямая проходитъ черезъ точку, если она входитъ въ составъ соотвѣтствующей связки. Мы будемъ говорить, что плоскость проходитъ черезъ точку, если она содержитъ хотя бы одну прямую соотвѣтствующей связки (ясно, что она уже въ такомъ случаѣ необходимо содержитъ безчисленное множество прямыхъ этой связки); подъ терминомъ же точка лежитъ на прямой или на плоскости мы будемъ разумѣть, какъ обыкновенно, что прямая или плоскость соотвѣтственно содержитъ точку.

Теперь покажемъ, что совокупность точекъ, прямыхъ и плоскостей представляетъ собой многообразіе, подобное совокупности точекъ, прямыхъ и плоскостей въ обыкновенномъ смыслѣ этихъ словъ относительно аксіомъ сопряженія. Такъ какъ термины прямая и плоскость сохраняютъ свое значеніе, то дѣло сводится къ тому, чтобы обнаружить, что аксіомы сопряженія остаются въ силѣ, если подъ словомъ точка разумѣть не обыкновенную точку, а связку, а подъ терминами плоскость и прямая проходятъ черезъ точку или содержатъ точку разумѣть то, что установлено выше.

Дѣйствительно, двѣ различныя точки, т. е. двѣ не совпадающихъ связки, всегда опредѣляютъ прямую, черезъ нихъ проходящую: это есть единственная общая прямая обѣихъ связокъ; она содержитъ обѣ точки, ибо принадлежитъ обѣимъ связкамъ (аксіома $I_1$). Ясно также, что та же прямая опредѣляется и любыми другими двумя различными своими точками, т. е. любыми двумя различными связками, которымъ она принадлежитъ (аксіома $I_2$). Далѣе, на каждой прямой имѣются по меньшей мѣрѣ двѣ точки, т. е. каждая прямая принадлежитъ, по крайней мѣрѣ, двумъ различнымъ связкамъ; на каждой плоскости имѣются по меньшей мѣрѣ три точки, не расположенныя на одной прямой, т. е. каждая плоскость содержитъ, по крайней мѣрѣ, три прямыхъ, принадлежащихъ тремъ различнымъ связкамъ (аксіома $I_3$). Три точки, не лежащія на одной прямой, всегда опредѣляютъ плоскость, черезъ нихъ проходящую, ибо три различныя связки, не имѣющія общей прямой, опредѣляютъ три прямыхъ, принадлежащихъ каждая двумъ изъ этихъ связокъ. Черезъ эти три прямыя проходитъ плоскость, и притомъ единственная, удовлетворяющая требованію (аксіома $I_4$). Ясно, что эта плоскость опредѣляется также любыми тремя другими своими точками, не расположенными на одной прямой (аксіома $I_5$). Если двѣ точки прямой лежатъ на плоскости, т. е. если эта плоскость содержитъ по одной прямой отъ двухъ различныхъ связокъ, то она содержитъ также общую прямую этихъ связокъ, а, слѣдовательно, проходитъ черезъ каждую точку этой прямой, ибо каждая связка, содержащая эту прямую, имѣетъ, такимъ образомъ, прямую, лежащую въ этой плоскости (аксіома $I_6$). Если двѣ плоскости имѣютъ одну общую точку, т. е. если двѣ различныя плоскости содержатъ каждая по прямой связки, то онѣ всегда имѣютъ общую прямую, принадлежащую связкѣ, а, слѣдовательно, имѣютъ прямую, принадлежащую еще и другимъ связкамъ, т. е. имѣютъ и другія точки (аксіома $I_7$). Наконецъ, если мы возьмемъ три точки, не лежащія на одной прямой, то онѣ, какъ мы видѣли, всегда опредѣляютъ плоскость; а такъ какъ всегда существуютъ еще связки, не имѣющія съ этой плоскостью ни одной общей прямой, то существуютъ, по крайней мѣрѣ, четыре точки, не расположенныя въ одной плоскости (аксіома $I_8$).

Такимъ образомъ мы видимъ, что многообразіе точекъ, прямыхъ и плоскостей подобно многообразію обыкновенныхъ точекъ, прямыхъ и плоскостей относительно аксіомъ расположенія.

Теперь, сверхъ тѣхъ связокъ, которыя мы разсматривали до сихъ поръ, мы введемъ еще другого рода связки, именно мы условимся называть также связкой совокупность всѣхъ прямыхъ, параллельныхъ какой-либо опредѣленной прямой. Этимъ вводится въ разсмотрѣніе безчисленное множество новыхъ связокъ. Сообразно же введенной нами выше новой терминологіи мы будемъ эти связки также называть точками, но, въ отличіе отъ прежде введенныхъ точекъ, мы будемъ называть ихъ безконечно удаленными точками. Въ этомъ новомъ своемъ значеніи безконечно удаленная точка представляетъ собою уже вполнѣ опредѣленное понятіе: это есть связка параллелей. Въ дальнѣйшемъ мы сохранимъ терминологію, принятую раньше, т. е. мы будемъ говорить, что прямая содержитъ безконечно удаленную точку (или что безконечно удаленная точка лежитъ на прямой), если эта прямая входитъ въ составъ соотвѣтствующей связки. Въ такомъ случаѣ мы можемъ сказать, что на каждой прямой лежитъ одна и только одна безконечно удаленная точка, ибо каждая прямая входитъ въ составъ одной и только одной связки параллелей. Вмѣстѣ съ тѣмъ параллельныя между собой прямыя всѣ проходятъ черезъ одну и ту же безконечно удаленную точку, такъ какъ онѣ принадлежатъ одной связкѣ параллелей.

Далѣе, какъ и прежде, мы будемъ говорить, что плоскость проходитъ черезъ безконечно удаленную точку (или что безконечно удаленная точка лежитъ на плоскости), если плоскость содержитъ хотя бы одну прямую, принадлежащую соотвѣтствующей связкѣ. Ясно, такимъ образомъ, что, сообразно этой терминологіи, плоскость содержитъ тѣ безконечно удаленныя точки, которыя представляютъ собой связки прямыхъ, параллельныхъ этой плоскости; и такъ какъ такихъ связокъ имѣется безчисленное множество, то можно сказать, что каждая плоскость содержитъ безчисленное множество безконечно удаленныхъ точекъ. Совокупность безконечно удаленныхъ точекъ, принадлежащихъ одной плоскости, мы будемъ называть безконечно удаленной прямой этой плоскости. Сообразно этой терминологіи, на каждой плоскости имѣется одна и только одна безконечно удаленная прямая. Вмѣстѣ съ тѣмъ двѣ параллельныя плоскости имѣютъ одну и ту же безконечно удаленную прямую, ибо безконечно удаленныя прямыя какъ одной, такъ и другой плоскости состоятъ изъ тѣхъ безконечно удаленныхъ точекъ, т. е. изъ тѣхъ связокъ, которыя параллельны этимъ плоскостямъ. Напротивъ, безконечно удаленныя прямыя, принадлежащія двумъ непараллельнымъ плоскостямъ, не совпадаютъ, а имѣютъ только одну общую безконечно удаленную точку. Въ самомъ дѣлѣ, общая безконечно удаленная точка двухъ такихъ безконечно удаленныхъ прямыхъ должна лежать въ обѣихъ плоскостяхъ, т. е. это должна быть связка параллелей, изъ которыхъ нѣкоторыя лежатъ въ одной изъ этихъ плоскостей и нѣкоторыя въ другой и которыя всѣ, слѣдовательно, параллельны обѣимъ плоскостямъ. Ясно, что такая связка есть только одна; это есть связка прямыхъ, параллельныхъ прямой пересѣченія нашихъ двухъ плоскостей.

Наконецъ, совокупность всѣхъ безконечно удаленныхъ точекъ мы будемъ называть безконечно удаленной плоскостью. При такой терминологіи въ пространствѣ есть, слѣдовательно, одна безконечно удаленная плоскость, составленная изъ всѣхъ безконечно удаленныхъ точекъ.

Къ разсмотрѣнному нами выше многообразію точекъ (которыя въ отличіе отъ вновь введенныхъ безконечно удаленныхъ точекъ мы будемъ называть конечными точками), прямыхъ и плоскостей мы присоединимъ теперь наши новыя точки, прямыя и плоскости—безконечно удаленныя. Мы расширимъ, такимъ образомъ, многообразіе, обогативъ его новыми элементами. Теперь мы покажемъ, что это расширенное такимъ образомъ многообразіе удовлетворяетъ всѣмъ аксіомамъ сопряженія.

Дѣйствительно, покажемъ прежде всего, что любыя двѣ различныя точки опредѣляютъ одну и только одну прямую, черезъ нихъ проходящую. Намъ нѣтъ, конечно, надобности возвращаться къ тому случаю, когда обѣ точки конечныя. Намъ нужно, слѣдовательно, разсмотрѣть, во-первыхъ, случай, когда одна точка $A$ конечная, а другая $B$—безконечно удаленная, и, во-вторыхъ, случай, когда обѣ точки безконечно удаленныя.

Положимъ, что $A$ есть конечная точка, а $B$—безконечно удаленная; иначе говоря, $A$ есть обыкновенная связка, а $B$—связка параллелей. Прямая, проходящая черезъ обѣ точки, должна принадлежать обѣимъ связкамъ. Это есть та прямая связки $A$, которая параллельна прямымъ связки $B$. Ясно, что въ связкѣ $B$ есть одна и только одна такая прямая.

Замѣтимъ, что черезъ каждую безконечно удаленную точку $B$ проходитъ безчисленное множество безконечно удаленныхъ прямыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, каждая плоскость, параллельная прямымъ связки $B$, содержитъ нѣкоторыя прямыя этой связки, т. е. содержитъ точку $B$; послѣдняя принадлежитъ, слѣдовательно, безконечно удаленнымъ прямымъ всѣхъ этихъ плоскостей; а, такъ какъ между этими плоскостями имѣется безчисленное множество такихъ, которыя попарно другъ другу не параллельны, то черезъ точку $B$ проходитъ, такимъ образомъ, безчисленное множество безконечно удаленныхъ прямыхъ. Но ни одна изъ этихъ прямыхъ не проходитъ черезъ конечную точку $A$, ибо безконечно удаленная прямая по самому своему опредѣленію есть свокупность безконечно удаленныхъ точекъ, а конечныхъ точекъ не содержитъ.

Обратимся теперь къ тому случаю, когда $A$ и $B$ суть различныя безконечно удаленныя точки. Ясно, что черезъ нихъ не можетъ проходить конечная прямая, ибо таковая, какъ мы видѣли выше, всегда содержитъ только одну безконечно удаленную точку. Черезъ наши двѣ точки можетъ поэтому проходить только безконечно удаленная прямая; и, дѣйствительно, плоскость, параллельная обѣимъ связкамъ, содержитъ обѣ точки, и, слѣдовательно, безконечно удаленная прямая такой плоскости проходитъ черезъ точки $A$ и $B$. Обратно, всякая плоскость, содержащая безконечно удаленныя точки $A$ и $B$, должна быть параллельна обѣимъ связкамъ; а такъ какъ всѣ такія плоскости параллельны между собой, то онѣ имѣютъ, какъ мы видѣли выше, одну и ту же прямую, которая, такимъ образомъ, вполнѣ опредѣляется точками $A$ и $B$.

Такимъ образомъ, наше многообразіе, обогащенное безконечно удаленными точками, прямыми и плоскостями, удовлетворяетъ аксіомѣ $I_1$. Что касается аксіомы $I_2$, то она лишь при особой точкѣ зрѣнія Гильберта на идею инцидентности, представляетъ собою нѣчто отличное отъ аксіомы $I_1$. Изъ сказаннаго выше, во всякомъ случаѣ, вытекаетъ, что всякая прямая опредѣляется любыми двумя своими точками.

Обращаясь къ аксіомѣ $I_3$, замѣтимъ, что намъ нужно только доказать, что она справедлива въ примѣненіи къ безконечно удаленной прямой и къ безконечно удаленной плоскости, но мы уже выше имѣли случай показать, что въ каждой плоскости имѣется безчисленное множество безконечно удаленныхъ точекъ, и что единственная безконечно удаленная плоскость содержитъ всѣ безконечно удаленныя точки. Вопросъ объ аксіомѣ $I_3$, такимъ образомъ, совершенно исчерпанъ.

Обращаясь теперь къ аксіомѣ $I_4$, мы должны, собственно, разсмотрѣть тѣ случаи, когда въ числѣ трехъ точекъ, не лежащихъ на одной прямой, имѣется одна, двѣ или три безконечно удаленныя точки. Положимъ, что $A$ и $B$ суть конечныя точки, а $C$ — безконечно удаленная. Въ такомъ случаѣ безконечно удаленная плоскость не можетъ проходить черезъ эти три точки, ибо таковая, по опредѣленію, состоитъ только изъ безконечно удаленныхъ точекъ. Что же касается конечныхъ плоскостей, проходящихъ черезъ точки $A$ и $B$, то онѣ необходимо должны содержать также прямую $AB$. Чтобы такого рода плоскость проходила также черезъ безконечно удаленную точку $C$, нужно, чтобы она была параллельна связкѣ $C$. Такая плоскость (проходящая черезъ данную прямую и параллельная данной связкѣ параллелей) есть одна и только одна, если только прямая $AB$ сама не входитъ въ составъ связки, т. е. не содержитъ точки $C$. Положимъ теперь, что $B$ и $C$ суть безконечно удаленныя точки, а $A$ — конечная. Плоскость, проходящая черезъ эти три точки, должна содержать прямыя связки $A$ (слѣдовательно, должна проходить черезъ центръ этой связки), а также прямыя связокъ $B$ и $C$ (слѣдовательно, должна быть параллельна связкамъ $B$ и $C$). Такая плоскость есть одна и только одна (именно та, которая опредѣляется двумя прямыми связки $A$, принадлежащими соотвѣтственно связкамъ $B$ и $C$). Наконецъ, если всѣ три точки — безконечно удаленныя, то черезъ нихъ проходитъ безконечно удаленная плоскость и никакая другая не проходитъ, ибо всѣ безконечно удаленныя точки, лежащія въ одной конечной плоскости, образуютъ одну безконечно удаленную прямую этой плоскости.

Аксіома $I_4$, такимъ образомъ, исчерпана; что касается аксіомы $I_5$, то о ней приходится сказать то же, что и объ аксіомѣ $I_2$.

Переходимъ теперь къ аксіомѣ $I_6$. Здѣсь мы опять должны доказать, что она справедлива въ тѣхъ случаяхъ, когда одна изъ двухъ точекъ безконечно удаленная, или когда обѣ безконечно удаленнныя. Въ послѣднемъ случаѣ, если обѣ точки безконечно удаленныя, то прямая, ими опредѣляемая, также безконечно удаленная. Такія двѣ точки всегда принадлежатъ безконечно удаленной плоскости, но послѣдней принадлежитъ также и опредѣляемая ими прямая, такъ какъ она состоитъ исключительно изъ безконечно удаленныхъ точекъ. Если же нѣкоторая конечная плоскость содержитъ двѣ безконечно удаленныя точки $A$ и $B$, то ея безконечно удаленная прямая содержитъ эти точки, а такъ какъ черезъ точки $A$ и $B$, какъ мы видѣли выше, проходитъ только одна прямая, то послѣдняя совпадаетъ съ безконечно удаленной прямой этой плоскости и, слѣдовательно, лежитъ цѣликомъ въ этой плоскости.

Еще нагляднѣе то же самое можно показать такимъ образомъ. Всякая конечная плоскость, содержащая двѣ различныя безконечно удаленныя точки $A$ и $B$, параллельна связкамъ $A$ и $B$. Всѣ такія плоскости параллельны между собой, а потому, какъ было доказано, имѣютъ одну общую безконечно удаленную прямую. Это и есть прямая, проходящая черезъ данныя двѣ точки, и лежащая, такимъ образомъ, цѣликомъ въ каждой плоскости, проходящей черезъ точки $A$ и $B$.

Если теперь изъ двухъ данныхъ точекъ одна, скажемъ $A$, конечная, а другая $B$ — безконечно удаленная, то $AB$ есть та прямая связки $A$, которая принадлежитъ также связкѣ $B$ (т. е. которая параллельна остальнымъ прямымъ этой связки). Всякая плоскость, проходящая черезъ точку $B$, параллельна прямымъ связки $B$; поэтому, если она проходитъ также черезъ точку $A$, то она необходимо содержитъ ту прямую этой связки, которая параллельна связкѣ $B$, т. е. она содержитъ прямую $AB$. Въ примѣненіи къ нашему многообразію, такимъ образомъ, справедлива аксіома $\mathrm{I}_6$.

Обращаясь къ предложенію $\mathrm{I}_7$, мы опять должны разсмотрѣть, собственно, тотъ случай, когда двѣ плоскости имѣютъ общую безконечно удаленную точку, ибо, если онѣ имѣютъ общую конечную точку, то онѣ сами конечныя плоскости, а этотъ случай уже исчерпанъ выше. Если же двѣ плоскости имѣютъ общую безконечно удаленную точку и одна изъ плоскостей безконечно удаленная, то она имѣетъ со второй плоскостью общую безконечно удаленную прямую, именно безконечно удаленную прямую второй плоскости, которая, какъ составленная изъ безконечно удаленныхъ точекъ, принадлежитъ также безконечно удаленной плоскости. Если же двѣ конечныя плоскости имѣютъ общую безконечно удаленную точку $B$, то обѣ онѣ параллельны связкѣ $B$. При такихъ условіяхъ эти двѣ плоскости либо параллельны, и тогда онѣ имѣютъ общую безконечно удаленную прямую, содержащую также безконечно удаленную точку $B$, либо онѣ пересѣкаются по прямой, принадлежащей связкѣ $B$ и содержащей, слѣдовательно, безконечно удаленную точку $B$.

Нужно сказать и то, что справедливость аксіомы $I_7$ вытекаетъ изъ того, что въ нашемъ расширенномъ многообразіи любыя двѣ плоскости, какъ мы видѣли выше, имѣютъ общую прямую — конечную, если эти плоскости не параллельны, и безконечно удаленную, если онѣ параллельны.

Что касается аксіомы $I_8$, то доказывать ея справедливость не приходится.

Итакъ, многообразіе точекъ, прямыхъ и плоскостей, обогащенное безконечно удаленными точками, прямыми и плоскостями, представляетъ собой такой комплексъ образовъ, къ которымъ примѣняются всѣ аксіомы сопряженія. Въ этомъ многообразіи двѣ параллельныя прямыя всегда пересѣкаются въ безконечно удаленной точкѣ, двѣ параллельныя плоскости всегда пересѣкаются по безконечно удаленной прямой; т. е. въ этомъ многообразіи безконечно удаленные элементы обладаютъ тѣми формальными свойствами, которыя имъ присваиваются при введеніи ихъ въ элементарную геометрію; и такъ какъ мы имѣемъ, такимъ образомъ, многообразіе, въ примѣненіи къ которому элементарная геометрія, обогащенная безконечно удаленными элементами, оказывается справедливой, то и логическаго противорѣчія здѣсь, очевидно, быть не можетъ. Всѣ тѣ выводы, которые изъ этихъ формальныхъ посылокъ вытекаютъ, не могутъ привести къ противорѣчію; и, если, пользуясь безконечно удаленными точками, мы придемъ къ выводамъ, касающимся конечныхъ точекъ, то эти выводы будутъ справедливы, какъ и всякіе выводы, сдѣланные относительно нѣкоторыхъ образовъ въ многообразіи, для котораго справедливы посылки, служащія точкой отправленія. Что касается многообразія обыкновенныхъ точекъ, прямыхъ и плоскостей, то оно подобно многообразію введенныхъ нами новыхъ конечныхъ точекъ, прямыхъ и плоскостей относительно аксіомъ сопряженія. Поэтому всякій выводъ, сдѣланный изъ этихъ аксіомъ, будетъ справедливъ въ примѣненіи къ обыкновеннымъ конечнымъ элементамъ и въ томъ случаѣ, когда мы пользовались при доказательствѣ безконечно удаленными элементами. Дѣло будетъ здѣсь обстоять совершенно такъ же, какъ въ вопросѣ о комплексныхъ числахъ. Совокупность комплексныхъ чиселъ представляетъ собой многообразіе, для котораго справедливы всѣ преобразованія ариѳметики вещественныхъ чиселъ, а потому всякій выводъ, при помощи этихъ преобразованій сдѣланный, будетъ правиленъ и въ томъ случаѣ, когда онъ въ конечномъ счетѣ относится къ числамъ вещественнымъ (къ части всего многообразія комплексныхъ чиселъ).

Многообразіе, на которомъ мы обнаружили, что введеніе безконечно удаленныхъ точекъ, какъ точекъ пересѣченія параллельныхъ прямыхъ, безконечно удаленныхъ прямыхъ, какъ пересѣченій параллельныхъ плоскостей, и безконечно удаленной плоскости, какъ совокупности безконечно удаленныхъ прямыхъ, не можетъ привести къ противорѣчію съ аксіомами сопряженія, было нами составлено путемъ соединенія обыкновенныхъ связокъ, названныхъ нами **точками**, и связокъ параллелей, названныхъ нами **безконечно удаленными точками**. Любопытно, что Пашъ въ указанномъ выше сочиненіи даетъ такое опредѣленіе связки, которое объединяетъ обѣ категоріи; именно, онъ опредѣляетъ связку, какъ комплексъ прямыхъ, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что любыя двѣ прямыя этого комплекса расположены въ одной плоскости. Если поэтому мы возьмемъ двѣ прямыя на плоскости и черезъ каждую точку пространства, этой плоскости не принадлежащую, мы проведемъ плоскости, опредѣляемыя этой точкой и основными двумя прямыми, то ихъ пересѣченіе опредѣлитъ прямую связки, проходящую черезъ выбранную точку пространства. Чтобы опредѣлить прямую связки, проходящую черезъ точку, лежащую въ плоскости первыхъ двухъ прямыхъ, надо воспользоваться двумя другими прямыми связки, одна изъ которыхъ не лежитъ въ этой плоскости. Смотря по тому, были ли исходныя двѣ прямыя сходящимися или параллельными, мы получимъ сходящуюся связку (**конечную точку**) или связку параллелей (**безконечно удаленную точку**). Если связки взяты не въ евклидовомъ пространствѣ, а въ гиперболическомъ, то, кромѣ сходящихся связокъ и связокъ параллелей, будутъ существовать связки третьяго типа — такъ называемыя расходящіяся связки. Расходящуюся связку образуютъ прямыя, перпендикулярныя къ одной и той же плоскости. Въ евклидовомъ пространствѣ эти послѣднія связки совпадаютъ со связками параллелей, въ гиперболическомъ же пространствѣ онѣ образуютъ особую третью категорію. Если мы въ гиперболическомъ пространствѣ назовемъ **конечными точками** сходящіяся связки, а **безконечно удаленными точками** — связки параллелей, то каждая прямая будетъ входить въ составъ двухъ связокъ параллелей (соотвѣтственно двумъ направленіямъ прямой), т. е. будетъ имѣть **двѣ безконечно удаленныя точки**. Однако, при этомъ двѣ прямыя въ плоскости еще не всегда будутъ имѣть общую **точку**: двѣ расходящіяся прямыя не будутъ имѣть общей **точки** — ни конечной, ни безконечно удаленной. Чтобы любыя двѣ прямыя, расположенныя въ одной плоскости, въ гиперболическомъ пространствѣ имѣли общую **точку**, необходимо еще болѣе усилить многообразіе **точекъ**, необходимо включить въ него еще **точки** третьей категоріи, т. е. назвать **точками** также расходящіяся связки. Эти точки Клейнъ назвалъ **идеальными точками**. Въ гиперболической плоскости двѣ прямыя всегда встрѣчаются либо въ конечной, либо въ безконечно удаленной, либо въ идеальной **точкѣ**.

Мы показали, что введеніе безконечно удаленныхъ элементовъ не можетъ привести къ противорѣчію съ аксіомами сопряженія. Но, кромѣ аксіомъ сопряженія, Гильбертъ различаетъ еще четыре группы аксіомъ и, прежде всего, аксіомы расположенія. Однако, присвоить расширенному многообразію точекъ такое расположеніе на прямой, которое удовлетворяло бы требованіямъ, выраженнымъ въ аксіомахъ расположенія, не удается. Причина этого коренится въ томъ, что изъ трехъ прямыхъ сходящейся связки, расположенныхъ въ одной плоскости, каждая можетъ съ одинаковымъ правомъ считаться *лежащей между двумя другими* прямыми. Вслѣдствіе этого тѣ предложенія, выводъ которыхъ основанъ на аксіомахъ расположенія, не могутъ быть распространены на обогащенное нами многообразіе точекъ. Они могутъ выражать такія свойства конечныхъ точекъ, которыя не принадлежатъ безконечно удаленнымъ точкамъ. *Аксіомы конгруэнтности не распространяются уже на безконечно* удаленныя точки потому, что въ нашемъ многообразіи не всякая точка можетъ быть совмѣщена съ любой другой точкой. При помощи движенія можно, правда, совмѣстить каждую сходящую связку съ любой другой сходящейся связкой (т. е. можно привести каждую конечную точку въ любую другую конечную точку), но нельзя совмѣстить сходящуюся связку со связкой параллелей (т. е. нельзя привести конечную точку въ безконечно удаленную).

Все изложенное выясняетъ, какія свойства конечныхъ точекъ могутъ быть распространены на безконечно удаленныя точки, а какія не могутъ. На безконечно удаленные образы распространяются тѣ свойства, которыя вытекаютъ только изъ аксіомъ сопряженія.

Проективная геометрія аксіомами конгруэнтности вовсе не пользуется. Она пользуется только тремя группами аксіомъ; именно, кромѣ аксіомъ сопряженія, она пользуется еще аксіомами расположенія и аксіомой проективной непрерывности (см. аксіомы II и III въ §§ 15 и 16). Аксіомы сопряженія проективной геометріи отличаются отъ аксіомъ соотвѣтствующей группы въ евклидовой геометріи тѣмъ, что здѣсь всякія двѣ прямыя, расположенныя въ одной плоскости, имѣютъ общую точку, и всякія двѣ плоскости имѣютъ общую прямую. Но мы видѣли, что пространство, обогащенное безконечно удаленными точками, удовлетворяетъ этимъ требованіямъ. Съ другой стороны, аксіомы расположенія, которыми пользуется проективная геометрія, также отличаются отъ аксіомъ расположенія евклидовой геометріи. *Проективная геометрія не вводитъ* понятія „между"; она разсматриваетъ всегда двѣ пары точекъ на прямой и требуетъ, чтобы четыре пары точекъ на прямой всегда однимъ и только однимъ способомъ распадались на двѣ пары, раздѣляющія другъ друга. Этимъ свойствомъ всегда обладаютъ четыре прямыхъ сходящейся связки, расположенныя въ одной плоскости. *Этимъ обстоятельствомъ можно* воспользоваться, чтобы распространить аксіомы расположенія проективной геометріи на наше пространство, обогащенное безконечно удаленными точками. Дѣйствительно, пусть $A$, $B$, $C$, $D$ будутъ четыре точки на одной прямой. Возьмемъ произвольную сходящуюся связку $O$, въ составъ которой эта прямая не входитъ, и проведемъ прямыя $OA$, $OB$, $OC$, $OD$. Это будутъ вполнѣ опредѣленныя прямыя, независимо отъ того, всѣ ли точки $A$, $B$, $C$, $D$ конечныя, или между ними имѣются также безконечно удаленныя. Если же прямыя $OA$ и $OC$ раздѣляются прямыми $OB$ и $OD$, то мы будемъ говорить, что точки $A$ и $C$ раздѣляются точками $B$ и $D$. Можно легко показать, что эта дизъюнкція не зависитъ отъ выбора связки $O$, и что это опредѣленіе согласуется со всѣми аксіомами расположенія проективной геометріи. Наконецъ, существенная особенность безконечно удаленныхъ точекъ, какъ мы видѣли, заключается въ томъ, что конечныя точки не могутъ быть приведены въ совмѣщеніе съ безконечно удаленными. Однако, въ проективной геометріи комплексъ разсматриваемыхъ преобразованій значительно шире; именно, въ составъ проективныхъ преобразованій входятъ, помимо тѣхъ, которыя мы называемъ движеніями, еще другія преобразованія, при помощи которыхъ всякая связка можетъ быть превращена въ любую другую связку, и въ частности сходящаяся связка можетъ быть превращена въ связку параллелей. Вслѣдствіе этого въ проективной геометріи безконечно удаленныя точки играютъ ту же роль, что и конечныя.

Изложеннымъ вопросъ о законности введенія въ геометрію положенія безконечно удаленныхъ элементовъ достаточно выясненъ. Въ метрической геометріи возникаетъ еще вопросъ о разстояніи безконечно удаленной точки отъ конечной точки, каковое принимается безконечно большимъ. Выясненіе того, въ какой мѣрѣ это законно, представляется болѣе сложнымъ, потому что здѣсь мы сталкиваемся уже съ другимъ вопросомъ, именно вопросомъ о томъ, какимъ образомъ безконечность вводится въ ариѳметику. Мы не можемъ входить здѣсь въ подробное обсужденіе этого вопроса; замѣтимъ только, что, присваивая безконечно большое разстояніе безконечно удаленнымъ точкамъ, мы дѣлаемъ совершенно то же (и въ томъ же смыслѣ), что и въ алгебрѣ, когда присваиваемъ безконечное рѣшеніе уравненію $0.x = a$, гдѣ $a \neq 0$.

## II. Объ измѣреніи площадей.

Въ текстѣ сочиненія авторомъ изложена теорія площадей прямолинейныхъ фигуръ въ томъ видѣ, какъ она дана Гильбертомъ въ его „Основаніяхъ" [1]. Вмѣстѣ съ тѣмъ приведены соображенія, въ силу которыхъ этой теоріи отдается предпочтеніе предъ обычной евклидовой теоріей этого вопроса. Получается прежде всего такое впечатлѣніе, что обыкновенная теорія площадей вовсе не нужна. Далѣе на стр. 298, указывается, что совокупность площадей была бы только тогда претворена въ величину, если бы были также указаны правила умноженія площадей и дѣленія площадей, — точка зрѣнія, которую мы считаемъ рѣшительно неправильной. Въ общемъ, тѣ причины, которыя привели Гильберта къ его теоріи площадей, остаются, какъ намъ кажется, недостаточно выясненными, и мы считаемъ полезнымъ остановиться здѣсь на этомъ вопросѣ.

Ученіе о площадяхъ имѣетъ цѣлью, какъ говорятъ, выразить площадь числомъ, т. е. каждой площади мы относимъ нѣкоторое ариѳметическое число; притомъ это должно быть сдѣлано такъ, чтобы, во-первыхъ, конгруэнтнымъ фигурамъ соотвѣтствовали одинаковыя числа, и, во-вторыхъ, чтобы фигурѣ, составленной изъ нѣсколькихъ фигуръ, соотвѣтствовало число, равное суммѣ тѣхъ чиселъ, которыя отнесены составляющимъ фигурамъ. Въ этомъ заключается вся задача объ измѣреніи площадей. Теорія площадей прямолинейныхъ фигуръ заключается въ рѣшеніи этой задачи по отношенію къ послѣднимъ. Нужно, слѣдовательно, рѣшить, можно ли отнести каждой прямолинейной фигурѣ число такимъ образомъ, чтобы удовлетворить поставленнымъ двумъ требованіямъ, и, если можно, то какъ это должно быть произведено. A priori мы не имѣемъ основанія отвѣтить утвердительно даже и на первый изъ этихъ вопросовъ. Въ самомъ дѣлѣ, представимъ себѣ, что въ пространствѣ существовало бы такое движеніе $S$, которое совмѣщаетъ прямолинейную фигуру $A$ съ прямолинейной фигурой $B$, и въ то же время существовало бы другое движеніе $S'$, которое помѣщаетъ фигуру $A$ внутрь фигуры $B$,

[1]) Та же теорія площадей была значительно раньше предложена С. О. Шатуновскимъ и сообщена имъ Новороссійскому Обществу Естествоиспытателей въ 1895 году и IX Съѣзду Русскихъ Естествоиспытателей и Врачей въ 1898 году.

подобно тому, какъ прямолинейный уголъ можно помѣстить внутри конгруэнтнаго ему угла. Тогда поставленнымъ требованіямъ удовлетворить было бы невозможно, ибо въ виду существованія движенія $S$, въ силу перваго требованія, обѣимъ фигурамъ должно было бы быть отнесено одно и то же число, а въ виду существованія движенія $S'$, въ силу второго требованія, второй фигурѣ должно было бы быть отнесено большее число. Слѣдовательно, мы должны либо доказать, что поставленнымъ требованіямъ удовлетворить можно, либо постулировать это. Обычная теорія площадей постулируетъ это, хотя неявнымъ образомъ. Допустивъ, что каждой прямолинейной фигурѣ можно отнести число такъ, чтобы удовлетворить поставленнымъ требованіямъ, обыкновенная теорія площадей даетъ полное рѣшеніе второго вопроса о томъ, какъ это должно быть выполнено; именно доказывается, что каждому треугольнику должно быть отнесено число, пропорціональное произведенію изъ основанія на высоту, что это число должно быть равно половинѣ указаннаго произведенія, если мы желаемъ квадрату, сторона котораго равна единицѣ длины, отнести число 1 (т. е. принять его за единицу мѣры площади); многоугольнику же необходимо отнести сумму чиселъ, отнесенныхъ треугольникамъ, на которые онъ разбивается. Чтобы выяснить, что въ обычной теоріи дѣйствительно скрывается допущеніе, о которомъ мы говорили, мы обратимся къ первому предложенію ученія о площадяхъ. Оно формулируется обыкновенно такъ: „площади двухъ прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя основанія, относятся, какъ ихъ высоты“. Чтобы это предложеніе имѣло опредѣленное содержаніе, нужно знать, что такое площадь. Не входя въ анализъ того, что можно подъ этимъ терминомъ вообще разумѣть, одно ясно, что подъ площадью разумѣютъ такую величину, каждое значеніе которой имѣетъ отношеніе къ любому другому ея значенію, выражающееся ариѳметическимъ числомъ и обладающее тѣми свойствами, которыми обладаетъ отношеніе двухъ значеній любой величины (напримѣръ, длины); сюда относится, въ частности, то свойство, что отношеніе площади, составленной изъ двухъ площадей, къ третьей, должно быть равно суммѣ отношеній каждой изъ составляющихъ площадей къ третьей. Если поэтому мы фиксируемъ одну площадь и возьмемъ отношеніе каждой площади къ этой послѣдней (отношеніе, существованіе котораго, какъ сказано, явно принимается всей теоріей), то оно и будетъ числомъ, отнесеннымъ каждой площади.

Итакъ, то обстоятельство, что, отнеся каждому треугольнику полупроизведеніе изъ основанія на высоту, а каждому многоугольнику число, равное суммѣ чиселъ, отнесенныхъ такимъ образомъ составляющимъ треугольникамъ, мы удовлетворимъ требованіямъ, поставленнымъ въ задачѣ объ измѣреніи; это обыкновенной теоріей не доказывается; она доказываетъ только, что — если такое соотвѣтствіе между прямолинейными фигурами и ариѳметическими числами установить возможно — таковое вполнѣ опредѣляется выборомъ единицы мѣры. Еще иначе: обыкновенная теорія площадей доказываетъ, что для установленія системы измѣренія площадей прямолинейныхъ фигуръ при обычной единицѣ мѣры необходимо отнести каждому треугольнику полупроизведеніе изъ основанія на высоту и т. д. Но достаточно ли это? Будетъ ли при этомъ, дѣйствительно, число, отнесенное каждой прямолинейной фигурѣ, равно суммѣ чиселъ, отнесенныхъ составляющимъ фигурамъ, какимъ бы образомъ мы ни производили разложеніе, этотъ вопросъ остается открытымъ. На этотъ именно вопросъ теорія Шатуновскаго-Гильберта и даетъ отвѣтъ. Теорія эта даетъ строгое доказательство того, что достаточно отнести каждой прямолинейной фигурѣ число, обычно именуемое мѣрой ея площади, чтобы число, отнесенное любой фигурѣ, было равно суммѣ чиселъ, отнесенныхъ составляющимъ фигурамъ, какъ бы мы ни дѣлали разложенія на составляющія фигуры. Обычная теорія площадей и теорія Шатуновскаго - Гильберта, такимъ образомъ, дополняютъ другъ друга.

Самое доказательство этого предложенія изложено въ текстѣ хотя и съ исчерпывающей полнотой, но, на нашъ взглядъ, недостаточно ясно. Мы не будемъ излагать здѣсь вновь этого доказательства, но выяснимъ лишь планъ его.

Каждому треугольнику мы относимъ число, равное полупроизведенію изъ основанія на соотвѣтствующую высоту (каковое произведеніе не зависитъ отъ того, какое изъ трехъ основаній мы выберемъ); это число называется „мѣрой площади“ треугольника. Затѣмъ мы доказываемъ, въ первую очередь, что, какъ бы мы ни разлагали треугольникъ вновь на треугольники, мѣра площади этого треугольника всегда равняется суммѣ мѣръ площадей составляющихъ треугольниковъ. Теорема эта доказывается сначала для такъ называемаго трансверсальнаго разложенія (которое производится трансверсалями изъ одной вершины), затѣмъ для поперечнаго разложенія (при которомъ вершины составляющихъ треугольниковъ лежатъ только на сторонахъ даннаго треугольника); наконецъ, доказывается, что всякое разложеніе треугольника на составляющіе треугольники можетъ быть путемъ трансверсальныхъ и поперечныхъ разложеній составляющихъ треугольниковъ приведено къ тому, что данный треугольникъ будетъ разложенъ трансверсально на рядъ треугольниковъ, которые, въ свою очередь, будутъ разложены поперечно.

Доказавъ, что мѣра площади треугольника всегда равняется суммѣ мѣръ площадей составляющихъ треугольниковъ, какъ бы ни производилось разложеніе, мы обращаемся затѣмъ къ многоугольнику; мы доказываемъ, что, какъ бы многоугольникъ ни былъ разложенъ на треугольники, сумма мѣръ площадей составляющихъ треугольниковъ будетъ одна и та же; эта постоянная сумма и принимается за мѣру площади многоугольника. Наконецъ, послѣ этого доказывается, что мѣра площади всякаго многоугольника равняется суммѣ мѣръ площадей составляющихъ его многоугольниковъ, какимъ бы образомъ не было произведено разложеніе.

Къ этому мы присоединимъ еще слѣдующее замѣчаніе. Точка зрѣнія, на которой мы здѣсь стоимъ, носитъ названіе ариѳметической, такъ какъ она относитъ каждой площади число. Возможна точка зрѣнія чисто геометрическая, которая относитъ каждой площади отрѣзокъ и, такимъ образомъ, совершенно освобождаетъ геометрію отъ числа. Такая теорія должна быть построена на исчисленіи отрѣзковъ; за мѣру площади треугольника въ такой теоріи принимается отрѣзокъ, представляющій собой половину произведенія изъ основанія на высоту.

**КАГАНЪ, В.** прив.-доц. **Что такое алгебра?** * 72 стр. 16°. Ц. 40 к.

**КЛЕЙНЪ, Ф.** проф. **Вопросы элементарной и высшей математики.** Лекціи, читанныя для учителей. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ дополн. прив.-доц. *В. Ф. Кагана* XVI+486 стр. 8°. Ц. 3 р.

**КОВАЛЕВСКІЙ, Г.** проф. **Введеніе въ исчисленіе безконечно-малыхъ.** *. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* VIII+140 стр. 8°. Съ 18 черт. Ц. 1 р.

**КОВАЛЕВСКІЙ, Г.** проф. **Основы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій.** Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* VIII+503 стр. 8°. Ц. 3 р. 50 к.

**КУТЮРА, Л. Алгебра логики.** Пер. съ франц. съ прибавленіями проф. *И. Слешинскаго.* IV+107+XIII стр. 8°. Ц. 90 к.

**КЭДЖОРИ, Ф.** проф. **Исторія элементарной математики** (съ указаніями на методы преподованія) *. Пер. съ англ. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.* VIII+368 стр. 8°. Съ рис. Ц. 2 р. 50 к.

**ЛИТЦМАННЪ, В. Теорема Пиѳагора** съ приложеніемъ нѣкоторыхъ свѣдѣній о теоремѣ **Ферма.** *(Библ. элем. мат. I).* Пер. съ нѣм. подъ общей ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго* IV+80 стр. 16°. Съ 44 рис. Ц. 40 к.

**МАРКОВЪ, А.** акад. **Исчисленіе конечныхъ разностей.** Въ 2 частяхъ. Изданіе 2-е, исправленное и дополненное. VIII+274 стр. 8°. Ц. 2 р. 25 к.

**НЕТТО, Е.** проф. **Начала теоріи опредѣлителей.** Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* VIII+156 стр. 8°. Ц. 1 р. 20 к.

**ПУАНКАРЕ, Г.** проф. **Наука и методъ.** Пер. съ фр *И. Брусиловского* подъ ред. прив.-доц. *В. Кагана.* VIII+384 стр. 16° Ц. 1 р. 50 к.

**РОУ, С. Геометрическія упражненія съ кускомъ бумаги.** Пер. съ англ. XVI+173 стр. 16°. Съ 87 рис. Ц. 90 к.

**Русская математическая библіографія.** Списокъ сочиненій по чистой и прикл. математикѣ, напечатанныхъ въ Россіи. Подъ ред. проф. *Д. М. Синцова.*
Вып I. За 1908 годъ. 76 стр. 8°. Ц. 60 к.
Вып. II. За 1909 годъ. XVI+92 стр. 8°. Ц. 75 к.

**ФИЛИППОВЪ, А. О. Четыре ариѳметическія дѣйствія.** Числа натуральныя. VIII+88 стр. 8°. Ц. 70 к.

**ФУРРЕ, Е. Очеркъ исторіи элементарной геометріи** *(Библ. элем. мат. II).* Пер. съ фр. подъ ред. прив.-доц. *С. Шатуновскаго.* 48 стр. 16°. Съ 5 рис. Ц 30 к.

**ФУРРЕ, Е. Геометрическія головоломки и курьезы.** *(Библ. элем. мат. III).* Подъ ред. прив.-доц. *С. Шатуновскаго.* 52 стр. 16°. Съ 83 рис. Ц. 30 к.

**ЦИММЕРМАНЪ, В.** проф. **Объемъ шара, шарового сегмента и шарового слоя.** 34 стр. 16°. Съ 6 чер. Ц. 25 к.

**ЧЕЗАРО, Э.** проф. **Элементарный учебникъ алгебраическаго анализа и исчисленія безконечно малыхъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. С.-П.-Б. унив. *К. А. Поссе.* Часть I. XVIII+632 стр. 8°. Съ 26 черт. Ц. 5 р.

**ШУБЕРТЪ, Г.** проф. **Математическія развлеченія и игры.** Пер. съ нѣм. *І. Левинтова,* подъ ред., съ прим. и доб. „В. О. Ф. и Элем. Мат“. XIV+358 стр. 16°. Со мног. табл. Ц. 1 р. 40 к.

## ФИЗИКА.

**АБРАГАМЪ, Г.** проф. **Сборникъ элементарныхъ опытовъ по физикѣ.*** Пер. съ франц. подъ ред. проф. *Б. П. Вейнберга.*

**Часть I:** XVI+272 стр. 8°. Свыше 300 рис. *2-е изд.* Ц. 1 р. 50 к.

**Часть II:** 434+LXXV стр. 8°. Свыше 400 рис. *2-е изд.* Ц. 2 р. 75 к.

**АУЭРБАХЪ, Ф.** проф. **Царица міра и ея тѣнь.*** Общедоступное изложеніе основаній ученія объ **энергіи и энтропіи.** Пер. съ нѣм. VIII+50 стр. 8° *5-е изданіе.* Ц. 40 к.

**БРАУНЪ, Ф.** проф. **Мои работы по безпроволочной телеграфіи и по электрооптикѣ.** Рѣчь, произн. по случаю полученія Нобелевской преміи, съ дополн. автора. Пер. съ рукописи *Л. Мандельштама* и *Н. Папалекси*, со вступительной статьей переводчиковъ XXIV+92 стр. 16° Съ 25 рис. и портр. авт. Ц. 70 к.

**БРУНИ, К.** проф. **Твердые растворы.*** Пер. съ итал. подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Физ. и Элем. Мат.“* 37 стр. 16°. Ц. 25 к.

**ВЕТГЭМЪ, В.** проф. **Современное развитіе физики***. Пер. съ англійск. подъ ред. проф. *Б. П. Вейнберга* и прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* Съ приложен. рѣчи *А. Бальфура.* **Нѣсколько мыслей о новой теоріи вещества.** VIII+277 стр. 8°. Съ 5 порт. и 39 рис. *2-е изд.* Ц. 2 р.

**ВЕЙНБЕРГЪ, Б. П.** проф. **Снѣгъ, иней, градъ, ледъ и ледники.*** IV+127 стр. 8°. Съ 137 рис. и 2 фототип. табл. Ц. 1 р.

**ВИНЕРЪ, О.** проф. **О цвѣтной фотографіи и родственныхъ ей естественно-научныхъ вопросахъ.*** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина.* VI+69 стр. 8°. Съ 3 цвѣт. табл. Ц. 60 к.

**ГЕРНЕТЪ, В. А. Объ единствѣ вещества.** 46 стр. 16° Ц. 25 к.

**ЗЕЕМАНЪ, П.** проф. **Происхожденіе цвѣтовъ спектра.** Съ приложен. статьи *В. Ритца.* „Линейные спектры и строеніе атомовъ“. Пер. съ нѣм. 50 стр. 16°. Ц. 30 к.

**КАЙЗЕРЪ, Г.** проф. **Развитіе современной спекторoскопіи ***. Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“*. 45 стр. 16° Ц. 25 к.

**КЛОССОВСКІЙ А.** засл. проф. **Основы Метеорологіи *** XVI+527 стр. больш. 8°. Съ 199 рис., 2 цвѣтн. и 3 черн. табл. Ц. 4 р.

**КЛОССОВСКІЙ, А.** проф. **Физическая жизнь нашей планеты на основаніи современныхъ воззрѣній.*** 46 стр. 8°. 2-е изд. испр. и дополн. Ц. 40 к.

**КОНЪ, Э.** проф. и **ПУАНКАРЕ, Г.** акад. **Пространство и время съ точки зрѣнія физики.** Пер. подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“*. 81 стр. 16° Съ 11 рис. Ц. 40 к.

**ЛАКУРЪ, П.** и **АППЕЛЬ, Я. Историческая физика. *** Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣст. Оп. и Эл. Мат.“*. Въ 2-хъ томахъ больш. формата 892 стр. Съ 799 рисунк. и 6 отд. цвѣтн. табл. Ц. 7 р. 50 к.

**ЛЕМАНЪ, О.** проф. **Жидкіе кристаллы и теоріи жизни.** Пер. съ нѣмецкаго *П. В. Казанецкаго.* VIII+43 стр. 8° Съ 30 рис. *Изд. распродано.*

**ЛИНДЕРМАНЪ, Ф.** проф. **Спектръ и форма атомовъ.** Рѣчь ректора Мюнхенскаго университета. 23 стр. 16°. *2-изд.* Ц. 15 к.

**ЛОДЖЪ, О.** проф. **Міровой эѳиръ.** Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *Д. Д. Хмырова.* VI+216 стр. 16°. Съ 19 рис. Ц. 80 к.

**ЛОРЕНЦЪ, Г.** проф. **Курсъ физики ***. Пер. съ нѣм. подъ ред. профессора *Н. П. Костерина.* Съ добавленіями автора къ русскому изданію.
Т. I. VIII+356 стр. больш. 8°. Съ 236 рис. *2-е изд.* Ц. 2 р. 75 к.
Т. II. VIII+466 стр. больш. 8°. Съ 257 рис. Ц. 3 р. 75 к.

**МАЙКЕЛЬСОНЪ, А.** проф. **Свѣтовыя волны и ихъ примѣненія.** Перевела съ англ. *В. О. Хвольсонъ* подъ ред. заслуж. проф. *О. Д. Хвольсона* съ дополн. статьями и примѣч. редактора. VIII+189 стр. Съ 109 рис. и 3 цвѣтн. табл. Ц. 1 р. 50 к.

**МИ, Г.** проф. **Курсъ электричества и магнитизма.** Пер. съ нѣмецк. Ѳ. Ѳ. Соколова подъ ред. засл. проф. *О. Д. Хвольсона.* Въ 2-хъ частяхъ. Около 50 печ. листовъ. Цѣна по подпискѣ 5 р.

**МОРЕНЪ, Ш. Физическія состоянія вещества.** Пер. съ фр. подъ ред. проф. *Л. В. Писаржевскаго.* XIII+224 стр. 8°. Съ 21 рис. Ц. 1 р. 40 к.

**ПЕРРИ, ДЖ.** проф. **Вращающійся волчокъ ***. Публ. лекція. Съ добавл. статьи проф. *Б. Доната.* „Волчекъ и его будущее въ техникѣ“. Пер. съ англ. и нѣмецк. VIII+116 стр. 8°. Съ 73 рис. *3-е изд.* Ц. 60 к.

**ПЛАНКЪ, М.** проф. **Отношеніе новѣйшей физики къ механистическому міровоззрѣнію.** Пер. съ нѣм. *І. Левинтова*, подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“* 42 стр. 16°. Ц. 25 к.

**ПОЙНТИНГЪ, ДЖ.** проф. **Давленіе свѣта.** Пер. съ англ. подъ редакціей *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“* 128+II стр. 16°. Съ 42 рис. Ц. 50 к.

**РАМЗАЙ, В.** проф. **Благородные и радіоактивные газы.** Пер. подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“*. 37 стр. 16°. Съ 16 рис. Ц. 25 к.

**РИГИ, А.** проф. **Современная теорія физическихъ явленій.** * (Радіоактивность, іоны, электроны). Пер. съ 3 итал. изд. VIII+146 стр. 8°. Съ 21 рис. *2-е изд.* Ц. 90 к.

**РИГИ, А.** проф. **Электрическая природа матеріи.** * Вступительная лекція. Пер. съ итальянск. подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“*. 27 стр. 8°. *2-е изд.* Ц. 30 к.

**СЛАБИ, А.** проф. **Безпроволочный телефонъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“*. 28 стр. 8°. Съ 23 рис. Ц. 30 к.

**СЛАБИ, А.** проф. **Резонансъ и затуханіе электрическихъ волнъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“*. 41 стр. 8°. Съ 36 рис. Ц. 40 к.

**СОДДИ, Ф.** проф. **Радій и его разгадка.** * Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *Д. Хмырова.* XVI+185 стр. 8°. Съ 31 рис. Ц. 1 р. 25 к.

**ТОМСОНЪ, Дж. Дж.** проф. **Корпускулярная теорія вещества.** Пер. съ англ. *І. Левинтова,* подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“*. VIII+162 стр. 8°. Съ 29 рис. Ц. 1 р. 20 к.

**ТОМПСОНЪ, СИЛЬВАНУСЪ,** проф. **Добываніе свѣта.** * Общедоступная лекція для рабочихъ, прочитанная на собраніи Британской Ассоціаціи 1906. Пер. съ анг. VIII+88 стр. 16°. Съ 28 рис. Ц. 50 к.

**Успѣхи физики.** Сборникъ статей подъ ред. *„Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“*.

Выпускъ I. * VIII+148 стр. 8° Съ 41 рис. и 2 таб. *3-е изд.* Ц. 75 к.

Выпускъ II. IV+204 стр. 8°. Съ 50 рис. Ц. 1 р. 20 к.

## ХИМІЯ.

**МАМЛОКЪ, Л.** д-ръ. **Стереохимія.** (Ученіе о пространственномъ расположеніи атомовъ въ молекулѣ). Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* VIII+164 стр. 8°. Съ 58 рис. Ц. 1 р. 20 к.

**ПЁШЛЬ В.** проф. **Введеніе въ коллоидную химію.** Очеркъ коллоидной химіи для учителей, врачей и студентовъ. Пер. съ нѣм. *А. С. Комаровскаго.* съ пред. проф. *П. Г. Меликова,* VIII+86 стр. 8° Ц. 75 к.

**РАМЗАЙ, В.** проф. **Введеніе въ изученіе физической химіи.** Пер. съ англ. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* VIII+75 стр 16°. Ц. 40 к.

**СМИТЪ, А.** проф. **Введеніе въ неорганическую химію.** Пер. съ англ. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* XVI+840 стр. 8°. Съ 107 рис. Ц. 3 р. 50 к.

**УСПѢХИ ХИМІИ.** Сборникъ статей о важнѣйшихъ изслѣдованіяхъ послѣдняго времени въ общедоступномъ изложеніи подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Элем. Мат.“* Вып. I, VIII+240 стр. 8°. Съ 83 рис. Ц. 1 р. 50 к.

**ЦЕНТНЕРШВЕРЪ, М. Г. Очерки по исторіи химіи.** Популярно-научныя лекціи. XVI+318 стр. 8°. Съ 83 рис. Ц. 2 р. 20 к.

**ШЕЙДЪ, К. Химическіе опыты для юношества** Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *Е. С. Ельчанинова.* IV+191 стр. 8°. Съ 79 рис. *Изданіе распродано.*

**ШТОКЪ, А.** проф. и **ШТЕЛЛЕРЪ,** прив.-доц. **Практическое руководство по количественному анализу.** Пер. съ нѣм. лабор. Новор. Унив. *А. Коншина* подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* Пер. съ нѣм. VIII+173 стр. 8°. Съ 37 рис. Ц. 1 р. 20 к.

## АСТРОНОМІЯ.

**АРРЕНІУСЪ, Св.** проф. **Образованіе міровъ*.** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *К. Д. Покровскаго.* VIII+200 стр. 8°. Съ 60 рис. *2-е изд.* Ц. 1 р. 75 к.

**АРРЕНІУСЪ, Св.** проф. **Физика неба*.** Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* VIII+250 стр. 8°. Съ 68 рис., 1 черн. и 1 спектр. табл. *Изданіе распродано.*

**ТРОМГОЛЬТЪ, С. Игры со спичками.** Задачи и развлеченія. Пер. съ нѣм. 146 стр. 16°. Свыше 250 рис. и черт. *2-е изд.* Ц. 50 к.

**ШМИДЪ, Б.** проф. **Философская хрестоматія.*** Пер. съ нѣм. *Ю. Говсѣева,* подъ ред. и съ пред. проф. *Н. Н. Ланге.* VIII+172. стр. 8°. Ц. 1 р.

**ЩУКАРЕВЪ, А.** проф. **Проблемы теоріи познанія въ ихъ приложеніяхъ** къ вопросамъ естествознанія и въ разработкѣ его методами. IV+137 стр. 8°. Ц. 1 р.

**Имѣется на складѣ:**

**БИЛЬТЦЪ Г. и В. Упражненія по неорганической химіи.** Пер. съ нѣм. *А. Комаровскаго,* съ пред. проф. *Л. В. Писаржевскаго.* XVI+272 стр. 8°. Съ 24 рис. Ц. 1 р. 60 к.

## Печатаются и готовятся къ печати:

**АНДУАЙЕ,** проф. КУРСЪ АСТРОНОМІИ. Пер. съ франц.

**БАХМАНЪ,** проф. ОСНОВЫ НОВѢЙШЕЙ ТЕОРІИ ЧИСЕЛЪ. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.*

**БРАВЕ.** МАТЕМАТИЧЕСКІЯ НАЧАЛА КРИСТАЛЛОГРАФІИ.

**ВЕРИГО, Б. Ф.** проф. ОСНОВЫ ОБЩЕЙ БІОЛОГІИ, III „Современныя теоріи эволюціи въ мірѣ животныхъ и растеній".

**ГИЛЬБЕРТЪ, Д.** проф. ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРІИ. Пер. съ нѣм.

**ЕВКЛИДЪ.** ПЕРВЫЯ ШЕСТЬ КНИГЪ „НАЧАЛЪ". Переводъ проф. *Д. М. Синцова* и пр.-доц. *С. Н. Бернштейна.*

**КЛАРКЪ, А.** ИСТОРІЯ АСТРОНОМІИ XIX СТОЛѢТІЯ. Перев. съ анг. подъ ред. прив.-доц. С.-П.-Б. унив. *В. Серафимова.*

**КЛААЧЪ, Г.** проф. ПОЛОЖЕНІЕ ЧЕЛОВѢКА ВЪ ПРИРОДѢ. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. Д. Ласкарева.*

**КОЛЬРАУШЪ, Ф.** проф. КРАТКОЕ РУКОВОДСТВО КЪ ПРАКТИЧЕСКИМЪ ЗАНЯТІЯМЪ ПО ФИЗИКѢ. Пер. съ н. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина.*

**КОРБИНЪ, Т.** СОВРЕМЕННЫЕ УСПѢХИ ТЕХНИКИ. Пер. съ англ.

**ЛАДЕНБУРГЪ, А.** проф. ЛЕКЦІИ ПО ИСТОРІИ ХИМІИ ОТЪ ЛАВУАЗЬЕ ДО НАШИХЪ ДНЕЙ. Пер. съ нѣм. подъ редакц. прив.-доц. *Е. С. Ельчанинова.*

**ЛАГРАНЖЪ І.** ПРИБАВЛЕНІЯ КЪ „ЭЛЕМЕНТАМЪ АЛГЕБРЫ" ЭЙЛЕРА. Неопредѣленный анализъ. Пер. съ фр. подъ ред. пр.-доц *С. О. Шатуновскаго.*

**ЛОММЕЛЬ, Е.** проф. Курсъ опытной физики. Пер. съ нѣм.

**ПАСКАЛЬ, ЭРНЕСТО,** проф. ВАРІАЦІОННОЕ ИСЧИСЛЕНІЕ Пер. съ нѣм.

**САДИ-КАРНО.** О ДВИЖУЩЕЙ СИЛѢ ОГНЯ.

**САКСЛЬ и РУДИНГЕРЪ.** БІОЛОГІЯ ЧЕЛОВѢКА. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *Л. А. Тарасевича.*

**УОКЕРЪ,** проф. ВВЕДЕНІЕ ВЪ ФИЗИЧЕСКУЮ ХИМІЮ. Пер. съ англ.

УСПѢХИ АСТРОНОМІИ. Сборникъ статей. Вып. І.

**ЧЕЗАРО, Э.** проф. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ УЧЕБНИКЪ АЛГЕБРАИЧЕСКАГО АНАЛИЗА и ИСЧИСЛЕНІЯ БЕЗКОНЕЧНО-МАЛЫХЪ. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. С.-П.-Б. унив. *К. А. Поссе.* Часть II.

**ШТОЛЬЦЪ и ГМЕЙНЕРЪ.** ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ АРИѲМЕТИКА. Пер. съ нѣм.

**ШУЛЬЦЕ,** д-ръ. ВЕЛИКІЕ ФИЗИКИ И ИХЪ ТВОРЕНІЯ. Пер. съ нѣм.

**ЮНГЪ,** проф. ОСНОВНЫЯ ПОНЯТІЯ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРІИ. Пер. съ ан.

*Выписывающіе изъ главнаго склада изданій „Матезисъ" (Одесса, Стурдзовскій пер.) на сумму 5 руб. и болѣе за пересылку не платятъ.*

**Подробный каталогъ высылается по требованію безплатно.**