Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ

ПОЛНОЕ СОБРАНИЕ СОЧИНЕНИЙ

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ
В. Ф. КАГАНА, А. П. КОТЕЛЬНИКОВА
В. В. СТЕПАНОВА, Н. Г. ЧЕБОТАРЕВА
П. А. ШИРОКОВА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
В. Ф. КАГАН

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА—ЛЕНИНГРАД
1946

Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ

ТОМ ПЕРВЫЙ

СОЧИНЕНИЯ ПО ГЕОМЕТРИИ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ

•

О НАЧАЛАХ ГЕОМЕТРИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА—ЛЕНИНГРАД
1946

СОДЕРЖАНИЕ

От редакции 5

I. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ (1840)

Вводные статьи, перевод и комментарии В. Ф. Кагана.

Вводные статьи 31

Геометрические исследования по теории параллельных линий 79

Примечания 128

Приложения 160

II. О НАЧАЛАХ ГЕОМЕТРИИ (1829)

Вводная статья и комментарии А. П. Котельникова

Вводная статья 179

О началах геометрии 187

Примечания 262

Приложения 406

ОТ РЕДАКЦИИ

В заседании Физико-математического факультета Казанского университета, 11 февраля 1826 г., был заслушан доклад Н. И. Лобачевского: «Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles» [1]). Хотя этот доклад был представлен Лобачевским в письменном виде, он до нас не дошел. Он был передан на заключение трем профессорам и, — повидимому, не случайно — не был возвращен ими в факультет. Но этот доклад составил первую часть мемуара «О началах геометрии», который был опубликован Лобачевским в «Казанском Вестнике» — журнале, издававшемся Казанским университетом; печатание этого сочинения было начато в книжке «Февраль — март 1829 г.» и окончено в книжке «Июль — август 1830 г.».

Мемуар «О началах геометрии» является гранью двух эпох в истории геометрии.

С одной стороны, им завершается вопрос о доказательстве постулата Евклида о параллельных линиях — вопрос, занимавший умы многих выдающихся математиков в продолжение двух тысяч лет, начиная с Евклида и кончая Лобачевским. В справедливости этого постулата до начала XIX столетия никто не сомневался, и усилия математиков были направлены на строгое логическое его доказательство. Исследования Лобачевского привели к заключению, что эти усилия по существу своему были тщетны, что этого постулата доказать нельзя, потому что он не представляет собой следствия остальных аксиом и постулатов, положенных Евклидом в основу геометрии.

С другой стороны, мемуар Лобачевского открывает новую страницу в истории геометрии и кладет начало новому ее отделу — «неевклидовой геометрии».

Задавшись мыслью проследить как можно дальше влияние V постулата (постулата о параллельных линиях) на геометрическую систему, Лобачевский обратился к методу доказательства от про-

[1]) «Краткое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных».

тивного. Он допустил, что этот постулат неверен. Такое допущение тотчас же привело к целому ряду следствий, противоречащих многим теоремам классической геометрии и нашим представлениям о пространстве, которые сложились на основе многовекового опыта. Огромная заслуга Лобачевского заключается в том, что он понял причину этих противоречий. Он уяснил себе, что эти противоречия отнюдь не коренятся в том, что выводы, к которым он пришел, нелепы по существу, а имеют совершенно другой источник.

Путь, по которому пошел Лобачевский, до него избирали и другие геометры—Саккери, Ламберт, Швейкарт, Тауринус,—работы которых остались Лобачевскому неизвестными. Но эти геометры, встречая противоречия с нашими привычными представлениями о пространстве, останавливались в самом начале этого пути и не давали себе ясного отчета в том, где эти противоречия коренятся; они видели в них доказательство справедливости постулата и невозможности его отвергнуть. В этом заключалась коренная ошибка. В начале своего мемуара «Воображаемая геометрия» Лобачевский пишет: «Кто ни думал найти решение затруднительного вопроса, все без исключения ошибались, будучи предубеждены в справедливости того, что не может еще следовать прямо из наших понятий о телах без пособия наблюдений». О работах Лежандра, которые были Лобачевскому известны, он говорит в другом сочинении [1]): «Даже нахожу, что Лежандр несколько раз попадал на ту дорогу, которую выбрал я так удачно; но вероятно предубеждение в пользу принятого всеми положения заставляло на каждом шагу спешить заключением или дополнять тем, чего бы нельзя было допускать еще в новом предположении».

Гений Лобачевского сказался в том, что он не поддался этому предубеждению; напротив того, смело развивая следствия, вытекающие из отрицания V постулата, он создал новую геометрическую систему, которую назвал «воображаемой геометрией». Он имел решимость отказаться от связующей силы сложившихся геометрических представлений; более того, вполне доверяя строгости своих логических суждений, вопреки установившимся представлениям о пространстве, он ясно понял причину тех противоречий, которые остановили всех его предшественников. Он понял, что они коренятся не в том, что V постулат есть следствие остальных геометрических аксиом, так что, отвергая его, мы впадаем в противоречие с этими последними, а в том, что V посту-

[1]) «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных».

лат есть новое, независимое допущение, не вытекающее из других постулатов и аксиом; и поэтому, не нарушая последних, мы вправе его принять и вправе его отвергнуть. Принимая его, Евклид создал свою классическую систему геометрии; отвергая его, Лобачевский создал свою «воображаемую геометрию», столь же строгую и логически безупречную, как и геометрия Евклида, и не заключающую в себе никаких логических противоречий. Обе геометрии одинаково правильны с логической точки зрения, и встретившиеся противоречия, это — различие двух различных геометрических систем, но не внутренние противоречия, присущие той или другой из них. Какая же из этих систем действительно имеет место в применении к нашему пространству? Это — вопрос, который не может быть решен умозрительными средствами; это — конкретный вопрос, ответ на который может дать только надлежащим образом проведенный опыт.

Издавна математика признавалась самой совершенной, самой точной из всех наук; из всего человеческого знания ее учения почитались наиболее достоверными, не вызывающими никаких сомнений. Геометрия же считалась вещом точного знания как по незыблемости ее истин, так и по безукоризненной строгости ее суждений. История науки знает много открытий, произведших глубокий переворот в установившихся воззрениях. Но никогда революция в области человеческого знания не требовала такой исключительной смелости мысли, никогда целая новая наука не создавалась одним человеком. Новая геометрия была Лобачевским развернута во всех направлениях, в которых шла классическая геометрия, и нигде не привела к противоречию.

Если, однако, в «воображаемой геометрии», в том ее объеме, в котором она была развита Лобачевским, нет внутренних противоречий, то можно ли быть уверенным, что такие противоречия не встретятся и на дальнейших этапах ее развития; есть ли действительная гарантия ее безукоризненной правильности? Вопрос этот, конечно, не мог ускользнуть от внимания Лобачевского; напротив того, он размышлял о нем всю жизнь, и, можно сказать, все последующие его сочинения прямо или косвенно посвящены именно этому вопросу.

В том, что этот вопрос должен получить разрешение в утвердительном смысле, Лобачевский уже с 1826 г. никаких сомнений не имел, но он настойчиво искал этому категорическое объективное подтверждение. Он шел к этому двумя путями.

Декарт, Ферма, Лейбниц, Ньютон, Эйлер, Монж, Коши, Гаусс, — если называть крупнейшие имена, — создали аналитические средства геометрического исследования. Эти методы заключаются,

с одной стороны, в том, что соотношения между элементами геометрических объектов получают выражение в виде уравнений, их связывающих; дальнейшее исследование геометрических образов становится делом алгебры и анализа — извлечением выводов, вытекающих из этих уравнений. С другой стороны, более углубленное «инфинитезимальное» изучение метрической геометрии (построение внутренней дифференциальной геометрии) осуществляется средствами исчисления бесконечно малых на основе выражения, которое получает элемент длины в пространстве и на поверхности. Но Лобачевский устанавливает соответствующие уравнения и дифференциальные выражения также в своей «воображаемой геометрии». Он заключает отсюда, что дальнейшее развитие воображаемой геометрии не может привести к противоречию, поскольку этого противоречия нет в тех уравнениях, в которые в этой геометрии облекаются основные соотношения между элементами геометрических образов — прежде всего, между сторонами и углами треугольника, — так как из этих тригонометрических соотношений уже вытекают все остальные. Отсутствие же противоречий в тригонометрических уравнениях новой геометрии подтверждается тесной их связью с уравнениями сферической тригонометрии; именно, они получаются из уравнений сферической тригонометрии заменой действительных значений сторон a, b, c мнимыми $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$. Вот как излагает сам Лобачевский эти важные соображения в заключительном абзаце сочинения «О началах геометрии»:

«После того, как мы нашли уравнения (17) [1]), которые представляют зависимость углов и боков треугольника; когда, наконец, дали мы общие выражения для элементов линий, площадей и объема тел, все прочее в Геометрии будет уже аналитикой, где исчисления необходимо должны быть согласны между собою и ничего не в состоянии открыть нам нового, чего бы не заключалось в тех первых уравнениях, откуда должны быть взяты все отношения геометрических величин друг к другу. Итак, если надобно предполагать теперь, что какое-нибудь противоречие принудит впоследствии опровергнуть начала, принятые нами в этой новой Геометрии, то это противоречие может только скрываться в самых уравнениях (17). Заметим, однако ж, что эти уравнения переменяются в (16) сферической Тригонометрии, как скоро вместо боков a, b, c ставим $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$; но в обыкновенной Геометрии и сферической Тригонометрии везде входят одни содержания линий; следовательно, обыкновенная Геометрия, Тригоно-

[1]) См. стр. 206 настоящего тома.

метрия и эта новая Геометрия всегда будут согласны между собой».

Другой путь, приводивший Лобачевского к убеждению в логической правильности новой геометрии, заключался в ее применениях к вычислению определенных интегралов. Замысел его заключается в следующем. Некоторые дифференциальные формы, в особенности содержащие гиперболические функции, могут быть рассматриваемы как выражения, которые имели бы элементы длины, площади, объема, массы, если бы в пространстве имела место новая геометрия, а интеграл, надлежащим образом взятый от такого дифференциала, выражал бы длину некоторой линии, площадь некоторой поверхности, объем или массу тела. Во многих случаях этот интеграл удается вычислить, руководясь геометрическими соображениями, — следовательно, средствами «воображаемой геометрии». А когда уже найдено значение интеграла, часто оказывается возможным проверить полученный результат чисто аналитическим путем. И эта проверка во всех случаях подтверждает результат, полученный средствами неевклидовой геометрии. В этом совпадении Лобачевский видит, с одной стороны, несомненное подтверждение правильности построенной им геометрической системы, а с другой стороны, — обширную область ее применения.

Руководясь этим замыслом, Лобачевский в своих работах уделяет очень большое внимание приложениям своей геометрии к анализу. Он много занимается вычислением длин кривых линий, площадей, ограниченных прямыми и кривыми линиями, объемов тел в «воображаемой геометрии»; пользуясь средствами этой геометрии, применяя к вычислению одной и той же величины различные приемы, он получает значения некоторых определенных интегралов, простых и кратных, и приходит к преобразованиям одних интегралов в другие. Результаты этих вычислений порождают у всякого, кто их усвоит, глубокую субъективную уверенность в незыблемой правильности созданной Лобачевским «неевклидовой геометрии». Но исчерпывающего доказательства логической непротиворечивости этой геометрии работы Лобачевского все же не содержат. Дать такое доказательство стало уделом его последователей и продолжателей (Бельтрами, Клейн, Пуанкаре, Софус Ли).

Таким образом, отрицание V постулата не вносит в геометрию никаких логических противоречий; он не зависит от остальных постулатов и аксиом, он не представляет собой их следствия, и поэтому все попытки доказать его, опираясь на эти постулаты, тщетны. Доказать постулат можно, только заменяя его явно или неявно тем или иным другим постулатом, ему эквивалентным; а проверить его «подобно другим физическим законам, могут

лишь опыты, каковы, например, Астрономические наблюдения» [1]). Лобачевский давал себе ясный отчет в том, что установить физический факт умозрительными средствами совершенно невозможно.

Геометрическая система, построенная Лобачевским, отличается весьма существенной особенностью. Все метрические соотношения этой геометрии и прежде всего уравнения прямолинейной тригонометрии содержат некоторую постоянную длину; внешним образом она у Лобачевского обычно скрадывается, потому что он принимает эту постоянную за единицу длины; но он вполне оценивает важную роль, которую эта постоянная играет в «воображаемой геометрии». Уравнения этой геометрии принимают четкий характер, т. е. действительно становятся пригодными для вычислений только после того, как значение этой постоянной установлено. Теоретически эта постоянная может иметь какое угодно значение; это есть параметр, от которого неевклидова геометрия зависит, подобно тому, как метрическая геометрия сферы зависит от ее радиуса. Неевклидова геометрия Лобачевского в ее метрических соотношениях, таким образом, не однозначна: каждому значению параметра отвечает некоторая ее разновидность. Чем больше значение этого параметра, тем меньше «воображаемая геометрия» отличается от евклидовой; последняя представляет собой как бы предельный случай, соответствующий бесконечно большому значению этого параметра. Но и при конечном значении параметра метрические соотношения «воображаемой геометрии», в частности, соотношения между сторонами и углами треугольника, отличаются от евклидовых тем меньше, чем меньше стороны треугольника.

Однако, до тех пор, пока этот параметр сохраняет конечное значение, пока геометрия остается неевклидовой, она в целом глубоко отличается от евклидовой. Можно сказать — наиболее существенная особенность неевклидовой геометрии Лобачевского, из которой уже вытекают все остальные, заключается в том, что в ней сумма углов прямолинейного треугольника меньше двух прямых.

Исходя из этого, Лобачевский и пытался экспериментально проверить, имеет ли в нашем пространстве в действительности место «употребительная» (т. е. обыкновенная, евклидова) или «воображаемая» геометрия. И так как в небольшом треугольнике отклонение суммы углов от двух прямых должно быть ничтожным, то Лобачевский пытался определить сумму углов в треугольнике, двумя вершинами которого служат концы земного радиуса, а тре-

[1]) «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных».

тьей — неподвижная звезда (Сириус). Метод, который он для этого предложил, основан на сравнении параллаксов двух звезд. Вычисления не привели его, однако, ни к какому определенному результату.

Они показали, что физическое пространство, может быть, действительно есть пространство евклидово, как теперь часто говорят, «несет на себе евклидову геометрию», но, может быть, и отличается от евклидова; однако, если оно и отличается от этого последнего, то эти отклонения столь ничтожны, что ошибки наблюдений далеко их превосходят, и «очень вероятно, что евклидовы положения одни только истинные, хотя и останутся навсегда недоказанными».

Нужно, однако, заметить, что задача эта не так проста, как может сначала показаться, и решение ее, предложенное Лобачевским и основанное на сравнении параллаксов двух звезд, опирается на предположение, что лучи света, идущие от звезд, доходят до нас по прямым линиям.

Все изложенное выше отнюдь не претендует на то, чтобы дать читателю более или менее ясное представление о геометрии Лобачевского и о тех многообразных идеях математического, физического и философского характера, которые с нею связаны; это и невозможно сделать в пределах нескольких страниц. Овладеть как математическими рассуждениями Лобачевского, так и идеями, к которым они приводят, читателю помогут вводные статьи и комментарии, сопровождающие в настоящем издании отдельные сочинения Лобачевского. Здесь очерчен только самый общий их абрис, необходимый для предварительного обозрения работ Лобачевского. Но прежде чем перейти к этому обзору, остановимся весьма коротко на главных моментах дальнейшего развития идей Лобачевского.

Известно, что неевклидова геометрия была почти одновременно, независимо от Лобачевского, открыта еще двумя гениальными математиками. Это были — величайший математик XIX столетия К. Ф. Гаусс и венгерский офицер Иоанн Больяй. Последний опубликовал основы неевклидовой геометрии в небольшом сочинении, известном под названием «Аппендикс»[1]). Оно появилось в свет на три года позже, чем была опубликована первая работа Лобачевского «О началах геометрии», воспроизводимая в настоящем томе. Эта работа Лобачевского содержит уже изложение неевклидовой

[1]) То-есть «Приложение»; это сочинение помещено в виде приложения к руководству его отца (профессора Вольфганга Больяй).

геометрии и притом в таком ее развитии, по сравнению с которым содержание «Аппендикса» составляет только первые элементарные ее начала. Обстоятельное изложение неевклидовой геометрии было сообщено Лобачевским Физико-математическому факультету Казанского университета еще на три года раньше, т. е. за шесть лет до появления «Аппендикса» Больяй, именно в указанный выше знаменательный день 11-го февраля 1826 г.

Что касается Гаусса, то он не считал возможным предать гласности свои воззрения на основы геометрии, опасаясь жестоких нареканий, которые вызовут эти своеобразные идеи, — «крика беотийцев», как он говорил. Его взгляды на этот предмет остались достоянием очень небольшого числа его друзей. Он проявил в этом много практической прозорливости; но эта его установка послужила источником очень тяжелых переживаний ряда молодых математиков.

В шестидесятых годах прошлого столетия, после опубликования переписки Гаусса с друзьями (1863 г.), в которой были даны блестящие отзывы о работах Лобачевского, на его сочинения было обращено внимание всего математического мира; теперь эти идеи были усвоены, получили широкое распространение и развитие. В настоящей статье нет возможности сделать хотя бы краткий обзор огромной литературы, посвященной неевклидовой геометрии, ее развитию и ее значению. Мы ограничимся только следующими указаниями.

Во-первых, вскоре после того как идеи Лобачевского обратили на себя внимание геометров, обнаружилась возможность их геометрических приложений, обнаружилось существование не только «воображаемых», но и вполне реальных образов, в применении к которым осуществляется «воображаемая геометрия». Так, Бельтрами показал, что геометрия поверхности постоянной отрицательной кривизны в евклидовом пространстве совпадает с геометрией плоскости Лобачевского; Пуанкаре обнаружил, что геометрия Лобачевского может быть реально истолкована в геометрии кругов и тем самым приобретает большое значение в анализе, в теории автоморфных функций; Ф. Клейн включил воображаемую геометрию как частный случай в общую теорию проективного мероопределения А. Кэли. Существование, логическая правильность геометрии, отличной от классической геометрии, унаследованной от эллинов, от Евклида, больше не вызывали сомнений. Это имело огромное философское значение. В эпоху Лобачевского были широко распространены идеалистические воззрения, согласно которым установившиеся истины геометрии считались присущими каждому человеку от рождения, необходимой формой нашего мышления. Эту точку зрения особенно настойчиво отстаивал германский

философ Эммануил Кант, который в то время, можно сказать, владел умами. Только открытие Лобачевского положило конец этим взглядам. Самое существование геометрии, отличной от той, которая считалась единственно возможной, необходимость опытной проверки того, какая геометрия действительно имеет место в нашем пространстве, совершенно исключали возможность воззрений Канта, его прямых и косвенных сторонников. Открытие Лобачевского сыграло решающую роль в теории познания.

Во-вторых, после опубликования посмертного мемуара Римана «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (1866 г.) стало ясно, что геометрия Лобачевского — далеко не единственно возможная система неевклидовой геометрии. Были построены многие другие геометрические системы, начиная с такой, которая очень близка к геометрии Лобачевского, представляя собой как бы полярную ей антитезу (риманова геометрия в узком смысле этого слова; в этой геометрии сумма углов прямолинейного треугольника всегда больше $2d$), и кончая весьма далеко идущими ее обобщениями (риманова геометрия в широком смысле слова и дальнейшие формы ее развития). Классическая евклидова геометрия занимает очень небольшое, хотя и исключительно важное место в огромном здании современных геометрических дисциплин, построенных по замыслу Лобачевского и Римана. На базе этих открытий создалось совершенно новое учение об обосновании геометрии.

За этим следует проблема, на которую обратил внимание еще сам Лобачевский: это — вопрос о том, как отразится изменение свойств пространства на явлениях механики. «Оставалось бы исследовать, — пишет Лобачевский, — какого рода перемена произойдет от введения воображаемой Геометрии в Механику, и не встретится ли здесь принятых уже и несомнительных понятий о природе вещей, но которые принудят нас ограничивать или совсем не допускать зависимости линий и углов. Однако ж можно предвидеть, что перемены в Механике при новых началах Геометрии будут того же рода, какие показал г. Лаплас (Mécanique céleste, T. I, Liv I, Ch. II), предполагая возможной всякую зависимость скорости от силы, или — выразимся вернее — предполагая силы, измеряемые всегда скоростию, подчиненными другому закону в соединении, нежели принятому сложению их» [1]). Исследованию этого вопроса посвящено очень большое число работ, важнейшие из которых принадлежат Клиффорду, Боллу, Клейну, А. П. Котельникову. Они показали, что и механика отнюдь не замкнута навсегда в те рамки и формы, в которые она вылилась в творениях Гали-

[1]) «О началах геометрии», см. стр. 261 настоящего тома.

ля, Ньютона, Лагранжа. Самая мысль о возможности другой новой механики ведет свое начало от Лобачевского.

Особенно актуальный характер вопросы этого рода получили в последние десятилетия после появления работ Эйнштейна. Геометрия Лобачевского нашла свое приложение в специальном принципе относительности, и, таким образом, отчасти оправдалась мысль Лобачевского о возможности применения его геометрии при изучении физических явлений, хотя, быть может, и не в той форме, в которой она рисовалась уму самого Лобачевского. В общей теории относительности основным математическим аппаратом является риманова геометрия в широком смысле этого слова. Эти вопросы находятся еще в стадии разработки и исследования; но совершенно несомненно, что идеи Лобачевского в их развитии в настоящее время не только получили руководящее значение в геометрии, но играют *большую* роль в математической обработке естествознания.

С широкой точки зрения современная механика, современная физика и космология на некоторых существенных своих этапах следуют замыслу, первое проявление которого имело место в геометрии — в гениальном открытии Н. И. Лобачевского.

Повторяем, это краткое изложение руководящих идей Лобачевского отнюдь не претендует на сколько-нибудь полное освещение его творчества. Исчерпывающий обзор того, что Лобачевский внес в мировую науку, найдет себе место в последнем томе настоящего издания. Но и эти строки дают некоторое представление о том, какое глубокое значение имело его творение. На современную геометрию, на теорию познания, на механику, физику, космологию — на все отрасли философии и точного знания идеи Лобачевского положили печать, которая не только никогда не сотрется, но сохранит основное значение. Лобачевский принадлежит к числу величайших гениев — творцов современной науки.

Перечень сочинений Лобачевского [1])

Весь сложный комплекс своих замечательных и новых идей Лобачевский в основных чертах изложил уже в 1829 г. в первом опубликованном им сочинении

[1] «О началах геометрии».

В этом мемуаре Лобачевский излагает сначала, как и в каком порядке, по его мнению, следовало бы устанавливать и развивать

[1]) *Обстоятельные библиографические сведения* о каждом сочинении приведены в приложениях к соответствующим мемуарам.

начальные понятия и первые теоремы геометрии. Это начало мемуара, однако, не развито им подробно и представляет собой лишь краткий план построения первых начал обыкновенной (евклидовой) геометрии. Затем Лобачевский переходит к более подробному изложению теории параллельных линий и здесь развертывает основы своей новой, «воображаемой», геометрии. При помощи весьма искусных геометрических построений и чрезвычайно оригинальных соображений Лобачевский устанавливает уравнения плоской и сферической тригонометрии, имеющие место в этой новой геометрии. Располагая этими уравнениями, он имеет уже возможность обратиться к аналитической геометрии; он находит уравнения прямой и важнейших кривых, а затем бо́льшую часть мемуара посвящает приложениям воображаемой геометрии к вычислению и преобразованию определенных простых и кратных интегралов.

Нужно удивляться той чрезвычайной сжатости, с которой такие своеобразные идеи изложены в этом мемуаре. Они были в такой степени неожиданными, они в такой мере опередили свое время, что и при более доступном изложении усвоение их потребовало бы большого усилия. В том же конспективном обзоре, который содержит названное сочинение, новое учение современникам действительно не было доступно; оно не только не нашло признания, но было встречено с нескрываемой иронией. Речь идет не о рядовом читателе; мемуара, несомненно, не понял даже М. В. Остроградский.

В 1835 г. Лобачевский опубликовал в «Ученых записках Казанского университета» второй мемуар

[2] «Воображаемая геометрия»,

за которым в 1836 г. в тех же «Ученых записках» последовал третий мемуар

[3] «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам».

Во введении к мемуару [2] Лобачевский говорит о первой своей работе следующее: «... в тесных пределах повременного сочинения, не мог изложить я моего предмета со всей подробностью. Много предложений, помещенных без доказательства, одни выводы из продолжительных и довольно запутанных вычислений заставляют меня подозревать, что мое сочинение, казавшись с первого взгляда темным, предупреждало охоту заниматься им с некоторым вниманием и даже могло подать повод усомниться в строгости моего суждения и в верности выведенных заключений».

Желая сделать свои исследования более доступными, устранить возникшие сомнения и высказанные возражения, Лобачевский теперь избирает обратный путь: оставляя в стороне геометрические построения для вывода основных тригонометрических формул, он исходит от уравнений, выражающих зависимости сторон и углов прямолинейного треугольника воображаемой геометрии, задавая их a priori, затем он старается доказать, что эти уравнения никогда не приведут к ложным заключениям, и из них уже выводит геометрические свойства треугольников и параллельных линий. После этого он снова подробно останавливается на приложениях своей геометрии к анализу и дает им углубленное развитие.

Оба мемуара были почти одновременно с этим (в 1836 и 1837 гг.) опубликованы с небольшими изменениями на французском языке в наиболее крупном математическом журнале того времени «Journal für die reine und angewandte Mathematik» (так называемый журнал Крелля — Crelle):

[2a] «Géométrie imaginaire»,

[3a] «Application de la géométrie imaginaire à quelques intégrales».

Но и эти работы оказались доступными только Гауссу, который, однако, ограничился высокой оценкой их лишь в частной переписке со своими друзьями.

С 1835 г. Лобачевский приступил к опубликованию в «Ученых записках Казанского университета» обширного сочинения, которое закончил печатанием только в 1838 г.:

[4] «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных».

В этом сочинении Лобачевский начинает изложение всех основ геометрии с самого начала по тому плану, который уже был вкратце намечен в мемуаре «О началах геометрии». «Кто не согласится, — писал он в этом мемуаре, — что никакая Математическая наука не должна бы начинаться с таких темных понятий, с каких, повторяя Евклида, начинаем мы Геометрию». Нужны совершенно другие отправные пункты, нужно самые основы геометрии строить совершенно иначе. Это он и пытается выполнить в «Новых началах».

Основным исходным понятием в геометрии Лобачевский считает понятие о геометрическом теле, к которому мы приходим, отвлекаясь от всех свойств физических тел, кроме одного — прикосновения. «Между свойствами, общими всем телам, одно должно назваться *Геометрическим* — прикосновение. Словами нельзя передать совершенно того, что мы под этим разумеем: понятие при-

обретено чувствами, преимущественно зрением, и сими-то чувствами мы его постигаем». «Отвлекая все прочие свойства, телу дают название — *Геометрического*». Это было сказано еще в первом мемуаре — «О началах геометрии»; здесь Лобачевский дает развитие этой мысли. Исходя из понятия прикосновения, Лобачевский переходит к понятию о поверхности, потом — к понятию о линии и, наконец, к понятию о точке и к расстоянию между двумя точками. Вот как он сам характеризует этот замысел в последнем своем сочинении «Пангеометрия»: «Вместо того, чтобы начинать Геометрию прямой линией и плоскостью, как это делают обыкновенно, я предпочел начать сферой и кругом, которых определение не подлежит упреку в неполноте, потому что в этих определениях заключается способ, каким образом эти величины происходят. Потом я определяю плоскость как поверхность, где пересекаются равные сферы, описанные около двух постоянных точек. Наконец, определяю прямую линию, как пересечение равных кругов в плоскости, описанных около двух постоянных точек той же плоскости. Допустив такие определения, вся теория прямых и плоскостей перпендикулярных может быть изложена строго с легкостью и краткостью».

Руководясь этой точкой зрения, Лобачевский в «Новых началах» подробно останавливается на основных геометрических понятиях, на начальных теоремах о перпендикулярных линиях и плоскостях, о прямолинейных и сферических треугольниках, на измерении линий, углов и площадей; затем он переходит к теории параллельных линий, строит ее в более общих предположениях, чем в классической геометрии, и дает геометрический вывод основных уравнений тригонометрии как в обыкновенной, так и в воображаемой геометрии. Начало мемуара посвящено критике доказательств V постулата, данных Лежандром и Бертраном, а во второй половине подробно излагается теория ошибок при решении треугольников употребительной геометрии — прямолинейной и сферической.

Надо сказать, что в первую половину XIX столетия аксиомы, лежащие в основании геометрии, — аксиомы, опираясь на которые развитие геометрии можно провести строго логическим путем, — еще далеко не были выяснены, не были отчетливо формулированы; при доказательстве теорем геометрии широко пользовались наглядными представлениями о пространстве. «Геометрия начиналась, — как говорит Лобачевский, — с темных понятий». Создание неевклидовой геометрии, разностороннее развитие идей Лобачевского действительно привели к установлению точной аксиоматики геометрии и к строгому логическому ее построению. Но в «Новых

началах» эта задача Лобачевским еще не была выполнена; это было сделано лишь в самом конце XIX столетия. Однако, сочинение «Новые начала» все же представляет очень большой интерес, так как оно более других характеризует развитие геометрических воззрений Лобачевского.

Видя, что все его работы остаются непонятыми, Лобачевский решил изложить основные свои идеи в гораздо более доступном виде. В 1840 г. он опубликовал в Берлине отдельным изданием на немецком языке небольшое сочинение

[5] «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien» [1]).

Из всех сочинений Лобачевского по геометрии эта небольшая брошюра, несомненно, занимает первое место по простоте и изяществу изложения. Это — настоящий перл геометрического творчества. В этом сочинении теоремы, предшествующие теории параллельных и не отличающиеся от соответствующих теорем евклидовой геометрии, приводятся без доказательств; все внимание автора сосредоточено на теории параллельных линий и геометрическом выводе тригонометрических формул в «воображаемой геометрии». Всякому, начинающему знакомиться с сочинениями Лобачевского, можно рекомендовать прежде всего прочесть этот мемуар. На это сочинение внимание математиков было обращено в шестидесятых годах прошлого столетия посмертным опубликованием переписки Гаусса с друзьями, по этому сочинению математический мир прежде всего познакомился с замечательными идеями Лобачевского (см. ниже, стр. 76). В истории геометрии началась новая эра.

В конце своей жизни, в 1855 г., по случаю пятидесятилетия Казанского университета, Лобачевский поместил в «Ученых записках Казанского университета» последнее свое сочинение по геометрии:

[6] «Пангеометрия».

В нем он считает «приличнее» назвать свою геометрию не «воображаемой», а «пангеометрией», потому что это название означает «геометрию в обширном виде, где обыкновенная геометрия будет частный случай». Это сочинение содержит несколько иную обработку неевклидовой геометрии, местами существенно восполняет некоторую недоговоренность прежних мемуаров.

В следующем, 1856 году в специальном юбилейном сборнике, посвященном пятидесятилетию Казанского университета, это

[1]) «Геометрические исследования по теории параллельных линий».

сочинение появилось на французском языке в несколько переработанном виде:

[6a] «Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles» [1]).

Особняком стоит еще одно геометрическое сочинение Лобачевского

[7] «Геометрия».

Это было, собственно, первое сочинение, предназначенное Лобачевским к печати. Оно содержит лекции, даже скорее конспект лекций, которые Лобачевский читал начинающим студентам для углубления их геометрического образования. В 1823 г. это сочинение было представлено попечителю Казанского учебного округа М. Л. Магницкому с просьбой напечатать его на казенный счет, но вследствие отзыва академика Фусса это ходатайство было отклонено. Сочинение дошло до нас в рукописи; оно опубликовано впервые лишь в 1909 г.

Кроме этих геометрических сочинений, которые поставили Лобачевского в ряды величайших математиков, им опубликовано еще 11 работ, относящихся к различным отраслям алгебры, анализа и астрономии.

Две из этих работ не столько по содержанию, сколько по своему возникновению, находятся на рубеже геометрии и других отделов математики.

В двух заключительных главах сочинения «Новые начала» содержатся соображения, относящиеся к установлению вероятной ошибки, происходящей при решении треугольников. Эти рассуждения в несколько переработанном виде Лобачевский опубликовал в 1842 г. на французском языке в журнале Крелля:

[3] «Sur la probabilité des résultats moyens, tirés des observations répétées [2])».

Второй мемуар, до некоторой степени примыкающий к сочинению [3], опубликован Лобачевским в 1852 г. в «Ученых записках Казанского университета»:

[9] «О значении некоторых определенных интегралов».

---

[1]) «Пангеометрия, или очерк геометрии, основанный на общей и точной теории параллельных линий».

[2]) «О вероятности средних результатов, полученных из повторных наблюдений».

В 1855 г. этот мемуар был опубликован Лобачевским также на немецком языке в так называемом «Архиве Эрмана» [1].

Хотя вычисление ряда определенных интегралов выполнено в этой работе без пособия геометрии, но не подлежит сомнению, что к самой этой теме Лобачевского привело многообразное вычисление определенных интегралов, которое он производил средствами «воображаемой геометрии».

Далее следуют два сочинения по алгебре. В 1834 г. Лобачевский опубликовал обстоятельное руководство по алгебре:

[10] «Алгебра или вычисление конечных».

Это — учебник, который первоначально предназначался для гимназий; придя, однако, потом к заключению, что это сочинение для школы недоступно, Лобачевский его переработал и в этом новом виде предназначал для университетского преподавания. Сохранился и первоначальный вариант, написанный рукой Лобачевского.

В этом сочинении двучленным уравнениям уделена особая глава. Часть этой главы посвящена некоторому развитию результатов, изложенных Гауссом в «Disquisitiones arithmeticae» (1801). Это исследование в переработанном и расширенном виде Лобачевский в том же 1834 г. опубликовал в «Ученых записках Казанского университета» в виде отдельного мемуара:

[11] «Понижение степени в двучленном уравнении, когда показатель без единицы делится на 8».

По существу, содержание этого мемуара помещено в XVI главе «Алгебры».

Далее, три мемуара посвящены учению о сходимости бесконечных рядов.

Лобачевский начинает с тригонометрических рядов, которые в ту пору занимали умы. Его не удовлетворяют доказательства сходимости этих рядов, предложенные Коши, Дирихле, Дирксеном. В 1834 г. он посвящает этому вопросу мемуар, помещенный в «Ученых записках Казанского университета»:

[12] «Об исчезании тригонометрических строк».

В следующем, 1835 году Лобачевский помещает также в «Ученых записках» обширный мемуар, посвященный общей теории сходимости рядов:

---

[1] «Archiv für die wissenschaftliche Kunde von Russland», herausgegeben von A. Erman.

[13] «Способ уверяться в исчезании бесконечных строк и приближаться к значениям функций от весьма больших чисел».

Основная задача, которую Лобачевский здесь себе ставит, заключается в установлении критерия сходимости в том случае, когда отношение двух последовательных членов ряда стремится к единице. К этому же вопросу Лобачевский затем возвращается в 1841 г. В виде приложения к изданию наблюдений метеорологической обсерватории Казанского университета [1]), которым руководил проф. Э. Кнорр, Лобачевский помещает мемуар:

[14] «Über die Convergenz der unendlichen Reihen» [2]).

Классической проблеме механики посвящен мемуар, опубликованный Лобачевским в 1834 г. в «Ученых записках Московского университета»:

[15] «Условные уравнения для движения и положения главных осей обращения в твердой системе».

Мемуар содержит своеобразный вывод уравнений движения твердого тела и основных свойств главных осей вращения.

В июне 1842 г. происходило полное солнечное затмение. Для его наблюдения Казанским университетом была снаряжена экспедиция в Пензу в составе астронома-наблюдателя Ляпунова, профессора физики Кнорра и Лобачевского. В том же 1842 г. Лобачевский опубликовал в «Ученых записках Казанского университета» отчет об этой экспедиции:

[16] «Полное затмение солнца в Пензе 26 июня 1842 года».

Отчет содержит, кроме изложения деятельности экспедиции, обзор взглядов на сущность солнечной короны.

Особняком стоят две работы Лобачевского, не находящиеся в прямой связи с его научными интересами. Первая из них опубликована им еще в 1828 г. в журнале «Казанский Вестник»:

[17] «О резонансе или взаимном колебании воздушных столбов».

Эта статья представляет собой только реферат работы английского физика Уитстона (Wheatstone) [3]).

---

[1]) «Meteorologische Beobachtungen aus dem Lehrbezirk der Kaiserlichen Russischen Universität», Kazan.

[2]) «О сходимости бесконечных рядов».

[3]) Wheatstone, On the resonances or reciprocated vibrations of columns of air, Quarterly Journal, 1828.

Вторая работа представляет собой отзыв о докторской диссертации А. Ф. Попова, составленный Лобачевским в 1845 г. Она помещена в виде приложения к печатному изданию этой диссертации:

[18] «Подробный разбор рассуждения, представленного магистром А. Ф. Поповым под названием „Об интегрировании дифференциальных уравнений гидродинамики, приведенных к линейному виду“».

Эти все работы, конечно, не имеют того значения, которое приобрели геометрические открытия Лобачевского. Но многие из них содержат идеи, весьма своеобразные для того времени. Так, Лобачевский, повидимому, первый отличал непрерывную функцию от дифференцируемой; он первый оперирует понятием, по существу не отличающимся от равномерной непрерывности; он указал способ приближенного решения алгебраических уравнений, мало отличающийся от того, который получил распространение под названием способа Греффе. Нужно, однако, сказать определенно, что эти работы Лобачевского еще очень мало изучены. Но печать своеобразной оригинальной мысли лежит на всем, что он писал.

Наконец, две статьи, опубликованные Лобачевским, не относятся к математическим наукам:

[19] «Предисловие к 1-й книжке „Ученых записок, издаваемых Казанским университетом“, за 1834 г.».

[20] «Речь о важнейших предметах воспитания», произнесенная 5 июня 1828 г. [1]).

Когда Лобачевский скончался, его идеи еще не получили признания, и имя его еще далеко не пользовалось той мировой известностью, которую оно приобрело уже после его смерти. Поэтому не было принято надлежащих мер к установлению и охране его литературного наследия. Это было в некоторой мере сделано гораздо позже Казанским университетом и Казанским физико-математическим обществом. В архиве университета сохранились составленные Лобачевским доклады о программах и методах преподавания в университете математики, механики и математической физики, о преподавании хозяйственных наук, о состоянии учебных заведений Казанского учебного округа.

---

[1]) «Казанский вестник», ч. 8, 1832 г.

При делах Казанского учебного округа сохранилась рукопись «Геометрии» и первый вариант рукописи «Алгебры». . .

В фундаментальной библиотеке Казанского университета хранится переплетенная тетрадь, содержащая 180 перенумерованных страниц листового формата (in 4°) и заключающая большое количество заметок по различным отделам математики.

Сохранилось большое число заметок, записок, конспектов по различным отделам математики и механики, по физике, по небесной механике, по логике; они написаны рукою Н. И. Лобачевского, в небольших тетрадках или на отдельных листках, частью сгруппированных, частью совершенно разрозненных. Сюда относятся также отрывки небольших литературных произведений Лобачевского в прозе и в стихах на русском, французском и английском языках.

В небольшом числе сохранились письма Н. И. Лобачевского к его родственнику И. Е. Великопольскому и к М. Н. Мусину-Пушкину, частично уже опубликованные.

Первое издание собрания сочинений Лобачевского

Как выше уже было упомянуто, внимание математического мира к замечательным идеям Лобачевского было привлечено после 1863 г., когда была опубликована переписка Гаусса с Шумахером. С начала шестидесятых годов из различных научных центров и от различных геометров в Казанский университет стали поступать просьбы о присылке работ Лобачевского; имя Лобачевского быстро приобрело всемирную известность. 16 февраля 1867 г. декан Физико-математического факультета Казанского университета М. А. Ковальский вошел в Совет университета с представлением следующего содержания:

«Сочинения бывшего профессора здешнего университета Н. И. Лобачевского в последнее время обратили на себя внимание европейских ученых, особенно те, которые относятся к области геометрических исследований. Причиною столь позднего знакомства европейских ученых с трудами покойного знаменитого нашего сочлена было то обстоятельство, что большая часть из них была помещена в „Ученых записках“, которые, как известно Совету, печатались в малом числе экземпляров на удовлетворение потребностей округа и членов университета. У книгопродавцев ни петербургских, ни московских они не находились.

Неизвестно, каким путем успели проскользнуть за границу некоторые мемуары Лобачевского; но дело в том, что перевод одного из них, сделанный французским геометром Гуэлем, дал

право сказать этому последнему: „travaux qui à peine tirés de l'oubli ont déjà attiré l'attention d'éminents géomètres“ [1]), и действительно, кроме требований из-за границы, полученных некоторыми членами факультета, о присылке сочинения Лобачевского, такие же требования получил и библиотекарь университета. Один экземпляр, и то неполный, едва удалось собрать членам факультета.

Физико-математический факультет, принимая во внимание то, что сочинения Лобачевского составляют библиографическую редкость и что они по своему значению и важности должны быть в России, если не более, то по крайней мере не менее известны, чем за границей, имеет честь ходатайствовать перед Советом о новом издании, преимущественно же об издании всех мемуаров, касающихся теории параллельных линий».

Так, свыше 70 лет тому назад возник вопрос об издании собрания сочинений Лобачевского. Совет постановил выпустить в свет полное собрание геометрических сочинений Лобачевского. Но хотя слава Лобачевского росла с каждым годом, хотя его работы приобретали все большее признание и значение, прошло почти двадцать лет, пока это постановление было осуществлено. В 1883 г. вышел в свет первый том этого издания: «Полное собрание сочинений по геометрии Н. И. Лобачевского. Издание Императорского Казанского университета. Том первый. Сочинения на русском языке. Казань 1883». VII + 550 стр. [2]).

Этот том содержит сочинения, отмеченные в приведенном выше перечне номерами [1], [2], [3], [4] и [6]. Сочинениям Лобачевского предпослан весьма краткий очерк его жизни и деятельности, составленный профессором Казанского университета Ф. Г. Суворовым [3]); очерк оканчивается не совсем полным перечнем сочинений Лобачевского [4]).

Второй том этого издания вышел в свет в 1886 г. Он содержит сочинения, опубликованные Лобачевским на иностранных языках, и имеет дополнительное название: «Collection complète des oeuvres géométriques de N. I. Lobatcheffsky. Édition de l'Université Impériale de Kasan», Казань, 1886.

[1]) «Труды, которые, едва извлеченные из забвения, уже привлекли внимание выдающихся геометров».

[2]) Это издание, на которое в вводных статьях и примечаниях неоднократно будут делаться ссылки, будем цитировать сокращенно: «Полн. собр. соч. по геом.».

[3]) Фамилия автора в этом издании не указана.

[4]) Полный перечень сочинений Н. И. Лобачевского (не считая наследия) был впервые составлен А. В. Васильевым и помещен в его небольшом сочинении «Николай Иванович Лобачевский», С.-Петербург, 1914.

В этот том вошли французские тексты сочинений [2] и [6] и сочинение [5]. Французский текст сочинения [3] в него не включен. Этим сочинениям предпослан тот же очерк Суворова на французском языке. В конце тома помещен список важнейших сочинений, имеющих отношение к неевклидовой геометрии. Издание не содержит никаких пояснительных комментариев.

Это издание сыграло очень важную роль. Сочинения Лобачевского сделались доступными как русским, так и иностранным читателям; почти все они были переизданы за границей с более или менее обстоятельными комментариями. Однако, тираж издания составлял только 400 экземпляров, и к концу столетия оно представляло уже библиографическую редкость.

Организация и план настоящего издания

Среди научных воззрений, которые принесло с собою XX столетие, едва ли не первое место по своеобразию замысла, по широте научного охвата, по глубине производимого переворота во взглядах, по захватывающему научному и философскому интересу занимало учение об относительности. В той роли, какую математика играла в развитии этой дисциплины, особенно своеобразной является ее неевклидова база. Правда, здесь приходится говорить о неевклидовой геометрии в широком значении этого слова, о том ее развитии, которое справедливо связано с именем Римана. Но, с одной стороны, так называемая специальная теория относительности непосредственно связана с геометрической системой Лобачевского; с другой стороны, эта система является первым прообразом всякой геометрии, отходящей от классической геометрии Евклида, вернее, — восходящей над нею. Совершенно естественно, что интерес к неевклидовой геометрии вместе с этим чрезвычайно возрос и притом не только в среде математиков, но и у физиков, механиков и астрономов, а вместе с тем возрос интерес к творцу этой геометрии Н. И. Лобачевскому и к его сочинениям. У нас это произошло уже в новой государственной обстановке, в Советском Союзе, при небывалом подъеме всей жизни страны и научных интересов, в частности.

В связи с этим в Государственном издательстве возникла мысль об издании полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского. Замысел встретил одобрение руководящих государственных органов и после этого он получил осуществление со всей той широтой, которая свойственна всякому советскому начинанию. Президиум Всесоюзной математической ассоциации, в который дело поступило для дальнейшего его продвижения, организовал Редакционную

коллегию в составе проф. В. Ф. Кагана в качестве главного редактора издания, профессоров А. П. Котельникова, В. В. Степанова, Н. Г. Чеботарева и П. А. Широкова. Коллегия получила поручение окончательно разработать план издания, привлечь к редакционной работе компетентных ученых и приступить к осуществлению этого начинания.

В совместной работе Редакционная коллегия и Издательство установили следующие начала, на основе которых должно быть осуществлено издание:

1. Издание должно воспроизвести все сочинения Лобачевского, как опубликованные им при жизни, так и сохранившиеся в его литературном наследии.

2. Сочинения, опубликованные Лобачевским на русском и иностранном языках, должны быть воспроизведены в обоих текстах. Это тем более существенно, что эти тексты по своему содержанию не вполне совпадают. Сочинение «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien», опубликованное Лобачевским только на немецком языке, в настоящем томе воспроизводится в русском переводе.

3. Сочинения должны быть снабжены комментариями, которые делали бы чтение их возможно более доступным.

4. Каждое сочинение должны сопровождать историко-библиографический и научный его обзоры, а где это необходимо, — и статьи, освещающие историю возникновения тех идей, которые составляют предмет сочинения.

5. В состав издания должно войти подробное жизнеописание Лобачевского и статьи, освещающие его значение в современной науке.

В соответствии с этими руководящими положениями план издания рассчитан на 6 томов. Первые три тома будут содержать геометрические сочинения Лобачевского; четвертый том — сочинения по алгебре; пятый том — сочинения по анализу, механике и астрономии. Шестой том будет содержать литературное наследие Лобачевского, его жизнеописание и подробный обзор его творчества.

Содержание первого тома

Настоящий первый том составлен в полном соответствии с теми общими принципами, которые приведены выше. Он содержит два сочинения: «Геометрические исследования по теории параллельных линий» и «О началах геометрии».

Первое сочинение — «Геометрические исследования по теории параллельных линий» — нарушает хронологическую последователь-

ность воспроизведения сочинений Лобачевского. Оно помещено здесь потому, что это — самое доступное из сочинений Лобачевского и содержит только элементарную геометрию неевклидова пространства. Как уже сказано, по этому сочинению математический мир в шестидесятых годах прошлого столетия познакомился с замечательными идеями Лобачевского. С него должен начать изучение сочинений Лобачевского и современный читатель.

Это сочинение, опубликованное Лобачевским отдельным изданием на немецком языке под заглавием «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien», воспроизведено здесь в русском переводе, выполненном В. Ф. Каганом.

Редакция приложила все усилия к тому, чтобы сделать это замечательное произведение доступным весьма широкому кругу читателей. Это сочинение сопровождается статьями, одна из которых обстоятельно освещает историческое развитие теории параллельных линий до открытия неевклидовой геометрии Лобачевским; другая статья (помещенная в числе приложений) знакомит с элементами неевклидовой геометрии у других геометров — частью живших до Лобачевского, частью его современников.

«Геометрические исследования» комментированы особенно детально.

Второе сочинение Лобачевского — «О началах геометрии», — помещенное в настоящем томе, возвращает читателя к хронологическому порядку появления его сочинений. Владея уже элементами неевклидовой геометрии, подготовленный читатель будет в состоянии усвоить этот сжатый и трудный мемуар. Сочинение требует более глубокого математического образования; с этим сообразован и текст комментариев.

Более того, сочинение «О началах геометрии» содержит много результатов, требовавших вывода и проверки. Эту работу исследовательского характера выполнил профессор А. П. Котельников, обработавший ту часть настоящего тома, которая относится к этому сочинению.

Николай Иванович
Лобачевский

К стр. 29

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ

1840

ВВОДНАЯ СТАТЬЯ,
ПЕРЕВОД И КОММЕНТАРИИ
В.Ф.КАГАНА

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ

Вводные статьи:

Учение о параллельных линиях и открытие неевклидовой геометрии 31
Обзор сочинения «Геометрические исследования» 75

Н. И. Лобачевский — «Геометрические исследования по теории параллельных линий» (русский перевод). . . . 79
Примечания 128

Приложения:

1. Элементы неевклидовой геометрии у других геометров 160
2. Историко-библиографические сведения о сочинении «Геометрические исследования» 172

УЧЕНИЕ О ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЯХ И ОТКРЫТИЕ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Обоснование геометрии в «Началах» Евклида

Неевклидова геометрия, элементарному изложению которой посвящено сочинение «Геометрические исследования по теории параллельных линий», возникла на почве задачи об обосновании геометрии. Эта задача, в свою очередь, в древности представляла лишь проявление в области геометрии общих воззрений, получивших отчетливое выражение в школе Платона. Согласно тенденциям Платона всякая научная дисциплина должна развиваться из небольшого числа исходных положений, составляющих ее основу. Не входя в критический анализ этих тенденций, скажем только, что в области геометрии, в силу особенностей математических наук вообще и геометрии в частности, уже в древности удалось подойти к осуществлению этих тенденций ближе, чем в других науках. Более того, повидимому, и самые эти воззрения Платона сложились отчасти под влиянием попыток систематического изложения геометрии, которые в эпоху Платона уже имели место: оформлявшиеся попытки построить систематическое изложение начал геометрии влияли на общие воззрения философов, а тенденции философов, сложившиеся и получившие определенное выражение в школе Платона, укрепляли позиции геометров, занимавшихся обоснованием геометрии. Из известных нам авторов до Платона составлением начал геометрии занимался Гиппократ Хиосский, живший во второй половине V в. до н. э.; в эпоху Платона этим занимались Лев и Евдокс; в самой Академии Платона было в ходу сочинение Тедия. Ни одно из сочинений этих авторов по геометрии до нас не дошло; все они были забыты, когда появилось замечательное сочинение, содержавшее изложение основ геометрии — «Начала» Евклида.

К сожалению, сведения, которыми мы располагаем относительно Евклида, очень скудны. Время расцвета его деятельности относится к эпохе, когда лучшие представители греческой науки были сосредоточены в Александрии. Повидимому, в конце IV или в начале III в. до н. э. Евклид основал в Александрии математическую школу, для которой собственно и было составлено его руководство. Евклид писал, таким

образом, в эпоху, когда взгляды Платона уже утвердились, когда Аристотель уже создал общую схему логического вывода («Органон»). Согласно этой схеме наглядные методы восточных народов должны были уступить в геометрии место формально-логическим умозаключениям, развертывающимся в силлогизмы. В известном диалоге Платона «Федон» один из участников диалога, Симмиас, наиболее отражающий воззрения самого Платона, говорит: «Я знаю, что те, которые ведут доказательство, исходя от очевидности, поступают тщетно»; это наречение систематически приводят позднейшие греческие геометры и философы [1]). Стремление освободить изложение геометрии от всяких наглядных выводов составляло основную тенденцию геометров школы Платона, в том числе и Евклида.

Исходными положениями, на которых Евклид строит систему геометрии, служат определения, аксиомы и постулаты. Каждая книга начинается определением тех терминов, которые в ней появляются; первой книге предшествуют еще *аксиомы* и *постулаты*. Как число, так и точное выражение аксиом и постулатов различны в различных дошедших до нас списках «Начал», даже в основных; в некоторых списках те и другие соединены в одну группу *аксиом*. Поэтому не так просто себе уяснить, какое различие греческие авторы, в частности Евклид, делали между аксиомами и постулатами. Пространные рассуждения Прокла не проливают на этот вопрос достаточно света. Наиболее установившееся воззрение заключается в том, что аксиомы представляют собой общие достояния ума (κοιναὶ ἔννοιαι), необходимые для ведения рассуждений во всякой науке (особенно в арифметике и естествознании); постулаты же представляют собой геометрические «требования» (αἰτήματα), признав которые, приступающий к чтению «Начал» вынуждон признать все последующие выводы. Однако нет уверенности, что именно такова была точка зрения Евклида.

Лучшие современные знатоки Евклида Гейберг и Менге, выпустившие в Германии полное собрание сочинений Евклида на греческом и латинском языках [2]), и Гис, выпустивший «Начала» на английском языке в трех томах с обстоятельными комментариями [3]), сходятся на следующем списке аксиом и постулатов:

Постулаты

I. Нужно потребовать, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию.

---

[1]) См., например, отрывок из Прокла (стр. 36 настоящего тома).

[2]) Euclidis opera omnia. Ediderunt I. L. Heiberg et H. Menge. Leipzig, 1883—1895; семь томов, из которых первые пять содержат «Начала».

[3]) T. L. Heath — The thirteen books of Euclids elements. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary. Cambridge, 1908.

II. И чтобы каждую ограниченную прямую можно было продолжить неопределенно.

III. И чтобы из любого центра можно было описать окружность любым радиусом.

IV. И чтобы все прямые углы были равны.

V. И чтобы всякий раз, как прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

Аксиомы

I. Равные порознь третьему, равны между собой.

II. И если к равным придадим равные, то получим равные.

III. И если от равных отнимем равные, то получим равные.

IV. [И если к неравным прибавим равные, то получим неравные.]

V. [И если удвоим равные, то получим равные.]

VI. [И половины равных равны между собой.]

VII. И совмещающиеся [1]) равны.

VIII. И целое больше части.

IX. [И две прямые не могут заключать пространства.]

Относительно аксиом, заключенных в скобки, Гейберг и Менге сомневаются, принадлежат ли они Евклиду; Гис их вовсе опускает.

В тех изданиях, которые объединяют постулаты и аксиомы, V постулат фигурирует в качестве XI (иногда в качестве XII, даже XIII) аксиомы; поэтому в литературе постулат о параллельных линиях часто фигурирует под названием XI аксиомы. Так именует постулат о параллельных линиях также и Гаусс.

Не входя ни в общий разбор аксиом и постулатов, ни в подробное изложение содержания «Начал», ограничимся только замечанием, что первая книга отчетливо распадается на две части. Первую часть составляют первые 28 предложений, которые содержат учение об углах и треугольниках, а также решение основных задач на построение (свойства смежных и вертикальных углов, условия равенства треугольников, соотношения между сторонами и углами одного и двух треугольников, теорема о внешнем угле треугольника, свойства перпендикуляра и наклонных, построения перпендикуляра по различным заданиям, деление отрезка и угла на две равные части). При этом нужно заметить, что так называемое предложение о внешнем угле треугольника (предложение 16) устанавливает только, что внешний

[1]) Подразумевается — величины, образы.

угол треугольника больше каждого из внутренних углов, с ним не смежных. Особенность этой первой части книги заключается в том, что доказательства нигде не опираются на V постулат; эту часть книги по почину Иоанна Больяй, сведения о котором даны на стр. 165—166, часто называют (может быть, не вполне удачно) *абсолютной геометрией*, разумея под этим ту часть геометрии, которая не зависит от постулата о параллельных линиях. В этом понимании слова абсолютной геометрии принадлежат не только первые 28 предложений первой книги, но и ряд предложений третьей книги (учение об окружности — соотношения между величинами дуг и стягивающих их хорд, между величинами хорд и их расстояниями от центра, свойства касательной к окружности), а также ряд стереометрических предложений, содержащихся в одиннадцатой книге.

Постулат о параллельных линиях

Таким образом, V постулат Евклида (постулат о параллельных линиях) существенно отличается от остальных. В то время как к остальным постулатам Евклид прибегает в первых же своих предложениях, V постулат получает первое применение лишь в двадцать девятом предложении; более того, он как бы делит геометрию на две существенно различные части: первая часть — так называемая абсолютная геометрия — от V постулата не зависит; вторая часть — собственно евклидова геометрия — вся основана на этом постулате в том смысле, что ни одно предложение этой части не поддается доказательству, не опирающемуся на этот постулат. Собственно евклидова геометрия содержит бо́льшую часть предложений геометрии — теорему о сумме углов треугольника, о пропорциональных линиях и о подобии фигур и, следовательно, всю метрику, основанную на учении о подобии, и, в частности, всю тригонометрию. С другой стороны, самое содержание V постулата сложнее остальных: оно содержит уже более сложный комплекс понятий, необходимых для его усвоения.

Вследствие этого очень рано появились попытки исключить V постулат из числа предложений, принимаемых без доказательства, и логически вывести его из остальных постулатов и аксиом. Этим занимались, главным образом, комментаторы Евклида.

В течение почти двух тысяч лет «Начала» Евклида составляли единственный учебник геометрии, и конкурировать с ним не решался никто. Но многие авторы переиздавали Евклида, сопровождая его критическими замечаниями и отдельными попытками исправления и улучшения его текста. Критике текст Евклида, конечно, поддавался, так как при всех высоких достоинствах этого сочинения оно, несомненно, далеко не удовлетворяло строгим требованиям школы Платона.

логики Аристотеля — построить всю геометрию в порядке логического вывода, не прибегая к наглядным представлениям. Вскрытие многих дефектов этого рода составляет несомненную заслугу комментаторов Евклида. Среди этих попыток улучшить, исправить «Начала» Евклида, стремление освободить их от постулата о параллельных линиях играло весьма видную роль.

Комментирование Евклида началось еще в глубокой древности. Но многие из этих комментариев до нас вовсе не дошли, другие дошли только в отрывках, в передаче других авторов. В этом отношении очень важную роль играет дошедший до нас полностью комментарий Прокла к первой книге «Начал». Прокл (410—485 гг. н. э.) был философ неоплатонической школы, преподававший, между прочим, геометрию; повидимому, по его лекциям и составлен был этот комментарий. В печати он впервые появился в приложении к так называемому Базельскому изданию [1]) «Начал» Евклида (1533 г.); но уже в 1560 г. был выпущен латинский перевод этого сочинения [2]), в XVIII в. был издан английский его перевод [3]) и, наконец, в 1873 г. Тейбнером выпущен комментарий Прокла в подлиннике [4]). В передаче Прокла до нас дошли и рассуждения более ранних авторов о V постулате Евклида (Герона Александрийского, Птолемея, Гемина Родосского). Составил ли Прокл комментарий и к последующим книгам Евклида, остается невыясненным.

Вслед за текстом пятого постулата мы находим у Прокла следующие соображения:

> «Это положение должно быть совершенно изъято из числа постулатов, потому что это — теорема, вызывающая много сомнений, которые Птолемей пытался устранить в одной из своих книг; однако его доказательство требует многих определений и теорем; и сам Евклид дает обращение этого предложения в качестве теоремы. Но, может быть, некоторые вследствие ошибочных воззрений подумают, что это положение действительно следовало поместить среди постулатов; само по себе оно вызывает доверие, если принять во внимание наклонение прямых линий, образую-

---

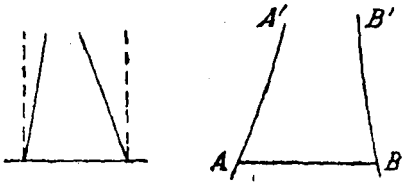
[1]) Так называемое Базельское издание «Начал» было выпущено Симоном Старшим (Simon Grynaeus) на греческом языке по рукописи Теона (Феона) Александрийского. В литературе оно известно под названием «editio princeps» («главное издание»), потому что послужило оригиналом для большого числа других изданий.

[2]) Procli Diadochi... in primum Euclidis Elementorum librum commentariorum... libri III; summa opera a Francisco Barocio... editi. Patavii, 1560.

[3]) The philosophical and mathematical commentaries of Proclus on the first book of Euclid's Elements. London, 1792.

[4]) Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii. Ex. rec. G. Fridlein, Leipzig, 1873.

щих с секущей углы, сумма которых меньше двух прямых. Этого рода людям Гемин справедливо отвечает, что у творцов науки мы научились не относиться в геометрических рассуждениях с полным доверием к наглядным представлениям нашего воображения; как говорит по этому поводу Аристотель, это было бы подобно тому, чтобы требовать доказательств от автора риторики и в то же время терпеливо выслушивать геометра, исходящего от наглядных представлений. И Симмиас в платоновом „Федоне" говорит: „Я знаю, что те, которые ведут доказательство, исходя от очевидности, поступают тщетно". Конечно, совершенно необходимо признать, что прямые линии наклоняются одна к другой, когда прямые углы заменяются острыми [1]). Однако, что эти наклонные при продолжении сойдутся, это остается не достоверным, а лишь вероятным до тех пор, пока этому не будет дано логическое доказательство: ибо существуют бесконечные наклонные линии, которые никогда не сходятся; и хотя это представляется мало вероятным и удивительным, но совершенно достоверно, что при других формах линий это может иметь место [2]). Что же, в случае прямых линий не может иметь места то, что бывает в случае других линий? До тех пор пока мы этого не обнаружим путем доказательства, свойства, которые могут проявиться при неограниченном продолжении других линий, тяготеют над нашим воображением. Но если появляется сомнение в том, произойдет ли пересечение линий, то каким образом должны мы изгнать из нашей доктрины это мало вероятное и иррациональное предположение? Совершенно ясно, что должно быть найдено доказательство настоящей теоремы; а такое требование природе постулатов совершенно чуждо [3]). Каким образом это предложение должно быть доказано, это мы увидим ниже, когда придем к нему, когда элементы геометрии нас этому уже научат. Ибо необходимо обнаружить его справедливость, но не как нечто представляющееся нам очевидным без доказательства, а как предложение, становящееся таковым благодаря доказательству».



[1]) То-есть когда перпендикуляры к секущей заменяются наклонными, образующими с ней острые внутренние односторонние углы (левый чертеж).

[2]) Например две гиперболические ветви AA' и BB' могут асимптотически приближаться одна к другой, образуя острые углы из концов секущей AB (правый чертеж).

[3]) Прокл, очевидно, хочет сказать, что к постулату мы не предъявляем требования, чтобы он был доказан; поэтому V постулат Евклида, к которому такое требование предъявляется, должен быть рассматриваем не как постулат, а как теорема

Это — знаменательные строки. Прокл, как мы видим, идет так далеко, что он, по крайней мере a priori, не исключает даже сомнения в истинности самого предложения. Во всяком случае он делает вывод, что постулат о параллельных линиях нужно из геометрии изъять, ее нужно освободить от этого «темного пятна», надо найти его доказательство.

Это — лейтмотив, который проходит почти через всю литературу, относящуюся к обоснованию геометрии. Эти мысли занимали уже Птолемея за 300 лет до Прокла; Птолемей по свидетельству Прокла написал об этом предмете целую книгу. Эти мысли систематически повторяются выдающимися геометрами вплоть до XIX в. Правда, доказательством постулата о параллельных линиях занимались и многие люди, лишенные не только таланта, но и достаточных познаний; но вместе с тем трудно назвать какого-либо из выдающихся геометров, кто не отдал бы дани этой проблеме, кто не посвятил бы ей времени и мысли.

В литературе накопилось много попыток доказательства евклидова постулата. В 1762 г. Клюгель, ученик известного геометра Кестнера, занимавшего в Геттингенском университете кафедру Евклида, представил диссертацию на тему «Обзор важнейших попыток доказательства теоремы о параллельных линиях» [1]).

В этом сочинении автор рассматривает около тридцати доказательств V постулата Евклида и приходит к иному выводу, нежели Прокл.

Приведем вступление к диссертации Клюгеля, в котором его вывод отчетливо выражен.

> «Среди истин, которые прилежно изучали выдающиеся умы, не последнее место занимает теорема элементарной геометрии о параллельных линиях. Все науки хранят в себе загадочные вещи: неудивительно, что наш ум, заключенный в определенные пределы, многого не постигает и не в состоянии раскрыть источники и причины многих фактов. При всем том я не знаю, коренится ли больше в слабости нашего ума или в характере самых истин вина того, что в пределах геометрии существуют препятствия, которые не дают возможности овладеть подступами к ней в такой степени, как это было бы желательно. Немногочисленны истины, которые в геометрии могут быть доказаны без пособия теоремы о параллельных линиях; но еще малочисленнее те истины,

---

[1]) G. S. Klügel — Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrand recensio, quam publico examini submittent Abrah. Gotthelf Kaestner et auctor respondens Georgius Simon Klügel. Göttingen, 1763.

которые можно использовать для ее доказательства. Вследствие этого, не располагая отчетливыми сведениями о прямых и кривых линиях, мы не можем выполнить это доказательство на основе их определения. При этих условиях нельзя поставить геометрии в вину, если она вносит в основные свои положения такое предложение, истинность которого не устанавливается отчетливым рассуждением, а усматривается непосредственно благодаря нашим наглядным представлениям о прямой линии. Такова XI аксиома Евклида, согласно которой две прямые на плоскости, пересекающие третью под углами, сумма которых меньше двух прямых, при неограниченном продолжении неизбежно должны пересечься.

Многие, опытные в геометрических доказательствах, пытались устранить эту истину из числа аксиом; но все доказательства, которыми они старались эту истину строго установить, оказались порочными. Другие предлагали заменить ее иными аксиомами, которые, однако, не могут считаться более ясными, нежели постулат Евклида.

Таким образом, если обозреть все попытки, то окажется совершенно правильным, что Евклид поместил это предложение среди аксиом».

Клюгель, конечно, не исчерпал всех предложенных до него доказательств; многие доказательства были опубликованы и после него. Но вывод, к которому он пришел, был совершенно правилен: ни одно из предложенных доказательств постулата о параллельных линиях не оказалось правильным. Одни содержали прямую погрешность, другие явно или неявно заменяли в своих рассуждениях постулат другим эквивалентным ему допущением.

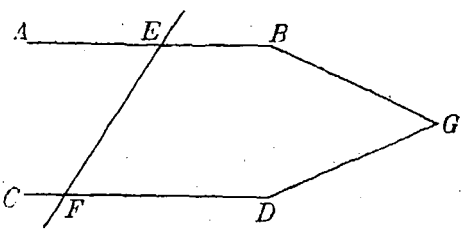
Мы приведем здесь некоторые доказательства и именно те, на которых в литературе этого вопроса было сосредоточено внимание и которые содействовали выяснению содержащихся в нем трудностей. При этом мы будем давать не собственное изложение доказательств, а подлинные тексты авторов.

Параллельные линии в «Началах» Евклида

Доказательства V постулата тесно примыкают к изложению теории параллельных линий в «Началах» Евклида. Мы приведем поэтому те пять теорем, которые в «Началах» составляют эту теорию. Первые три приведены в точном переводе, сделанном с греческого оригинала (греческие буквы в тексте и на чертежах заменены, как обычно, латинскими).

«**I. 27.** *Если прямая линия, пересекая две [другие] прямые линии, образует с ними равные накрест лежащие углы, то эти прямые параллельны.*

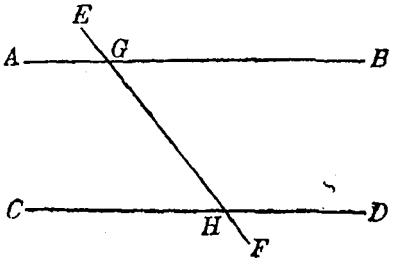
Положим, что прямая линия EF, пересекая прямые AB и CD, образует с ними равные накрест лежащие углы AEF и EFD. Утверждаю, что прямая AB параллельна CD.



Ибо, если бы они не были параллельны, то они пересеклись бы либо со стороны точек B и D, либо со стороны точек A и C. Положим, что они продолжены в сторону [точек] B и D и пересекаются в [точке] G. Тогда в треугольнике GEF внешний угол AEF равен внутреннему не смежному с ним углу EFG, что невозможно. Следовательно, прямые AB и CD, будучи продолжены в сторону точек B и D, не пересекаются. Подобным же образом может быть доказано, что они не могут встретиться со стороны точек A и C. Но прямые, которые не встречаются ни с одной, ни с другой стороны, параллельны; следовательно, прямая AB параллельна CD.

I. 28. *Если прямая линия, пересекая две [другие] прямые линии образует внешний угол, равный соответствующему внутреннему углу или если внутренние односторонние углы составляют вместе два прямых угла, то эти прямые друг другу параллельны.*

Предположим, что прямая EF, пересекая две прямые AB и CD, образует внешний угол EGB, равный соответствующему внутреннему углу GHD[1]), или образует внутренние односторонние углы BGH и GHD, составляющие вместе два прямых угла. Утверждаю, что [прямая] AB параллельна [прямой] CD.



Ибо, так как угол EGB равен углу GHD, между тем как угол EGB равен углу AGH, то угол AGH равен углу GHD. Но это — углы накрест лежащие. Следовательно, прямая AB параллельна CD.

Если же углы BGH и GHD составляют два прямых, а углы AGH и BGH также составляют два прямых, то углы AGH и BGH

[1]) Евклид называет угол GHD не соответствующим (соответственным) углу EGB, а противолежащим ему.

равны углам BGH и GHD [1]). Отнимая общий угол BGH, найдем что остающийся угол AGH равен остающемуся углу GHD; но это — углы накрест лежащие. Поэтому прямая AB параллельна CD.

I. 29. *Прямая линия, пересекающая две параллельные прямые, образует с ними равные накрест лежащие углы, внешний угол равен соответствующему внутреннему углу, а сумма внутренних односторонних углов равна двум прямым углам.*

. Положим, что прямая EF пересекает параллельные прямые AB, CD. Утверждаю, что она образует равные накрест лежащие углы AGH, GHD, что внешний угол EGB равен соответствующему внутреннему углу GHD и внутренние односторонние углы BGH и GHD составляют два прямых угла. Ибо, если угол AGH не равен углу GHD, то один из них больше другого. Пусть AGH будет больший угол. Придадим к каждому из них угол BGH. Тогда углы AGH и BGH составят больше, чем углы BGH и GHD. Но углы AGH и BGH составляют два прямых. Следовательно, BGH и GHD составляют меньше двух прямых. Но прямые линии, которые образуют с секущей односторонние углы, составляющие меньше двух прямых, при неограниченном продолжении встречаются [2]). Следовательно, прямые AB и CD при неограниченном продолжении встретятся; но они не могут встретиться, потому что они по условию параллельны. Следовательно, угол AGH не может быть неравен углу GHD, а потому он равен ему.

Далее, угол AGH равен углу EGB; следовательно, угол EGB также равен углу GHD. Придадим к каждому из них угол BGH. Получим, что углы EGB и BGH равны углам BGH и GHD. Но углы EGB и BGH составляют два прямых угла; следовательно, углы BGH и GHD составляют два прямых угла».

Мы привели здесь подлинный текст трех основных теорем о параллельных линиях и их доказательств в «Началах» Евклида. За этим следует предложение I. 30 — «две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой» — евклидово доказательство которого по настоящее время точно воспроизводится в наших учебниках элементарной геометрии. Наконец, предложение I. 31 содержит построение прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой; однозначность этого построения вытекает из предложения I. 29.

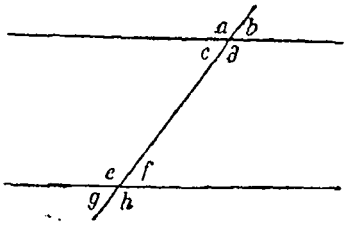
Мы видим, что предложение I. 29 может быть рассматриваемо как обращение предложений I. 27 и I. 28. При этом V постулат получает применение только один раз в предложении I. 29. Остальные предло-

---

[1]) Мы сказали бы: сумма углов AGH и BGH равна сумме углов BGH и GHD.

[2]) Постулат о параллельных линиях!

жения, непосредственно относящиеся к теории параллельных линий, выводятся уже из теоремы I. 29, а затем, в свою очередь, служат основой для построения всей «собственно евклидовой» геометрии.



В связи с этим можно содержание основных теорем о параллельных линиях формулировать следующим образом:

Обозначим, как показано на чертеже, отдельными буквами восемь углов, которые образуются при пересечении двух прямых, расположенных в одной плоскости, третьей прямой. Напишем следующие 12 равенств:

$$\left.\begin{array}{c} a=c,\quad b=f,\quad c=g,\quad d=h;\quad c=f,\quad d=e,\quad a=h,\quad b=g;\\ c+e=2d,\quad d+f=2d,\quad a+g=2d,\quad b+h=2d. \end{array}\right\} \quad (I)$$

Каждое из этих равенств, если оно имеет место, влечет за собой все остальные и является *достаточным* условием для того, чтобы прямые были параллельны: это и доказывается предложениями I. 27 и I. 28. Требуется показать, что эти условия являются также *необходимыми*; это достигается ценой того, что необходимость одного из этих равенств принимается в качестве *постулата*. Евклид принимает в качестве постулата условие $c+e=2d$ или $d+f=2d$ [1]); можно принять в виде постулата любое другое из этих условий; иными словами, можно принять за постулат предложение: если линии параллельны, то имеет место одно из соотношений (I) (какое угодно); из этого тогда вытекает, что при параллельности прямых имеют место все перечисленные равенства. Таким образом уже по существу дела постулат о параллельных линиях допускает 12 формулировок, мало отличающихся одна от другой. Английскому математику Плэйферу [2]) не совсем правильно [3]) приписывают другую формулировку, которая часто приводится в сочинениях по элементарной геометрии: *через данную точку можно провести только одну прямую, параллельную данной.* С именем Лежандра (также, безусловно, неправильно) связывают следующую формулировку постулата: *если одна из двух прямых, лежащих в одной плоскости, перпендикулярна к секущей, а другая образует с ней острый угол, то прямые пересекаются со стороны острого угла.* Постулат может быть выражен в различных других формах,—вернее, без

---

[1]) Собственно говоря, обратно противоположное предложение: если $c+e\neq 2d$, то прямые пересекаются.

[2]) J. Playfair — Elements of geometry, containing the first six books of Euclid, Edinburgh, 1797.

[3]) Не совсем правильно потому, что эта формулировка встречается у других авторов раньше, — например, у Насир-Эддина. То же относится и к Лежандру.

доказательства может быть принято одно из многих других предложений, эквивалентных V постулату.

Но в течение двух тысяч лет геометры старались вовсе избежать введения специального постулата в теорию параллельных линий, — тенденция, отчетливо выраженная в приведенной выше цитате из сочинения Прокла. Переходим к изложению наиболее интересных, в том или ином отношении характерных или поучительных доказательств постулата.

Доказательство Прокла

Комментируя предложение I. 29 «Начал», Прокл прежде всего излагает доказательство этого предложения, принадлежащее Птолемею и не опирающееся на V постулат. Это «доказательство» в такой мере наивно, что и сам Прокл не относится к нему серьезно; мы не будем его здесь приводить. Свои собственные соображения Прокл также начинает с рассуждений, не лишенных некоторого остроумия, но фактически к делу не относящихся. То, что он собственно считает доказательством постулата, изложено следующим образом:

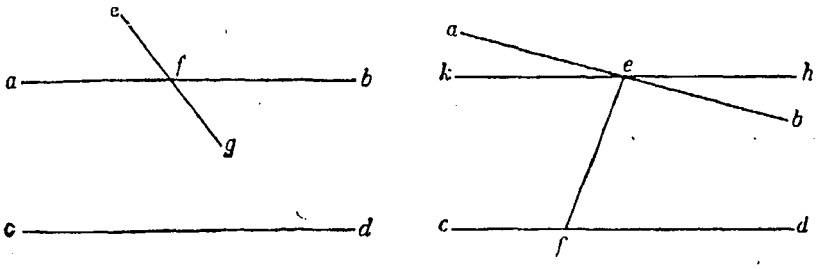
> «Те, которые желают получить доказательство, должны быть осведомлены, что оно предполагает аксиому, которой пользовался Аристотель в своем доказательстве конечности мира, именно: *если из одной точки выходят две прямые, то при неограниченном их продолжении расстояние между ними становится больше любой конечной величины.* Он [Аристотель] указывает, что при продолжении бесконечных прямых линий от центра к периферии расстояние между ними также будет бесконечно; ибо, если бы оно было только конечным, то оно все же могло бы быть увеличено, прямые же линии не были бы бесконечны[1]). Итак, [пересекающиеся] *прямые линии при неограниченном продолжении удаляются одна от другой на расстояние, которое становится больше любой конечной величины.*
>
> Принимая это, я утверждаю, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных линий, пересекает также и другую.
>
> В самом деле, пусть ab и cd будут параллельные прямые и пусть прямая efg пересекает ab; утверждаю, что она пересечет также cd. В самом деле, так как мы здесь имеем две прямые линии, которые могут быть неограниченно продолжены от точки f, именно fb и fg, то расстояние между ними превысит любую

[1]) Эти соображения, конечно, очень сбивчивы и даже вовсе непонятны; но самая аксиома, которую формулировал Аристотель и которую Прокл применяет в следующем предложении, выражена совершенно отчетливо.

конечную величину. Следовательно, оно превзойдет величину расстояния между заданными параллельными прямыми линиями. Так как их расстояние становится, таким образом, больше расстояния между параллельными, то fg пересечет cd.

Установив это, мы можем последовательно провести доказательство постулата.

Пусть ab и cd будут две прямые, которые при пересечении с прямой ef образуют с ней углы bef и dfe, составляющие меньше двух прямых. Утверждаю, что прямые пересекутся с той стороны, с которой сумма углов меньше двух прямых.



В самом деле, так как углы bef и dfe составляют меньше двух прямых, то пусть heb будет угол, дополняющий их до двух прямых; продолжим he до точки k. Так как теперь прямая ef пересекает линии hk и cd и образует с ними внутренние односторонние углы, составляющие два прямых, именно углы kef и dfe, то прямые hk и cd параллельны; ab пересекает kh, следовательно, в силу установленного выше предложения, она пересекает также и cd.

Таким образом прямые ab и cd встречаются с той стороны, с которой расположены углы, составляющие меньше двух прямых. Поставленная цель, таким образом, достигнута».

Приведенное рассуждение Прокла состоит из трех частей. В первой части Прокл четко оговаривает, что он допускает добавочную аксиому, ведущую свое начало от Аристотеля. Во второй части он при помощи этой добавочной аксиомы доказывает вспомогательное предложение, заключающееся в том, что прямая, расположенная в плоскости двух параллельных прямых и пересекающая одну из них, пересекает также вторую [1]). Наконец, третья часть посвящена доказательству постулата о параллельных линиях в том виде, в каком он формулирован в «Началах» у Евклида.

---

[1]) Заметим, что это вспомогательное предложение по существу совпадает с приведенной выше плэйферовой формулировкой постулата о параллельных линиях.

Рассуждение Прокла содержит двойную ошибку. Положение, которое он называет Аристотелевой аксиомой и которое заключается в том, что точки, расположенные на одной стороне угла, по мере удаления от вершины неограниченно удаляются от другой стороны угла, отнюдь не должно быть причислено к аксиомам. Оно допускает строгое доказательство, не опирающееся на постулат о параллельных линиях; это доказательство дано Лобачевским в сочинении «Новые начала» (статья 106), но встречается еще раньше в сочинении Саккери (см. стр. 167).

Но во второй части, при доказательстве вспомогательного предложения, Прокл принимает, что *расстояние между двумя параллельными линиями на всем их протяжении остается ограниченным* (можно даже думать, что он считает это расстояние постоянным); это есть допущение, вполне эквивалентное постулату о параллельных линиях. Рассуждение Прокла и сохраняет свое значение потому, что оно устанавливает эквивалентность обоих положений.

Доказательство Насир-Эддина

В XIII в. арабский математик Насир-Эддин ат-Туса (1201—1274) сделал перевод на арабский язык «Начал» Евклида и сопроводил его многочисленными примечаниями и комментариями. Это сочинение свыше трехсот лет сохранялось в рукописи, а в 1594 г. было выпущено в свет в печатном виде в Риме [1]).

В 1901 г. в Бомбее оно было выпущено в переводе на санскритский язык. Сочинение это мало доступно, потому что перевода его на европейские языки не существует. Английский математик XVII в. Дж. Валлис (1616—1703), занимавший в Оксфордском университете кафедру Евклида, хорошо известный также своими трудами по алгебре и анализу, в своих лекциях по геометрии излагает доказательство постулата о параллельных линиях, предложенное Насир-Эддином. Это доказательство замечательно в том отношении, что в нем впервые постулат о параллельных линиях поставлен в связь с учением о сумме углов треугольника. Воспроизведем здесь доказательство Насир-Эддина в передаче Валлиса, помещенное во втором томе полного собрания его сочинений [2]):

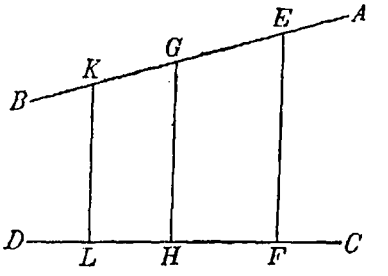
> «Насир-Эддин предпосылает доказательству постулата три леммы, первую из которых он принимает без доказательства. Содержание их по существу заключается в следующем:

---

[1]) Euclidis Elementorum geometricorum libri tredecim. Ex traditione doctissimi Nasiridini Tusini nunc primum Arabice impressi. Roma, 1594.

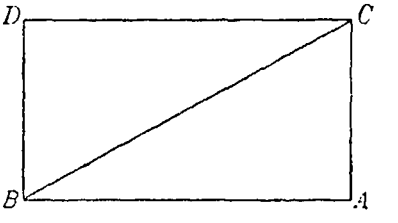
[2]) J. Wallis — De Postulato quinto; et definitione quinta, Lib. 6. Euclidis; dissertatio geometrica. (Opera mathematica, Oxoniae, 1693 т. II стр. 665—673).

Лемма I. а) *Если AB и CD суть две прямые линии, расположенные таким образом, что перпендикуляры EF, GH, KL, опущенные из точек прямой AB на CD, всегда образуют с прямой AB неравные углы*[1]), *которые все время остаются острыми со стороны B и тупыми со стороны A, то прямые AB и CD, до тех пор пока они не пересекаются, постоянно сближаются со стороны острых углов, и расходятся со стороны тупых углов, т. е. перпендикуляры уменьшаются в сторону точек B и D и возрастают в сторону точек A и C.*



b) *Обратно, если проведенные таким образом перпендикуляры становятся короче в направлении к точкам B, D и длиннее в направлении к A, C, так что прямые AB и CD постоянно сближаются в сторону B, D и расходятся в противоположную сторону, то каждый перпендикуляр образует с прямой AB два угла, один из которых острый, а другой тупой, причем все острые углы обращены в сторону точек B, D, а тупые — в противоположную сторону.*

Лемма II. *Если из концов отрезка AB восстановим к нему перпендикуляры AC, BD и на них отложим равные отрезки AC, BD и проведем прямую DC, то каждый из углов ACD и BDC будет прямым, а отрезок CD будет равен AB.*



Доказательство этой леммы ведется от противного на основе предыдущей леммы. Если, например, ACD не прямой угол, то он либо острый, либо тупой; предположим, что он острый; тогда, согласно лемме I, AC больше BD, что противно условию; и т. д.[2]).

Доказав, что углы ACD, BDC прямые, уже нетрудно обнаружить, что отрезки AB и CD равны.

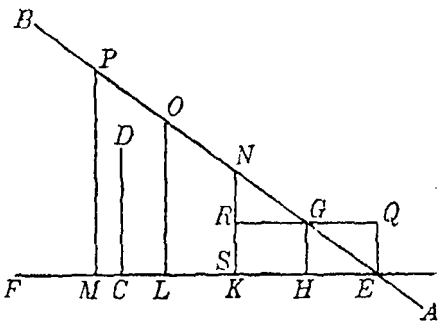
Лемма III. *В каждом треугольнике три угла составляют вместе два прямых.*

---

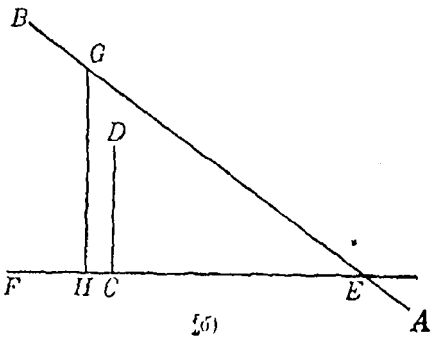
[1]) То-есть неравные смежные углы, которые каждый перпендикуляр образует с прямой AB, например, углы AEF и BEF.

[2]) Заметим, что это заключение даже не вытекает из предыдущей леммы, ибо рассуждение молчаливо допускает, что в том случае, если ACD есть острый угол, BDC есть тупой угол; не исключена возможность, что оба угла острые, и тогда лемма не может получить применения; см. рассуждение Саккери (стр. 168).

Для прямоугольного треугольника это доказывается на основании предыдущей леммы. В самом деле, если дан прямоугольный треугольник ABC, то мы строим, как это сделано выше, четырехугольник $ABDC$, углы которого в силу предыдущей леммы прямые. Диагональ BC делит этот четырехугольник на два равных треугольника, в каждом из которых внутренние углы составляют, таким образом, вместе два прямых. Вместе с тем теорема справедлива и для любого треугольника, так как всякий треугольник может быть разбит на два прямоугольных треугольника.



а)



б)

Теперь Нассир-Эддин переходит к окончательному доказательству V постулата. Здесь возможны три случая: 1) когда один из внутренних односторонних углов, составляющих вместе меньше $2d$, прямой, 2) когда они оба острые и 3) когда один из них тупой. Нассир-Эддин обнаруживает, что два последних случая могут быть приведены к первому, и обращается к доказательству теоремы: *если одна из двух прямых образует с секущей прямой угол, а другая острый угол, то эти прямые встречаются со стороны острого угла.* Предположим, что прямые AB и CD встречают прямую FCE, образуя с ней прямой угол ECD и острый угол CEB (чертеж *а*). Возьмем на EB произвольную точку G и на нее опустим перпендикуляр GH на EC. Так как угол CEG острый, то перпендикуляр упадет со стороны точки C; при этом он либо совпадет с перпендикуляром DC, либо не совпадет с ним. В первом случае предложение доказано.

Если GH не совпадет с DC и упадет со стороны точки F[1]), то прямая CD, входя внутрь треугольника, составленного пер-

[1]) Соответствующего чертежа нет в тексте Нассир-Эддина; он присоединен нами (черт. *б*).

пендикуляром и прямыми AB и GH, должна пересечь EG [1]. Пусть, наконец, GH [2] падает со стороны точки E от прямой CD. Вдоль HC откладываем ряд отрезков HK, KL и т. д., равных EH, до тех пор пока точка деления M не упадет за точку C. Вдоль AB отметим отрезки GN, NO и т. д., равные EG, до тех пор, пока отрезок EP не станет таким же относительно отрезка EG, каким EM является относительно EH. Тогда можно доказать, что перпендикуляры, опущенные из точек N, O, P на прямую EC, падают соответственно в точки K, L, M.

В самом деле, проведем первый из этих перпендикуляров из точки N и обозначим его через NS. Проведем, далее, отрезок EQ, перпендикулярный к EH и равный GH, и на SN отложим отрезок SR, также равный GH. Проведем, наконец, прямые GQ и GR. Тогда в силу леммы II углы EQG и QGH будут прямые и $QG = EH$. Таким же образом и углы SRG и RGH прямые и $RG = SH$; следовательно, отрезки RG и GQ лежат на одной прямой и углы, противоположные при вершине, NGR и EGQ равны. Углы NRG и GQE прямые, а $NG = GE$ по построению. Поэтому $RG = GQ$ и вместе с тем $SH = HE$; а так как по построению $HE = HK$, то $SH = KH$ и точка S совпадает с K. Совершенно такое же рассуждение можно провести и относительно остальных перпендикуляров. Следовательно, прямая PM перпендикулярна к FE; поэтому прямая CD, будучи параллельна MP и проходя внутри треугольника PME, должна при достаточном продолжении пересечь EP».

В 1733 г. итальянский математик, иезуит Иероним Саккери выпустил в свет «Начала» Евклида с весьма замечательными комментариями, о которых нам придется подробно говорить ниже [3]. В обширных рассуждениях, относящихся к V постулату, Саккери посвящает доказательству Насир-Эддина следующие соображения, отчетливо выясняющие несостоятельность этого доказательства. Приводим перевод этих рассуждений Саккери:

«Насир-Эддин требует признания двух положений. Во-первых, что две прямые, расположенные в одной плоскости и встречающие ряд других прямых линий таким образом, что

---

[1]) Это утверждение основано на аксиоме, которую обыкновенно неправильно связывают с именем германского геометра Паша: *если прямая, пересекающая сторону треугольника, входит внутрь его, то она должна из него выйти, т. е. должна встретить периферию треугольника еще в одной точке.* См. ниже, «Геометрические исследования», предложение 3 и к нему примечание [3] (стр. 80 и 128). Эта аксиома в том или ином выражении необходима для обоснования абсолютной геометрии.

[2]) Возвращаемся к оригинальному чертежу (*a*) автора.

[3]) Стр. 167.

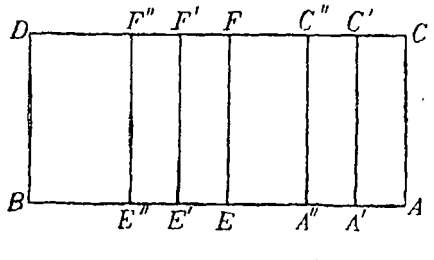
последние постоянно перпендикулярны к одной из них, а другую постоянно пересекают под неравными углами и именно: по одну сторону под острыми углами, а по другую под тупыми углами, — что такие две прямые, говорю я, до тех пор пока они не пересекаются, постоянно приближаются одна к другой в сторону острых углов и, наоборот, в сторону тупых углов постоянно расходятся.

Если других трудностей на его пути нет, я, со своей стороны, охотно признаю это требование Нассир-Эддина, ибо как ра то, что у него остается недоказанным, я самым строгим образом доказал во II приложении к III предложению [1]).

Второе требование Нассир-Эддина представляет собой обращение первого; оно заключается в том, что угол должен в ту сторону, с которой упомянутые перпендикуляры по условию уменьшаются, постоянно оставаться острым, а с противоположной стороны, с которой перпендикуляры возрастают, должен оставаться тупым.

В этом кроется недоразумение. Почему углы (считая от некоторого перпендикуляра, принимаемого за первый), будучи первоначально по одну сторону острыми, не могли бы постоянно возрастать, пока мы не дойдем до прямого угла, т. е. до перпендикуляра, который служит общим перпендикуляром обеих названных прямых; и если это наступит, то хитрые построения Нассир-Эддина, при помощи которых он весьма остроумно, хотя и с большими усилиями, доказывает евклидову аксиому, сводятся на-нет».

Эти соображения Саккери безукоризненно правильны. Поясним их еще несколько на самом ходе доказательства Нассир-Эддина. Леммой I Нассир-Эддин пользуется лишь для доказательства следующей II леммы. Здесь ему нужно показать, что при сделанном им построении в четырехугольнике $ABDC$ внутренние углы C и D прямые. Доказывая это от противного, он принимает, что угол C острый, и тогда согласно принятой лемме перпендикуляры $C'A'$, $C''A''$, ..., идущие к D, должны с той же стороны составлять с CD острые



[1]) Это первое допущение Нассир-Эддина по существу представляет собой только некоторое расширение того положения, которое Прокл называет «Аристотелевой аксиомой»; и именно в этом расширенном виде оно действительно было доказано как Саккери, так и независимо от него Лобачевским.

углы C', C'',... и вместе с тем убывать; поэтому BD не может оказаться равным AC. Между тем, как указывает Саккери, не исключена возможность, что эти углы возрастают, дорастая в некотором положении перпендикуляра FE до прямого; тогда FE (общий перпендикуляр) будет наименьшим расстоянием между прямыми AB и CD, дальнейшие перпендикуляры $F'E'$, $F''E''$ могут возрастать и вновь дорасти до $BD = AC$. Более того, при развитии своих идей Саккери показывает, что отрезок FE, соединяющий середины верхней и нижней сторон четырехугольника, непременно представляет собой общий перпендикуляр; чтобы в этом убедиться, достаточно наложить четырехугольник на самого себя обратной стороной, т. е. так, чтобы точки A и B, а также перпендикуляры AC и BD заместили друг друга; точки E и F при этом не изменят своих положений. Поэтому углы D и C равны, а прямая EF перпендикулярна к обоим «основаниям» AB и CD четырехугольника [см. «Геометрические исследования», предложение 24 [1])].

Продолжая анализ доказательства Насср-Эддина, заметим, что леммой III он для доказательства постулата вовсе не пользуется, ему нужна только лемма II. Какую же роль играет в его рассуждениях лемма III? Она выясняет, что *лемма II вполне равносильна тому, что сумма углов треугольника равна* $2d$; из леммы II Насср-Эддин выводит, что сумма углов треугольника равна $2d$, разрезывая четырехугольник на два прямоугольных треугольника; обратно, если принять, что сумма углов в треугольнике равна $2d$ и, следовательно, в четырехугольнике $4d$, то в четырехугольнике $ABDC$, который Насср-Эддин рассматривает, углы C и D, будучи равны между собой, должны быть прямыми.

Основываясь на постулате о параллельных линиях, Евклид доказывает, что сумма углов в треугольнике равна $2d$; если *принять*, что сумма углов треугольника равна $2d$, то отсюда вытекает лемма II Насср-Эддина и основанное на ней безукоризненное доказательство V постулата. Следовательно, *допущение, что сумма внутренних углов треугольника равна* $2d$, *эквивалентно постулату Евклида.* Таков действительный вывод из рассуждений Насср-Эддина. Этот вывод имеет большое значение; его отчетливо усвоил и формулировал Саккери; это сыграло большую роль в дальнейшей эволюции учения о параллельных линиях.

Доказательство Валлиса

Дж. Валлис пользовался весьма большим авторитетом не только в Англии, но и во всех странах, в которых в ту пору культивировалась математика. 11 июля 1663 г. он прочитал в Оксфорде лекцию,

[1]) Стр. 93.

содержавшую доказательство постулата о параллельных; лекция тем более интересна, что она содержит также и изложение взглядов этого выдающегося математика на существо проблемы о параллельных линиях. Лекция эта опубликована в полном собрании сочинений Валлиса [1]).

Лекция начинается следующими вводными словами, отчетливо выявляющими взгляды Валлиса:

«Как известно, некоторые как древние, так и новые авторы делали Евклиду упрек, что он принял V постулат, или (как говорили другие) XI аксиому, или даже (по исчислению Клавия) XIII аксиому без доказательства, между тем как он должен был бы ее доказать. Именно, порицали, что он принял для прямых линий за очевидное нечто такое, что для линий вообще несправедливо» [2]).

Формулировав постулат о параллельных линиях, Валлис продолжает:

«Между тем большинство этих обвинителей Евклида (по крайней мере, поскольку я их до сих пор изучил) основывают свои доказательства на других допущениях, которые, как мне кажется, ни в коем случае не будут признаны более легкими, чем то, что требует Евклид. Нередко они впадают даже в ту самую ошибку, которой они желают избегнуть; именно, они принимают для прямых линий за истинное нечто такое, что для линий вообще несправедливо, как я это показал в другом месте.

С своей стороны, я без колебаний принимаю то, что требует Евклид; и это не потому, что доказательства, предложенные другими, страдают тем же недостатком, который они порицают у Евклида, или что требования их вовсе не более очевидны; дело в том, что, как мне кажется, совершенно необходимо либо принять этот постулат, либо заменить его другим; и наконец, если даже признать доказуемость этого постулата, то нужно сказать, что в качестве основного положения обыкновенно принимают не только то, что совершенно недоказуемо, но и то, что само по себе настолько очевидно, что не нуждается ни в каком доказательстве; ибо несомненно, некоторые из других аксиом могут быть доказаны, и это было бы нетрудно обнаружить, если бы в этом была нужда [3]).

---

[1]) Demonstratio Postulati Quinti Euclidis. (Operae mathematica, Oxonia, 1693 т. II, стр. 674—678).

[2]) Явное указание на соображения Прокла.

[3]) Очень многие комментаторы Евклида указывали, что II и IV постулаты допускают доказательства.

Но видя, как многие до настоящего времени пытались дать доказательство упомянутого постулата в убеждении, что он в таковом нуждается, а также сделать некоторый вклад в это дело, я попытался дать доказательство, которое вызывало бы меньше возражений, чем доказательства, предложенные до сего времени».

Как и другие авторы, Валлис предпосылает своему доказательству ряд вспомогательных предложений. Одни из них совершенно тривиальны, другие нуждались бы не столько в доказательстве, сколько в уточнении тех понятий, которыми автор оперирует; во всяком случае, первые семь предложений по существу не встречают возражений и здесь не требуют воспроизведения.

Мы ограничимся поэтому только двумя предложениями Валлиса — восьмым и девятым.

«VIII. Наконец, я приму (считая уже известными учение об отношении и понятие о подобных фигурах) следующее положение: *для каждой фигуры всегда существует другая подобная ей фигура произвольной величины.*

Кажется, что это допущение (способность к бесконечному делению и пропорциональному увеличению) вытекает из существа пространственных отношений; именно, ясно, что каждую фигуру можно неограниченно уменьшать и увеличивать (сохраняя их форму)».

За этим следует длинный абзац, в котором Валлис старается еще убедительнее обнаружить допустимость вводимого им основного положения.

Далее идет предложение IX, которое и содержит, собственно, доказательство V постулата.

«IX. Пусть [1]) AB и CD будут прямые, пересекающие неограниченную прямую ACF и образующие с нею по одну сторону внутренние углы BAC и DCA, которые вместе составляют меньше двух прямых.

Я утверждаю, что прямые AB и CD при неограниченном продолжении встречаются и именно с той стороны прямой AF, с которой лежат эти два угла.

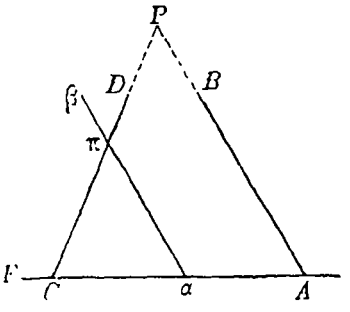
В самом деле, представим себе, что прямая AC [2]), расположенная между ними на неограниченной прямой ACF, прямоли-

---

[1]) Чертеж см. на стр. 52.

[2]) Собственно отрезок AC.

нейно по ней передвигается[1]). Положим далее, что прямая BA опирающаяся на AC, движется вместе с этим отрезком, сохраняя угол BAC, до тех пор, пока $\alpha\beta$, т. е. движущаяся прямая AB, встретит прямую CD (согласно лемме VII) в некоторой точке π. Тогда $\pi C\alpha$ есть треугольник[2]), и (согласно предложению VIII) существует другой подобный ему треугольник любой величины. Поэтому на отрезке CA (как на основании) можно построить треугольник, подобный треугольнику $\pi C\alpha$ с основанием $C\alpha$. Пусть это выполнено и PCA есть этот треугольник».



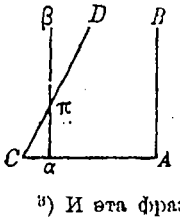
Авторы доказательства постулата о параллельных линиях естественно стараются обеспечить себя от возможных возражений; они очень часто входят в пространные рассуждения о совершенно тривиальных вещах, которыми правильность вывода совершенно не нарушается. Мы опускаем такого рода тривиальные соображения Валлиса и воспроизводим продолжение доказательства:

«Так как PCA есть треугольник, то стороны CP и AP (по определению треугольника) встречаются в точке P[3]); а так как треугольник PCA подобен треугольнику $\pi C\alpha$ (по построению), то каждый угол одного треугольника равен соответствующему углу другого треугольника (согласно определению подобных прямолинейных фигур). В соответствии с этим угол PCA равен углу $\pi C\alpha$, т. е. углу DCA, и прямая CP лежит на продолжении прямой CD; ибо если бы прямая лежала по одну или другую сторону (от CP), то угол PCA был бы больше или меньше угла DCA, между тем как равенство их доказано.

Точно так же угол PAC равен углу $\pi\alpha C$. Но тому же углу $\pi\alpha C$, т. е. углу $\beta\alpha F$, равен угол BAF или BAC, а потому и

---

[1]) Возможность такого передвижения прямолинейного отрезка по прямой, на которой он лежит, подробно обосновывается в лемме I.



[2]) Доказательству того, что такой треугольник действительно образуется, посвящены предпосланные леммы. Эти подготовительные теоремы были бы излишними, если бы Валлис ограничился тем случаем, когда $AB \perp AC$, а угол DCA острый (этим случаем весь вопрос исчерпывается). Опустив из любой точки π на стороне CD угла ACD перпендикуляр $\pi\alpha$, получаем треугольник $\pi C\alpha$.

[3]) И эта фраза характерна в смысле попытки обоснования тривиального утверждения, что стороны треугольника имеют общую точку — вершину.

угол BAC равен углу PAC. Следовательно, прямая AP лежит на продолжении прямой AB (если бы она лежала по одну или другую сторону ее, то углы BAC и PAC не были бы равны, между тем как равенство их доказано).

Таким образом прямая AP совпадает с продолжением прямой AB. Совершенно так же CP и продолжение CD образуют прямую. Но, как уже было показано, AP и CP встречаются в точке P; поэтому встречаются и продолжения прямых AB и CD и именно в этой точке P, т. е. с той стороны прямой BAF, с которой лежат два угла, составляющие меньше двух прямых. Что и требовалось доказать.

Это доказательство я провел по самым строгим правилам, по образцу Евклида, чтоб даже и строгий судья не мог мне сделать упрека в его неполноценности. Однако я совершенно не порицаю Евклида за то, что он не дал доказательства: напротив, я не имел бы ничего против того, чтобы он ввел еще большее число недоказанных постулатов, например если бы он (вместе с Архимедом) постулировал, что *прямая линия короче всех линий, проходящих между теми же концами*; ему бы тогда не пришлось излагать 19 предложений, раньше чем доказать, что *две стороны треугольника, вместе взятые, больше третьей, и многое другое, что само по себе очевидно*».

Существенная заслуга Валлиса заключается в том, что он четко формулирует то допущение, которое в его рассуждении заменяет постулат о параллельных линиях. В отличие от многих других авторов, которые делают такое же допущение молчаливо, скрывая это от себя и от читателя, Валлис высказывает убеждение, что без специального постулата учение о параллельных линиях обойтись не может. Валлис обнаружил, что *допущение существования подобных фигур эквивалентно постулату Евклида*; в этом — значение его рассуждений. Саккери, анализируя доказательство Валлиса, уточнил этот результат; он показал, что достаточно принять существование двух подобных треугольников, т. е. двух треугольников, которые имеют соответственно равные углы, но неравные стороны, чтобы доказать евклидов постулат.

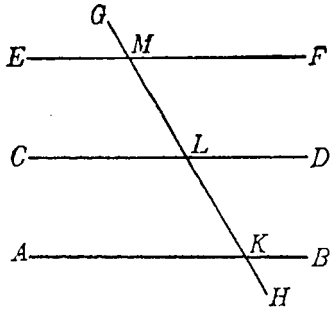
Доказательство Л. Бертрана

Известно, что XVIII век был эпохой упадка точности инфинитезимального метода. Это было время, когда блестящие успехи исчисления бесконечно малых привели к широкому его применению, часто выполнявшемуся без того контроля, который гарантирует правильность выводов. Те условия, при которых бесконечно малые и бесконечно большие величины становятся точными математическими понятиями,

еще не были ни выявлены, ни установлены; вследствие этого применение их нередко приводило к выводам, иногда необоснованным, иногда вовсе неправильным. Эта печать эпохи, естественно, отразилась и на исследованиях, относившихся к теории параллельных линий. Появились доказательства постулата при помощи бесконечно малых и бесконечно больших величин и, конечно, в таком их применении, которое не соответствовало требованиям точного анализа. Наиболее остроумное из этого рода доказательств относится к концу XVIII в. и принадлежит швейцарскому математику Луи Бертрану (1731—1812). В 1778 г. им было выпущено двухтомное сочинение «Новое построение элементарной части математики», представлявшее собой попытку обоснованного построения алгебры и геометрии [1]).

Второй том этого сочинения посвящен геометрии. В 1812 г. этот том был выпущен отдельным изданием в значительно сокращенном и переработанном виде [2]). В обоих изданиях этого сочинения помещено одно и то же доказательство V постулата, основанное на применении бесконечно больших величин; мы воспроизводим его в точном переводе.

«Теорема VII. *Если две прямые AB, CD (черт. 14)* [3]), *проведенные в одной плоскости, образуют с третьей прямой HG внутренние углы BKL, DLK, составляющие вместе два прямых, то часть плоскости, которую они ограничивают, столь мала по отношению ко всей плоскости, что содержится в ней бесконечное число раз.*



Черт. 14.

Так как, по предположению, сумма углов *BKL*, *DLK* равна двум прямым углам и смежные углы *DLK*, *DLM* также составляют два прямых, то углы *BKL* и *DLM* равны. Если поэтому отложим отрезок $LM = KL$ и через точку *M* проведем прямую *MF* в таком направлении, чтобы $FML = DLK$, а затем передвинем полосу *ACDB* вдоль *HG*, пока точка *K* не достигнет *L*; если точка *L* при этом упадет в *M*, то полоса *ACDB* совпадет с полосой *CEFD*, ввиду того, что равные углы совместятся, как и равные отрезки.

Но теперь, раз оказалось возможным, взяв на прямой *HG* длину *LM*, равную *KL*, построить на плоскости *ABCD* полосу

---

[1]) L. Bertrand — Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques. Genève, 1778.

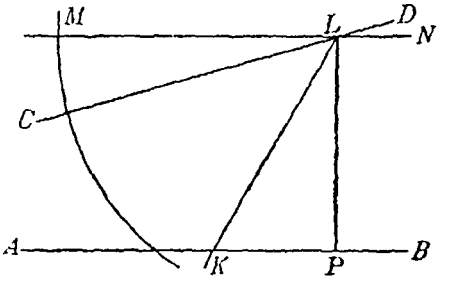
[2]) L. Bertrand — Éléments de géométrie. Paris, 1812.

[3]) Номера чертежей из книги Бертрана.

CEFD, равную *ACDB*, то нет никакого сомнения и в том, что посредством бесконечного множества отрезков, равных *KL* и (*последовательно*) *взятых на ПG*, можно на этой же плоскости построить бесконечное множество полос, равных *ACDB*. Следовательно, если две проведенные на плоскости прямые образуют с третьей внутренние углы, составляющие два прямых угла, то часть плоскости, которую они ограничивают, столь мала по отношению ко всей плоскости, что содержится в ней бесконечное число раз. .

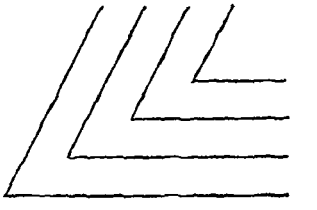
Теорема VIII. *Когда две прямые образуют с третьей внутренние углы, сумма которых не равна двум прямым углам, эти прямые пересекаются по ту сторону, где эта сумма меньше двух прямых.*

Положим, что две прямые *LC* и *KA* образуют с третьей *KL* внутренние углы *AKL* и *CLK*, составляющие в сумме меньше, чем два прямых угла; тогда существует некоторая прямая *LM*, образующая с *LC* такой угол *CLM*, что $AKL + KLC + CLM = AKL + KLM =$ двум прямым. Следовательно, если бы прямая *LC* не пересекала *KA*, угол *MLC* был бы заключен целиком внутри полосы *MLKA*. Но эта полоса содержится в плоскости бесконечное число раз, между тем как угол *MLC* содержится в ней лишь столько раз, сколько дуга *MC* содержится в окружности, описанной из центра *L* радиусом *LM*. Стало быть, угол *MLC* не заключен целиком внутри полосы *MLKA*; поэтому его сторона *LC* выходит из этой полосы и пересекает *KA*».



Черт. 15.

Слабая сторона этого рассуждения, лишающая его доказательной силы, заключается в том, что ни вся плоскость, ни часть ее, содержащаяся между сторонами угла, не могут быть рассматриваемы как определенные величины, допускающие точное количественное сравнение. В евклидовой плоскости каждый угол может быть последовательно бесчисленное множество раз помещен внутри самого себя (см. приведенный здесь чертеж); рассуждая, как Бертран, мы могли бы притти к заключению, что содержащаяся между сторонами угла площадь составляет сколь угодно малую часть себя самой.



При всем том, наглядная образность соображений Бертрана встретила признание у многих серьезных математиков того времени. Крелль еще в 1835 г. поместил в своем журнале модификацию этого доказательства [1]). Вообще доказательства этого рода вносили немало путаницы в учение о параллельных линиях.

Доказательства Лежандра

XIX век начинается весьма замечательными исследованиями Лежандра (1752—1833) по теории параллельных линий. В 1794 г. Лежандр выпустил в свет «Начала геометрии» — учебное руководство по элементарной геометрии, получившее весьма широкое распространение [2]).

Повидимому, составление этих «Начал» привело Лежандра к систематическому размышлению над теорией параллельных линий. Лежандр в первых восьми изданиях своей книги не вводит вовсе постулата о параллельных линиях, а дает вместо этого его доказательство. Это доказательство меняется от издания к изданию, так как автор самостоятельно или по указанию других обнаруживает в своих рассуждениях недочеты, лишающие их доказательной силы. После восьмого издания Лежандр отказывается от доказательства постулата и в девятом издании возвращается по существу к системе Евклида. Однако в двенадцатом издании (1823) Лежандр вновь пытается уточнить одно из прежних доказательств, и эта новая модификация доказательства сохраняется в тринадцатом и четырнадцатом изданиях, вышедших при жизни автора. В 1833 г. Лежандр изложил все свои соображения по теории параллельных линий в обширной статье, помещенной в «Мемуарах Парижской академии» [3]). Мы изложим содержание исследований Лежандра именно в той концепции, которая нашла себе место в этом заключительном мемуаре. Но необходимо иметь в виду, что все эти соображения Лежандра были уже известны с 1823 г., т. е. после появления 12-го издания «Начал».

Мемуар Лежандра озаглавлен очень осторожно: «Размышления по теории параллельных линий». Все рассуждения Лежандра распадаются на две серии, соответственно двум различным замыслам, двум исходным пунктам. Первый замысел связывает учение о парал-

---

[1]) A. L. Crelle — Théorie des parallèles. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 11, Berlin, 1835.

[2]) A. M. Legendre — Éléments de géométrie. Paris, 1794.

[3]) A. M. Legendre — Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle. Mémoires de l'Académie des Sciences, Paris, 1833, т. XII, стр. 367—410.

лельных линиях с суммой углов прямолинейного треугольника, а второй основан на так называемом принципе однородности.

Как обнаружил Нассир-Эддин, предложение, что сумма углов прямолинейного треугольника равна двум прямым, ведет к точному доказательству постулата о параллельных линиях. Сообразно этому Лежандр ставит себе целью доказать, не пользуясь постулатом о параллельных, что сумма углов треугольника равна двум прямым. Это и составляет первый замысел Лежандра.

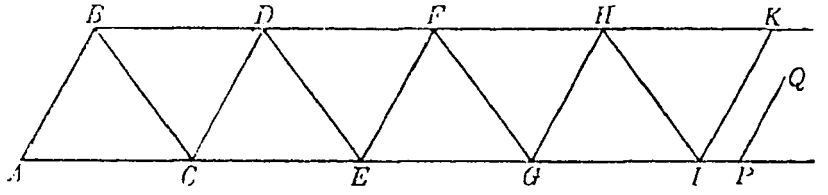
Само доказательство разбивается на две части: сначала Лежандр доказывает, что сумма углов треугольника не может превысить двух прямых, а затем он старается доказать, что сумма углов треугольника не может быть и меньше двух прямых. Первое предложение доказано безукоризненно; все же попытки доказать второе предложение содержат ту или иную погрешность. Лежандр дает два различных чрезвычайно остроумных доказательства первого предложения, из которых одно помещено в третьем издании «Начал» (1800), а другое — в двенадцатом издании (1823). Эти два доказательства мы и приводим в переводе.

Вот первое доказательство:

«Предложение XIX. Лемма. *Сумма трех углов треугольника не может быть больше двух прямых углов.*

Пусть, если возможно, ABC будет треугольник, в котором сумма трех углов больше двух прямых.

На продолжении прямой AC возьмем $CE = AC$; построим угол $ECD = CAB$ и сторону $CD = AB$; соединим DE и BD. Тре-



угольник CDE будет равен треугольнику ABC, так как они имеют одинаковый угол, содержащийся между соответственно равными сторонами; следовательно, угол $CED = ACB$, угол $CDE = ABC$ и третья сторона ED равна третьей стороне BC. Так как ACE есть прямая линия, то сумма углов ACB, BCD, DCE равна двум прямым углам. Однако мы предположили, что сумма углов треугольника ABC больше двух прямых; поэтому $CAB + ABC + ACB > ACB + BCD + ECD$; отнимая от обеих частей общее слагаемое ACB и равные слагаемые $CAB = ECD$, получим $ABC > BCD$, а так как стороны AB, BC треугольника ABC

соответственно равны сторонам CD, CB треугольника BCD, то отсюда следует, что третья сторона AC больше третьей стороны BD.

Представим себе теперь, что прямая AC неограниченно продолжена и последовательно построены равные и подобным образом расположенные треугольники ABC, CDE, EFG, GHI и т. д. Если соединим соседние вершины прямыми BD, DF, FH, HK, то вместе с тем образуется ряд промежуточных треугольников BCD, DEF, FGH и т. д., которые все будут равны между собой, так как все они будут иметь по равному углу, содержащемуся между соответственно равными сторонами. Следовательно,

$$BD = DF = FH = HK = \ldots;$$

имея это в виду и принимая во внимание, что $AC > BD$, положим разность $AC - BD = D$. Ясно, что в таком случае $2D$ будет разность между прямой ACE, равной $2AC$, и прямой или ломаной линией BDF, равной $2BD$; таким образом $AE - BF = 2D$. Таким же образом найдем, что $AG - BH = 3D$, $AI - BK = 4D$ и т. д.

Но как бы мала ни была разность D, если мы ее повторим достаточное число раз, она превзойдет любую наперед заданную величину. Можно, следовательно, предположить, что ряд треугольников продолжен настолько далеко, что разность $AP - BQ$ будет больше $2AB$; мы будем, таким образом, иметь $AP > BQ + 2AB$. С другой стороны, прямая AP короче ломаной $ABQP$; так что $AP < AB + BQ + QP$ или $AP < BQ + 2AB$. Таким образом гипотеза, из которой мы исходили, привела нас к противоречию. Следовательно, сумма углов треугольника не может превосходить двух прямых».

Весьма замечательно, что через 28 лет после того, как это доказательство было опубликовано Лежандром (1800), Гаусс нашел то же самое доказательство. На титульном листе принадлежавшего Гауссу экземпляра «Начал» Евклида сохранилась запись того же доказательства с надписью: «Найдено 18 ноября 1828 года»; доказательство Лежандра, помещенное в несколько упрощенном виде [1]) в элементарном учебнике, от Гаусса, очевидно, ускользнуло.

Чтобы доказать, что сумма углов треугольника равна $2d$, оставалось обнаружить, что она не может быть меньше $2d$. Лежандр в том же издании своих «Начал» выполняет это следующим образом.

---

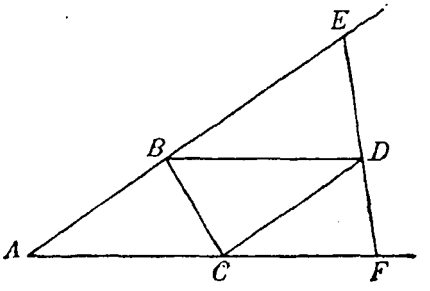
[1]) Изложение Лежандра, очевидно, имеет в виду учеников, для которых предназначены его «Начала».

«Предложение XX. Теорема. *В каждом треугольнике сумма трех углов равна двум прямым.*

Доказав, что сумма трех углов не может превышать двух прямых, остается обнаружить, что она не может быть меньше двух прямых.

Пусть ABC будет данный треугольник и пусть, если это возможно, сумма его углов равна $2P-Z$, где P означает прямой угол, а Z — какую-нибудь величину, на которую сумма углов, согласно предположению, меньше двух прямых углов.

Пусть A будет наименьший из углов треугольника ABC. При противоположной стороне BC построим угол $BCD = ABC$ и угол $CBD = ACB$; треугольники BCD и ABC будут равны, так как они имеют общую сторону BC, к которой прилежат соответственно равные углы [1]). Через точку D проведем какую угодно прямую EF, но таким образом, чтобы она встречала продолжения сторон угла A в точках E и F. Так как сумма углов в каждом из треугольников ABC и BCD составляет $2P-Z$, а в каждом из треугольников EBD и DCF она не может превзойти $2P$, то сумма всех углов четырех треугольников ABC, BCD, EBD, DCF не превосходит $4P-2Z+4P$, т. е. $8P-2Z$.



Если из этой суммы вычтем сумму углов при точках B, C, D, которая составляет $6P$ (так как сумма углов, образовавшаяся при каждой из точек, есть $2P$), то остаток будет равен сумме углов треугольника AEF, которая, таким образом, не превзойдет $8P-2Z-6P$, т. е. $2P-2Z$.

Итак, в то время как сумма углов треугольника ABC меньше двух прямых на Z, эта сумма в треугольнике AEF меньше двух прямых на $2Z$.

При посредстве треугольника AEF можно таким же образом построить третий треугольник, сумма углов которого будет меньше $2P-4Z$; затем мы построим четвертый треугольник, сумма углов которого отличается от $2P$ больше чем на $8Z$; это можно продолжать неограниченно.

---

[1]) На DBC можно смотреть как на треугольник ABC, который в опрокинутом виде приложен к стороне BC. При этом сторона BD пройдет внутри угла CBE, потому что угол $DBC = BCA$ меньше угла CBE (внутренний угол треугольника меньше внешнего, с ним не смежного); по той же причине сторона DC будет расположена внутри угла BCF. Вершина D будет, таким образом, лежать внутри угла EAF по другую сторону BC относительно A.

Однако, сколь бы мало ни было Z по сравнению с прямым углом, последовательность Z, $2Z$, $4Z$, $8Z$ и т. д., члены которой постоянно удваиваются, рано или поздно приведет к члену, равному $2P$ или большему $2P$. Мы придем тогда к треугольнику, к сумме углов которого нужно будет прибавить $2P$ или больше $2P$, чтобы в результате все-таки получить $2P$. Это — вывод, очевидно, абсурдный. Следовательно, гипотеза, от которой мы исходили, не может иметь места; это значит, невозможно, чтобы сумма углов треугольника ABC была меньше двух прямых. А так как сумма углов треугольника в силу предыдущего предложения не может также превышать $2P$, то она равна $2P$».

Это рассуждение, которому нельзя отказать в исключительном остроумии, все же страдает существенным недостатком, лишающим его доказательной силы. Оно предполагает, что *через точку D, расположенную внутри угла, всегда можно провести прямую EF, пересекающую обе стороны угла*: это есть допущение, эквивалентное постулату Евклида. И Лежандр, очевидно, сознавал, что в этом есть дефект. Это видно из следующего подстрочного примечания, помещенного в том же третьем издании.

«Мы предположили, что A есть самый меньший из углов ABC и, следовательно, не превышает двух третей прямого угла; этим мы имели в виду сделать более ощутимым, что прямая, проведенная через точку D, может одновременно встретить продолжения сторон AB и AC».

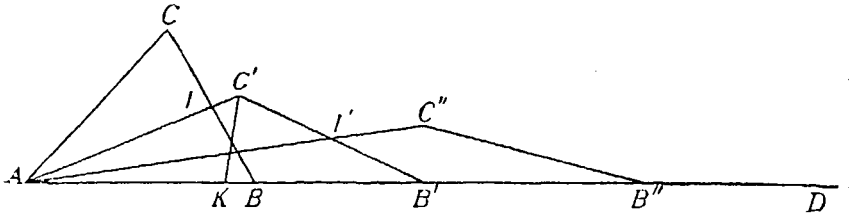
Совершенно ясно, что эта деталь ничего не изменяет. Лежандр все же сохранил это доказательство с третьего по восьмое издание. Как уже сказано, в изданиях с девятого по одиннадцатое Лежандр возвратился к схеме Евклида; но с двенадцатого по четырнадцатое появляется другая модификация того же доказательства, первая часть которого сыграла в литературе существенную роль. Приводим перевод этого второго доказательства.

«Предложение XIX. Теорема. *Во всяком треугольнике сумма трех углов равна двум прямым.*

Пусть ABC будет данный треугольник, в котором будем считать AB самой большой и BC самой малой стороной, так что ACB есть наибольший, а BAC — наименьший угол треугольника. Через точку A и через середину I противолежащей стороны BC проведем прямую AI, которую продолжим до точки C' таким образом, чтобы $AC' = AB$; далее, продолжим AB до B' таким образом, чтобы AB' превышало вдвое AI.

Если через A, B, C обозначим три угла треугольника ABC и таким же образом через A', B', C' обозначим три угла треугольника $AB'C'$, то я утверждаю, что $C' = B + C$ и $A = A' + B'$; отсюда следует, что $A + B + C = A' + B' + C'$, т. е. что сумма трех углов в обоих треугольниках одна и та же.

Чтобы это доказать, отложим $AK = AI$ и соединим точки C' и K; получим треугольник $C'AK$, равный треугольнику BAI, ибо в этих двух треугольниках общий угол A содержится между соответственно равными сторонами; именно: $AC' = AB$ и $AK = AI$; поэтому третья сторона $C'K$ равна третьей стороне BI, угол $AC'K = ABC$ и угол $AKC' = AIB$.



Теперь утверждаю, что треугольник $B'C'K$ равен треугольнику ACI, ибо сумма двух смежных углов AKC' и $C'KB'$ равна двум прямым углам, так же как и сумма двух углов $AIC + AIB$; вычитая из обеих сумм равные углы AKC' и AIB, найдем, что угол $C'KB' = AIC$. Эти равные углы заключены в двух треугольниках между соответственно равными сторонами, именно: $C'K = IB = CI$ и $KB' = AK = AI$, ибо мы предположили $AB' = 2AI = 2AK$. Следовательно, два треугольника $B'C'K$ и ACI равны; поэтому сторона $B'C' = AC$, угол $B'C'K = ACB$ и угол $KB'C' = CAI$.

Отсюда следует:

1) что угол $AC'B'$, обозначенный через C', состоит из двух углов, равных углам B и C треугольника ABC, так что $C' = B + C$;

2) что угол A треугольника ABC состоит из угла A', или $C'AB'$, принадлежащего треугольнику $AB'C'$, и из угла CAI, равного углу B' того же треугольника; таким образом $A = A' + B'$; следовательно, $A + B + C = A' + B' + C'$. С другой стороны, так как по предположению $AC < AB$ и, следовательно, $C'B' < AC'$, то в треугольнике $AC'B'$ угол при вершине A, обозначенный через A', меньше угла B'; а так как сумма этих двух углов равна углу A данного треугольника, то отсюда следует, что угол A' меньше $\frac{1}{2} A$.

Если применим то же построение к треугольнику $AB'C'$, то получим третий треугольник $AB''C''$, углы которого обозначим

через A'', B'', C''; мы будем тогда иметь аналогичное равенство $C'' = C' + B'$, $A' = A'' + B''$, откуда следует, что $A' + B' + C' = A'' + B'' + C''$. Таким образом сумма трех углов в обоих треугольниках одна и та же, но вместе с тем угол $A'' < \frac{1}{2} A'$ и, следовательно, $A'' < \frac{1}{4} A$.

Продолжая неопределенно ряд треугольников $AC'B'$, $AC''B''$ и т. д., мы придем к треугольнику abc, в котором сумма трех углов будет та же, что в данном треугольнике ABC, но в котором угол a станет меньше любого данного члена убывающей прогрессии $\frac{1}{2} A$, $\frac{1}{4} A$, $\frac{1}{8} A$, ...».

До сих пор рассуждения совершенно безукоризненны и содержат в себе новое доказательство того, что сумма внутренних углов прямолинейного треугольника не может превышать двух прямых. В самом деле, предположим, что в треугольнике ABC сумма углов равна (придерживаясь обозначений Лежандра) $2D + \alpha$ [1]). В приведенной выше убывающей геометрической прогрессии найдется член, меньший α; поэтому, продолжив достаточное число раз построение последовательных треугольников, придем к треугольнику abc, в котором угол $a < \alpha$. Но так как сумма углов треугольника abc осталась та же, что и в треугольнике ABC, т. е. равна $2D + \alpha$, то сумма двух углов $b + c$ должна оказаться больше, чем $2D$; но это не может иметь места, так как каждый из них меньше угла, смежного со вторым из этих двух углов. Некоторой модификацией этого доказательства пользуется также Лобачевский (см. «Геометрические исследования», предложение 19).

Лежандр идет, однако, дальше и пытается при помощи того же построения доказать, что сумма углов треугольника равна двум прямым.

Приводим заключительную часть его рассуждения:

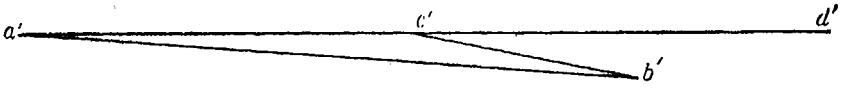
«Можно, следовательно, предположить, что этот ряд треугольников продолжен до тех пор, пока угол a не станет меньше всякого данного угла.

И если с помощью треугольника abc построим следующий треугольник $a'b'c'$, то сумма $a' + b'$ углов этого последнего будет равна углу a и, следовательно, будет меньше любого данного угла; отсюда видно, что сумма трех углов треугольника $a'b'c'$ сводится к одному только углу c'.

Чтобы иметь точную меру этой суммы, продолжим сторону $a'c'$ в направлении к d' и обозначим через x' внешний угол

[1]) В этом издании Лежандр обозначает прямой угол через D.

$b'c'd'$; если прибавим этот угол к углу треугольника $a'c'b'$, то получим в сумме два прямых угла. Обозначая поэтому прямой угол через D, получим $c' = 2D - x'$; следовательно, сумма углов треугольника $a'b'c'$ будет $2D + a' + b' - x'$.



Но легко понять, что стороны и углы треугольника $a'b'c'$ при том же построении меняются таким образом, что мы последовательно приходим к треугольникам, в которых углы a' и b' приближаются к своим пределам, т. е. к нулю. В этом предельном положении прямая $a'b'c'$ сливается с $a'b'$; три точки a', c', b', в конце концов, располагаются в точности по прямой линии; тогда углы b' и x' обращаются в нуль вместе с углом a' и количество $2D + a' + b' - x'$, выражающее сумму трех углов треугольника $a'c'b'$, сводится к $2D$, и, следовательно, сумма углов треугольника равняется двум прямым».

Это рассуждение обнаруживает, что даже такой геометр, как Лежандр, не был достаточно осторожен в применении метода бесконечно малых. Когда он говорит, что углы a' и b' становятся менее любого данного угла, то получается впечатление, что наступит момент, когда эти углы станут меньше любого угла, как бы мал он ни был; это, конечно, лишено смысла. В действительности же доказано лишь то, что углы a' и b' стремятся к нулю; что касается того, что ломаная $a'c'b'$ стремится слиться с прямой $a'b'$ и что угол x' стремится к нулю, это остается совершенно необоснованным, и рассуждение лишено доказательной силы. Это было указано Штейном в «Анналах Жергона» в 1824 г.[1]).

Таким образом, все эти рассуждения Лежандра действительно устанавливают только, что сумма углов треугольника не может превысить двух прямых. К этому предложению Лежандр в примечаниях и в упомянутой выше статье, помещенной в «Мемуарах Парижской академии», присоединяет еще один важный факт: он обнаруживает, что сумма углов равна $2d$ во всяком треугольнике, если она равна $2d$ хотя бы в одном треугольнике, и, следовательно, она меньше $2d$ во всяком треугольнике, если существует хотя бы один треугольник, в котором сумма углов меньше $2d$.

Все изложенные рассуждения Лежандра представляют, как мы видим, развитие одного и того же замысла, сводящегося к попытке

[1]) J. P. W. Stein — «Examen de quelques tentatives de théorie des parallèles «Annales de Mathématiques pures et appliquées», 15, Nimes, 1824.

доказать, не опираясь на постулат о параллельных линиях, что сумма углов в прямолинейном треугольнике равна двум прямым. Рассуждения, вытекающие из другого замысла и основанные на так называемом «принципе однородности», изложены в приложении к первому изданию «Начал» (1794 г.)[1]; они развиты также в «Размышлениях», помещенных в «Мемуарах». Эти рассуждения настолько пространны, что приводить полный их перевод нецелесообразно. Герлинг[2] в письме к Гауссу от 11 марта 1816 г. чрезвычайно удачно в нескольких строках излагает сущность замысла Лежандра. Мы приводим это письмо Герлинга и ответ Гаусса:

«. . .В заключение вспоминаю, что я уже давно собирался спросить Ваше мнение о лежандровой теории параллельных линий, изложенной в его «Началах геометрии». Он определяет прямую линию как кратчайший путь между двумя точками и с помощью этого определения доказывает, что сумма трех углов треугольника не превышает $2R$; затем он доказывает также, что она не может быть и меньше $2R$, при этом он, однако, принимает, что через точку, лежащую внутри угла, меньшего $\frac{2}{3}R$, всегда можно провести прямую линию таким образом, чтобы она пересекла обе стороны угла. В шестом издании он это допущение пытается оправдать в особом примечании. Мне кажется, однако, что в этом кроется та же ошибка, на которую Вы мне указывали во время моего последнего пребывания в Геттингене. Он признает это допущение *достаточно очевидным* (assez évident) и полагает, что достигнуть большей строгости невозможно, если не исходить из другого определения прямой линии.

Вслед за этим он, однако, доказывает, что сумма трех углов треугольника должна быть равна $2R$, еще другим способом, который кажется мне убедительным. Рассуждение это состоит примерно в следующем:

Двумя углами и стороной, к которой эти углы прилегают, треугольник вполне определяется, так что

$$C = \varphi(A, B, c).$$

Если примем прямой угол за единицу, то C, A, B будут числа. Отсюда следует, что c не должно входить в функцию φ, так как в противном случае мы имели бы

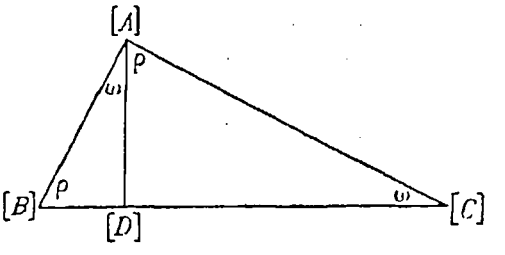
$$c = \varphi(C, A, B) = \text{числу},$$

[1]) Note IV.

[2]) Gerling, Christian Ludwig (1788—1864), ученик и друг Гаусса, в то время профессор математики в Марбургском университете.

что нелепо [1]). Вследствие этого в прямоугольном треугольнике сумма двух острых углов равна $2R$, откуда все остальное уже вытекает [2]).

Я это предложение читал у Лежандра еще тогда, когда работал в Геттингене; возвращаясь в последний раз из Геттингена, я очень огорчался, что мне не пришло в голову Вас об этом спросить, когда я имел удовольствие слышать Ваше мнение по (всему) этому вопросу. Теперь, прочитав это вновь, вижу, что на „сделанное ему возражение", связанное с сферическим треугольником, Лежандр отвечает, что там имеет место не равенство $C = \varphi(A, B, c)$, а $C = \varphi(A, B, c \text{ rad})$ или просто $C = \varphi(A, B, \frac{c}{r})$, вполне согласное с законом однородности. Это последнее мне несовсем ясно, и я очень хотел бы, чтобы Вы при случае упомянули обо всем этом предмете в нескольких словах» [3]).



---

[1]) В этом и заключается принцип однородности: c представляет собой линейную величину, а потому не может выражаться отвлеченным числом.

[2]) К письму приложен приводимый и здесь чертеж, который предназначается для того, чтобы это утверждение оправдать. Если c из предыдущего уравнения выпадает, то оно имеет вид: $C = \varphi(A, B)$, т. е. каждый угол треугольника определяется двумя другими углами. Если A есть прямой угол, то это соотношение принимает вид $C = \chi(B)$, т. е. в прямоугольном треугольнике каждый острый угол определяется вторым острым углом. Если поэтому острые углы треугольника ABC обозначим через ρ и ω, то $\omega = \chi(\rho)$, $\rho = \chi(\omega)$. Если теперь из вершины прямого угла опустим перпендикуляр AD на гипотенузу, то он разобьется на два прямоугольных треугольника ABD и ACD; из прямоугольного треугольника ABD следует, что $\angle BAD = \chi(\rho) = \omega = C$, таким же образом $\angle CAD = \chi(\omega) = \rho = B$; поэтому $\omega + \rho = d$. Таким образом $A + B = d$.

[3]) Сделанное Лежандру возражение заключается в том, что в сферическом треугольнике угол C определяется двумя другими углами A, B и стороной c. Соотношение

$$C = \varphi(A, B, c),$$

таким образом, в сферической тригонометрии имеет место, и принцип однородности нарушается. Почему же такое же соотношение не может иметь места и в прямолинейной тригонометрии? Лежандр на это, в свою очередь, справедливо возражает, что упомянутое соотношение в сферической тригонометрии имеет место в том случае, если под c разуметь угловое значение стороны; если же под c разуметь длину стороны, то ее угловое значение выразится отвлеченным числом $\frac{c}{r}$, где r — радиус сферы. Предыдущее уравнение принимает поэтому вид

$$C = \varphi\left(A, B, \frac{c}{r}\right),$$

и принцип однородности, таким образом, не нарушается.

Гаусс ответил Герлингу (в письме от 11 апреля 1816 г.) следующими словами:

«Вас интересует мое мнение о лежандровом доказательстве теории параллельных линий. Я должен признаться, что в моих глазах его вывод не имеет никакой доказательной силы. Он выводит, что $c = \varphi(A, B, C)$, следовательно = числу, что нелепо. Это „следовательно" в действительности вовсе не следует; равенство $c = \varphi(A, B, C)$ говорит только, что c определено, коль скоро задано A, B, C. Это, однако, не исключает возможности, что в состав функции φ не входит какая-нибудь постоянная линия. Из уравнения $C = \varphi(A, B, c)$ сторона c вовсе не должна выпасть; она может вполне оставаться, если функция φ содержит постоянную линию, равную m, так что собственно

$$C = \varphi\left(A, B, \frac{c}{m}\right).$$

Как легко доказать, если евклидова геометрия не есть истинная геометрия, то подобных фигур вовсе не существует; в равностороннем треугольнике угол меняется вместе с величиной стороны, в чем я ничего абсурдного не нахожу. Угол представляет собой в этом случае функцию от стороны, а сторона — функцию от угла, однако, естественно, такую функцию, в состав которой еще входит постоянная линия. Кажется парадоксальным, что возможна прямая линия, как бы заданная a priori; но я не нахожу в этом ничего противоречивого. Было бы даже желательно, чтобы геометрия Евклида не была истинной, потому что мы тогда располагали бы общей мерой a priori. Например, за единицу длины можно было бы принять сторону равностороннего треугольника, угол которого $= 59°59'59'',99999$» [1]).

Приведем еще несколько строк из другого письма Гаусса, характерных для тех настроений, которые по вопросу о теории парал-

---

[1]) Отчетливое понимание заключительной фразы предполагает уже знакомство с неевклидовой геометрией. В неевклидовой геометрии, которую здесь имеет в виду Гаусс, любыми тремя углами, сумма которых меньше 180°, вполне определяется некоторый треугольник; эта сумма может сколь угодно мало отличаться от 180°. Если бы в нашем пространстве имела место эта неевклидова геометрия, то мы могли бы, например, все три угла взять равными $59°59'59'',99999$ (так что сумма углов отличалась бы от 180° на $0'',00003$); существовал бы вполне определенный равносторонний треугольник, имеющий эти углы. Сторону этого треугольника можно было бы принять за единицу меры; это была бы «общая», «абсолютная» мера, — как говорит Гаусс «мера a priori», т. е. устанавливаемая без прямого задания эталона.

лельных линий сложились в начале XIX в., через 1200 лет после Прокла, так убежденно утверждавшего, что постулат о параллельных надо изъять из числа недоказуемых положений.

В 1816 г. Гаусс поместил в Геттингенском библиографическом журнале [1]) рецензию на две брошюры, посвященные доказательству постулата о параллельных линиях. Рецензия начинается следующими словами:

> «В области математики найдется мало вещей, о которых было бы написано так много, как о пробеле в начале геометрии при обосновании теории параллельных линий. Редко проходит год, в течение которого не появлялась бы новая попытка восполнить этот пробел. И все же, если хотим говорить честно и открыто, то нужно сказать, что по существу мы не ушли в этом вопросе дальше, чем Евклид, за 2000 лет.
>
> Такое откровенное и открытое признание, на наш взгляд, более соответствует достоинству науки, чем тщетные попытки скрыть этот пробел, восполнить который мы не в состоянии, бессодержательным сплетением призрачных доказательств».

Н. И. Лобачевский

Работы Лежандра по теории параллельных линий были хорошо известны именно потому, что они были помещены в различных изданиях его «Начал», получивших очень широкое распространение. Повидимому, они и послужили точкой отправления исследований Н. И. Лобачевского; это можно заключить из его собственных указаний в различных его работах. Во всяком случае, в начале 20-х годов прошлого века Лобачевский занялся теорией параллельных линий и пролил полный свет на эту задачу, занимавшую геометров в течение двух тысяч лет; он дал полное ее решение. Мы до сих пор еще не располагаем обстоятельным жизнеописанием этого гениального ученого [2]). Все материалы, которые могут служить для составления такого жизнеописания, нуждаются еще в тщательном изучении. Редакция настоящего издания надеется иметь возможность поместить в последнем томе обстоятельную биографию Н. И. Лобачевского; здесь же ограничимся следующими краткими сведениями о его жизни и деятельности.

---

[1]) C. F. Gauss — Besprechung von Schwab (1814) und Metternich (1815), Göttingenische Gelehrte Anzeigen, 63 (20 April), 1816.

[2]) Более других выяснению жизни, личности и истории творчества Н. И. Лобачевского содействовал покойный профессор Казанского университета А. В. Васильев. Укажем здесь его брошюру «Николай Иванович Лобачевский», С.-Петербург, 1914 г.

Н. И. Лобачевский родился 22 октября 1793 г. в Нижнем Новгороде. Отец его Иван Максимович — по одним сведениям землемер, по другим архитектор, — повидимому, скончался в 1797 г. [1]). После его смерти его вдова, Прасковья Александровна Лобачевская, вместе с тремя сыновьями-погодками (Николай был средний из них) переехала в Казань, повидимому, для того чтобы дать детям лучшее образование: в то время на всю восточную Россию существовала только одна гимназия в Казани, в которую П. А. Лобачевская и определила всех троих своих сыновей. Все дети учились успешно; когда они окончили гимназию, П. А. Лобачевская в числе других родителей учеников гимназии получила предложение определить своих сыновей в открытый незадолго перед тем (1805 г.) Казанский университет на казенный счет с тем, чтобы они после окончания университета шесть лет служили по специальности. Мать дала на это согласие; Н. И. Лобачевский был зачислен в число студентов Казанского университета 14 февраля 1807 г., когда ему шел только четырнадцатый год.

В первые годы своего существования Казанский университет не имел еще четкого разделения на факультеты; Лобачевский, повидимому, под влиянием матери, был склонен изучать медицину, но в университете его интересы были направлены в другую сторону. При открытии университета попечителем учебного округа был назначен вице-президент Академии наук, известный астроном С. Я. Румовский, человек большого образования и широкого кругозора. Благодаря его усилиям преподавание в новом университете, особенно в области близких ему физико-математических дисциплин, было даже по мнению профессора Энгеля поставлено на такую высоту, на которой оно в то время стояло лишь в немногих германских университетах.

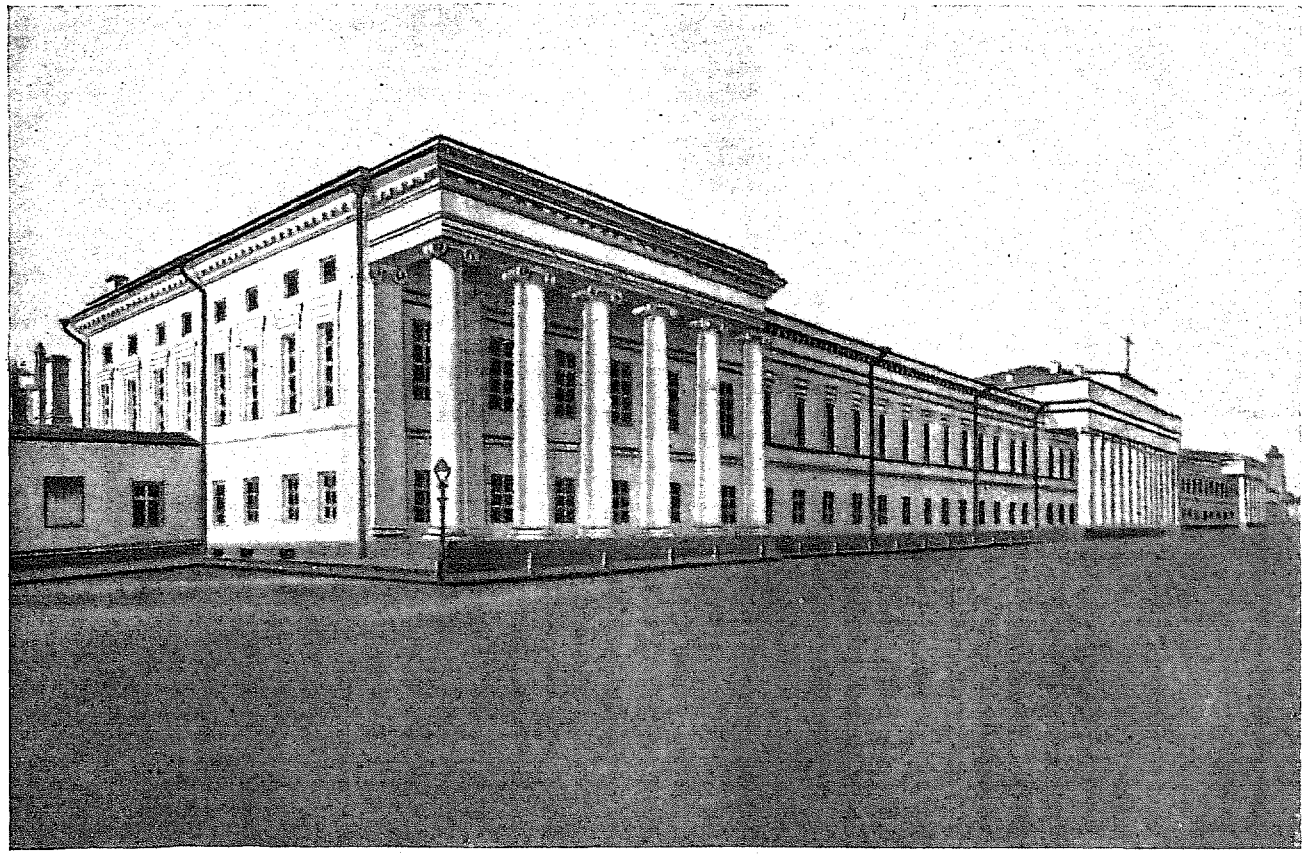
Для преподавания математики были приглашены из Германии И. Бартельс и К. Реннер, для преподавания физики и астрономии — И. Литтров и К. Броннер. Это были серьезные ученые, прекрасные педагоги; в дело постановки преподавания в новом восточном университете они вложили много труда и настоящего энтузиазма. Эти профессора направили интересы Лобачевского в область математики, — он прошел очень хорошую школу. Наибольшее влияние на него имел, повидимому, Бартельс, который вел с ним отдельно занятия у себя на дому.

Молодые студенты, пионеры первого восточного университета, учились с большим рвением; по отзывам профессоров, Лобачевский занимал среди них выдающееся, если не первое место. Уже в этом

---

[1]) В последнее время обнаружены указания, заставляющие думать, что эти даты и сведения не точны. Производится расследование, результаты которого будут сообщены в заключительном томе.

К стр. 69



Казанский Университет

возрасте он с успехом овладевал такими трудными сочинениями как «Disquisitiones arithmeticae» Гаусса, «Mécanique analytique» Лагранжа, «Application de l'Analyse à la Géométrie» Монжа. Однако инспектор университета систематически отмечает его «дурное поведение» и в отношении поведения признает его худшим студентом. Правда, инкриминируемые ему проступки в большинстве случаев обнаруживают только, что пылкий, может быть, и несколько строптивый юноша не был склонен к точному выполнению требований университетской инспекции и строгому подчинению насаждавшейся администрацией казарменной регламентации быта: он был не прочь иной раз самовольно отлучиться, вырваться из душной атмосферы университетского интерната — иногда даже в маскарад; любитель пиротехники, он позволил себе пускать ракеты в 11 часов ночи; согласно преданию, он даже проявил однажды неслыханное озорство, въехав в университетский вестибюль верхом на корове. Но затем обвинения становятся более серьезными и для того времени очень опасными: помощник инспектора Кондырев отмечает, что «Лобачевский в значительной степени явил признаки безбожия», что «мнение его получило многие ложные понятия». Заколебались ли действительно у Лобачевского устои религии, был ли он в некоторой мере захвачен распространенными в начале царствования императора Александра I либеральными тенденциями или даже революционными настроениями, или все это в большой мере было лишь фантазией усердного инспектора, сказать трудно. Но ввиду подымавшейся реакции, при предписании подвергать неблагонадежных студентов суровым карам, эти наветы инспектора, поддержанные директором университета Яковкиным, грозили Лобачевскому исключением из университета. Броннер писал по этому поводу академику Фуссу: «он (Яковкин) едва не оклеветал и не погубил из-за пустяков нашего лучшего воспитанника Николая Лобачевского, научные наклонности которого заслуживают исключительного одобрения, и которого нам с большим трудом удалось спасти». Так, при настойчивой поддержке ценивших его профессоров и не менее настойчивых угрозах университетской администрации, Лобачевский закончил свое обучение в университете.

В 1811 г. по представлению Бартельса Лобачевский был произведен в магистры — звание, которое в то время означало примерно то же, что у нас сейчас «аспирант»; ему еще не исполнилось 18 лет, когда он под непосредственным руководством Бартельса стал готовиться к профессорской деятельности. В 1814 г. он уже приступил к преподаванию, а еще через два года (в 1816 г.) первенцы Казанского университета Лобачевский и Симонов (астроном) были произведены в экстраординарные профессоры.

Между тем после отечественной войны и в особенности после заключения Священного союза реакция быстро нарастала; либеральные веяния первого периода царствования Александра I сменились аракчеевщиной. Пост министра народного просвещения получил крайний реакционер князь А. Н. Голицын, усматривавший одну из главных своих задач в подавлении растлевающей деятельности университетов. Он обрушился в первую очередь на Казанский университет. В 1819 г. бывший либерал и друг Сперанского, ренегат и предатель М. Л. Магницкий получил поручение произвести ревизию Казанского университета. Эту ревизию он провел с неслыханным пристрастием и окончил докладом, требовавшим «публичного уничтожения Казанского университета». Это предложение не было выполнено; но Магницкий был назначен попечителем Казанского учебного округа и получил поручение «привести Университет в должный порядок и устройство». Он энергично принялся за искоренение его «вредного духа». Девять профессоров были немедленно уволены; большинство иностранных профессоров, в том числе Бартельс и Броннер, покинули Россию. Казанский университет на семь лет погрузился в атмосферу лицемерия, фарисейства и грубого мистицизма.

Тяжелые условия жизни Казанского университета под управлением Магницкого весьма неблагоприятно отразились и на Лобачевском. Враждебную ему в период его студенческих лет университетскую администрацию теперь сменило столь же враждебное, но более высокое начальство. Правда, в первое время Магницкий отнесся к Лобачевскому благожелательно. В своем докладе после ревизии он отмечает Лобачевского и Симонова как людей, по общему признанию, «отменно знающих». После вступления в управление округом Магницкий давал Лобачевскому ответственные поручения (реорганизация университетской библиотеки, руководство строительной комиссией), и эти поручения Лобачевский со свойственной ему добросовестностью и деловитостью выполнял очень успешно. Магницкий был доволен. Нельзя даже сказать, что Лобачевский занял место среди оппозиционно настроенной профессуры; но он держал себя с достоинством, не присоединялся к подобострастию большинства профессоров; и этого, повидимому, было достаточно для того, чтобы вооружить против себя надменного попечителя.

Во всяком случае к концу правления Магницкого Лобачевскому вновь грозили суровые репрессии, и трудно сказать, чем бы это окончилось, если бы Магницкий во всей своей деятельности не переусердствовал. Новая ревизия университета привела к его устранению (1826 г.).

В студенческие годы Лобачевский ответил на преследование университетской инспекции удвоенной энергией в учебной работе.

В эпоху Магницкого, в пору мрачного угнетения университета, предоставленный в отношении своих научных интересов исключительно самому себе, оторванный от своих бывших руководителей, от научных центров математической мысли, Лобачевский погрузился в исследования по теории параллельных линий. Очень возможно, что к этому его привел курс геометрии, который он читал студентам; возможно также, что толчком к этому послужили незадолго перед тем опубликованные работы Лежандра, несостоятельность которых была ему ясна. Так или иначе, в двадцатых годах прошлого века мысли Лобачевского были сосредоточены на теории параллельных линий. Лобачевский шел при этом по тому же пути, что и все его предшественники: он пытался доказать постулат о параллельных линиях. В первые годы своей преподавательской деятельности, как уже сказано, Лобачевский читал курс, который имел своим назначением углубить сведения студентов по элементарной геометрии. В сохранившихся записках студента Темникова (от 1817 г.) приведена попытка Лобачевского доказать постулат.

Однако тщательные размышления привели Лобачевского к сознанию, что это доказательство ошибочно. В сочинении «Геометрия» Лобачевский уже твердо высказывает убеждение, что ни одно из предложенных доказательств пятого постулата не может быть признано достаточным, но в то же время никаких указаний на то, что постулат и не может быть доказан, что здесь открываются совершенно новые горизонты, в этом сочинении (1823 г.) еще нет. Не подлежит, однако, сомнению, что именно с этого примерно времени мысль Лобачевского получает новое направление.

Быть может, в качестве последней попытки все же доказать постулат, Лобачевский (как это и до него делали многие другие) становится твердо на путь доказательства от противного: он допускает, что из точки, лежащей вне данной прямой, можно в их плоскости провести больше одной прямой, не встречающей данную, и рассчитывает, что выводы, отсюда проистекающие, приведут к противоречию с установленными предложениями геометрии: они, таким образом, опровергнут сделанное допущение, и этим будет выполнено доказательство постулата. Но к такому противоречию Лобачевский не пришел. Напротив, тонко и смело развертывая один вывод за другим, Лобачевский построил новую, своеобразную «воображаемую» геометрию, глубоко отличающуюся от традиционной геометрии Евклида и потому известную в настоящее время под названием «неевклидовой геометрии». Эта новая геометрия развернута Лобачевским чрезвычайно широко и глубоко разработана в целом ряде сочинений — от первого доклада в Совете физико-математического факультета Казанского университета в 1826 г. до последнего сочинения «Пан-

геометрия» в 1855 г., которое он уже слепой продиктовал своим ученикам. Список всех этих работ, с указанием их последовательного развития, читатель найдет в вводной статье к настоящему тому. Построение новой геометрии было выполнено Лобачевским «мастерски и истинно геометрическом духе», по словам Гаусса, с печатью «творческой гениальности», по словам Н. Больяй, который с успехом занимался тем же вопросом.

Однако чрезвычайно своеобразные идеи Лобачевского, изложенные к тому же в чрезвычайно мало доступной, скажем больше, — в совершенно недоступной форме, при его жизни в печати признания не получили; напротив того, они были встречены резким осуждением. Печальные свидетельства этого — издевательский пасквиль на первое сочинение Лобачевского «О началах геометрии», пренебрежительная рецензия на сочинение «Геометрические исследования», уничтожающий отзыв Российской академии наук, которой Лобачевский дважды направлял свои работы. Но большая душевная устойчивость, а также кипучая организационная работа спасли Лобачевского от отчаяния, в которое такое отношение современников могло его ввергнуть.

Всю свою жизнь гениальный русский ученый мужественно боролся за свои идеи. Все силы его ума и воли были сосредоточены на том, чтобы завоевать этим идеям признание. Всестороннее развитие новой геометрии как в порядке обоснования элементарной геометрии, так и путем построения аналитической и дифференциальной геометрии, изыскание аналитических ее приложений (главным образом, для вычисления определенных интегралов), размышления над трудными вопросами о логической ее правильности и о конкретном ее значении — составили предмет исследований Лобачевского, изложенных в его многообразных геометрических сочинениях. Эти сочинения полны глубочайшей мысли, многогранного математического творчества, разительных результатов. Однако им недоставало доступности изложения. Стремление восполнить этот пробел и привело Лобачевского к составлению небольшого сочинения «Геометрические исследования по теории параллельных линий», которое было им опубликовано в 1840 г. на немецком языке (оно в настоящем издании помещено в русском переводе). Эта напряженная научная работа развертывалась среди кипучей административной деятельности. В первые же выборы, состоявшиеся после устранения Магницкого, Лобачевский был избран ректором Казанского университета и вслед за этим еще пять раз переизбирался на эту руководящую должность. На этом посту Лобачевский проявил огромную энергию. Он вдохнул дух свободной научной мысли в университет, раздавленный Магницким; он организовал при университете ученые общества; он создал научный

орган «Ученые записки Казанского университета», в которых опубликовал также и большинство своих собственных работ; он развернул строительство университета — до последнего времени главные здания и учебно-вспомогательные учреждения университета сохраняли облик, который был им придан Лобачевским; он проявил исключительное мужество и распорядительность во время пожара в Казани в 1842 г. и в трудные дни холерной эпидемии в 1830 г.

Вряд ли может быть сомнение в том, что именно эта разносторонняя деятельность помогла Лобачевскому преодолеть тяжелые переживания, которые были связаны с сознанием, что его новые идеи — существо и смысл всей его научной жизни — оставались непризнанными, более того, встречали в математической среде пренебрежительное, оскорбительное отношение. Правда, Гаусс оказал Лобачевскому большое внимание: он предложил принять его в члены Геттингенского Ученого Общества, носившего характер академии, и лично известил его об избрании. Но только в этом и выразился акт признания: о своих взглядах на существо его идей он не сообщил Лобачевскому ничего.

В 1846 г. эта кипучая деятельность прервалась. Лобачевский был назначен помощником попечителя Казанского учебного округа. Лобачевский оставил университет и со свойственной ему энергией начал развертывать организационную работу. Но через год попечителем был назначен генерал-майор В. П. Молоствов; Лобачевский очень скоро себе уяснил, что совместная с ним работа для него невозможна, и устранился от дел.

И теперь, когда прекратилась живая работа и наступило вынужденное бездействие, тяжелые переживания на почве непризнанного научного творчества стали быстро подтачивать его силы. К этому присоединились и другие обстоятельства: тяжкое семейное горе — смерть старшего сына Алексея — и утрата зрения. По свидетельству современников, не достигнув еще шестидесятилетнего возраста, Лобачевский уже производил впечатление дряхлого старика. И именно в эту пору по случаю пятидесятилетия Казанского университета Лобачевский написал для юбилейного сборника свое последнее произведение «Пангеометрия». Это было новое изложение всей его системы. Конечно, существенно новых идей оно уже не содержало, но некоторые отдельные моменты заключали ценные дополнения.

Будущему биографу Н. И. Лобачевского предстоит еще выяснить многие черты, ближе характеризующие его личность, его взгляды, пути его творчества. Но никакому сомнению не подлежит, что это был человек гениального проникновения, оригинальной мысли и творческой воли. Всей своей организационной деятельностью он получил, конечно, право на памятник, поставленный ему в Казани на уни-

верситетской площади; но неизмеримо более прочный — вечный памятник

aere perennius
regalique situ
pyramidum altius[1])

он воздвиг себе сам открытием неевклидовой геометрии, своими сочинениями, которые в настоящем издании вновь появляются на свет.

---

[1]) Из Горация: «прочнее меди и выше царственных пирамид».

Памятник Н. И. Лобачевскому
в Казани на Университетской площади

К стр. 75

ОБЗОР СОЧИНЕНИЯ «ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ»

«Геометрические исследования по теории параллельных линий» представляют собой элементарное изложение начал неевклидовой геометрии, созданной Лобачевским (так называемой гиперболической геометрии). Это сочинение было выпущено Лобачевским в свет в 1840 г., после того как им были уже опубликованы наиболее крупные геометрические сочинения: «О началах геометрии» (1829), «Воображаемая геометрия» (1835), «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» (1836), «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (1835—1838).

Как указано в общей вступительной статье, характерной особенностью первых трех сочинений является крайне сжатое изложение всего текста. Краткое, почти схематическое изложение основ новой геометрии сопровождается многочисленными вычислениями определенных интегралов, одни из которых непосредственно выражают те или иные величины (длины, площади, объемы) в «воображаемой геометрии», а другие приводятся к такого рода величинам.

Между тем эти вычисления предполагают отчетливое знание основ новой геометрии. И если трудно себе представить человека, изучающего интегральное исчисление и его геометрические приложения без знакомства с элементами геометрии, то в таком именно положении находились в тридцатых годах прошлого столетия те немногие математики, которые пробовали разобраться в мемуарах Лобачевского. В результате они совершенно не были поняты.

Сочинение «Новые начала геометрии» изложено гораздо более обстоятельно, но оно содержит много материала, чуждого новой геометрии; печатание его растянулось на четыре года, и оно не содействовало усвоению «воображаемой геометрии».

Тогда Лобачевский пришел к мысли дать краткое, но доступное изложение основных начал новой, «воображаемой», геометрии. Это именно им и выполнено в сочинении «Геометрические исследования по теории параллельных линий», опубликованном на немецком языке в 1840 г. Элементы неевклидовой геометрии изложены в этом небольшом сочинении с удивительным искусством. За сто лет, истекших со

времени опубликования «Геометрических исследований», идеи Лобачевского многообразно перекристаллизовались в умах многочисленных геометров, размышлявших над этими вопросами. Многие выводы в настоящее время упрощены и изменены, некоторые концепции иначе оформлены; но синтетическое изложение начал неевклидовой геометрии этого типа и по настоящее время сохранило общую схему «Геометрических исследований», подобно тому как построение начал обыкновенной геометрии по сие время носит на себе отпечаток схемы Евклида. «Геометрические исследования» представляют собой перл геометрического творчества и навсегда останутся образцом изложения своеобразных новых идей в элементарной форме. По «Геометрическим исследованиям» с неевклидовой геометрией впервые познакомились математики конца шестидесятых и начала семидесятых годов прошлого столетия.

Написанные Лобачевским после других основных его сочинений «Геометрические исследования» представляют собой лучшее введение во все его сочинения. Оно переведено на французский и английский языки и неоднократно на этих языках переиздавалось. Гаусс, познакомившись с этой брошюрой Лобачевского, писал о ней своему другу Шумахеру в 1846 г.: «Это сочинение выполнено Лобачевским мастерски в истинно геометрическом духе. Я считаю себя обязанным обратить Ваше внимание на это сочинение, которое наверное доставит Вам совершенно исключительное наслаждение».

По содержанию «Геометрические исследования» можно разбить на четыре части.

Первую часть составляет краткое введение и предложения 1—15; они содержат перечень важнейших предложений, не зависящих от постулата о параллельных линиях; одни из этих предложений нужно рассматривать как постулаты, другие — как теоремы, устанавливаемые без пособия V постулата. Этот перечень, конечно, не охватывает всех предложений так называемой «абсолютной геометрии», т. е. того геометрического материала, который не зависит от постулата о параллельных линиях. Лобачевский ограничивается теми, которые ему наиболее необходимы для дальнейшего своеобразного развития геометрии. Нужно, однако, отметить, что этот перечень не исчерпывает и тех предложений, на которые автор фактически опирается в дальнейшем тексте сочинения.

Вторую часть составляют предложения 16—25. Они содержат изложение теории параллельных линий в новом определении этого основного понятия. Здесь устанавливаются две гипотезы, одна из которых ведет к евклидовой (по Лобачевскому — «употребительной») геометрии, другая — к «воображаемой». В связи с этим устанавливается понятие об угле параллельности (функция $\Pi(x)$) и о связанной с этим записи-

мости между суммой углов треугольника и постулатом о параллельных линиях.

Третью часть составляют предложения 28—34. После необходимых подготовительных предложений здесь устанавливаются понятия о предельной линии и предельной поверхности и доказывается основная теорема, что геометрия предельной поверхности формально совпадает с евклидовой планиметрией.

Четвертую часть составляют предложения 35—37; они содержат неевклидову тригонометрию и вывод основного соотношения:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x}.$$

Из этого краткого обзора мы видим, что «Геометрические исследования» не охватывают всей элементарной геометрии так называемого гиперболического пространства. Мы не находим здесь даже развернутого учения о расположении прямых и плоскостей; нет вывода длины окружности, площади круга, нет даже учения о площадях прямолинейных фигур, отличающегося такой простотой. В заключительных абзацах Лобачевский отсылает для ознакомления с этими вопросами к другим своим сочинениям. Цель этого сочинения совершенно ясна: Лобачевский хочет дать такое введение в «воображаемую геометрию», которое сделало бы внимательному читателю доступным изучение остальных, более глубоких, труднее изложенных его сочинений. И эта цель была достигнута Лобачевским.

Совершенно несомненно, что и в настоящее время изучение сочинений Лобачевского в подлиннике наиболее целесообразно начинать с «Геометрических исследований»: это — ключ к остальным его сочинениям. Именно поэтому, в отступление от хронологической последовательности, это сочинение помещено на первом месте.

При всей сравнительной элементарности изложения «Геометрических исследований», это сочинение все же сохраняет достаточно рассуждений, которые могут оказаться трудными для читателя, еще не усвоившего своеобразных идей неевклидовой геометрии. Чтобы облегчить усвоение этих идей и чтение сочинения, к нему даны примечания, помещенные частью в виде сносок под текстом, частью после текста. В сносках помещены пояснительные примечания, которые должны содействовать непосредственному уяснению замысла, определений и рассуждений автора. После текста помещены более обширные примечания, которые содержат сопоставление рассуждений Лобачевского с более поздними приемами развития этих идей, исторические и историко-критические справки.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ

Перевод с немецкого В. Ф. Кагана

В геометрии я нашел некоторые несовершенства, которые я считаю причиной того, что эта наука, поскольку она не переходит в анализ, до настоящего времени не вышла ни на один шаг за пределы того состояния, в каком она к нам перешла от Евклида. К этим несовершенствам я отношу неясность в первых понятиях о геометрических величинах, способы, которыми мы себе представляем измерение этих величин, и, наконец, важный пробел в теории параллельных линий, к восполнению которого все усилия математиков до настоящего времени были тщетными*. Старания Лежандра не прибавили к этой теории ничего, так как он был вынужден оставить единственно строгий ход [исследования], стать на побочный путь и прибегнуть к вспомогательным предложениям, которые он без обоснования старается изобразить как необходимые аксиомы*.

Свой первый опыт по началам геометрии я опубликовал в «Казанском вестнике» за 1829 г.◎. В надежде, что я удовлетворил всем требованиям, я занялся после этого обработкой всей этой науки и эту свою работу опубликовал отдельными частями в «Уче-

---

* Настоящее сочинение посвящено исключительно устранению пробела в теории параллельных линий. О том, в чем Лобачевский усматривал сущность остальных недостатков геометрии, — неясность первых понятий и дефекты метрики, — подробно сказано во «Вступлении» к сочинению «Новые начала». Это обширное сочинение найдет себе место во втором томе настоящего издания.

* Об исследованиях Лежандра, относящихся к теории параллельных линий см. статью «Учение о параллельных линиях до создания неевклидовой геометрии» (стр. 56 настоящего тома).

◎ Речь идет о сочинении «О началах геометрии», помещенном ниже в настоящем томе (стр. 185).

ных записках Казанского университета» за 1836, 1837 и 1838 гг. под заглавием «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных». Размер этой работы, быть может, мешает моим соотечественникам следить за предметом, который после Лежандра утратил интерес. Я держусь, однако, мнения, что теория параллельных линий не должна была бы отказаться от своих притязаний на внимание математиков; поэтому я намерен изложить здесь сущность моих исследований; при этом вперед отмечу, что, вопреки мнению Лежандра *, все остальные несовершенства, как, например, определение прямой линии, оказываются здесь посторонними и лишены всякого влияния на теорию параллельных линий.

Чтобы не утомлять читателей множеством таких предложений коих доказательства не представляют затруднений, я привожу здесь наперед только те из них, знание которых необходимо для последующего *.

1) *Прямая линия покрывает себя самое во всех положениях.* Под этим я разумею, что при вращении поверхности прямая линия не меняет своего места, если она проходит через две неподвижные точки поверхности ⊘.

2) Две прямые не могут пересекаться в двух точках [2].

3) Прямая линия, будучи достаточно продолжена в обе стороны, должна уходить за всякие пределы и таким образом делит ограниченную плоскость на две части [3].

---

* См. Legendre — Réflexions, стр. 372. Библиографические данные приведены на стр. 56 настоящего тома.

* Приводимые ниже 15 предложений носят различный характер. Первое из них представляет собой одно из возможных определений прямой линии; другие должны быть рассматриваемы как постулаты или аксиомы (например, предложения 2, 3, 5); наконец, остальные суть теоремы, обычно доказываемые в курсах геометрии. Все эти предложения не зависят от постулата о параллельных линиях (т. е. устанавливаются, не опираясь на этот постулат); Лобачевский их приводит как материал которым он может пользоваться при развитии своей геометрической системы, не рискуя впасть в ложный круг — воспользоваться положением, независимость которого он имеет в виду обнаружить. Однако в этот перечень вошли далеко не все предложения, не зависящие от постулата о параллельных линиях; более того, Лобачевский в дальнейшем изложении и сам пользуется предложениями, не вошедшими в этот перечень; мы их отметим в своем месте.

⊘ Об этом определении прямой линии см. примечание 1 на стр. 128. Заметим, что Лобачевский систематически употребляет как в настоящем сочинении, так и в мемуарах, опубликованных по-русски, термин «линия» там, где речь идет о прямой линии.

4) Две прямые, перпендикулярные к одной и той же третьей прямой, никогда не пересекаются, сколько бы мы их ни продолжали.

5) Прямая линия всегда пересекает другую прямую, если переходит с одной ее стороны на другую [4].

6) Вертикальные углы, у которых стороны одного составляют продолжения сторон другого, равны. Это справедливо как в применении к плоским прямолинейным углам, так и в применении к плоскостным двугранным углам.

7) Две прямые не могут пересечься, если какая-либо третья прямая пересекает их под равными углами.

8) В прямолинейном треугольнике равным углам противолежат равные стороны, и обратно.

9) В прямолинейном треугольнике большей стороне противолежит также больший угол. В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше каждого из катетов, и прилежащие к ней углы острые.

10) Прямолинейные треугольники конгруэнтны [5], если у них равны сторона и два угла или две стороны и заключенный между ними угол, или две стороны и угол, противолежащий большей стороне [6], или три стороны.

11) Прямая линия, перпендикулярная к двум другим прямым, не лежащим с нею в одной плоскости [7], перпендикулярна ко всем прямым, проведенным через точку их общего пересечения в плоскости двух последних прямых.

12) Пересечение шара плоскостью есть круг.

13) Прямая, которая перпендикулярна к линии пересечения двух [перпендикулярных *] плоскостей и расположена в одной из этих плоскостей, перпендикулярна к другой плоскости.

14) В сферическом треугольнике равным сторонам противолежат равные углы, и обратно.

15) Сферические треугольники конгруэнтны, если у них равны две стороны и угол, заключенный между ними, или же сторона и прилежащие к ней углы *.

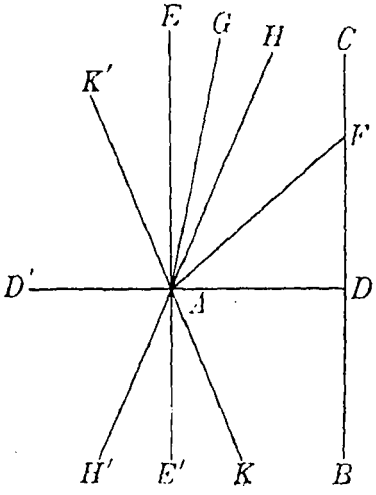
---

* Это слово, очевидно по недосмотру, в оригинале опущено. Это отмечено и в казанском издании этого сочинения («Полн. собр. соч. по геом.»).

* Это предложение формулировано не вполне точно: сферические треугольники при этих условиях либо конгруэнтны, либо симметричны. Но Лобачевский

Начиная отсюда, дальнейшие предложения уже сопровождаются пояснениями и доказательствами.

16) Все прямые линии, выходящие в некоторой плоскости из одной точки, могут быть по отношению к некоторой заданной прямой той же плоскости разделены на два класса, именно на *пересекающие* ее и *непересекающие* *. *Граничная линия* одного и другого класса этих [прямых] линий называется *параллельной заданной линии* [5].



Черт. 1.

Из точки A (черт. 1) опустим на [заданную] линию BC перпендикуляр AD, к которому, в свою очередь, восставим перпендикуляр AE. В прямом угле EAD прямые, выходящие из точки A, либо все встречают линию DC, как, например, AF, либо же некоторые, подобно перпендикуляру AE, не встречают линии DC. Не зная, есть ли перпендикуляр AE единственная линия, которая не

придерживается своеобразной терминологии, по которой две сферические фигуры «конгруэнтны», если одна из них может быть совмещена со второй либо непосредственно, либо после замены одной из них симметричной. Это он определенно оговаривает в «Новых началах», ст. 81. Нужно сказать, что первой из этих двух теорем Лобачевский фактически пользуется только в том случае, когда оба треугольника равнобедренные и боковые стороны одного равны боковым сторонам другого; при равенстве содержащихся между ними углов сферические треугольники в этом случае всегда конгруэнтны в обычном смысле слова.

* Этими соображениями устанавливается та своеобразная точка зрения, вернее, то исходное допущение, которое отличает «неевклидову» геометрию Лобачевского от обычной, веками утвердившейся «евклидовой» геометрии. Лобачевский допускает, что из точки A, лежащей вне прямой BC, может в плоскости ABC выходить не одна, а несколько прямых, не встречающих BC; точнее, он не исключает этой возможности. Это непосредственно приводит к классификации, установленной в тексте и обстоятельно изложенной в следующем абзаце Лобачевского; оно подробно разъяснено в примечании 8.

Геометрия, построенная на всех постулатах Евклида, с заменой, однако, постулата о параллельных (V постулата) допущением, что в плоскости из точки, лежащей вне прямой, можно провести больше одной прямой, не встречающей данной, и есть *неевклидова геометрия Лобачевского*. Однако название «неевклидова геометрия» в настоящее время получило гораздо более широкое значение; но в примечаниях к настоящему сочинению мы под «неевклидовой геометрией» всегда разумеем геометрию Лобачевского; ее в настоящее время обычно называют также *гиперболической геометрией* (см. сноску * к предложению 37, стр. 125).

встречается с DC, будем считать возможным, что существуют и другие линии, например AG, которые не встречают DC, сколько бы мы их ни продолжали. При переходе от пересекающих линий AF к непересекающим AG мы должны встретить линию AH, параллельную DC, — граничную линию, — по одну сторону которой ни одна линия AG не встречает DC, между тем как по другую сторону каждая линия AF пересекает линию DC. Угол HAD между параллелью AH и перпендикуляром AD называется *углом параллели* (углом параллельности); мы будем здесь обозначать его через $\Pi(p)$ при $AD = p$*.

— Если $\Pi(p)$ есть прямой угол*, то продолжение AE' перпендикуляра AE также будет параллельно продолжению DB линии DC; к этому еще заметим, что в отношении четырех прямых углов, которые при точке A образуют перпендикуляры AE и AD и их продолжения AE' и AD', каждая прямая линия, выходящая из точки A, либо сама, либо по крайней мере своим продолжением расположена в одном из тех двух прямых углов, которые обращены к линии BC, так что, кроме параллели EE', все другие [прямые] по достаточном продолжении в обе стороны должны пересекать линию BC.

Если $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$°, то по другую сторону [перпендикуляра] AD, под тем же углом $DAK = \Pi(p)$, будет проходить еще одна линия AK, параллельная продолжению DB линии DC; таким образом при этом допущении мы должны отличать еще *сторону параллельности*♀. Все остальные линии или их продолжения внутри двух прямых углов, обращенных к BC, принадлежат к пересекающим,

---

* Это обозначение основано на том, что угол параллельности в неевклидовой геометрии, как это будет ниже обнаружено, представляет собой функцию расстояния p.

* То-есть в случае геометрии Евклида, которому этот небольшой абзац посвящен.

° То-есть в случае неевклидовой геометрии.

♀ Иными словами, прямая AH считается параллельной прямой BC в сторону DC, а прямая AK — параллельной той же прямой в сторону DB. Это получает еще более точное выражение, если говорить только о лучах, а не о прямых: *луч* AH *параллелен лучу* BC (черт. 1), а *луч* AK *параллелен лучу* CB; вместе с тем через точку A, лежащую вне луча BC, во всяком случае (т. е. как в евклидовой, так и в неевклидовой геометрии) проходит один и только один параллельный ему луч AH. Лобачевский этой терминологией не пользуется: он всегда пишет «линия AH параллельна линии DC» или же «прямая AH параллельна при-

если они лежат внутри угла $HAK = 2\Pi(p)$ между параллелями; напротив того, они принадлежат к непересекающим AG, если они расположены по другую сторону параллелей AH и AK в отверстии двух углов $EAH = \frac{1}{2}\pi - \Pi(p)$, $E'AK = \frac{1}{2}\pi - \Pi(p)$ между параллелями и перпендикуляром EE' к AD. Подобным же образом по другую сторону перпендикуляра EE' продолжения AH' и AK' параллелей AH и AK также будут параллельны BC; остальные линии принадлежат в угле $K'AH'$ к пересекающим, а в углах $K'AE$ и $H'AE'$ — к непересекающим.

Сообразно этому при предположении $\Pi(p) = \frac{1}{2}\pi$ линии могут быть только пересекающими или параллельными; если же принять, что $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$, то нужно допустить две параллели, одну по одну сторону [перпендикуляра], другую по другую [его] сторону; кроме того, между остальными линиями нужно различать пересекающие и непересекающие. Как при одном, так и при другом предположении признаком параллелизма служит то, что линия становится пересекающей при малейшем отклонении в ту сторону, где лежит параллель; таким образом, если AH параллельна DC, то каждая линия AF, сколь бы мал ни был угол HAF, пересекает DC.

17) *Прямая линия сохраняет признак параллельности во всех своих точках* *.

Пусть [прямая] AB (черт. 2) будет параллельна CD * и пусть AC будет перпендикуляр к последней. Мы рассмотрим две точки, которые расположены произвольно: одна на линии AB и другая на ее продолжении по другую сторону перпендикуляра. Положим, что точка E лежит по ту сторону перпендикуляра, с которой AB рассматривается как параллельная CD. Из точки E опустим перпендикуляр EK на CD, затем проведем EF так, чтобы она про-

---

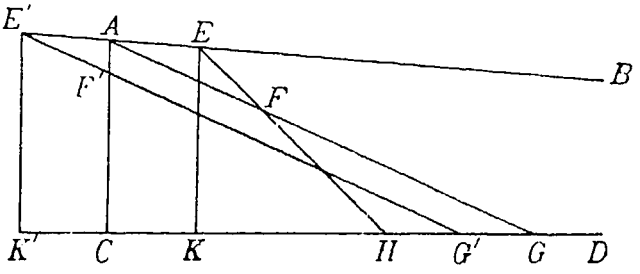
мой CD». Но это всегда нужно понимать в том смысле, что луч AH параллелен лучу CD.

* Содержащееся в предыдущем предложении определение параллели связывает ее с точкой, из которой она выходит: луч AB параллелен CD (черт. 2), если он не встречает CD и в точке A отделяет лучи, пересекающие CD, от непересекающих. Будет ли этот луч производить такое же отделение пересекающих лучей от непересекающих в другой своей точке, скажем, в точке E или E'? Этот именно вопрос получает разрешение в предложении 17.

* Предполагается — в точке A.

ходила внутри угла BEK. Точки A и F соединим прямой линией, продолжение которой должно встретить CD где-либо в G (предложение 16) *. Вместо с тем мы получим треугольник ACG, внутрь которого входит линия EF; так как эта последняя не может пересечь AC в силу самого построения, а также не может вторично встретить ни AG, ни EK (предложение 2), то она должна встретить CD в какой-либо точке H (предложение 3) *.

Пусть теперь E' будет точка на продолжении [линии] AB и пусть $E'K'$ будет перпендикуляр на продолжении линии CD; проведем линию $E'F'$ под столь малым углом $AE'F'$, чтобы она пересекла AC где-либо в F'; затем из A проведем под тем же углом



Черт. 2.

с AB линию AF, продолжение которой встретит CD в G (предложение 16). Таким образом мы получаем треугольник AGC, в который входит продолжение линии $E'F'$; так как эта линия не может вторично пересечь AE, а также не может пересечь AG, ибо угол $BAG = BE'G'$ (предложение 7), то она должна встретить CD где-либо в G'.

Таким образом, из каких бы точек E и E' [прямой AB] ни выходили линии EF и $E'F'$ и как бы мало они ни отклонялись от линии AB, они всегда пересекут [линию] CD, которой AB параллельна ⊘.

---

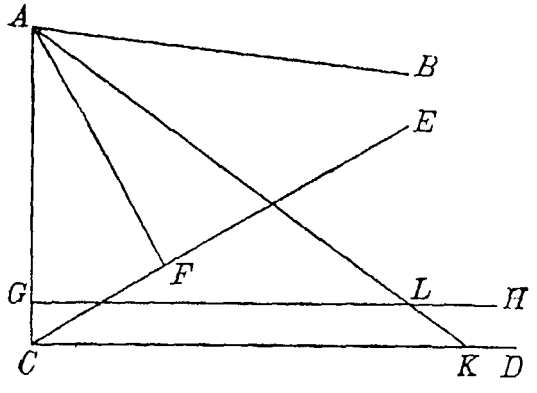
* Ибо в точке A луч AB по условию отделяет встречающие CD лучи от невстречающих.

* См. предложение 3 и к нему примечание 3.

⊘ Иначе говоря, лучи EB и $E'B$ в точках E, E' производят отделение пересекающих лучей от непересекающих, т. е. как луч EB, так и луч $E'B$ параллельны лучу CD.

18) *Две линии всегда взаимно параллельны.*

Пусть AC будет перпендикуляр к [линии] CD (черт. 3), которой AB параллельна*; из C проведем линию CE под каким угодно острым углом ECD к CD и из A опустим перпендикуляр AF на CE; получим прямоугольный треугольник ACF, в котором гипотенуза AC больше катета AF (предложение 9). Отложим $AG = AF$ и наложим AF на AG; тогда AB и FE займут положение AK и GH, причем угол $BAK = FAC$*; следовательно, AK должна пересечь линию DC где-либо в [точке] K (предложение 16); таким образом получится треугольник AKC, внутрь которого [входит] перпендикуляр GH; он встречает линию AK в L (предложение 3) и тем определяет на линии AB расстояние AL точки пересечения линий AB и CE от точки A⊘.



Черт. 3.

Отсюда следует, что CE всегда встретит AB, сколь бы мал ни был угол ECD; поэтому CD параллельна AB (предложение 16).

19) *В прямолинейном треугольнике сумма трех углов не может превышать двух прямых.*

Допустим, что в треугольнике ABC (черт. 4) сумма трех углов равна $\pi + \alpha$; если его стороны не равны, возьмем наименьшую из них BC, разделим ее пополам в D, проведем из A через D линию AD и на ее продолжении сделаем DE равным AD; затем соединим точку E с точкой C прямой EC. В равных треугольниках ADB и

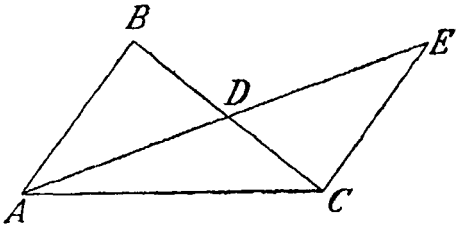
---

* Дано, таким образом, что луч AB параллелен лучу CD; нужно доказать, что и луч CD параллелен AB. Так как луч CD не встречает AB, то остается только обнаружить, что всякий луч CE, проходящий внутри угла DCA, встретит AB. Это доказательство Лобачевский и проводит.

* Полоса $BAFE$ повернута вокруг точки A таким образом, что линия AF совпадает с линией AG, FE с GH, а AB с AK. Поэтому углы поворота FAC и BAK равны.

⊘ Если произведем обратный поворот и возвратим отрезок AG в положение AF, то луч GL пойдет по FE, AL по AB и точка L совпадет с точкой пересечения лучей AB и CE.

CDE угол $ABD = DCE$ и $BAD = DEC$ (предложения 6 и 10); отсюда следует, что в треугольнике ACE сумма углов также должна быть равна $\pi + \alpha$; кроме того, наименьший угол BAC треугольника ABC (предложение 9) перешел в новый треугольник ACE, причем он разбился на две части EAC и AEC. Продолжая таким же образом, разделяя при этом пополам каждый раз ту сторону, которая противолежит наименьшему углу, мы необходимо придем к треугольнику, сумма трех углов которого равна $\pi + \alpha$, но в котором окажутся

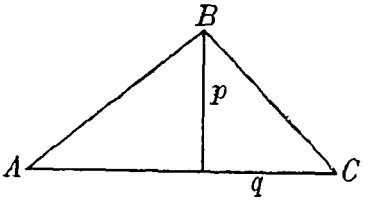


Черт. 4.

два угла, каждый из которых по абсолютной величине меньше $\frac{1}{2}\alpha$; так как, однако, третий угол не может быть больше π, то α должно быть либо нулем, либо отрицательным.

20) *Если в каком-либо прямолинейном треугольнике сумма трех углов равна двум прямым, то это имеет место и во всяком другом треугольнике.*

Положим, что в прямолинейном треугольнике ABC (черт. 5) сумма трех углов $= \pi$; в таком случае по крайней мере два его угла должны быть острые. Из вершины B третьего угла опустим на противоположную сторону перпендикуляр p; тогда треугольник ABC разобьется на два прямоугольных треугольника, в каждом из которых сумма трех углов также должна быть равна π, ибо ни в одном из них она не может превышать π, а в составленном из них треугольнике* она не должна быть меньше π. Таким



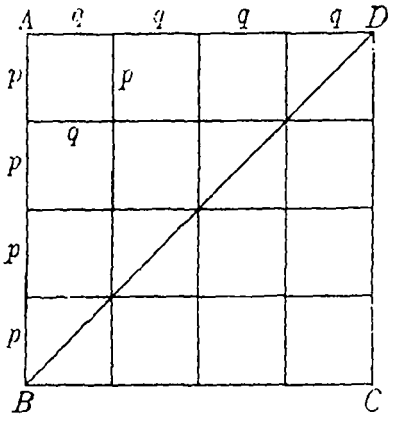
Черт. 5.

---

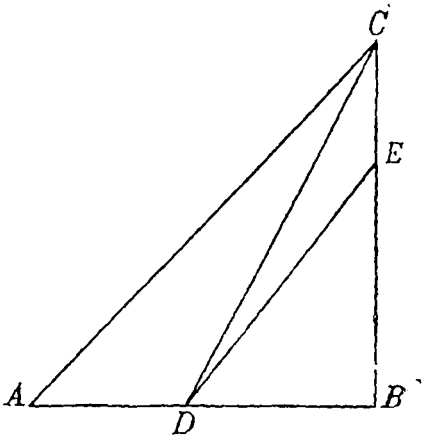
* Так как угол BAC острый, то основание перпендикуляра, опущенного из точки B на сторону AC, должно в силу предыдущего предложения упасть на луч AC, а не на его продолжение; по той же причине оно должно упасть и на луч CA; основание перпендикуляра должно, следовательно, лежать *внутри* стороны AC. Треугольник разобьется поэтому на два составляющих треугольника.

Так как сумма внутренних углов треугольника ABC равна π, в составляющих же треугольниках к ним присоединяются еще два прямых угла, то сумма внутренних углов обоих составляющих треугольников составит 2π. Поскольку в силу предыдущего предложения ни в одном из двух составляющих треугольников

образом мы получаем прямоугольный треугольник с катетами p и q, а из него* получаем четырехугольник, в котором противоположные стороны равны, а прилежащие друг к другу стороны p и q взаимно перпендикулярны (черт. 6). Повторно прикладывая тот же четырехугольник, можно получить подобный же [четырехугольник] со сторонами np и q и, наконец, четырехугольник $ABCD$ со взаимно перпендикулярными сторонами, в котором $AB = np$, $AD = mq$, $DC = np$, $BC = mq$, где m и n суть произвольные целые числа. Такой четырехугольник делится диагональю BD на два равных



Черт. 6.



Черт. 7.

прямоугольных треугольника BAD и BCD, в каждом из которых сумма трех углов равна π*. Числа m и n могут быть выбраны так, чтобы прямоугольный треугольник ABC (черт. 7), катеты которого $AB = np$, $BC = mq$, охватил другой заданный [прямоугольный] треугольник DBE, коль скоро [их] прямые углы будут приведены

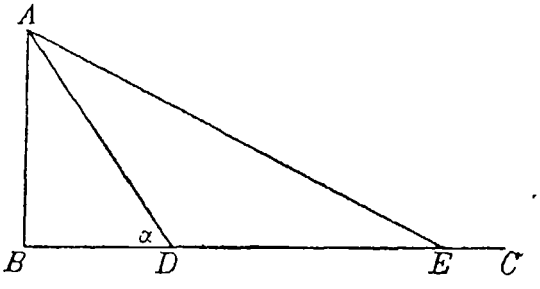
ников сумма углов не может оказаться *больше* π, она должна быть в каждом из составляющих треугольников равна π.

Весь смысл этой части доказательства заключается в том, чтобы показать, что при существовании какого-либо треугольника, в котором сумма углов равна π, всегда возможно построить *прямоугольный* треугольник, в котором сумма внутренних углов также равна π.

* Прикладывая к нему конгруэнтный ему треугольник гипотенузой к гипотенузе, но повернув последнюю в обратную сторону так, чтобы точка C попала в B а точка B — в C.

* Вновь по той причине, что ни в одном из этих двух треугольников сумма внутренних углов не может превысить π.

в совмещение *. Если проведем линию DC, то получим еще прямоугольные треугольники, из которых каждые два последовательно имеют общую сторону *. Треугольник ABC получается путем соединения двух треугольников ACD и DCB, ни в одном из которых сумма трех углов не может быть больше π; она должна быть поэтому равна π, поскольку в составленном треугольнике эта сумма должна быть равна π. Таким же образом треугольник BDC состоит из двух треугольников DEC и DBE; поэтому и в треугольнике DBE сумма трех углов должна быть равна π ∅; и вообще это должно иметь место во всяком треугольнике, так как всякий треугольник разбивается на два прямоугольных треугольника ♀.



Черт. 8.

Отсюда следует, что возможны только два допущения: либо сумма трех углов во всех прямолинейных треугольниках равна π, либо же она во всех треугольниках меньше π [9].

21) *Из данной точки всегда можно провести прямую линию таким образом, чтобы она образовала с данной прямой сколь угодно малый угол.*

Из данной точки A [черт. 8] опустим на данную прямую BC перпендикуляр AB; на BC возьмем произвольную точку D и проведем линию AD; далее, сделаем $DE = AD$ и проведем AE. Пусть

---

* Иначе говоря, располагая уже прямоугольным треугольником, в котором сумма углов равна π, можно при его помощи построить другой прямоугольный треугольник с той же суммой углов ($= \pi$), в котором катеты будут сколь угодно велики (соответственно больше любых двух заданных отрезков). Если поэтому возьмем произвольный прямоугольный треугольник DBE (черт. 7), то можно будет построить такой прямоугольный треугольник ABC с суммой углов $= \pi$, в котором треугольник DEF займет положение, указанное на черт. 7.

* Это будут прямоугольные треугольники ABC и DBC с общим катетом CB и прямоугольные треугольники DCB и DEB с общим катетом DB.

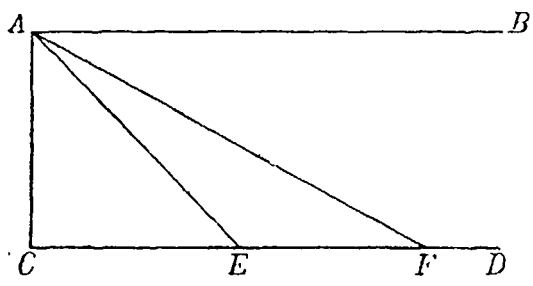
∅ Таким образом доказано, что при сделанном предположении в любом *прямоугольном* треугольнике сумма углов равна π.

♀ Если ABC (черт. 5) есть совершенно произвольный треугольник, то мы разобьем его на два прямоугольных треугольника; в каждом из них сумма внутренних углов равна π, в обоих вместе $= 2\pi$; отбросив сумму двух прямых углов, образовавшихся при дополнительной вершине, придем к заключению, что и в исходном треугольнике ABC сумма углов равна π.

в прямоугольном треугольнике ABD угол $ADB = \alpha$. В таком случае в равнобедренном треугольнике ADE угол AED должен быть либо равен $\frac{1}{2}\alpha$, либо меньше (предложения 8 и 20 *). Продолжая таким образом, мы, наконец, придем к такому углу AEB, который меньше любого заданного угла.

22) *Если два перпендикуляра к одной и той же прямой линии параллельны между собой, то в прямолинейных треугольниках сумма трех углов равна* π.

Положим, что линии AB и CD (черт. 9) параллельны между собой и перпендикулярны к AC. Из A проведем линии AE и AF к точкам E и F, взятым на линии CD на любых расстояниях $FC > EC$ от точки C. Допустим, что в прямоугольном треугольнике ACE сумма трех углов равна $\pi - \alpha$, а в треугольнике AEF она равна $\pi - \beta$; в таком случае в треугольнике ACF [сумма углов] будет равна $\pi - \alpha - \beta$, причем ни α, ни β не могут быть отрицательными. Пусть, далее, угол $BAF = a$, $AFC = b$; в таком случае $\alpha + \beta = a - b$ *; теперь, удаляя линию AF от перпендикуляра AC, можно сделать угол a между AF и параллелью AB сколь угодно малым; так же можно уменьшать и угол b; следовательно, два угла α и β не могут иметь никакой другой величины, кроме $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ ⊘.



Черт. 9.

---

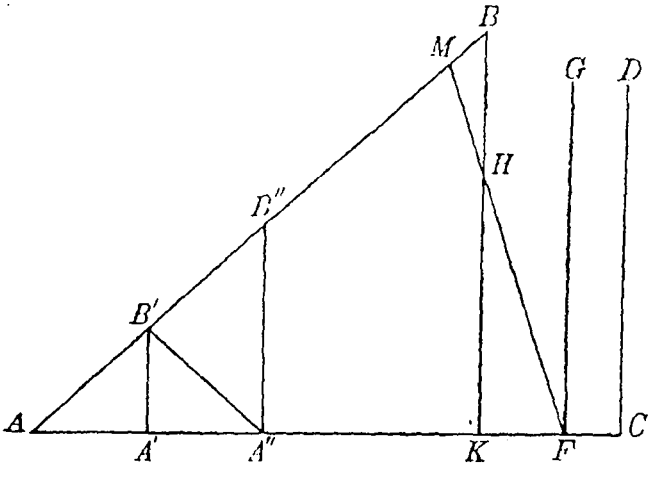
* Здесь уместна ссылка на предложение 19: поскольку сумма внутренних углов треугольника не может превысить π, каждый из внешних углов треугольника не может быть меньше суммы двух внутренних углов, с ним не смежных; поэтому $\angle DAE + \angle DEA = 2 \angle DEA \leqslant \alpha$. Ссылка на предложение 20, повидимому, представляет собой недосмотр.

* Так как $\angle CAF = \frac{1}{2}\pi - a$, $\angle AFC = b$, то сумма углов прямоугольного треугольника ACF равна $\pi + b - a$, откуда и вытекает равенство $\alpha + \beta = a - b$.

⊘ Так как по условию луч AB параллелен CD, то луч AF будет пересекать CD, сколь бы малым мы ни взяли угол a. Что касается угла b, то он может быть сделан сколь угодно малым согласно предложению 21. Таким образом в предыдущем равенстве $\alpha + \beta = a - b$ левая часть имеет постоянные неотрицательные слагаемые α и β; правая же часть бесконечно мала; отсюда вывод автора.

Отсюда следует, что во всех прямолинейных треугольниках сумма трех углов либо равна π, и тогда угол параллельности $\Pi(p) = \frac{1}{2}\pi$ для любой линии p, либо во всех треугольниках эта сумма $< \pi$, и тогда также $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$.

Первое предположение служит основой *обыкновенной геометрии* и *плоской тригонометрии*. Второе предположение также может быть допущено, не приводя ни к какому противоречию в результатах; оно обосновывает новое геометрическое учение, которому я дал название «*воображаемая геометрия*» и которое я здесь намерен изложить вплоть до вывода уравнений между сторонами и углами прямолинейных и сферических треугольников *.



Черт. 10.

23) *Для любого заданного угла α можно найти такую линию p, что* $\Pi(p) = \alpha$.

Пусть AB и AC (черт. 10) — две прямые линии, образующие при пересечении острый угол α; на AB возьмем произвольно точку B' и из этой точки опустим на AC перпендикуляр $B'A'$, сделаем $A'A'' = AA'$, восставим в A'' перпендикуляр $A''B''$ и так будем продолжать до тех пор, пока придем к перпендикуляру CD, который уже не встречает AB. Это необходимо должно иметь

* С этого места Лобачевский, таким образом, твердо принимает второе возможное допущение, именно, что сумма углов треугольника меньше π, и в этом предположении развертывает все свои дальнейшие рассуждения. Это нужно постоянно помнить, следя за дальнейшим текстом.

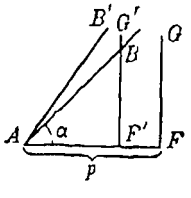
место, ибо если в треугольнике $AA'B'$ сумма всех трех углов равна $\pi - a$, то в треугольнике $AB'A''$ она равна $\pi - 2a$, в треугольнике $AA''B''$ она меньше $\pi - 2a$ (предложение 20)* и т. п., пока она, наконец, не станет отрицательной и при этом обнаружит невозможность образования треугольника. Перпендикуляр CD может оказаться именно тем, до которого все перпендикуляры из точек, лежащих ближе к A, пересекают AB; во всяком случае при переходе от пересекающих к непересекающим такой перпендикуляр должен существовать*. Теперь из точки F проведем линию FH, образующую с FG острый угол HFG и именно с той стороны, с которой лежит точка A. Из какой-либо точки H линии FH опустим на AC перпендикуляр HK, продолжение которого, следовательно, должно пересечь AB где-либо в B⊘; он образует, таким образом, треугольник AKB, внутрь которого входит продолжение линии FH и потому оно должно встретить гипотенузу AB где-либо в M. Так как GFH есть произвольный угол и может быть взят сколь угодно малым, то [линия] FG параллельна AB и $AF = p$ (предложение 16 и 18).

Легко усмотреть, что с уменьшением p угол α возрастает, приближаясь при $p = 0$ к $\frac{1}{2}\pi$♀; с возрастанием p угол α уменьшается,

---

* Ссылка и здесь, как и в предложении 21, должна быть сделана на предложение 19. Существенно то, что сумма углов треугольника, разбитого трансверсалью на два составляющих треугольника, всегда меньше, нежели сумма углов любого из этих составляющих треугольников. Фактически это было уже обнаружено при доказательстве предложения 22. Там было показано, что в треугольнике ACF, разбитом трансверсалью AE на треугольник ACE с суммой углов $\pi - \alpha$ и треугольник AEF с суммой углов $\pi - \beta$, сумма внутренних углов равна $\pi - \alpha - \beta$. В случае, с которым мы здесь имеем дело, сумма углов треугольника $AA''B''$ поэтому меньше, нежели в треугольнике $AA''B'$.

* Это доказывается так же, как и существование параллели [см. предложение 16 и к нему примечание 8 (стр. 129)]. Принимая это, Лобачевский обнаруживает, что луч FG действительно параллелен лучу AB, т. е. что всякий луч FH, проходящий внутри угла GFA, встречает AB.



⊘ Это следует из того, что перпендикуляр KH выходит из точки K, лежащей до основания первого, не встречающего AB перпендикуляра FG.

♀ Если, как на прилагаемом чертеже, AF есть тот отрезок p, для которого $\Pi(p) = \alpha\ (= \angle BAF)$, и мы возьмем $AF' < AF$, то луч AB будет встречать перпендикуляр $F'G'$, а потому луч AB', параллельный $F'G'$, будет проходить выше AB, т. е. при $AF' < AF$ имеем $\Pi(AF') > \Pi(AF)$. Итак, $\Pi(p)$ есть монотонная функция от p, убывающая с возрастанием p и, следовательно, возрастающая с убыванием p. Как было доказано выше (предложение 23),

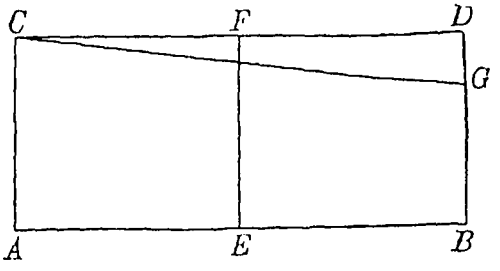
все более приближаясь к нулю при $p = \infty$. Так как совершенно произвольно, какой угол разуметь под символом $\Pi(p)$, когда линия p выражается отрицательным числом, то мы примем [10]

$$\Pi(p) + \Pi(-p) = \pi,$$

каковое равенство должно иметь место для всех значений p, как положительных, так и отрицательных, а также для $p = 0$.

24) *Чем далее параллельные линии продолжаются в сторону параллельности, тем более они друг к другу приближаются.*

К прямой AB (черт. 11) восставим два перпендикуляра $AC = BD$ и конечные их точки соединим прямой линией $[CD]$. Тогда четырехугольник $CABD$ будет иметь два прямых угла при A и B, а при C и D — два острых угла (предложение 22) * которые равны между собой, как в этом легко убедиться, налагая этот четырехугольник на самого себя так, чтобы линия BD упала на AC, а AC — на BD. Разделим AB пополам и в точке деления E восставим перпендикуляр EF к AB. Он должен быть также перпендикулярен к CD, потому что четырехугольники $CAEF$ и $FEBD$ покрывают друг друга, если наложим их друг на друга так, чтобы линия FE осталась в том же положении [11]. Вследствие этого линия CD не может быть параллельна AB *, параллель же к последней в точке C, именно CG, должна быть наклонена в сторону AB (предложение 16) и отсечет от перпендикуляра BD часть



Черт. 11.

при этом возрастании функция $\Pi(p)$ должна проходить через все углы, меньшие $\frac{1}{2}\pi$; поэтому $\Pi(p)$ стремится к $\frac{1}{2}\pi$, когда p стремится к нулю. И обратно, убывая с возрастанием p, функция $\Pi(p)$ должна проходить через все сколь угодно малые углы; она стремится поэтому к нулю, когда p неограниченно возрастает.

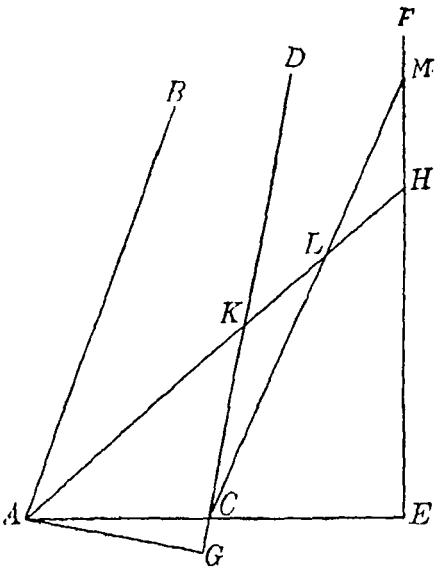
* Ссылку на предложение 22 нужно относить к концу его, где устанавливается, что в дальнейшем исследование будет производиться на основе допущения, что сумма углов треугольника меньше π, а потому сумма углов в четырехугольнике меньше 2π.

* По предложению 22.

$BG < CA$. Так как точка C выбрана на линии CG произвольно, то отсюда следует, что CG тем более приближается к AB, чем далее мы ее продолжаем [12].

25) *Две прямые линии, параллельные третьей, параллельны между собой.*

Примем сначала, что три линии AB, CD и EF (черт. 12) лежат в одной плоскости. Если две из них по порядку AB и CD параллельны крайней* линии EF, то AB и CD также параллельны между собой. Чтобы это обнаружить *, опустим из произвольной точки A крайней линии AB на другую крайнюю FE перпендикуляр AE, который пересечет среднюю линию CD в некоторой точке C (предложение 3) под углом $DCE < \frac{1}{2}\pi$ со стороны параллели CD к EF (предложение 22)°. Перпендикуляр AG, опущенный из той же точки A на CD, должен упасть внутри отверстия острого угла ACG (предложение 9); всякая другая линия AH, проведенная из A внутри угла BAC, должна пересечь [линию] EF, параллельную AB, где-либо в H, сколь бы мал ни был угол BAH; следовательно, CD пересечет в треугольнике AEH линию AH где-либо в K, так как она не может встретиться с EF. Если бы AH проходила из точки A внутри угла CAG, то она должна была бы в треугольнике CAG пересечь продолжение CD где-либо между точками C



Черт. 12.

---

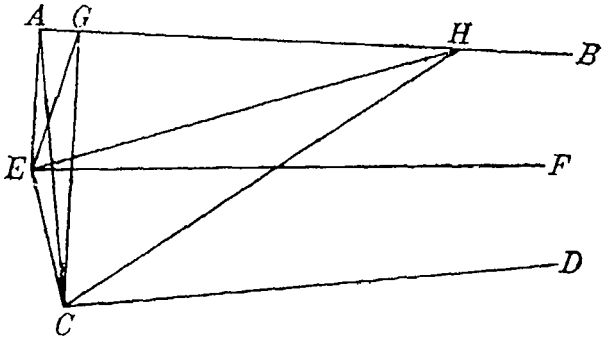
* То-есть лежащей вне полосы, ограничиваемой первыми двумя параллелями.

* Обращаясь к доказательству этого предложения, нужно прежде всего заметить, что прямые AB и CD встретиться не могут, потому что из точки их пересечения, если бы таковая существовала, выходили бы два луча, параллельные EF, что не может иметь места (см. сноску ♀ на стр. 83). Остается, таким образом, обнаружить, что AB есть граничный луч, не встречающий CD; это автор и выполняет.

° Угол DCE есть угол параллельности, соответствующий расстоянию CE, а потому он меньше прямого.

и G. Отсюда следует, что AB и CD параллельны (предложения 16 и 18).

Если примем, что обе внешние линии AB и EF параллельны средней CD, то каждая линия AK, проведенная из точки A внутри угла BAE, пересечет линию CD где-либо в точке K, сколь бы мал ни был угол BAK. На продолжении AK возьмем произвольно точку L и соединим ее с C линией CL, которая пересечет EF где-либо в M, вследствие чего образуется треугольник MCE. Продолжение линии AL внутрь треугольника MCE не может вторично пересечь ни AC, ни CM; следовательно, оно должно встретить EF где-либо в H; поэтому AB и EF взаимно параллельны.



Черт. 13.

Пусть теперь параллели AB и CD (черт. 13) лежат в двух плоскостях, пересечение которых есть линия EF*. Из произвольной точки E последней опустим перпендикуляр EA на одну из двух параллелей, например на AB; затем из основания A перпендикуляра EA опустим вновь перпендикуляр AC на вторую параллель CD и соединим концы E и C обоих перпендикуляров линией EC. Угол BAC должен быть острым (предложение 22); следовательно, перпендикуляр CG, опущенный из C на AB, падает в точку G по ту сторону от CA, в которой считаем линии AB и CD параллельными. Каждая линия EH, сколь бы мало она ни отклонялась от EF, лежит с EC в плоскости, которая должна пересечь плоскость двух параллелей AB и CD вдоль некоторой линии CH. Эта последняя линия пересекает где-либо AB и именно в той же точке H, которая принадлежит всем трем плоскостям

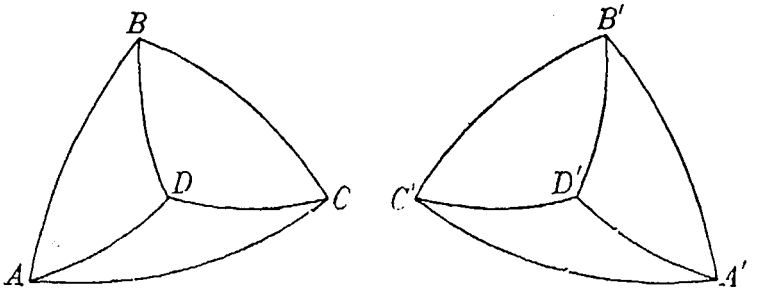
* Отсюда уже следует, что линии AB и EF не пересекаются: через общую их точку, если бы таковая существовала, необходимо проходила бы и прямая CD потому что три прямые AB, CD и EF лежат попарно в одной плоскости; но это не может иметь места, так как линии AB и CD параллельны.

и через которую необходимо проходит также линия EH; следовательно, EF параллельна AB. Подобным же образом можно обнаружить параллельность линий EF и CD.

Сообразно этому предположение, что линия EF параллельна одной из двух других параллельных между собой [линий] AB и CD, означает не что иное, как то, что EF рассматривается как пересечение двух плоскостей, в которых лежат параллели AB и CD. Поэтому две линии параллельны между собой, если они параллельны одной и той же третьей линии, хотя бы они лежали и в различных плоскостях. Последнее предложение можно выразить также следующим образом: *три плоскости пересекаются по линиям, которые все между собой параллельны, поскольку предполагается параллельность двух из них.*

26) *На поверхности шара противолежащие друг другу треугольники имеют одинаковую площадь.*

Под противолежащими друг другу треугольниками мы разумеем здесь такие, которые образуются пересечением поверхности



Черт. 14.

шара [теми же] плоскостями по обе стороны центра; в таких треугольниках стороны и углы имеют поэтому противоположные направления.

В противолежащих друг другу треугольниках ABC и $A'B'C'$ (черт. 14, на котором один из треугольников нужно себе представить изображенным в повернутом виде) стороны $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$ и их углы при точках A, B, C также равны соответствующим углам в другом треугольнике при точках A', B', C'. Представим себе плоскость, проходящую через три точки A, B, C, и перпендикуляр, опущенный на эту плоскость из цен-

тра шара; продолжения этого перпендикуляра в обе стороны пересекут противолежащие друг другу треугольники в точках D и D' шаровой поверхности. Расстояния точки D от точек A, B, C на сфере в дугах больших кругов должны быть равны (предложение 12) как между собой, так и расстояниям $D'A'$, $D'B'$ $D'C'$ в другом треугольнике (предложение 6); следовательно, равнобедренные треугольники, расположенные вокруг точек D и D' в обоих сферических треугольниках ABC и $A'B'C'$ конгруэнтны друг другу.

Чтобы вообще судить о равенстве двух поверхностей*, принимаю за основу следующее предложение: *две поверхности равны, если они образуются составлением или отделением равных частей* *.

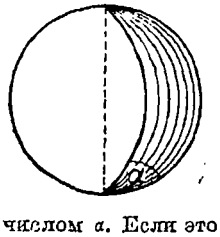
27) *Трехгранный телесный угол равен полусумме его двугранных углов без прямого* ⊘.

---

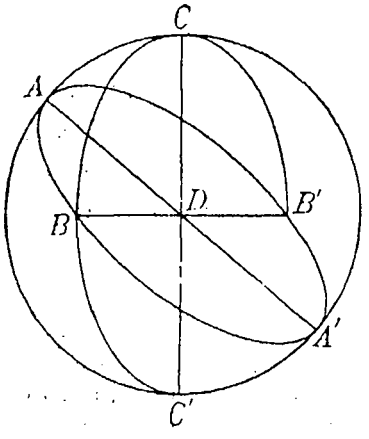
* В оригинале сказано «Oberflächen» (поверхностей); в действительности здесь идет речь о равенстве площадей (т. е. о равновеликости) двух фигур. Во всех своих сочинениях Лобачевский называет две фигуры или два тела *равными*, когда они, по современной терминологии, равновелики. Напротив того, когда они конгруэнтны, он на немецком языке называет их «congruent», на русском — «одинаковыми» (см. примечание 5).

* На это предложение не следует смотреть как на *определение* равновеликих фигур. Лобачевский им пользуется только в точном соответствии с его выражением, приведенным в тексте: показав в каждом случае, что две фигуры могут быть получены составлением или отделением одинаковых частей, Лобачевский отсюда заключает, что эти фигуры равновелики. Обратное предложение в таком общем виде вовсе несправедливо, т. е. не всякие две равновеликие фигуры могут быть составлены из конечного числа конгруэнтных частей. Впрочем, равновеликие прямолинейные фигуры (многоугольники) всегда допускают разбиение на конгруэнтные фигуры. Об этом см. В. Ф. Каган — О преобразовании многогранников, 2-е изд., ГТТИ, Москва — Ленинград, 1933.

⊘ Трехгранный угол, как и всякий телесный угол, измеряется площадью той части сферы единичного радиуса, которую он на ней вырезывает. Площадь сферического треугольника выражается числом $A+B+C-\pi$, где A, B, C суть углы треугольника. Сообразно этому предложение, о котором идет речь, должно было бы гласить: «трехгранный телесный угол равен *сумме* его двугранных углов без *двух прямых*». Расхождение обусловливается тем, что Лобачевский выражает площадь сферы не числом 4π, а числом 2π в особого рода единицах. Именно: часть сферы, которую на ней вырезывает двугранный угол α, имеющий ребро на каком-либо диаметре сферы, Лобачевский всегда выражает числом α. Если это угол в один градус, то Лобачевский называет соответствующий вырезок градусом (сферы), вся сфера при его (центезимальном) делении содержит 400°. Если линейный, а вместе с тем и двугранный углы, как в настоящем сочинении, измеряются в радианах, то вся сфера выражается числом 2π.



В сферическом треугольнике ABC (черт. 15), в котором каждая сторона $< \pi$, обозначим углы через A, B, C, продолжим сторону AB так, что образуется полный круг $ABA'B'A$, который разделит сферу на две равные части. В той половине, в которой находится треугольник ABC, продолжим еще две другие стороны за точку их взаимного пересечения C до их пересечений с кругом в A' и B'. Этим полусфера разобьется на четыре треугольника ABC, ACB', $B'CA'$, $A'CB$, величины которых пусть будут P, X, Y, Z. Ясно, что здесь*



Черт. 15.

$$P+X=B,$$
$$P+Z=A.$$

Величина сферического треугольника Y равна величине противолежащего ему треугольника ABC', в котором сторона AB общая с треугольником P, а третий угол C' лежит при конечной точке диаметра сферы, идущего от C через центр сферы D (предложение 26). Отсюда следует, что $P+Y=C$; а так как $P+X+Y+Z=\pi$, то мы получаем также

$$P=\frac{1}{2}(A+B+C-\pi).$$

К тому же результату можно притти также и другим путем, опираясь только на предложение, приведенное выше относительно равенства площадей (предложение 26).

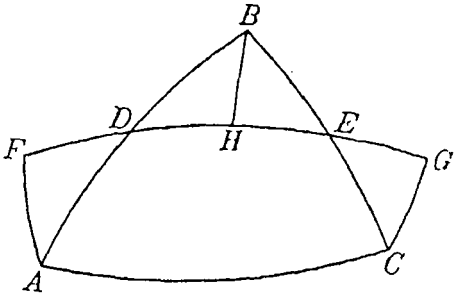
В сферическом треугольнике ABC (черт. 16) разделим стороны AB и BC пополам и через точки деления D и E проведем большой круг; из точек A, B, C опустим на этот круг перпендикуляры AF, BH и CG*. Если перпендикуляр из B падает в H между D и E, то образующийся таким образом треугольник BDH

---

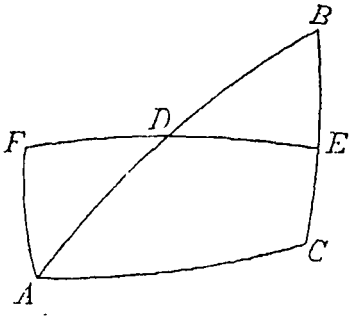
* Треугольники P и X образуют сферический «вырезок», который Лобачевский (как выяснено в сноске ⊘ на предыдущей странице) выражает тем же числом, что и угол B.

* Точнее, окружности больших кругов, перпендикулярные к DE.

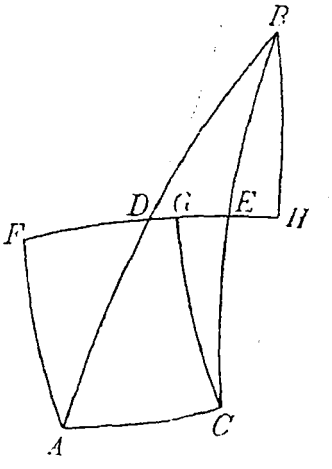
равен AFD, а BHE равен EGC (предложения 6 и 15); отсюда следует, что площадь треугольника ABC равна площади четырехугольника $AFGC$ (предложение 26)*. Если точка H совпадает с серединой E стороны BC (черт. 17), то образуются только два равных прямоугольных треугольника AFD и BDE, замещая которые друг другом, докажем равенство площадей треугольника ABC и четырехугольника $AFEC$. Если, наконец, точка H падает вне треугольника ABC (черт. 18), то мы перейдем от треугольника ABC к четырехугольнику $AFGC$, присоединяя треугольник $FAD = DBH$ и отнимая затем треугольник $CGE = EBH$.



Черт. 16.



Черт. 17.



Черт. 18.

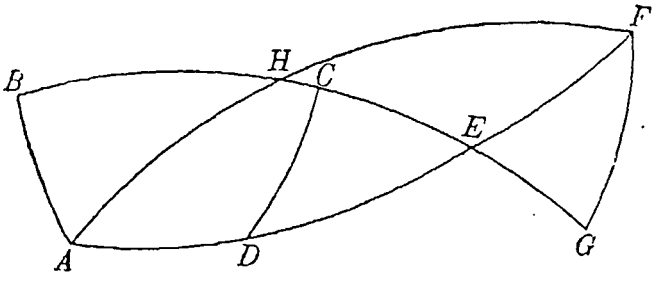
Если в сферическом четырехугольнике $AFGC$ представим себе большие круги, проходящие через точки A и G и через F и C, то дуги последних между AG и FC равны (предложение 15); поэтому конгруэнтны также треугольники FAC и ACG (предложение 15), и угол FAC равен углу ACG.

Отсюда следует, что во всех предыдущих случаях сумма всех трех углов сферического треугольника равна сумме обоих равных

* Треугольники ADF и BDH симметричны относительно точки D; такие симметричные фигуры всегда могут быть приведены в положение, при котором они будут противолежать друг другу на сфере; поэтому находит себе применение предложение 26.

углов в четырехугольнике, за исключением обоих прямых углов *. Таким образом, для каждого сферического треугольника, в котором сумма трех углов есть S, можно найти четырехугольник с той же площадью, в котором имеются два прямых угла, две равные перпендикулярные [к основанию] стороны, а каждый из двух остальных углов равен $\frac{1}{2}S$.

Пусть теперь $ABCD$ (черт. 19) будет сферический четырехугольник, в котором стороны $AB = DC$ перпендикулярны к BC и каждый из углов при A и D равен $\frac{1}{2}S$. Продолжим стороны AD и BC до их пересечения в E и далее за точку E, сделаем



Черт. 19.

$DE = EF$ и на продолжение BC опустим перпендикуляр FG. Всю дугу BG разделим пополам и точку деления H соединим дугами больших кругов с A и F. Треугольники EFG и DCE конгруэнтны (предложение 15); следовательно, $FG = DC = AB$. Треугольники ABH и HGF также конгруэнтны, так как они — прямоугольные и имеют равные катеты; следовательно, [дуги] AH и HF принадлежат *одному* кругу, дуга AHF равна π *, $ADEF$ также $= \pi$, угол $HAD = HFE = \frac{1}{2}S - BAH = \frac{1}{2}S - HFG = \frac{1}{2}S - HFE - EFG = \frac{1}{2}S - HAD - \pi + \frac{1}{2}S$ ⊘; следовательно, угол $HFE = \frac{1}{2}(S - \pi)$ ♀,

---

* То-есть двух равных углов, которые остаются по исключении двух прямых углов четырехугольника.

* Так как большие круги AHF и ADF пересекаются в противоположных точках сферы (A и F).

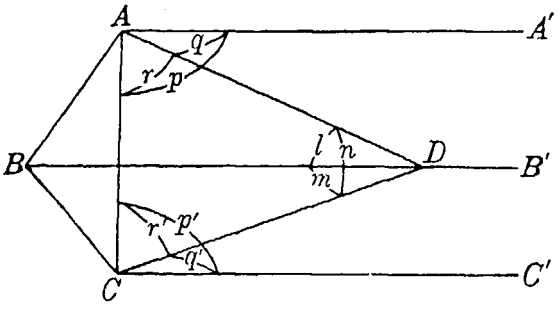
⊘ $EFG = EDC = \pi - ADC$.

♀ Из полученного уравнения $HAD = \frac{1}{2}S - HAD - \pi + \frac{1}{2}S$ находим $HAD = \frac{1}{2}(S - \pi)$, а потому то же значение имеет и угол HFE, а следовательно и сферический вырезок $AHFDA$, как это и выражено в тексте.

или, что то же, равен величине вырезка $AHFDA$, который в свою очередь равен четырехугольнику $ABCD$; это легко усмотреть, если перейти от одного к другому, прибавляя сначала [к вырезку] треугольник EFG, а затем [треугольник] BAH и отнимая после этого равные им треугольники DCE и HFG. Сообразно этому $\frac{1}{2}(S-\pi)$ есть величина четырехугольника $ABCD$, а вместе с тем и величина сферического треугольника, в котором сумма трех углов равна S [13].

28) *Если три плоскости пересекаются по параллельным линиям, то сумма трех двугранных углов* [*ими образуемых*] *равна двум прямым.*

Пусть AA', BB', CC' (черт. 20) будут параллельные линии, образованные пересечением плоскостей (предложение 25). Возь-



Черт. 20.

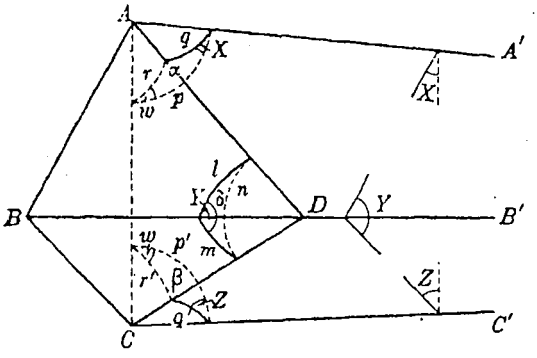
мем на них произвольно три точки A, B, C и представим себе проходящую через них плоскость, которая, следовательно, пересекает плоскости параллелей по прямым линиям AB, AC и BC. Затем через прямую AC и какую-либо точку D на линии BB' проведем еще одну плоскость, которая пересечет две плоскости параллелей AA' и BB', CC' и BB' по линиям AD и DC; наклонение этой плоскости к третьей плоскости параллелей AA' и CC' обозначим через w. Углы между плоскостями, в которых лежат параллели, обозначим через X, Y, Z соответственно линиям AA', BB', CC'; пусть, далее, прямолинейные углы $BDC=a$, $ADC=b$, $ADB=c$. Представим себе описанную вокруг точки A как центра шаровую поверхность; ее пересечения с прямыми AC, AD, AA' определят сферический треугольник со сторонами p, q и r,

величина которого * пусть будет α *; в нем противолежат стороне q угол w, стороне r угол X, а следовательно, стороне p [противолежит угол] $\pi + 2\alpha - w - X$ ⊖ (предложение 27). Таким же образом [прямые] CA, CD, CC', пересекая шаровую поверхность вокруг центра C, определяют [на ней] треугольник величины β со сторонами p', q', r' и углами: w против q', Z против r' и, следовательно, $\pi + 2\beta - w - Z$ против p'. Наконец, пересечениями шаровой поверхности вокруг D с линиями DA, DB, DC определяется сферический треугольник со сторонами l, m, n, которым противолежат углы $w + Z - 2\beta$, $w + X - 2\alpha$ ⊜ и Y; следовательно, величина этого треугольника $\delta = \frac{1}{2}(X + Y + Z - \pi) - \alpha - \beta + w$. С уменьшением w уменьшается также величина треугольников α и β, так что $\alpha + \beta - w$ может быть сделано меньше любого данного числа. В треугольнике δ стороны l и m также могут быть уменьшаемы до уничтожения (предложение 21). Следовательно, треугольник δ может быть отложен одной из своих сторон l и m по большому кругу сферы сколько угодно раз и все-таки не заполнит полусферы; поэтому δ исчезает вместе с w †; отсюда следует, что необходимо должно быть $X + Y + Z = \pi$ [14].

---

* То-есть площадь.

* Читателю удобнее будет следить не по черт. 20 в тексте Лобачевского, а по прилагаемому чертежу, где добавлены обозначения, вводимые в тексте.



⊖ Если искомый третий угол обозначим через ξ, то в силу предложения 27 $\alpha = \frac{1}{2}(w + X + \xi - \pi)$, откуда $\xi = \pi + 2\alpha - w - X$.

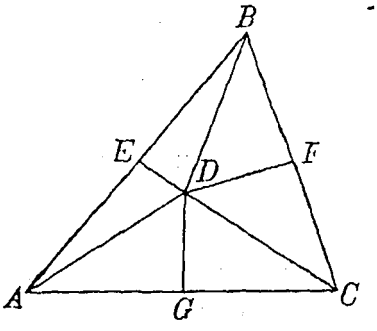
⊜ Легко видеть, что стороне l противолежит угол, смежный с тем, который на сфере C противолежит стороне p'. Точно так же стороне m противолежит угол, смежный с тем, который на сфере A противолежит стороне p.

† Лобачевский хочет сказать, что при неограниченном убывании двух сторон l и m сферического треугольника, которое имеет место, когда точка D беспредельно удаляется по параллели BB', его площадь δ стремится к нулю (неограниченно убывает отношение δ к площади полусферы). В равенстве $\frac{1}{2}(X + Y + Z - \pi) = \alpha + \beta + \delta - w$ правая часть стремится к нулю, а левая

29) *В прямолинейном треугольнике перпендикуляры, восставленные из середин сторон, либо* [*вовсе*] *не встречаются, либо все три пересекаются в одной точке* *.

Предположим, что в треугольнике ABC (черт. 21) перпендикуляры ED и DF, восставленные к сторонам AB и BC из их середин E и F, пересекаются в точке D; внутри углов треугольника проведем линии DA, DB, DC.

В равных треугольниках ADE и BDE (предложение 10) $AD = BD$; также заключаем, что $BD = CD$; следовательно, ADC есть равнобедренный треугольник, а потому перпендикуляр, опущенный из вершины D на основание AC, падает в середину последнего G.



Черт. 21.

Доказательство не меняется и в том случае, если точка пересечения D двух перпендикуляров ED и FD падает на самую линию AC или вне треугольника.

Если поэтому примем, что два из этих перпендикуляров не пересекаются, то и третий не может с ними встретиться [16].

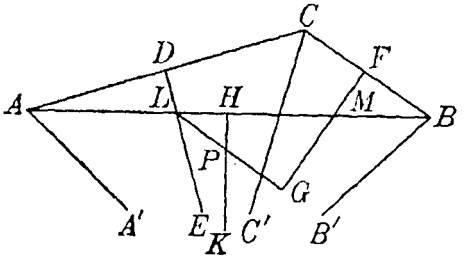
30) *Перпендикуляры, восставленные к сторонам прямолинейного треугольника из их середин, должны быть все три друг другу параллельны, если предположим параллельность двух из них* *.

сохраняет постоянное значение, которое поэтому не может быть отличным от нуля.

* В евклидовой плоскости около всякого треугольника можно описать окружность; перпендикуляры, восставленные к сторонам треугольника из их середин, всегда пересекаются и притом в одной точке, которая и служит центром описанной около треугольника окружности. В неевклидовой геометрии Лобачевского дело обстоит иначе: если в неевклидовой плоскости два из этих перпендикуляров пересекаются, то через точку их пересечения необходимо проходит и третий перпендикуляр; точка пересечения есть центр описанной окружности. Но может случиться, что два перпендикуляра вовсе не пересекутся; в таком случае не пересекаются никакие два из трех перпендикуляров: описанной около треугольника окружности не существует.

* Согласно предыдущей теореме эти три перпендикуляра могут друг с другом не пересекаться. В этом последнем случае любые два из них представляют собой либо параллельные, либо расходящиеся прямые. Настоящее предложение утверждает, что если два из трех перпендикуляров параллельны, то и все три между собой параллельны.

Пусть в треугольнике ABC (черт. 22) линии DE, FG, HK будут перпендикуляры, восставленные к его сторонам в их серединах D, F, H. Примем первоначально, что параллельны перпендикуляры DE и FG, которые пересекают линию AB в L и M*. Из точки L внутри угла BLE проведем произвольно прямую линию LG, которая должна встретить FG где-либо в G, как бы мал ни был угол отклонения GLE (предложение 16) *. Так как в треугольнике LGM перпендикуляр HK не может встретиться с MG ⊘ (предложение 29), то он должен встретить LG где-либо в P; отсюда следует, что HK должна быть параллельна DE ♀ (предложение 16) и MG (предложения 18 и 25).



Черт. 22.

Если положим стороны $BC = 2a$, $AC = 2b$, $AB = 2c$, а противолежащие этим сторонам углы обозначим через A, B, C, то в рассмотренном сейчас случае

$$A = \Pi(b) - \Pi(c),$$
$$B = \Pi(a) - \Pi(c),$$
$$C = \Pi(a) + \Pi(b),$$

как в этом легко убедиться с помощью линий AA', BB', CC', которые проведены из точек A, B, C параллельно перпендикуляру HK, а следовательно, и двум другим перпендикулярам DE и FG (предложения 23 и 25) ↧.

Положим теперь, что параллельны перпендикуляры HK и FG; в таком случае третий перпендикуляр DE не может их пересечь

---

* Правильность этой конфигурации, на которой построено все дальнейшее доказательство предложения 30, разъяснено в примечании 16.

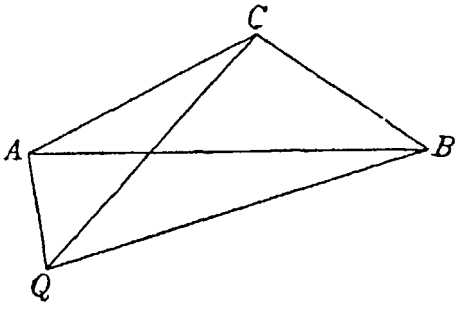
* Здесь, быть может, была бы уместнее ссылка и на предложение 17: луч DE, параллельный FG, сохраняет признак параллельности и в точке L; поэтому луч LG необходимо пересечет FG.

⊘ Ибо по условию перпендикуляры HK и MG не встречаются.

♀ Ибо LE не встречает HK по условию, а всякий луч LP, проходящий внутри угла ELH, встречает HK.

↧ Вряд ли здесь уместна ссылка на предложение 23. Ясно, что $\angle A'AD = \Pi(b)$, $\angle A'AH = \Pi(c)$, откуда и вытекает первое из трех равенств; совершенно таким же образом устанавливаются и два других.

(предложение 29); следовательно, он либо параллелен им, либо пересекает AA' *. Последнее допущение означает не что иное, как то, что угол $C > \Pi(a) + \Pi(b)$ *. Если мы этот угол уменьшим так, чтобы он стал равен $\Pi(a) + \Pi(b)$ ∅, сообщая для этого линии AC новое положение CQ (черт. 23), и величину третьей стороны BQ обозначим через $2c'$, то угол CBQ при точке B, который возрос, должен согласно доказанному выше быть равен $\Pi(a) - \Pi(c') > \Pi(a) - \Pi(c)$, откуда следует $c' > c$ (предложение 23). Однако в треугольнике ACQ

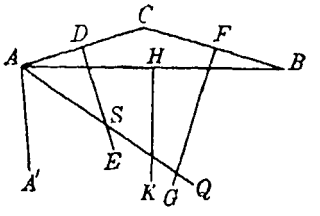


Черт. 23.

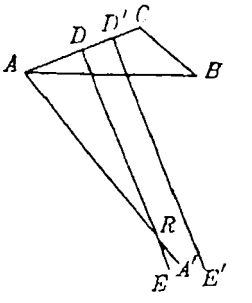
---

* По условию $FG \parallel HK$. Проводим луч AA', параллельный FG и HK (см. чертеж *а*). Всякий луч AQ, проходящий внутри угла $A'AH$, непременно встречает HK, а потому встречает и DE в некоторой точке S. Если поэтому луч AA' не встречает DE, то он ему параллелен.

* Если перпендикуляр DE встречает луч AA' в некоторой точке R (см. чертеж *б*), то угол RAD или $A'AD$ меньше $\frac{\pi}{2}$. Если поэтому на AD отложим отрезок AD' так, что $\Pi(AD') = \angle A'AD$, т. е. так, что перпендикуляр $D'E'$ к AC параллелен AA', то точка D' должна будет упасть за точку D, т. е. $AD' > b$, а $D'C < b$. Но $\Pi(D'C) = \angle D'CC'$, $\Pi(CF) = \Pi(a) = \angle C'CF$. Поэтому $C = \Pi(D'C) + \Pi(a)$; а так как $D'C < b$, то $\Pi(D'C) > \Pi(b)$ и, следовательно, $C > \Pi(b) + \Pi(a)$.

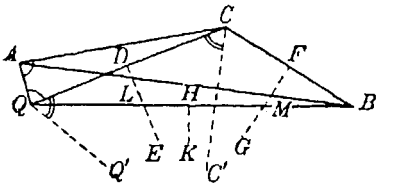


Черт. *а*.



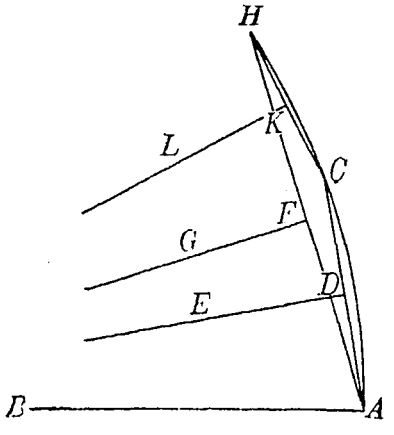
Черт. *б*.

∅ Установив предыдущее неравенство, автор вращает сторону $CA = 2b$ вокруг точки C по направлению к CB. Длины a и b остаются при этом без изменения, вместе с тем сохраняет свое значение и сумма $\Pi(a) + \Pi(b)$; угол же C уменьшается. Поэтому наступит момент, в который $C = \Pi(a) + \Pi(b)$. Этот момент и изображен на черт. 23, который мы здесь для ясности пополняем. Если теперь разделим угол QCB лучом CC' так, чтобы $\angle DCC' = \Pi(b)$, $\angle FCC' = \Pi(a)$, то оба луча DE и FG будут параллельны CC', а потому будут параллельны между собой. С другой стороны, $\angle Q'QD = \angle C'CD = \Pi(b)$. Поэтому $\angle BQD < \angle QCC' < \angle QCB$; отсюда следует $BQ > CB$. Совершенно аналогичным образом докажем, что $BQ > QC$, т. е. $BQ = c'$ остается наибольшей стороной в треугольнике BCQ. Мы находимся поэтому вполне в условиях уже рассмотренного случая. Перпендикуляры DE и FG пере-



углы при A и Q равны; поэтому в треугольнике ABQ угол при Q должен быть больше, чем при точке A, следовательно, $AB > BQ$ (предложение 9); это значит $c > c'$.

31) *Предельной линией (орициклом) мы называем такую расположенную в плоскости кривую линию, у которой все перпендикуляры, восставленные из середин ее хорд, параллельны между собой.*



Черт. 24.

В согласии с этим определением можно представить себе образование предельной линии, если будем проводить к данной прямой AB (черт. 24) из данной на ней точки A под различными углами $CAB = \Pi(a)$ отрезки $AC = 2a$; конец C такого отрезка будет лежать на предельной линии, точки которой можно таким образом постепенно определить. Перпендикуляр DE к хорде AC, восставленный из ее середины D, будет параллелен линии AB, которую мы будем называть *осью предельной линии*. Таким же образом каждый перпендикуляр FG, восставленный из середины какой-либо хорды AH, будет параллелен AB; поэтому это свойство должно принадлежать также каждому перпендикуляру KL, восставленному из середины K хорды CH, между какими бы двумя точками C и H предельной линии она ни была проведена (предложение 30) * [17]. Этого рода перпендикуляры должны поэтому без отличия от AB называться *осями предельной линии* [18].

32) *Круг, радиус которого возрастает, переходит в предельную линию.*

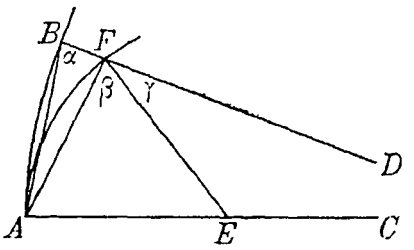
Пусть AB (черт. 25) будет хорда предельной линии; из ее концов A и B проведем две оси AC и BD, которые, следовательно,

---

секают сторону QB в точках L и M, причем середина H стороны BQ лежит между ними. А так как перпендикуляры DE и FG между собой параллельны, то им параллелен и третий перпендикуляр HK, причем имеют место три равенства, установленные выше.

* Ввиду исключительной важности всех соображений, содержащихся в настоящем предложении, они подробнее изложены с различных точек зрения в примечаниях 17—18, которые полезно прочесть уже при первом ознакомлении с текстом.

образуют с хордой два равных угла $BAC = ABD = \alpha$ (предложение 31). На одной из этих осей AC возьмем где-либо точку E, примем ее за центр круга и проведем дугу круга AF от начальной точки A оси AC до ее пересечения с другой осью BD в точке F. Соответствующий точке F радиус круга FE образует по одну сторону угол $AFE = \beta$ с хордой AF, а по другую сторону угол $EFD = \gamma$ с осью BD. Отсюда вытекает, что содержащийся между двумя хордами угол $BAF = \alpha - \beta < \beta + \gamma - \alpha$* (предложение 22); следовательно, $\alpha - \beta < \frac{1}{2}\gamma$. Однако угол γ уменьшается до нуля как вследствие движения центра E при неизменном положении точки F (предложение 21)*, так и вследствие приближения точки F к B по оси BF при неизменном положении центра E (предложение 22); отсюда следует, что при таком уменьшении угла γ исчезает также и угол $\alpha - \beta$, т. е. взаимное наклонение двух хорд AB и AF, а вместе с тем [исчезает] и расстояние точки B на предельной линии от точки F на круге [19].



Черт. 25.

Поэтому предельная линия может называться также *кругом с бесконечно большим радиусом*.

33) Пусть $AA' = BB' = x$ (черт. 26) будут две линии, параллельные в сторону от A к A', а их параллели служат осями двух предельных дуг (дуг на двух предельных линиях) $AB = s$, $A'B' = s'$; тогда

$$s' = se^{-x},$$

---

* Оси AC и BD, проведенные через концы хорды AB предельной линии, образуют с этой хордой равные углы (теорема 4 в примечании 17). Поэтому $\angle BAF = \angle BAC - \angle FAE = \alpha - \beta$. С другой стороны, внешний угол AFD треугольника ABF больше суммы внутренних с ним не смежных углов $BAF + ABF$, т. е. $\beta + \gamma > \alpha - \beta + \alpha$, что совпадает с неравенством, приведенным в тексте. Самое же предложение о том, что внешний угол больше суммы внутренних, с ним не смежных, вытекает из заключительных соображений предложения 22, на которое Лобачевский ссылается.

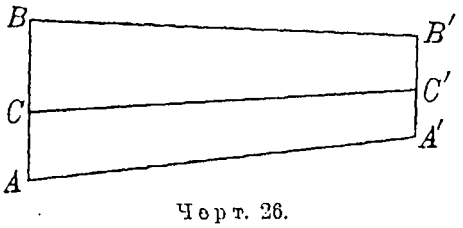
* Ссылка на предложение 21 неправильна. Из этого предложения можно было бы только заключить, что угол AEF стремится к нулю, когда точка E неограниченно удаляется вдоль оси AC. Угол же EFD неограниченно убывает потому, что луч FD параллелен AC, и тогда луч FE встречает AC при сколь угодно малом угле DFE. Все рассуждение доведено до конца в примечании 19.

где e не зависит ни от дуг s и s', ни от прямой x, т. е. от расстояния дуги s' от s.

Чтобы это доказать, примем, что отношение дуги s к s' равно отношению двух целых чисел n и m. Между двумя осями AA', BB' проведем еще третью ось CC', которая, таким образом, отсекает от дуги AB часть $AC=t$, а от дуги $A'B'$ с той же стороны — часть $A'C'=t'$. Пусть теперь отношение t к s равно отношению двух целых чисел p и q, так что

$$s=\frac{n}{m}s'; \quad t=\frac{p}{q}s.$$

Разделим теперь s осями на mq равных частей; тогда таких частей окажется mq на s' и np на t. Между тем эти равные части на s и t соответствуют также равным частям на s' и t'; следовательно,



Черт. 26.

$$\frac{t'}{t}=\frac{s'}{s}\ [20].$$

Таким образом, где бы мы ни взяли две дуги t и t' между двумя осями AA' и BB', отношение t к t' остается то же, пока между ними остается то же расстояние x. Если поэтому для $x=1$ положим $s=es'$, то для любого x должно быть

$$s'=se^{-x}\ *.$$

Так как e есть неизвестное число, подчиненное только условию $e>1$, а, с другой стороны, единица для измерения длины x может быть выбрана произвольно, то последнюю можно для упрощения вычислений выбрать так, что под e можно будет разуметь основание неперовых логарифмов.

Здесь можно еще отметить, что $s'=0$ для $x=\infty$; поэтому расстояние между двумя параллелями (предложение 24) не только уменьшается, но при продолжении их в сторону параллелизма в конце концов (zuletzt) совершенно исчезает. Параллельные линии имеют, таким образом, характер асимптот.

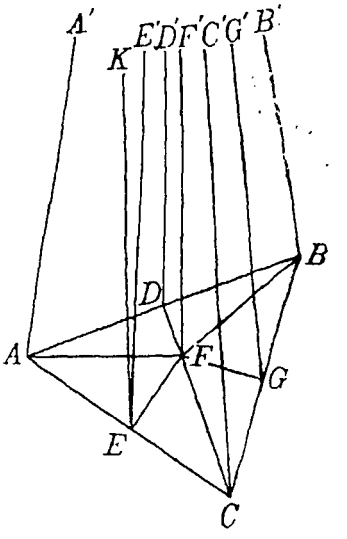
---

* Это предложение требует обстоятельного разъяснения. Оно проведено в примечании 21.

34) *Предельной поверхностью* (орисферой) называется поверхность, которая получается вращением предельной линии вокруг одной из своих осей, каковая вместе со всеми другими осями предельной линии будет также осью поверхности *.

Хорда [предельной поверхности] *наклонена под равными углами к осям, проведенным через ее конечные точки, где бы на поверхности эти две точки ни были взяты.*

Пусть A, B, C (черт. 27) будут три точки на предельной поверхности, AA' пусть будет ось вращения, BB' и CC' — две другие оси; следовательно, AB и AC суть хорды, к которым оси наклонены под равными углами $A'AB = B'BA$, $A'AC = C'CA$ (предложение 31)*; две оси BB' и CC', проведенные через концы третьей хорды BC, также параллельны и лежат в одной плоскости (предложение 25). Перпендикуляр DD', восставленный из середины D хорды AB в плоскости двух параллелей, должен быть параллелен трем осям AA', BB', CC' (предложения 23 и 25)⊙, такой же перпендикуляр EE' к хорде AC в плоскости параллелей AA', CC' будет параллелен трем осям AA', BB', CC' и перпендикуляру DD'. Угол между плоскостью, в которой расположены параллели AA' и BB', и плоскостью треугольника ABC обозначим через $\Pi(a)$, где a может быть [числом] положи-



Черт. 27.

---

* Предложение 34 составляет главную основу всего дальнейшего развития неевклидовой геометрии. Примечание 22 содержит тщательный его анализ и ряд указаний для уяснения дальнейшего текста.

* Так как AA' есть ось вращения, то BB' и CC' суть оси предельных линий, служащих меридианами; поэтому оси BB' и AA' одинаково наклонены к хорде AB, а оси CC' и AA' одинаково наклонены к хорде AC (см. примечание 17 к предложению 31, теорема 4). В предложении 31, на которое Лобачевский ссылается, это свойство предельной линии, конечно, содержится, но явно не выражено.

⊙ Ссылка на предложение 23 вряд ли обоснована. Первое утверждение, что перпендикуляр DD' параллелен осям AA' и BB', основано на самом определении предельной линии (предложение 31); вследствие предложения 25 он параллелен также оси CC'.

тельным, отрицательным или нулем*. Если a положительно, то проведем $FD = a$ внутрь треугольника ABC в его плоскости перпендикулярно к хорде AB в ее середине D. Если a будет числом отрицательным, то нужно провести $FD = a$ вне треугольника по другую сторону хорды AB; если $a = 0$, то точка F совпадает с D*. Во всех случаях получаем два равных прямоугольных треугольника AFD и DBF; следовательно, $FA = FB$. Теперь из точки F восставим перпендикуляр FF' к плоскости треугольника ABC.

Так как угол $D'DF = \Pi(a)$, $DF = a$, то [линия] FF' параллельна DD' и линии EE', с которой она [поэтому] также лежит в одной плоскости, перпендикулярной к плоскости треугольника ABC◎. Если теперь представим себе перпендикуляр EK, восставленный к EF в плоскости параллелей EE' и FF', то он будет также перпендикулярен к плоскости треугольника ABC (предложение 13) и к лежащей в этой плоскости прямой AE (предложение 11); поэтому [линия] AE, перпендикулярная к EK и EE', будет также перпендикулярна к FE (предложение 11)♀. Треугольники AEF и FEC равны, как прямоугольные с равными катетами; поэтому $AF = FC = FB$. Перпендикуляр из вершины F равнобедренного треугольника BFC на основание BC проходит через середину

---

* См. примечание 10 к предложению 23 на стр. 130. Если α есть линейный угол этого двугранного угла, то он здесь определяется тем числом a, для которого $\Pi(a) = \alpha$. Этот угол может оказаться острым, прямым или тупым, соответственно чему, как указано в тексте, a имеет положительное, нулевое или отрицательное значение. Этим способом определения угла Лобачевский в дальнейшем пользуется очень часто (см. примечание 24 к предложению 35, стр. 146).

* См. предыдущую сноску.

◎ Плоскость $D'DF$ перпендикулярна к прямой AB, а потому перпендикулярна и к плоскости ABC [это предложение не фигурирует среди основных 15 предложений (см. сноску * на стр. 80), но явно не зависит от постулата о параллельных линиях]. Перпендикуляр FF', восставленный к прямой DF в плоскости $D'DF$, будет перпендикулярен и к плоскости ABC (предложение 13), или, иначе, перпендикуляр FF', восставленный из точки F к плоскости ABC, лежит в плоскости $D'DF$. А так как $\angle D'DF = \Pi(DF)$, то луч DD' параллелен лучу FF'.

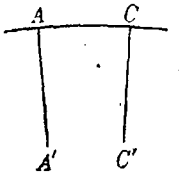
♀ Прямая AE перпендикулярна к линии EE'; EF есть проекция линии EE' на плоскость ABC; поэтому прямая AE перпендикулярна к EF. Казалось бы, можно было непосредственно сослаться на предложение о перпендикуляре к проекции и к проектируемой линии. Но обычное доказательство этого предложения существенно предполагает, что наклонная EE' и проектирующий перпендикуляр FF' пересекаются. Вследствие этого Лобачевский воспроизводит это доказательство для того случая, когда луч EE' параллелен лучу FF'.

последнего G; плоскость, проходящая через этот перпендикуляр FG и линию FF', должна быть перпендикулярна к плоскости треугольника ABC и пересекать плоскость параллелей BB', CC' по линии GG', которая также параллельна AA' и BB' (предложение 25); так как теперь CG перпендикулярна к FG, а потому и к GG', то угол $C'CG = B'BG$ (предложение 23).

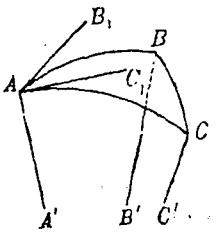
Отсюда следует, что для предельной поверхности каждая из ее осей может быть рассматриваема как ось поверхности [22].

Главной плоскостью мы будем называть каждую плоскость, проведенную через ось предельной поверхности. Сообразно этому каждая *главная плоскость* сечет предельную поверхность по предельной линии*, между тем как при другом положении секущей плоскости это пересечение есть круг*. Три главные плоскости, пересекающие друг друга, образуют друг с другом углы, сумма которых равна π (предложение 28). Эти углы мы будем рассматривать как углы в предельном треугольнике, сторонами которых служат дуги предельных линий, образуемых пересечением предельной поверхности этими тремя главными плоскостями ⊘.

* Через ось AA' поверхности проведем плоскость, которая рассечет поверхность по некоторой линии AC. Как было показано выше, луч AA' можно рассматривать как ось, вращением вокруг которой линия AC образует поверхность; следовательно, AC есть предельная линия. Особенно отчетливо это выясняется, если исходить из другого определения предельной линии и поверхности (примечание 18 к предложению 31 и примечание 22 к настоящему предложению). По этому определению C есть точка луча CC', соответствующая точке A луча AA'; но тогда в плоскости параллелей AA', CC' точка C лежит на предельной линии, определяемой точкой A и осью AA'.

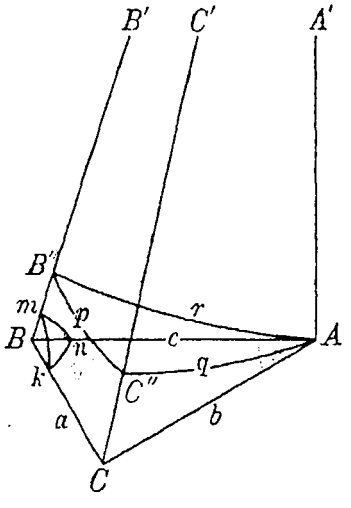


* Если A, B, C суть три точки сечения, то через них, как доказано выше (см. примечание 22), проходит окружность (черт. 27 текста). Перпендикуляр FF' из центра этой окружности представляет собой ось поверхности. Плоскости $FF'AA'$, $FF'BB'$, $FF'CC'$ секут поверхность по предельным линиям AF, BF, CF. При вращении вокруг оси FF' каждая из этих предельных линий образует рассматриваемую поверхность. Мы можем эти предельные линии рассматривать как меридианы; плоскость же ABC сечет поверхность по параллели, т. е. по окружности.



⊘ Пусть ABC будет *предельный треугольник*, т. е. треугольник, составленный на предельной поверхности предельными линиями AB, BC, CA. Плоскости этих предельных линий пересекаются по осям AA', BB', CC'. Согласно предложению 28, сумма двугранных углов, этими плоскостями образуемых, равна π. Если в вершине A проведем касательные AB_1 и AC_1 к предельным линиям AB и AC, то они образуют линейный угол B_1AC_1 двугранного угла AA' (см. примеча-

В предельных треугольниках стороны и углы связаны поэтому теми же зависимостями, которые устанавливаются в обыкновенной геометрии для прямолинейных треугольников * [23].



Черт. 28.

35) В дальнейшем мы будем обозначать величину линий буквой со штрихом, например x', чтобы указать, что таковая находится к другой линии, обозначаемой той же буквой без штриха, в соотношении, выраженном уравнением

$$\Pi(x)+\Pi(x')=\tfrac{1}{2}\pi \quad [24].$$

Пусть теперь ABC (черт. 28) будет прямолинейный прямоугольный треугольник, в котором гипотенуза $AB=c$, катеты $AC=b$, $BC=a$, а противолежащие им углы суть $BAC=\Pi(\alpha)$, $ABC=\Pi(\beta)$ *. В точке A восставим перпендикуляр AA' к плоскости треугольника ABC и из точек B и C проведем BB' и CC' параллельно AA'. Плоскости, в которых эти три параллели лежат, образуют между собой углы $\Pi(\alpha)$ при AA', прямой при CC' ⊘ (предложения 11 и 13) и, следовательно, $\Pi(\alpha')$ при BB' (предложение 28).

ние 17, теорему 5 на стр. 136); с другой стороны, тем же углом B_1AC_1 измеряется и угол A предельного треугольника; то же относится и к углам B и C. Поэтому в предельном треугольнике ABC сумма углов $A+B+C=\pi$.

* Последнее соображение устанавливает факт весьма большой важности, обстоятельному выяснению которого посвящено примечание 23.

* Иными словами, каждый из острых углов прямоугольного треугольника ABC задается его гиперболическим значением α и β. О гиперболическом значении углов см. примечание 24.

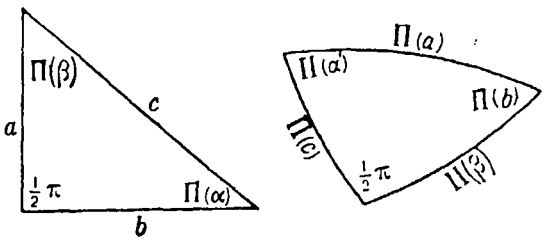
⊘ Двугранный угол (AA') измеряется углом A треугольника ABC, гиперболическое значение которого обозначено через α; следовательно, $(AA')=\Pi(\alpha)$. Плоскость $C'CA$, проходящая через перпендикуляр AA' к плоскости ABC, перпендикулярна к последней. Прямая BC, перпендикулярная к линии пересечения взаимно перпендикулярных плоскостей ACB и $AA'CC'$ и лежащая в первой из них, перпендикулярна ко второй (ссылка на предложение 13 в тексте). Поэтому плоскость $BB'CC'$, проходящая через BC, перпендикулярна к плоскости $AA'CC'$, двугранный угол (CC') прямой. Сумма двугранных углов (AA'), (BB'), (CC') равна π (ссылка на предложение 28 в тексте); поэтому угол (BB') дополняется (AA') до прямого; его гиперболическое значение есть α'.

Пересечения линий BA, BC, BB' с шаровой поверхностью, описанной вокруг точки B как центра, определяют сферический треугольник mnk, в котором стороны $mn = \Pi(c)$, $kn = \Pi(\beta)$, $mk = \Pi(a)$, противолежащие же им углы суть $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$ *.

Поэтому вместе с существованием прямолинейного треугольника со сторонами a, b, c и противолежащими им углами $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$ нужно допустить также существование сферического треугольника (черт. 29) со сторонами $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$ и противолежащими углами

$$\Pi(b),\ \Pi(\alpha'),\ \tfrac{1}{2}\pi.$$

Но и, обратно, для этих двух треугольников существование сферического треугольника влечет за собой существование прямо-



Черт. 29.

линейного, который поэтому также может иметь стороны a, α', β и противолежащие им углы $\Pi(b')$, $\Pi(c)$, $\frac{1}{2}\pi$ *.

Поэтому от a, b, c, α, β можно перейти к b, a, c, β, α, а также к a, α', β, b', c.

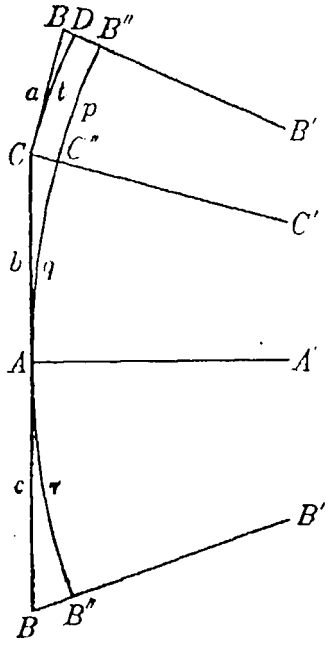
---

* Сторона mn сферического треугольника измеряется углом $B'BA$; так как луч BB' параллелен AA', а AA' перпендикулярен к AB, то этот угол есть $\Pi(c)$; сторона mk таким же образом измеряется углом $B'BC = \Pi(a)$; сторона же kn измеряется углом B прямолинейного треугольника ABC, гиперболическое значение которого обозначено через β. Угол m сферического треугольника измеряется двугранным углом BB' и поэтому равен, как было показано, $\Pi(\alpha')$; угол k измеряется двугранным углом BC или его линейным углом $C'CA$, а потому равен $\Pi(b)$. Плоскость $BB'AA'$, проходя через AA', перпендикулярна к плоскости ABC; двугранный угол (BA), которым измеряется угол n сферического треугольника, прямой.

* Доказательство этого изложено в примечании 25, с которым рекомендуется ознакомиться уже при первом чтении.

Представим себе предельную поверхность, проходящую через точку A и имеющую осью [линию] AA' (черт. 28); [эта поверхность] пересечет две другие оси BB' и CC' в B'' и C'', а пересечения ее с плоскостями параллелей образуют предельный треугольник, стороны которого $B''C'' = p$, $C''A = q$, $B''A = r$, противолежащие же им углы суть $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$*, следовательно,

$$p = r \sin \Pi(\alpha), \quad q = r \cos \Pi(\alpha).$$



Черт. 30.

Теперь нарушим соединение трех главных плоскостей по линии BB' и развернем их таким образом, чтобы они вместе со всеми находящимися в них линиями расположились в одной плоскости; в этой плоскости дуги p, q, r соединятся в одну дугу предельной линии, проходящей через точку A и имеющей AA' своей осью (черт. 30)*; при этом по одну сторону [оси AA'] расположатся дуги q и p, сторона b треугольника, которая в точке A перпендикулярна к AA', — ось CC', идущая от конца стороны b параллельно AA' и проходящая через точку соединения C'' [дуг] p и q; сторона a — перпендикулярная к CC' в точке C, а также выходящая из конца этой стороны ось BB', параллельная AA' и проходящая через конец B'' дуги p. По другую сторону AA' будут лежать: сторона c, перпендикулярная к AA' в точке A, и ось BB', параллельная AA' и идущая от конца [стороны] b через конечную точку B'' дуги r. Величина линии CC'' зависит от b, каковую за-

---

* Стороне p противолежит угол A, который и выражен через $\Pi(\alpha)$; стороне q противолежит угол, измеряемый двугранным углом $(B''B')$, который дополняет A до $\frac{1}{2}\pi$ и потому равен $\Pi(\alpha')$. В прямоугольном предельном треугольнике стороны и углы связаны уравнениями обыкновенной (т. е. евклидовой) тригонометрии.

* Потому что это будут предельные линии на плоскости, имеющие в каждой из точек схождения A и C'' общую ось (точнее — параллельные оси).

висимость мы выразим через $CC'' = f(b)$. Таким же образом будет $BB'' = f(c)$ *.

— Если, принимая CC'' за ось, проведем из точки C новую предельную линию до пересечения D с осью BB' и обозначим дугу CD через t, то

$$BD = f(a),\ BB'' = BD + DB'' = BD + CC''$$

и, следовательно,

$$f(c) = f(a) + f(b).$$

Кроме того, мы замечаем (предложение 33), что

$$t = pe^{f(b)} = r \sin \Pi(a)\, e^{f(b)} *.$$

Если бы перпендикуляр к плоскости треугольника ABC (черт. 28) был восставлен не в точке A, а в B, то линии c и r остались бы те же, дуги q и t перешли бы в t и q, прямые a и b в b и a, а угол $\Pi(\alpha)$ заменился бы углом $\Pi(\beta)$ ⊘, следовательно, мы бы имели

$$q = r \sin \Pi(\beta)\, e^{f(a)};$$

подставляя вместо q ♀ его значение, находим

$$\cos \Pi(\alpha) = \sin \Pi(\beta)\, e^{f(a)},$$

заменяя же α и β через b' и c ↧:

$$\sin \Pi(b) = \sin \Pi(c)\, e^{f(a)},$$

и умножая на $e^{f(b)}$:

$$\sin \Pi(b)\, e^{f(b)} = \sin \Pi(c)\, e^{f(c)}.$$

Отсюда следует также:

$$\sin \Pi(a)\, e^{f(a)} = \sin \Pi(b)\, e^{f(b)}.$$

---

* Если в какой-либо точке A предельной линии проведем к ней касательную $AC = b$ и из точки C проведем ось CC', параллельную AA', которая встретит предельную линию в точке C'', то длина отрезка CC'' явно будет функцией от b, которую Лобачевский и обозначает через $f(b)$. Соответственно $BB'' = f(c)$.

* Согласно предложению 33, $t = pe^x$, где x есть длина отрезка CC'', выраженная в установленной в предложении 33 единице меры (в оригинале ошибочно сделана ссылка на предложение 32 вместо 33), а так как $CC'' = f(b)$, то мы и получаем соотношение, приведенное в тексте.

⊘ Доказательство этого см. в примечании 26.

♀ Подстановка производится в найденную выше формулу $q = r \cos \Pi(a)$.

↧ Согласно установленной выше возможности перейти от элементов a, b, c, α, β к элементам a, α', β, b', c; при этом $\cos \Pi(b') = \cos\left[\frac{1}{2}\pi - \Pi(b)\right] = \sin \Pi(b)$.

Так как, однако, прямые a и b друг от друга не зависят, а с другой стороны, при $b = 0$ $f(b) = 0$, $\Pi(b) = \frac{1}{2}\pi$, то для любой прямой линии a

$$e^{-f(a)} = \sin \Pi(a);$$

сообразно этому

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b),$$
$$\sin \Pi(\beta) = \cos \Pi(\alpha) \sin \Pi(a) \text{ *}.$$

Отсюда изменением букв получаем

$$\sin \Pi(\alpha) = \cos \Pi(\beta) \sin \Pi(b),$$
$$\cos \Pi(b) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(\alpha),$$
$$\cos \Pi(a) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(\beta) \text{ *}.$$

Если в сферическом прямоугольном треугольнике (черт. 29)⊘ обозначим стороны $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$ с противолежащими им углами $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$ буквами a, b, c, A, B, то найденные уравнения принимают форму, которая, как известно, устанавливается для прямоугольного треугольника в сферической тригонометрии, именно:

$$\sin a = \sin c \sin A,$$
$$\sin b = \sin c \sin B,$$
$$\cos A = \cos a \sin B,$$
$$\cos B = \cos b \sin A,$$
$$\cos c = \cos a \cos b;$$

от этих уравнений можно перейти к уравнениям любых сферических треугольников. Таким образом сферическая тригонометрия не зависит от того, равна ли в прямолинейном треугольнике сумма трех углов двум прямым или нет ♀.

---

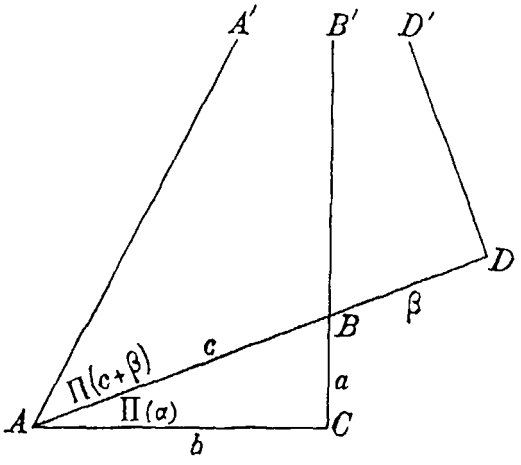
* Это соотношение получается из предыдущего при помощи той же замены, которая указана в предыдущем примечании (↧ на стр. 115).

* Первое из этих трех уравнений получаем из предыдущего, заменяя друг другом катеты a и b, а вместе с тем и противолежащие им углы $\Pi(\alpha)$ и $\Pi(\beta)$; второе получим из первого при помощи подстановки, указанной в примечании ↧ на стр. 115; третье получим из второго новой транспозицией катетов и прилежащих им острых углов.

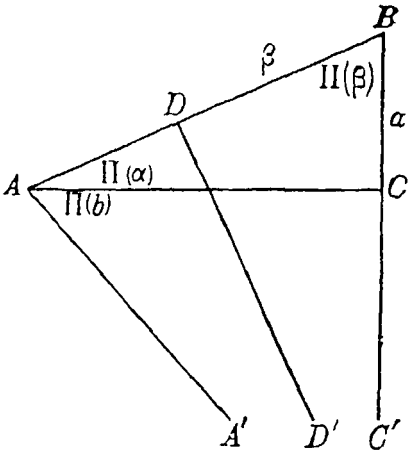
⊘ Сопутствующем, как показано в тексте нашему прямолинейному прямоугольному треугольнику.

♀ Общий обзор этого довольно сложного рассуждения сделан в примечании 27.

36) Теперь рассмотрим снова прямолинейный прямоугольный треугольник ABC (черт. 31), стороны которого суть a, b, c, а противолежащие углы суть $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$. Продолжим гипотенузу c за точку B и сделаем $BD=\beta$; из точки D восставим к BD перпендикуляр DD', который, следовательно, будет параллелен BB', т. е. продолжению стороны a за точку B. Из точки A проведем



Черт. 31.



Черт. 32.

еще к DD' параллель AA', которая в то же время будет параллельна CB' (предложение 25). Поэтому угол $A'AD=\Pi(c+\beta)$, $A'AC=\Pi(b)$; следовательно,

$$\Pi(b)=\Pi(\alpha)+\Pi(c+\beta).$$

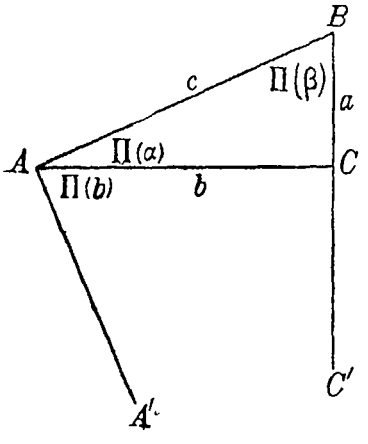
Если отложим β на гипотенузе c от точки B, затем из конечной точки D (черт. 32)* восставим к AB внутрь треугольника перпендикуляр DD' и из точки A проведем AA' параллельно DD', то BC с ее продолжением CC' будет третьей параллелью, тогда угол $CAA'=\Pi(b)$, $DAA'=\Pi(c-\beta)$; следовательно,

$$\Pi(c-\beta)=\Pi(\alpha)+\Pi(b).$$

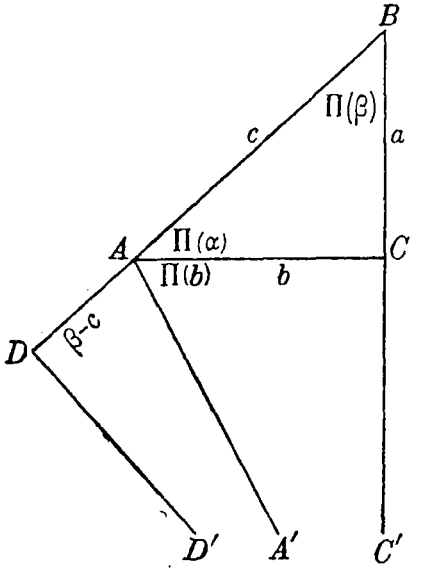
Последнее уравнение остается в силе и в том случае, когда $c=\beta$ или $c<\beta$. Если $c=\beta$ (черт. 33), то перпендикуляр AA', восставленный к AB из точки A, параллелен стороне $BC=a$ с ее

* Чертеж сделан в предположении $c>\beta$; случаи $c\leqslant\beta$ рассмотрены ниже.

продолжением CC'; следовательно, $\Pi(a)+\Pi(b)=\frac{1}{2}\pi$ и в то же время $\Pi(c-\beta)=\frac{1}{2}\pi$ (предложение 23)*. Если $c<\beta$ (черт. 34), то конец отрезка β падает по другую сторону точки A в D на продолжении гипотенузы AB. Восставленный отсюда перпендикуляр DD' к AD и параллельная ему линия AA' из [точки] A будут



Черт. 33.



Черт. 34.

также параллельны стороне $BC=a$ с ее продолжением CC'. Здесь угол $DAA'=\Pi(\beta-c)$, следовательно, $\Pi(a)+\Pi(b)=\pi-\Pi(\beta-c)=$ $=\Pi(c-\beta)$ (предложение 23).

Приведя в связь оба найденных уравнения, получаем

$$2\Pi(b)=\Pi(c-\beta)+\Pi(c+\beta),$$
$$2\Pi(a)=\Pi(c-\beta)-\Pi(c+\beta),$$

откуда следует

$$\frac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(a)}=\frac{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)+\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)-\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]}.$$

Если сюда подставим значение (предложение 35)

$$\frac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(a)}=\cos\Pi(c),$$

* См. заключительный абзац предложения 23: $\Pi(0)=\frac{1}{2}\pi$.

то получим

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)^2 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\ *.$$

Здесь β есть произвольное число, так как угол $\Pi(\beta)$ с одной стороны [гипотенузы] c может быть выбран произвольно в пределах от 0 до $\frac{1}{2}\pi$; следовательно, β [может быть выбрано] произвольно между 0 и ∞; полагая здесь по порядку $\beta = c$, $2c$, $3c$ и т. д., *для любого положительного числа* n получим:

$$\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^n = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(nc)\ *.$$

---

* Написав сообразно этому предыдущее равенство в виде пропорции

$$\frac{\cos\Pi(c)}{1} = \frac{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)+\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)-\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]},$$

составляем производную пропорцию:

$$\frac{1-\cos\Pi(c)}{1+\cos\Pi(c)} =$$

$$= \frac{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)-\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]-\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)+\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)-\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]+\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)+\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]} =$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)\sin\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)}{\cos\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)\cos\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)}.$$

* При $\beta = c$, $\Pi(c-\beta) = \frac{1}{2}\pi$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) = 1$, и равенство принимает вид

$$\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^2 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(2c). \qquad (1)$$

При $\beta = 2c$

$$\Pi(c-\beta) = \Pi(-c) = \pi - \Pi(c);\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(c),$$

а потому предыдущее равенство дает

$$\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^3 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(3c).$$

Далее, при $\beta = 3c$

$$\Pi(c-\beta) = \Pi(-2c) = \pi - \Pi(2c);\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(2c),$$

и, таким образом, в силу соотношения (1) при $\beta = 3c$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) = \left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^{-2}.$$

Вместе с тем основное уравнение, установленное в тексте, дает

$$\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^4 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(4c).$$

Продолжить эти рассуждения или провести их в общем виде уже нетрудно.

Если будем здесь рассматривать n как отношение двух линий x и c и примем, что

$$\operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} \Pi(c) = e^c,$$

то получим вообще для любой линии x, как положительной, так и отрицательной,

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x} \text{ *},$$

где e может быть любое число, большее единицы, ибо $\Pi(x) = 0$ при $x = \infty$.

Так как единица, которой измеряются линии, произвольна, то за e можно также принять основание неперовых логарифмов [28].

37) Из найденных выше уравнений достаточно знать два следующих:

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b),$$
$$\sin \Pi(a) = \sin \Pi(b) \cos \Pi(\beta),$$

относя последнее к обоим катетам a и b, чтобы из их соединения вывести два остальных (предложение 35) и притом без двузначности относительно алгебраических знаков, ибо углы здесь острые *.

---

* Если фиксируем c и положим $n = \frac{x}{c}$, то предыдущее основное соотношение примет вид:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(x) = \left[\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(c)\right]^n = \left[\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(c)\right]^{\frac{x}{c}}.$$

Если c есть положительное число, то $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c)$ есть правильная дробь. Поэтому всегда можно найти такое число $e > 1$, при котором

$$\operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} \Pi(c) = e^c.$$

Предыдущее равенство примет вид

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x}.$$

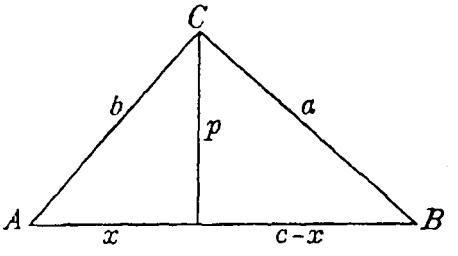
Этим сделан следующий важный шаг: установлена функция $\Pi(x)$.

* Стороны и углы прямолинейного треугольника — в неевклидовой геометрии даже прямоугольного — связаны *тремя независимыми уравнениями*. Лобачевский указывает, что за такие три уравнения могут быть приняты те два уравнения, которые приведены в тексте в связи с третьим, которое получается из второго транспозицией катетов и противолежащих им острых углов. Из этих трех уравнений путем исключения то одних, то других элементов треугольника могут быть получены не только два дополнительных уравнения, приведенные в предложении 35, но и еще пять уравнений, которые совместно с приведенными пятью дают возможность по любым двум элементам вычислить любой третий элемент. Эти десять уравнений (соответствующие числу сочетаний из 5 элементов по 3) Лобачевский то отдельными группами, то совместно приводит, можно сказать, во всех своих

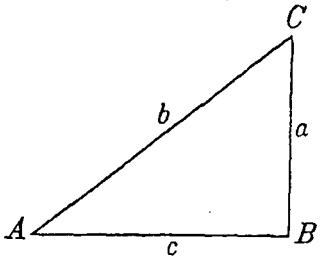
— Аналогичным образом приходим к двум уравнениям:

1. $\operatorname{tg} \Pi(c) = \sin \Pi(a) \operatorname{tg} \Pi(a)$,
2. $\cos \Pi(a) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(\beta)$ *.

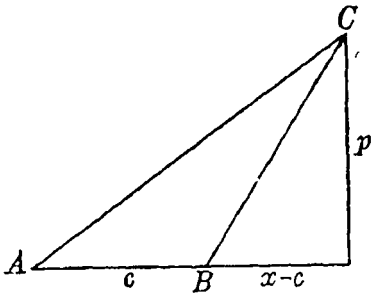
Рассмотрим теперь прямолинейный треугольник со сторонами a, b, c и противолежащими углами A, B, C (черт. 35). Если A и B суть острые углы, то перпендикуляр p из вершины угла C падает внутрь треугольника и делит сторону c на две части, именно:



Черт. 35.



Черт. 36.



Черт. 37.

на часть x со стороны угла A и $c - x$ со стороны угла B. Таким образом получаются два прямоугольных треугольника, применяя к которым уравнение (1), получаем

$$\operatorname{tg} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tg} \Pi(p),$$
$$\operatorname{tg} \Pi(b) = \sin A \operatorname{tg} \Pi(p),$$

каковые уравнения остаются без изменения, даже если бы один из углов, например B, был прямым (черт. 36) или тупым (черт. 37).

сочинениях. Они все сгруппированы в ст. 14 «Новых начал». В примечании 29 приведены все эти десять уравнений прямоугольного треугольника и дан их вывод из тех трех, которые Лобачевский принимает за исходные.

* Эти уравнения выведены в примечании 29. Они там приведены под номерами (8) и (6).

Таким образом получаем общее для всех треугольников соотношение

$$3. \quad \sin A \operatorname{tg} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tg} \Pi(b) \text{ *}.$$

Для треугольника с острыми углами A, B (черт. 35) получаем еще [уравнение (2)]

$$\left.\begin{aligned} \cos \Pi(x) &= \cos A \cos \Pi(b), \\ \cos \Pi(c-x) &= \cos B \cos \Pi(a), \end{aligned}\right\} \qquad [\text{I}]\ \text{*}$$

каковые уравнения относятся также к треугольникам, в которых угол A или B прямой или тупой. Например при $B = \frac{1}{2}\pi$ (черт. 36) нужно взять $x = c$; первое уравнение переходит тогда в то, которое мы получили выше [уравнение (2)], а второе удовлетворяется само по себе ⊘. При $B > \frac{1}{2}\pi$ (черт. 37) первое уравнение остается без изменения, вместо же второго нужно написать соотношение

$$\cos \Pi(x-c) = \cos(\pi - B) \cos \Pi(a);$$

но $\cos \Pi(x-c) = -\cos \Pi(c-x)$ (предложение 23), а также

$$\cos(\pi - B) = -\cos B.$$

Если A есть прямой или тупой угол, то вместо x и $c-x$ нужно взять $c-x$ и x, и этот случай приведется к предыдущим ♀.

---

* Если это соотношение написать в виде

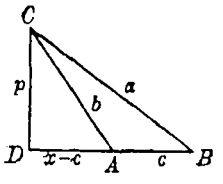
$$\frac{\operatorname{ctg} \Pi(a)}{\sin A} = \frac{\operatorname{ctg} \Pi(b)}{\sin B},$$

то оно наиболее напоминает «теорему синусов» евклидовой тригонометрии.

* Обозначения формул [I], [II] и [III] вставлены нами для удобства ссылки на них в примечаниях; это и отмечено прямоугольными скобками.

⊘ В этом случае $c - x = 0$, $\Pi(c-x) = \frac{1}{2}\pi$, а потому обе части второго уравнения обращаются в нуль.

♀ Если A есть тупой угол, то мы обозначим через x расстояние BD от вершины угла B до основания перпендикуляра p; тогда $AD = x - c$. Из треугольника CAD в силу уравнения (2) мы тогда получаем



$$\cos \Pi(x-c) = \cos \Pi(b) \cos(\pi - A)$$

или

$$\cos \Pi(c-x) = \cos \Pi(b) \cos A.$$

Точно так же из треугольника CBD находим

$$\cos \Pi(x) = \cos \Pi(a) \cos B.$$

Оба эти уравнения получаются из тех двух основных уравнений [I], которые Лобачевский устанавливает (в тексте), если заменить x на $c-x$, и обратно. Существенно важно здесь то, что два основных соотношения [I] имеют место во всяком треугольнике при надлежащем выборе отрезка x.

Чтобы из этих двух уравнений исключить x, заметим, что (предложение 36)

$$\cos \Pi(c-x) = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-x)^2}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-x)^2} = \frac{1-e^{2x-2c}}{1+e^{2x-2c}} =$$

$$= \frac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)^2 \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x)^2}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)^2 \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x)^2} = \frac{\cos\Pi(c)-\cos\Pi(x)}{1-\cos\Pi(c)\cos\Pi(x)}. \quad * \qquad [\text{II}]$$

— Если подставим сюда выражения для $\cos\Pi(x)$, $\cos\Pi(c-x)$, то получим

$$\cos\Pi(c) = \frac{\cos\Pi(a)\cos B + \cos\Pi(b)\cos A}{1+\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos A\cos B}, \qquad [\text{III}]$$

откуда следует

$$\cos\Pi(a)\cos B = \frac{\cos\Pi(c)-\cos A\cos\Pi(b)}{1-\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)}$$

и, наконец,

$$\sin\Pi(c)^2 = [1-\cos B\cos\Pi(c)\cos\Pi(a)]\cdot[1-\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)] \ *.$$

Таким же образом должно быть

4. $$\sin\Pi(a)^2 = [1-\cos C\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)]\cdot[1-\cos B\cos\Pi(c)\cos\Pi(a)],$$
$$\sin\Pi(b)^2 = [1-\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)]\cdot[1-\cos C\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)].$$

Из этих трех уравнений получаем еще

$$\frac{\sin\Pi(b)^2\sin\Pi(c)^2}{\sin\Pi(a)^2} = [1-\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)]^2.$$

Отсюда без двузначности по отношению к знакам ⊘ имеем:

5. $$\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c) + \frac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)} = 1.$$

---

* Выкладки проведены в примечании 30.

* Выкладки проведены в примечании 31.

⊘ Извлечение корня не приводит к двузначности потому, что полученные в результате выражения

$$\frac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)} \text{ и } 1-\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)$$

имеют положительные значения.

Если сюда в согласии с уравнением (3) подставим значение $\sin \Pi(c)$:

$$\sin \Pi(c) = \frac{\sin A}{\sin C} \operatorname{tg} \Pi(a) \cos \Pi(c) \text{ *},$$

то получим

$$\cos \Pi(c) = \frac{\cos \Pi(a) \sin C}{\sin A \sin \Pi(b) + \cos A \sin C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)}$$

или же, подставляя это выражение для $\cos \Pi(c)$ в уравнение (4),

$$6. \quad \operatorname{ctg} A \sin C \sin \Pi(b) + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)} \text{ *}.$$

Исключая отсюда $\sin \Pi(b)$ с помощью уравнения (3), получаем

$$\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)} \cos C = 1 - \frac{\cos A}{\sin B} \sin C \sin \Pi(a) \text{ ⊘}.$$

Между тем уравнение (6) изменением букв ♀ дает

$$\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)} = \operatorname{ctg} B \sin C \sin \Pi(a) + \cos C.$$

Из двух последних уравнений следует ↧

$$7. \quad \cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)}.$$

Все четыре уравнения, выражающие зависимости между сторонами a, b, c и противолежащими углами A, B, C, согласно этому [уравнения (3), (5), (6), (7)] ** будут

---

* Это есть уравнение (3):

$$\sin A \operatorname{tg} \Pi(a) = \sin C \operatorname{tg} \Pi(c),$$

взятое для сторон a и c и противолежащих углов A и C.

* Подстановку эту нужно сделать не в первое уравнение (4), а в следующее, выражающее $\sin^2 \Pi(b)$. Выкладки проведены в примечании 32.

⊘ Иначе говоря, мы подставляем в предыдущее уравнение вместо $\sin \Pi(b)$ выражение, которое дает уравнение (3):

$$\sin \Pi(b) = \frac{\sin A \operatorname{tg} \Pi(a) \cos \Pi(b)}{\sin B}.$$

Это дает непосредственно

$$\frac{\cos A \operatorname{tg} \Pi(a) \cos \Pi(b) \sin C}{\sin B} + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}.$$

Умножая же обе части на $\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)}$, получим уравнение, приведенное в тексте.

♀ То-есть транспонируя стороны a и b, а соответственно этому и углы A и B.

↧ Исключая из этих уравнений отношение $\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)}$.

** Квадратные скобки здесь принадлежат Лобачевскому.

$$8.\quad \begin{cases} \sin A \operatorname{tg} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tg} \Pi(b), \\ \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \dfrac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1, \\ \operatorname{ctg} A \sin C \sin \Pi(b) + \cos C = \dfrac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}, \\ \cos A + \cos B \cos C = \dfrac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)}. * \end{cases}$$

Если стороны треугольника a, b, c очень малы, то можно удовольствоваться приближенными значениями (предложение 36):

$$\operatorname{ctg} \Pi(a) = a,$$
$$\sin \Pi(a) = 1 - \frac{1}{2} a^2,$$
$$\cos \Pi(a) = a *$$

---

* Было бы точнее сказать не «четыре уравнения», а четыре группы уравнений.

Уравнений первой группы имеется три (из них два независимых). Каждое из этих уравнений дает возможность по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них, определить угол, противолежащий второй стороне, или же по двум углам и стороне, противолежащей одному из них, определить сторону, противолежащую второму углу.

Три уравнения второй группы определяют углы треугольника по трем его сторонам. Каждое из уравнений этой группы может также служить для определения третьей стороны по двум сторонам и одному углу.

Уравнений третьей группы имеется шесть; каждое из них служит для определения по стороне и двум прилежащим к ней углам стороны, противолежащей одному из этих углов, или же по углу и двум содержащим его сторонам — угла, противолежащего одной из этих сторон.

Четвертая группа содержит три уравнения и служит для определения сторон треугольника по его углам.

Все три группы содержат, таким образом 15 уравнений, исчерпывающих тригонометрию прямолинейного треугольника.

* Установленное в предложении 36 соотношение $\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^x$ дает:

$$\operatorname{ctg} \Pi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \sin \Pi(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \cos \Pi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Выражая правые части в гиперболических функциях, представим эти уравнения в следующем виде:

$$\operatorname{ctg} \Pi(x) = \operatorname{sh} x, \quad \sin \Pi(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \quad \cos \Pi(x) = \operatorname{th} x.$$

Гиперболические функции играют, таким образом, в неевклидовой геометрии Лобачевского такую же роль, какую в обыкновенной геометрии играют тригонометрические функции. Поэтому построенную Лобачевским систему геометрии, как уже упомянуто выше, называют *гиперболической геометрией* (см. сноску * к стр. 82).

Разлагая гиперболические функции в ряд Маклорена и сохраняя для малых значений x только члены не выше второго порядка, получим выражения, приведенные в тексте.

и аналогично для других сторон b и c. Уравнения (8) переходят для таких треугольников в следующие:

$$b \sin A = a \sin B,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$
$$a \sin (A + C) = b \sin A,$$
$$\cos A + \cos (B + C) = 0. \text{ *}$$

Из этих уравнений первые два приняты в обыкновенной геометрии; последние же с помощью двух первых приводят к заключению, что

$$A + B + C = \pi. \text{ *}$$

Таким образом воображаемая геометрия переходит в обыкновенную, если предположим, что стороны прямолинейного треугольника очень малы ⊘.

Об измерении кривых линий, площадей плоских фигур, поверхностей и объемов тел, равно как и о применении воображаемой геометрии к анализу я опубликовал некоторые исследования в «Ученых записках Казанского университета» [36].

Уравнения (8) уже сами по себе представляют достаточную основу для того, чтобы рассматривать предположения воображаемой геометрии как возможные. Сообразно этому мы не располагаем никаким другим средством, кроме астрономических наблюдений, чтобы судить о точности, которую дают вычисления обыкновенной геометрии. Как я показал в одной из моих работ, эта точность простирается далеко, так что, например, в треугольниках, стороны которых доступны нашим измерениям, сумма углов не отличается от двух прямых даже на сотую долю секунды ♀.

---

* Выкладки проведены в примечании 33.

* Выкладки проведены в примечании 34. Последний вывод можно формулировать следующим образом: при весьма малых размерах треугольника царящие в нем метрические соотношения не отличаются от евклидовых. В настоящее время это часто формулируют еще так: геометрия бесконечно малого в гиперболическом пространстве совпадает с евклидовой. В связи с этим делаются и заключения натурфилософского характера. Об этом см. примечание 35.

⊘ Точнее, если стороны настолько малы, что можно пренебречь кубом отношения каждой стороны к принятой единице меры.

♀ См. примечание 35, а также сочинение «О началах геометрии» (стр. 207—209 настоящего тома).

Замечательно также, что уравнения (8) в плоской геометрии переходят в уравнения сферических треугольников, если вместо сторон a, b, c подставим $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$; при таком изменении, однако, нужно будет также положить

$$\sin \Pi(a) = \frac{1}{\cos a},$$

$$\cos \Pi(a) = \sqrt{-1}\,\mathrm{tg}\, a,$$

$$\mathrm{tg}\, \Pi(a) = \frac{1}{\sin a \sqrt{-1}};$$

подобные же изменения нужно сделать и для сторон b, c; этим путем мы придем от уравнений (8) к следующим:

$$\sin A \sin b = \sin B \sin a,$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$\mathrm{ctg}\, A \sin C + \cos C \cos b = \sin b\, \mathrm{ctg}\, a,$$

$$\cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C \quad [37].$$

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Столь обычное определение прямой как оси вращения все же выражено в тексте Лобачевского странно. Почему он говорит о вращении *поверхности*, а не твердого тела (неизменяемой среды)? Определение прямой как геометрического места точек, остающихся неподвижными вместе с двумя точками, принадлежащими движущемуся геометрическому образу (телу, поверхности), имеет содержание только в том случае, если речь идет о неподвижных точках этого движущегося образа: среда референции, относительно которой происходит движение, вся рассматривается как неподвижная. Вращающаяся *поверхность* неподвижной прямой не содержит, за исключением плоскости и некоторых особенных поверхностей, содержащих прямые линии. Английский переводчик Гальстед поэтому вносит после текста Лобачевского следующее замечание: «Это значит: если мы вращаем поверхность, ее (эту линию) содержащую, около двух точек этой линии, то линия остается в покое». Кстати сказать, помещая это замечание в скобках, переводчик не указывает, что оно принадлежит ему, а не Лобачевскому.

[2] Евклид дает этому положению такое выражение: «Две прямые не могут заключать пространства». Это положение встречается в «Началах» в виде аргументации при доказательстве предложения 4 книги I. Некоторые комментаторы извлекли его из этого рассуждения и включили его в число аксиом. Как Гейберг и Менге, так и Гис [1]) изъяли это положение из числа аксиом как не подлинное.

[3] Под «ограниченной плоскостью» («begrenzte Ebene») Лобачевский разумеет часть плоскости, ограниченную непрерывной замкнутой кривой, «плоскую фигуру», как часто говорят теперь. Проходя через такую фигуру, неограниченная прямая должна из нее выйти и таким образом делит ее на две части. Самое важное точно выраженное применение, которое это положение в дальнейшем получает, заключается в том, что *прямая, пересекая одну сторону треугольника и входя поэтому внутрь треугольника, должна из него выйти, а потому неизбежно пересекает и другую сторону треугольника.* Отнюдь не будет преувеличенным

---

[1]) Новейшие издатели «Начал» Евклида; см. стр. 32 настоящего тома.

сказать, что построение своеобразной теории параллельных линий Лобачевского опирается преимущественно на это положение [см., например, предложения 17 и 18 настоящего сочинения]. Выделенный таким образом частный случай, которого несомненно достаточно, чтобы в дальнейшем (при правильном определении непрерывной замкнутой кривой) доказать общее предложение, в позднейшей литературе обыкновенно называют *аксиомой Паша*. Хотя на нее несомненно опираются и гораздо более ранние авторы (Саккери, Лежандр), но в совершенно отчетливой форме оно действительно выражено впервые в сочинении Паша «Лекции по новой геометрии» [1]) [IV основное положение (IV Grundsatz) в теории плоскости].

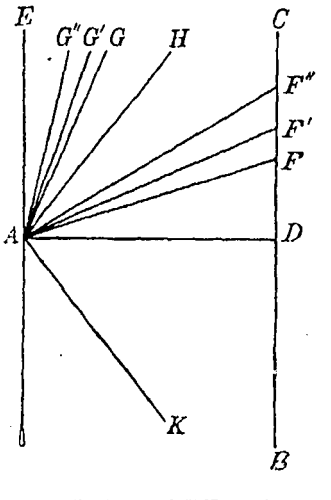
[4] Точнее: прямолинейный отрезок, соединяющий точку, лежащую по одну сторону некоторой прямой, с точкой, лежащей по другую сторону той же прямой, пересекает эту прямую.

[5] В оригинале «Congruent». Во всех своих сочинениях, написанных на русском языке, Лобачевский называет конгруэнтные фигуры *одинаковыми*. В настоящем переводе везде сохранен термин «конгруэнтны».

[6] В оригинале сказано неудачно «der grössten Seite», т. е. наибольшей стороне (треугольника).

[7] Слова «не лежащим с нею в одной плоскости», очевидно, излишни: прямая не может лежать в одной плоскости с двумя пересекающимися прямыми, к которым она перпендикулярна

[8] Существование такой «граничной прямой» требует, конечно, доказательства. Оно основано на непрерывности пучка прямых или, лучше сказать, лучей, проходящих внутри угла EAD из его вершины A. При допущении, что, кроме AE, есть еще лучи, не встречающие DC, лучи этого пучка распадаются на две категории: лучи первой категории AF, AF', AF'',... встречают луч DC, лучи второй категории AG, AG', AG'',... его не встречают. При этом все лучи первой категории неизбежно расположены по одну сторону лучей второй категории, и обратно. В самом деле, если лучи AF и AF'' принадлежат первой категории, то никакой луч второй категории не может лежать между ними, ибо всякий луч AF', лежащий между двумя лучами AF и AF'',



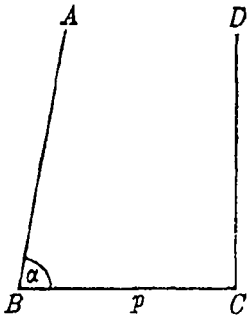
[1]) M. Pasch — Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig, 1882, стр. 21; новое издание с обширным предисловием Дена (M. Dehn) выпущено в 1926 г.

встречающими CD, также встречает CD (предложение 3 и к нему примечание 3).

Таким образом положение, что из точки A внутри прямого угла EAD выходит не один, а несколько (и вследствие этого — бесконечное множество) лучей, не встречающих CD, приводит к образованию дедекиндова сечения в пучке лучей, проходящих в угле EAD через его вершину. Вследствие этого по принципу Дедекинда в этом пучке необходимо существует *граничный луч*, представляющий собой либо последний луч первой категории (последний луч, встречающий DC), либо первый луч второй категории (первый луч, не встречающий DC). Но последнего встречающего луча существовать не может; в самом деле, если AF есть встречающий луч, то, взяв на DC точки F', F'' за точкой F, мы получим дальнейшие лучи, встречающие DC. Следовательно, существует первый луч второй категории, т. е. первый (граничный) луч, не встречающий DC; это и есть луч AH, который Лобачевский называет *параллельным* DC.

[9] В подстрочных примечаниях к тексту все рассуждения этого доказательства были пояснены с той обстоятельностью, которая соответствует значению этого основного предложения. Здесь еще отметим, что оно представляет собой лишь несущественную переработку доказательства Лежандра, опубликованного в «Réflexions» (рубр. 7) в 1833 году.

[10] Согласно изложенному выше, каждому положительному числу p (при установленной единице меры, в которой оно выражает определенный отрезок) соответствует острый угол α, связанный с p соотношением



$$\Pi(p) = \alpha. \qquad (I)$$

Этот угол обращается в $\frac{1}{2}\pi$ при $p = 0$, и обратно, каждому углу α, не превышающему $\frac{1}{2}\pi$, соответствует отрезок, а вместе с тем и положительное число p, при котором имеет место соотношение (I). Если на стороне BC угла $ABC = \alpha$ отложим отрезок $BC = p$, то перпендикуляр CD, восставленный к этой стороне угла из точки C, будет параллелен BA.

Если p есть отрицательное число, то функция $\Pi(-p)$ геометрически не установлена. С другой стороны, равенство (I) при наличных определениях не имеет содержания, если α есть тупой угол.

Теперь Лобачевский определяет функцию $\Pi(-p)$ (для отрицательного значения аргумента) соотношением

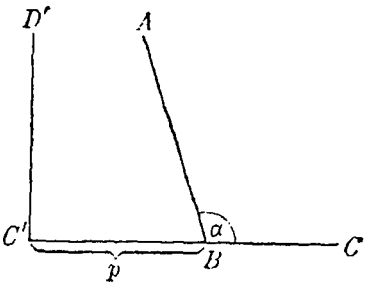
$$\Pi(-p) = \pi - \Pi(p). \qquad (II)$$

В силу этого соотношения каждому отрицательному числу $-p$ также

соответствует угол α, для которого

$$\Pi(-p) = \alpha, \qquad (!!!)$$

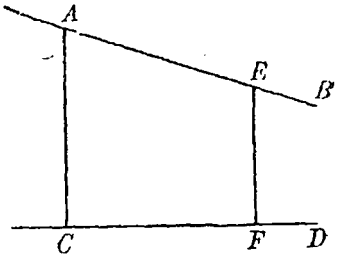
но это будет угол тупой, $\pi - \Pi(p) > \frac{1}{2}\pi$. И обратно, если α есть тупой угол $\left(\frac{1}{2}\pi < \alpha < \pi\right)$, то ему всегда отвечает один и только один отрицательный аргумент $-p$, для которого имеет место соотношение (!!): выбрав в этом случае p так, чтобы $\Pi(p) = \pi - \alpha$, получим то значение p, при котором соотношение (!!) имеет место. При этих условиях в функции $\Pi(x)$ аргумент может измениться от $-\infty$ до $+\infty$; значение же функции меняется от π до 0. Вместе с тем, каков бы ни был угол α в пределах от 0 до π, всегда найдется одно и только одно (положительное или отрицательное) значение x, при котором $\Pi(x) = \alpha$.



Геометрический смысл положительного значения аргумента p выяснен выше. Если α есть тупой угол и при $x = -p$ имеет место соотношение (!!), то в силу определения (!!) $\Pi(p) = \pi - x$. Если поэтому теперь на *продолжении* стороны BC отложим отрезок $BC' = p$, то перпендикуляр $C'D'$ будет параллелен второй стороне угла. Определение (!!!) представляется поэтому вполне естественным.

[11] Четырехугольник $ABDC$ принадлежит именно к тому типу, который рассматривал Саккери (см. статью «Элементы неевклидовой геометрии у других геометров», стр. 167). EF есть так называемая средняя линия этого четырехугольника; она перпендикулярна к обоим его основаниям.

[12] Следующее доказательство того же предложения кажется несколько проще. Положим, что луч AB параллелен лучу CD. Из точки E, лежащей от A в сторону параллельности, опустим на CD перпендикуляр EF. Так как $\angle BEF + \angle AEF = \pi$, а $\angle CAE + \angle AEF < \pi$, то $\angle BEF > \angle BAC$, т. е. $\Pi(EF) > \Pi(AC)$, а потому (предложение 23, заключительная часть) $EF < AC$.



Заметим, что в сторону параллельности расстояние одной параллели от другой убывает неограниченно; в противоположную же сторону (как говорит Лобачевский — «в сторону развода», см. «Новые начала») оно неограниченно возрастает.

[13] Предложение, содержащееся в этой рубрике, было, конечно, хорошо известно до Лобачевского; как и предыдущее предложение, оно принадлежит абсолютной геометрии. Впервые оно было, повиди-

мому, установлено в 1603 г. англичанином Гарриот (Th. Harriot) и независимо открыто и опубликовано Жираром (Girard) в 1629 г. [1]). Лобачевский мог бы на него непосредственно сослаться. Приведенные, однако, в тексте два доказательства имеют двоякую цель. Во-первых, Лобачевскому необходимо четко показать, что доказательство этого предложения не зависит от теории параллельных. Во-вторых, принадлежащее ему второе доказательство имеет то значение, что оно с несущественными изменениями может быть применено к разысканию площади прямолинейного треугольника в его неевклидовой геометрии.

[14] Доказанное здесь предложение играет в неевклидовой геометрии очень важную роль. После установления нового понятия о параллельности двух лучей (первого основного момента в неевклидовой геометрии) это предложение является *вторым основным моментом* в построении неевклидовой геометрии. Сущность дела заключается в том, что оно принадлежит к числу тех предложений, которые в настоящее время называют *абсолютными*, т. е. которые равно справедливы как в евклидовой, так и в неевклидовой геометрии. Если прямые AA', BB', CC' параллельны в евклидовом пространстве, а плоскость ABC к ним перпендикулярна, то углы A, B, C треугольника ABC суть линейные углы двугранных углов (AA'), (BB'), (CC'), о которых идет речь. Сумма углов треугольника ABC равна π, а вместе с тем и сумма трех двугранных углов, которые образуются, когда три плоскости пересекаются по параллельным линиям AA', BB', CC', также равна π. В неевклидовой геометрии прежде всего нельзя провести плоскости, перпендикулярной к трем параллельным прямым. Сумма углов треугольника ABC, как бы мы ни выбрали точки A, B, C на параллелях, меньше π; но сумма двугранных углов (AA'), (BB') и (CC') и здесь остается равной π. Значение этого факта не замедлит выясниться.

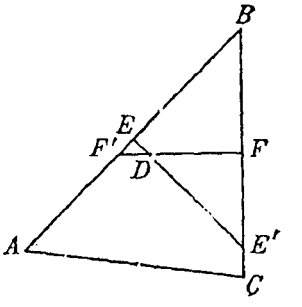
[15] Приведенное в тексте доказательство ничем не отличается от того, при помощи которого издавна доказывается, что около каждого треугольника можно описать окружность (Евклид, «Начала», IV, 5). Существенным моментом является только то, что при традиционном доказательстве всегда принимается, что точка пересечения D перпендикуляров ED и FD всегда существует. Действительное же обоснование этого неизбежно опирается на евклидов постулат о параллельных линиях. Обнаружим это.

В треугольнике ABC во всяком случае существует острый угол. Положим, что B есть вершина острого угла и $AB \geqslant BC$. Из середины E

---

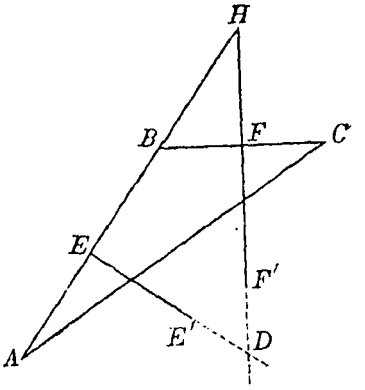
[1]) Подробные сведения об этом открытии можно найти в книге J. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik, Berlin u. Leipzig, 2-е изд., 1923, т. V, стр. 129—130.

стороны AB восставляем перпендикуляр EE'. Так как прямая EE' перпендикулярна к AB, а прямая BC образует с нею острый угол, то прямые EE' и BC пересекутся в некоторой точке E' (постулат о параллельных в так называемой Лежандровой форме; см. статью «Учение о параллельных линиях», стр. 41). При этом угол $EE'B$ будет острый, так как треугольник BEE' прямоугольный. Если FF' есть перпендикуляр, восставленный к стороне BC из ее середины F, то $BF \leqslant BE < BE'$; FF' непременно пересечется с прямой $E'E$, образующей с BC острый угол, в некоторой точке D. Таким образом традиционное доказательство существования центра описанной около треугольника окружности, проведенное со всей необходимой полнотой, дважды опирается на постулат о параллельных линиях.



В неевклидовой геометрии применить изложенное выше рассуждение нельзя. Более того, если допустить, что около всякого треугольника можно описать окружность, то отсюда вытекает постулат о параллельных линиях. Докажем это.

Допустим, следовательно, что *около всякого треугольника можно описать окружность*. Пусть теперь прямая EE' перпендикулярна к прямой AB, а другая прямая HF' образует с ней острый угол. Покажем, что при сделанном предположении наклонная HF' непременно встречает перпендикуляр EE', т. е. *имеет место постулат о параллельных линиях*. Для этого отложим на прямой EH по обе стороны от точки E равные отрезки $EA = EB$. Из точки B опустим на прямую HF' перпендикуляр BF, который не может совпасть с BH, потому что последняя прямая к HF' не перпендикулярна. На прямой BF от точки F по другую ее сторону отложим отрезок $FC = FB$. Тогда

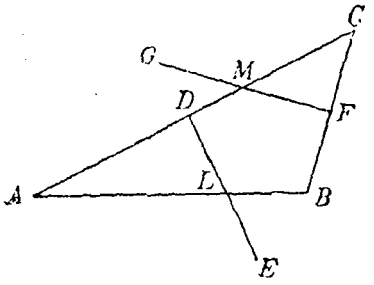


три точки A, B, C не лежат на одной прямой; согласно допущению, вокруг треугольника ABC можно описать окружность. Центр этой окружности непременно лежит в точке пересечения прямых EE' и FF'.

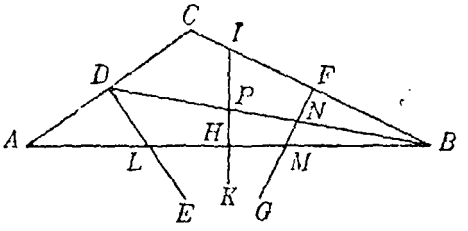
Положение «через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность» эквивалентно постулату Евклида; оно представляет собой одну из форм постулата, устанавливающего евклидову геометрию.

[16] На чертеже 22, при помощи которого Лобачевский обосновывает все доказательство, оба перпендикуляра DE и FG, восставленные

к сторонам треугольника AC и BC из их середин D и F, пересекают третью сторону AB в точках L и M и притом так, что середина H третьей стороны лежит между точками L и M. Эту конфигурацию необходимо прежде всего обосновать. Конечно, могло бы случиться, что перпендикуляр DE действительно встречает сторону треугольника AB, между тем как перпендикуляр FG встречает не AB, а AC, как это имеет место на черт. *а*. Однако, в предположении, что перпендикуляры DE, FG, HK не пересекаются (как это соответствует условию теоремы), конфигурация, приведенная в тексте, всегда имеет место, если за основание AB взята *наибольшая* сторона треугольника ($AB \geqslant AC$, $AB \geqslant BC$), см. черт. *б*. В самом деле, перпендикуляр HI к стороне AB, выходя из треугольника, пересекает бо́льшую из двух других сторон треугольника, скажем, сторону CB, в некоторой точке I. Так как $AB \geqslant CB$,



Черт. *а*.



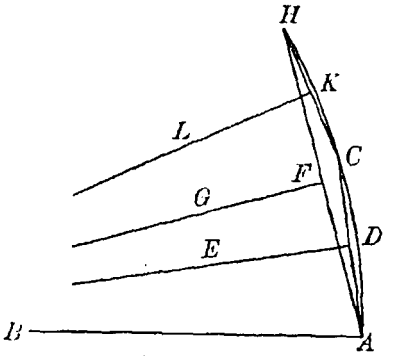
Черт. *б*.

то $HB \geqslant FB$, а потому во всяком случае $IB > FB$ (предложение 9). Точка F лежит, следовательно, внутри стороны IB треугольника IHB. Перпендикуляр FM, входя внутрь треугольника IHB, должен пересечь еще одну его сторону; но сторону HI он встретить не может, так как перпендикуляры HK и FG по условию не пересекаются. Следовательно, он встречает сторону HB, т. е. точка M лежит между H и B.

Заметим, что случай $AB = CB$ теперь нужно считать исключенным. В самом деле, медиана DB, входя внутрь треугольника FBM, должна встретить сторону FM в некоторой точке N. Если бы $AB = CB$, то перпендикуляр DE совпал бы с медианой DB и, следовательно, пересек бы перпендикуляр FG, что противно условию. Итак, $AB > CB$. Но в таком случае в треугольниках ADB и CDB при общей стороне DB и при $AD = DC$ третьи стороны не равны ($AB > CB$). Следовательно, $\angle ADB > \angle CDB$ (предложение I, 24 «Начал» Евклида, не зависящее от постулата о параллельных). Следовательно, угол ADB тупой. Поэтому перпендикуляр DE входит внутрь четырехугольника $ADPH$; выходя из него, он не может встретить стороны PH, потому что он вообще не пересекается с перпендикуляром HK. Он встречает, таким образом, сторону AH в некоторой точке L.

[17] Изложим указанное в тексте построение предельной линии подробнее.

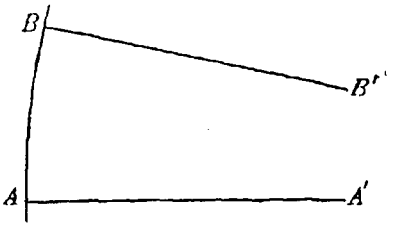
Лобачевский предполагает сначала, что предельная линия задана некоторой определенной своей точкой A и проходящей через эту точку осью AB (тот же чертеж 24 в тексте). Под произвольным *острым* углом BAC к оси он проводит прямую AC, на ней откладывает отрезок $AD = a$, для которого $\Pi(a) = BAD$, так что перпендикуляр к нему DE параллелен AB; затем он удваивает этот отрезок, откладывая $DC = AD$. При непрерывном изменении угла CAB от $\frac{1}{2}\pi$ до 0 точка C образует предельную линию, определяемую «началом» A и «осью» AB. Перпендикуляр DE к хорде AC, выходящей из начала,



к ее середине D параллелен оси AB по самому построению кривой. Совершенно так же перпендикуляр FG к хорде AH в ее середине F параллелен AB, а следовательно, и DE. Таким образом в треугольнике ACH перпендикуляры, восставленные к двум его сторонам из их середин, параллельны. В силу предложения 30 перпендикуляр KL к хорде HC в ее середине также параллелен AB; иначе говоря, все перпендикуляры, восставленные из середин хорд кривой в надлежащую сторону, параллельны между собой в соответствии с определением предельной линии. Вместе с тем ясно, что ту же кривую получим, если будем исходить, скажем, из точки H и примем за ось луч, проходящий через H параллельно AB. Таким образом каждая точка предельной линии может быть принята за начало, а проходящая через нее ось — за начальную ось. Это может быть выражено в следующем виде:

Теорема 1. *Предельная линия вполне определяется любой своей точкой и осью.*

В тесной связи с этим находится еще одно важное свойство предельной линии. Передвинем предельную линию AB так, чтобы точка A совместилась с точкой B, а луч AA' — с лучом BB'. Тогда предельная линия совместится с самой собой, потому что она так же определяется точкой B и осью BB', как и точкой A и осью AA'. Так как точку B можно взять сколь угодно близко к A, то можно этому результату дать следующее выражение:

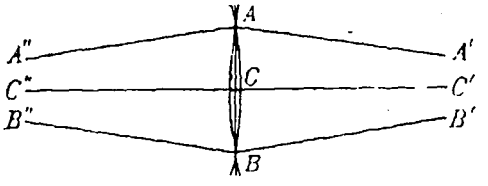


Теорема 2. *Предельная линия может скользить по себе самой подобно тому, как может скользить по себе самой прямая и окружность.*

Изложенное рассуждение обнаруживает также, что перпендикуляры, восставленные к хордам предельной линии из их середин, не только параллельны между собой, но параллельны осям кривой; они могут рассматриваться как ее оси. Отсюда еще следующий вывод:

Теорема 3. *Предельная линия определяется двумя своими точками до симметрии относительно прямой, соединяющей эти точки.*

В самом деле, если A и B суть две точки предельной линии, то мы найдем ее ось, восставив перпендикуляр к отрезку AB из ее середины C. Однако эта ось может быть направлена либо в сторону CC', либо в противоположную сторону CC''. В силу предыдущей теоремы отсюда следует, что через точки A и B проходят две (и только две) предельные линии; они симметричны относительно прямой AB. Третья точка уже определяет и сторону, в которую ось обращена.



Теорема 4. *Оси предельной линии, проведенные через две ее точки, одинаково наклонены к хорде, соединяющей эти точки.*

В самом деле, как мы видели, $\angle A'AB = \angle B'BA = \Pi\left(\frac{1}{2}AB\right)$. Это свойство предельной линии после Лобачевского часто принимали за ее определение и основывали на нем ее построение (см. следующее примечание 18).

Если хорда AB стремится к нулю, то прямая AB обращается в пределе в касательную; угол $\Pi\left(\frac{1}{2}AB\right)$ при этом стремится к $\frac{1}{2}\pi$. Таким образом имеет место предложение:

Теорема 5. *Касательная к предельной линии перпендикулярна к оси, проходящей через точку касания.*

[18] Приведем еще другое определение предельной линии; оно мало отличается от того, которое дано Лобачевским, но связанное с ним построение обладает большей наглядностью [1]). Мы приведем здесь подробное обоснование этого построения; это требует некоторых предварительных предложений.

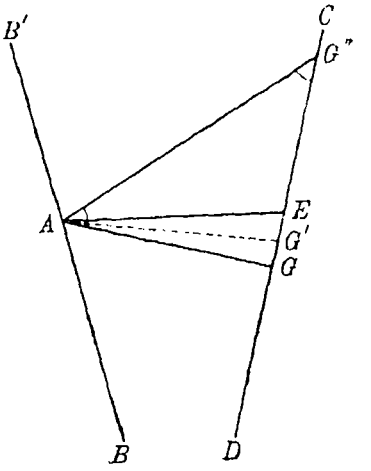
Лемма 1. *Как бы ни были расположены две прямые AB и CD на плоскости, через каждую точку A одной из них можно провести одну и только одну прямую AE таким образом, чтобы она образовала с обеими данными прямыми равные внутренние односторонние углы, т. е. чтобы имело место равенство*

$$\angle AED = \angle EAB.$$

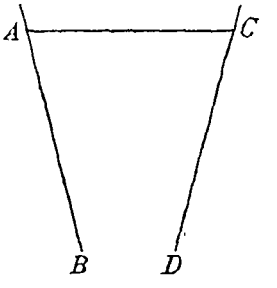
---

[1]) Это определение принадлежит Гауссу; см. статью «Элементы неевклидовой геометрии у других геометров», стр. 160.

Чтобы это доказать, опустим из точки A перпендикуляр AG на прямую CD. Если бы оказалось, что прямая AG перпендикулярна также к AB, то это и была бы требуемая прямая. Положим поэтому, что AG образует с AB с одной стороны острый угол BAG, а с другой стороны — тупой угол $B'AG$. Со стороны AB, таким образом, угол BAG меньше внутреннего угла DGA, который секущая AG образует с той же стороны со второй прямой GD. Если точка G передвинется по направлению к точке C в точку G', т. е. если секущая AG повернется в положение AG', то угол, который она образует с лучом AB, возрастет: $\angle BAG' > \angle BAG$. Напротив, соответствующий односторонний угол при прямой CD уменьшится: $\angle AG'D < \angle AGD$.



Отложим в сторону GC отрезок $GG'' = AG$. Тогда $\angle GAG'' = \angle GG''A$, а потому $\angle BAG'' > \angle AG''D$. Это значит, что когда секущая AG, вращаясь вокруг A, перейдет из положения AG в AG'', то угол, который она образует с лучом AB, бывший сначала меньше соответствующего ему одностороннего угла при второй прямой, в положении AG'' станет больше его ($\angle BAG'' > \angle AG''D$). Между точками G и G'' в силу непрерывности изменения угла AGD будет поэтому существовать точка E, при которой $\angle BAE = \angle DEA$; AE и есть искомая прямая. При дальнейшем вращении секущей угол при луче AB возрастает, соответствующий же односторонний с ним угол уменьшается, равенство их нарушается. Через точку A проходит, следовательно, только одна прямая, обладающая требуемым свойством.

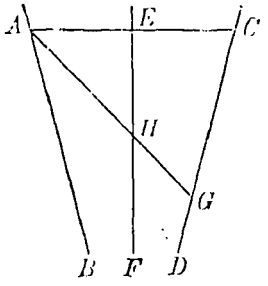


Эту прямую можно называть *секущей равного наклона* прямых AB и CD. Особенное значение имеет тот случай, когда лучи AB и CD параллельны. Если в этом случае AC есть секущая равного наклона, то Гаусс называет точку C *соответствующей точке* A на параллели CD. Каждой точке луча соответствует, таким образом, одна и только одна точка на любом параллельном луче.

В развитие леммы 1 приведем еще следующее предложение:

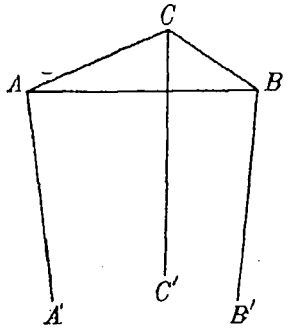
Лемма 2. *Перпендикуляр, восставленный к секущей равного наклона AC двух параллельных лучей AB и CD из ее середины E, параллелен этим лучам.*

В самом деле, ни одного из этих лучей он не может встретить, ибо через точку пересечения, если бы таковая существовала, вследствие равенства углов BAC и DCA, неизбежно проходила бы и вторая параллель. Всякий же луч AG, проходящий внутри угла EAB, непременно встретит луч CD, а потому, переходя с одной стороны прямой EF на другую, необходимо пересечет луч EF в некоторой точке H (предложение 5 Лобачевского). Это рассуждение Лобачевский собственно и приводит при доказательстве предложения 30 (черт. 22). Самое предложение 30 может быть в терминологии Гаусса формулировано следующим образом:



Лемма 3. *Если через вершины A, B, C треугольника ABC в его плоскости проведем параллельные между собой лучи AA', BB', CC' и притом так, что точки A и B соответствуют друг другу на параллелях AA' и BB', а точки B и C соответствуют друг другу на параллелях BB' и CC', то точки A и C соответствуют друг другу на параллелях AA' и CC'.*

Еще иначе: *если через вершины A, B, C треугольника ABC в его плоскости проведем параллельные лучи AA', BB', CC' и при этом две стороны треугольника служат секущими равного наклона по отношению к соответствующим параллелям, то и третья сторона треугольника служит секущей равного наклона по отношению к параллелям, проходящим через ее концы.*

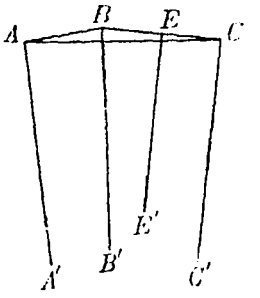


Обратимся теперь к той роли, которую эти предложения играют в геометрии Лобачевского или, лучше, в том определении предельной линии, которое мы здесь излагаем.

В некоторой плоскости представим себе луч AA' и совокупность всех ему параллельных лучей (пучок параллельных лучей, мы будем говорить короче: «пучок AA'»). Если будем исходить от определенной точки A на AA', то ей на каждом луче BB' пучка соответствует в установленном значении слова определенная точка B. *Геометрическое место точек B на всех лучах пучка именно и есть предельная линия* Лобачевского.

В самом деле, если B и C суть две точки этой линии, т. е. если они соответствуют точке A на параллелях BB' и CC', то в силу леммы 3 (т. е. предложения 30 в тексте Лобачевского) они и друг другу соответствуют на своих параллелях, т. е. BC есть секущая равного наклона по отношению к параллелям BB' и CC'. Согласно лемме 2 перпендикуляр EE', восставленный из середины хорды BC, параллелен лучам BB', CC', т. е. принадлежит пучку AA'. Построенная линия

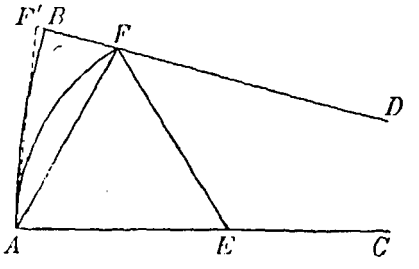
обладает, таким образом, свойством, которым Лобачевский определяет предельную линию. Обратно, построение Лобачевского устанавливает, что его предельная линия обладает свойством, содержащимся в этом новом определении. В самом деле, если B есть точка предельной линии, определяемой началом A и осью AA', а хорда $AB = 2a$, то по построению Лобачевского $\angle A'AB = \angle B'BA = \Pi(a)$.



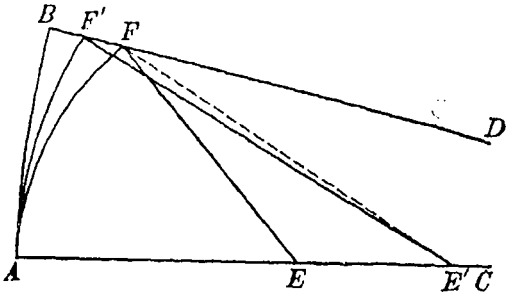
Если бы мы исходили при построении предельной линии не от точки A, а от другой точки B, то точка A, как соответствующая B на параллели BB', оказалась бы на предельной линии, определяемой точкой B и лучом BB'; на ней оказалась бы и каждая точка C той же линии. Это значит, что *любая точка предельной линии может быть принята за начало, а проходящая через нее ось — за начальную ось*; результат, к которому приводит также построение Лобачевского, как это было указано в предыдущем примечании.

[19] Приведенное в тексте рассуждение несколько сжато, но по существу совершенно безукоризненно. Мы здесь четко доведем его до конца.

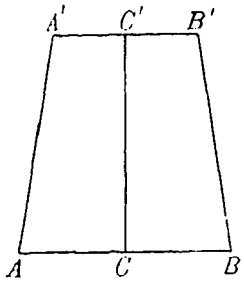
Приводим снова черт. 25. Здесь AF есть дуга окружности, описанной из точки E радиусом EA и встречающей прямую BD в точке F. Мы покажем прежде всего, что точка F при этом неизбежно лежит на луче BD, т. е. расположена относительно B со стороны точки D. Это следует из того, что $\angle AFD > \angle AFE$, а так как $\angle AFE = \angle FAE$, то $\angle AFD > \angle FAE$; между тем, если бы точка пересечения падала бы в F' по другую сторону от B, то угол $AF'B$ был бы меньше угла ABD, который по свойству предельной линии равен углу BAE. В тексте отчетливо доказано, что при этом $\angle BAF$ меньше $\frac{1}{2}\angle DFE$.



Теперь, после того как центр E уже выбран и точка F таким образом зафиксирована, возьмем произвольно малый угол ε и из точки F проведем луч FE', образующий с FD угол $DFE' < \varepsilon$. Этот луч встретит луч AC (вследствие параллельности лучей FD и AC) в некоторой точке E'. Примем теперь точку E' за центр и проведем окруж-



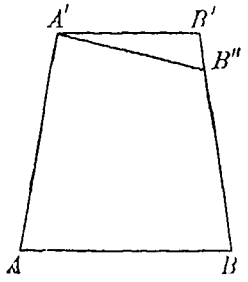
ность радиусом $E'A$. Эта окружность встретит ось BD в точке F', лежащей относительно B также со стороны точки D, но между B и F. Вместе с тем $\angle BAF' < \frac{1}{2} \angle DF'E'$, а $\angle DF'E' < \angle DFE'$, а потому $\angle BAF' < \frac{1}{2} \varepsilon$. Так как угол ε произвольно мал, то точка F' с увеличением радиуса неограниченно приближается к B.



[20] Сущность этого рассуждения вряд ли может представить затруднение. Тем не менее точное обоснование этих заключений требует предварительного установления нескольких простых теорем.

Лемма 1. *Если в прямолинейном четырехугольнике $AA'B'B$ равны углы при «нижнем основании»* (угол A равен углу B) *и «боковые стороны»* ($AA' = BB'$), *то равны также углы при верхнем основании* (угол A равен углу B'), *а средняя линия* (*т. е. прямая CC', соединяющая середины обоих оснований*) *перпендикулярна к основаниям.*

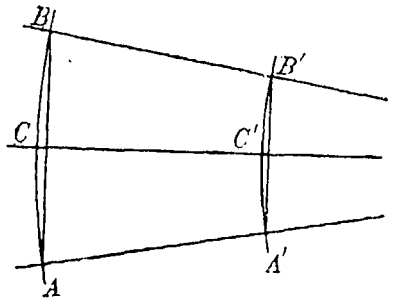
Доказательство осуществляется наложением четырехугольника самого на себя так, что AB совмещается с BA, BB' с AA', и обратно, и средняя линия CC' совмещается с самой собой.



Лемма 2. *Если в прямолинейном четырехугольнике $AA'B'B$ равны углы при верхнем и при нижнем основании* ($\angle A = \angle B$ *и* $\angle A' = \angle B'$), *то равны и боковые стороны* ($AA' = BB'$).

Доказательство от противного. Допустим, что $AA' < BB'$. Отложим на BB' отрезок $BB'' = AA'$. Теперь в четырехугольнике $ABB''A'$ углы при верхнем основании в силу предыдущей теоремы должны быть равны: $\angle AA'B'' = \angle BB''A'$, что несовместимо с равенством углов $AA'B'$ и $A'B'B$.

Теорема 1. *Отрезки осей, которые содержатся между предельными линиями, имеющими общие оси, равны между собой.*



На чертеже AA' и BB' суть две общие оси предельных линий AB и $A'B'$. Вследствие этого угол $A'AB$ равен углу $B'BA$ (см. на стр. 135—136 подробное примечание 17 к предложению 31); по той же причине равны также углы $AA'B'$ и $BB'A'$; в силу леммы 2 поэтому равны отрезки AA' и BB'.

Теперь мы можем с полным основанием говорить о расстоянии x между двумя «параллельными» (т. е. имеющими общие оси) предельными линиями: это расстояние можно отсчитывать по любой оси: $AA' = BB' = x$.

Теорема 2. *Равным дугам предельной линии отвечают равные дуги на параллельной предельной линии.*

Если $AC = CB$, то мы совместим дугу AC с CB (см. примечание 17, теорема 2, дуга AC может скользить по CB). Тогда оси AA' и CC' пойдут по осям CC' и BB' (теорема 3 в том же примечании); равные отрезки AA' и CC', а также CC' и BB' соответственно совместятся, вместе с тем дуга $A'C'$ совместится с дугой $C'B'$ (та же теорема 3).

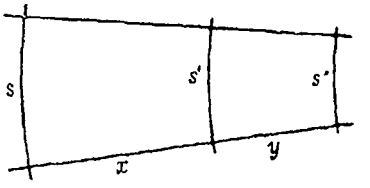
Теорема 3. *Соответствующие дуги s и s', t и t' двух параллельных предельных линий пропорциональны.*

Эта теорема доказана в тексте на основе теоремы 2.

[21] Как показано в тексте, отношение $\frac{s}{s'}$ есть функция расстояния x между предельными дугами; от величин же дуг s и s' оно не зависит. Эту функцию обозначим через $f(x)$.

Возьмем три предельные дуги s, s', s'', содержащиеся между теми же двумя осями. Пусть x будет расстояние между дугами s и s', y — расстояние между дугами s' и s''. Тогда

$$s = s' f(x), \quad s' = s'' f(y),$$
$$s = s'' f(x + y).$$



Следовательно, функция $f(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(x + y) = f(x) f(y),$$

которое характеризует показательную функцию a^x. Так как по условию $f(1) = e$, то $a = e$, т. е. $s = e^x$, где e, однако, остается еще неопределенным. Лобачевский замечает, что надлежащим выбором единицы длины можно привести к тому, что основание e совпадет с основанием неперовых логарифмов. При выяснении этого для большей отчетливости будем исходить из формулы $s = s' a^x$.

Если мы увеличим единицу длины в k раз, то отношение $\frac{s}{s'}$ сохранит свое значение, число же x заменится числом $\bar{x} = \frac{x}{k}$. Поэтому мы будем иметь

$$s = s' a^{k\bar{x}} = s' (a^k)^{\bar{x}}.$$

Число k можно выбрать так, чтобы $a^k = e$, где e — основание неперовых логарифмов. Вместе с тем

$$s = s' e^{\bar{x}} \quad \text{или} \quad s' = s e^{-\bar{x}}. \qquad (!)$$

Черта над x означает, что длина отрезка выражена в специфической единице, при которой формула (!) имеет место. Лобачевский раз навсегда устанавливает, что единица меры выбрана именно так, а потому пишет просто $s' = s e^{-x}$. Нужно, однако, твердо помнить, что этим зафиксирована единица длины.

В связи с этим, нужно обратить внимание на следующее весьма важное обстоятельство. В гиперболической геометрии, как обнаруживают эти соображения, существует некоторая специфическая длина, выбор которой в качестве единицы меры имеет абсолютное преимущество: говорят, что в гиперболическом пространстве возможна «абсолютная мера длины». Эта единица меры определяется математически и на основе этого определения может быть фактически установлена только экспериментально. Абсолютная мера длины гиперболического пространства есть та, в которой имеет место соотношение $s' = se^{-x}$; это — ее математическое определение.

Какова же эта единица фактически? Этот вопрос может быть разрешен только прямым измерением. Дальнейшие соображения по этому вопросу читатель найдет ниже, в примечании 35 к предложению 37.

Отрезок, служащий при установленных соглашениях единицей длины, в настоящее время часто называют *радиусом кривизны пространства*. Возможность абсолютной единицы длины долго вызывала возражения против признания гиперболической геометрии. В евклидовом пространстве такой абсолютной единицы не существует: все прямолинейные отрезки здесь равноправны, и единица меры может быть установлена только заданием стандарта — зафиксированного стержня. Однако на сфере абсолютная мера длины в том смысле, как понимается этот термин, возможна: за таковую можно, например, принять длину окружности большого круга или определенную ее часть. Такой абсолютной единицей меры является также радиан, т. е. π-я часть полуокружности большого круга; в этой именно абсолютной единице обыкновенно пишутся все метрические соотношения сферической геометрии.

Если в гиперболическом пространстве за единицу меры принять не радиус кривизны пространства, а другой отрезок, в k раз меньший, то основное соотношение предложения 33 принимает вид

$$s' = se^{-\frac{x}{k}}. \qquad (11)$$

Теперь радиус кривизны выражается числом k. Если радиус сферы выражается числом R, то кривизна сферы выражается числом $\frac{1}{R^2}$; по аналогии с этим при соотношении (11) говорят, что кривизна гиперболического пространства выражается отрицательным числом $-\frac{1}{k^2}$. Этот выбор отрицательного числа имеет дополнительные основания, указанные ниже, в примечании 35 к предложению 37.

Лобачевский всегда полагает $k = 1$; нужно, однако, снова отметить, что при этом условии единица длины уже зафиксирована.

[22] Предельную поверхность Лобачевский определяет как такую поверхность, которая образуется вращением предельной линии вокруг

одной из своих осей. Это определение, таким образом, существенно отличается от определения предельной линии. Между тем, эти определения могут быть сближены. Все элементы для такого объединения содержатся и в предложении 34 настоящего сочинения.

Предположим, как в тексте, что предельная поверхность образована вращением предельной линии вокруг ее оси AA' (черт. 27). Лобачевский отмечает прежде всего, что во всякой точке B поверхности ось BB' наклонена к хорде AB под тем же углом, под которым к этой хорде наклонена ось вращения AA'. В терминологии Гаусса это означает, что точка B на луче BB' соответствует точке A на луче AA'; оно и естественно, так как B есть точка предельной линии, которая в плоскости осей AA' и BB' определяется началом A и осью AA' (см. предложение 31, примечание 17). Но так как этим свойством обладает каждая точка предельной поверхности, то это приводит к следующему определению последней.

Представим себе все лучи *в пространстве*, параллельные лучу AA', — «связку параллелей» $\{AA'\}$. Каждый луч BB' этой связки лежит с AA' в одной плоскости, и на нем существует одна и только одна точка B, соответствующая (см. примечание 18) точке A луча AA'. *Геометрическое место точек B на всех лучах связки и есть предельная поверхность, определяемая точкой A и осью AA'.* Это определение предельной поверхности явно аналогично определению предельной линии в плоскости. Исследование предельной линии основывается, главным образом, на предложении, приведенном в примечании 18 в виде леммы 3. Это предложение остается в силе и в том случае, когда параллельные лучи AA', BB', CC' расположены не в плоскости ABC, а как угодно в пространстве. Именно, доказательство этой теоремы и составляет главное содержание предложения 31 в тексте. Формулируем ее в этом виде.

Если AA', BB' и CC' суть параллельные между собой лучи, которые не расположены в одной плоскости, причем как точка B на луче BB', так и точка C на луче CC' соответствуют точке A на луче AA', то точки B и C соответствуют друг другу на лучах BB' и CC'.

Самое доказательство, приведенное в тексте, устанавливает прежде всего, что около треугольника ABC при условиях задания всегда можно описать окружность. Это не находится в противоречии с тем, что в гиперболической геометрии около данного треугольника не всегда возможно описать окружность. Дело в том, что рассматриваемый здесь треугольник не произвольный: две его вершины *соответствуют* третьей на трех параллелях, проходящих через его вершины и не расположенных в одной плоскости. Это есть уже треугольник специфического строения, при котором описанная окружность всегда существует.

Доказательство заключается в том, что на перпендикуляре DF, восставленном в плоскости треугольника к стороне AB из ее середины D, устанавливается точка F, через которую проходит также перпендикуляр EF, восставленный из середины E стороны AC. При этом оказывается, что перпендикуляр, восставленный из точки F к плоскости треугольника, параллелен связке лучей AA', BB', CC'. Проведя через этот перпендикуляр и середину G третьей стороны BC плоскость, получим в сечении с плоскостью параллелей BB' и CC' луч GG', параллельный им и перпендикулярный к BC. Поэтому $\angle B'BC = \angle C'CB = \Pi\left(\frac{1}{2}\,CB\right)$, т. е. точки B и C соответствуют друг другу на параллелях BB' и CC'.

Если теперь за начало предельной поверхности примем точку B и луч BB' — за начальную ось, то точки A и C, как соответствующие ей на лучах AA' и CC', окажутся на поверхности. Это значит:

Каждая точка предельной поверхности может быть принята за начало, а проходящая через нее ось — за начальную ось.

Предельную поверхность можно, таким образом, рассматривать как поверхность вращения вокруг любой оси (подобно тому как это имеет место в случае сферы и плоскости).

Теперь уже нетрудно показать совершенно так же, как это было сделано в примечании 17 (теорема 2), что предельная поверхность может передвигаться по самой себе так, чтобы каждая ее точка пришла в совмещение с любой другой ее точкой, а вращением поверхности вокруг любой ее точки можно любой выходящий из этой точки предельный луч поверхности привести в совмещение с любым другим предельным лучом, выходящим из той же точки. На предельной поверхности, таким образом, возможны движения тех же типов, что и на плоскости или на сфере.

[23] Евклидова двумерная геометрия, так называемая *планиметрия*, может быть построена рассуждениями, относящимися только к плоскости, т. е. без обращения в трехмерное пространство. Такое построение евклидовой планиметрии осуществляется на основе возможных в плоскости движений и постулатов, характеризующих ее основные образы, главным образом прямую. Движения в евклидовой плоскости характеризуются следующими «постулатами движения»:

a) *Плоскость может быть перемещена в самой себе таким образом, чтобы любая ее точка A пришла в совмещение с любой другой ее точкой A' (принцип транзитивности движения).*

b) *Плоскость может быть повернута в самой себе вокруг любой ее точки A таким образом, чтобы любой луч AB, выходящий из центра вращения, совместился с любым другим лучом AB', также выходящим из центра вращения (принцип вращения).*

Этими двумя постулатами устанавливаются возможные в плоскости движения. С присоединением к ним постулатов Евклида о прямой линии, постулатов, характеризующих расположение точек на прямой, постулата непрерывности, постулата Паша (см. примечание 3 на стр. 128), наконец, постулата о параллельных линиях, получается база, на которой строится плоская геометрия Евклида.

Двумерная геометрия может быть в том же порядке идей построена и на другой поверхности, допускающей движения с теми же степенями свободы. Такими поверхностями в евклидовом пространстве являются только сферы. На сфере возможны движения, удовлетворяющие принципу транзитивности и принципу вращения. Но роль прямых линий здесь играют окружности больших кругов, роль лучей — соответствующие полуокружности.

Однако постулаты, характеризующие окружности больших кругов на сфере, существенно отличаются от постулатов, характеризующих прямые на плоскости. Прямая вполне определяется любыми двумя точками, так что две прямые на плоскости могут пересекаться только в одной точке; окружности больших кругов на сфере всегда пересекаются в двух точках. Прямая может быть неограниченно продолжена в обе стороны; окружность большого круга есть замкнутая кривая конечного размера. Это порождает глубокое различие в геометриях плоскости и сферы. В евклидовом пространстве существуют два типа поверхностей, на которых может быть построена геометрия по принципу «свободной подвижности»[1] — плоскости и сферы; им соответствуют два типа двумерной геометрии — плоская и сферическая, как теперь часто говорят, *евклидова* и *римановa*.

Обращаемся к «пространству Лобачевского», т. е. к пространству, в котором имеют место установленные им постулаты неевклидовой геометрии. Здесь на плоскости имеет место своеобразная «гиперболическая» геометрия, отличная от евклидовой. На сфере в гиперболическом пространстве имеют место те же движения, что и на сфере евклидова пространства; сферическая геометрия в гиперболическом пространстве не отличается от обычной, как она была построена в евклидовом пространстве. Лобачевский ниже обнаруживает (см. предложение 35), как далеко идет это совпадение.

Но в гиперболическом пространстве существует, кроме того, замечательный тип поверхностей, на которых имеет место свободная подвижность. Мы видели (заключительный абзац предыдущего примечания 22), что на предельной поверхности возможны движения, удовлетворяющие тем же основным двум постулатам.

---

[1]) Этот термин принадлежит Софусу Ли («freie Beweglichkeit»).

При построении геометрии предельной поверхности роль прямых играют предельные линии. Предельная линия на предельной поверхности вполне определяется двумя точками. Действительно, если через точки A и B предельной поверхности проведем ее оси AA' и BB' и через них проведем плоскость, то она пересечет предельную поверхность по той единственной предельной линии, которая на этой поверхности проходит через точки A и B. Далее, предельную линию можно неограниченно продолжить в обе стороны. На предельной поверхности остаются в силе постулаты, определяющие расположение точек на предельной линии, постулат непрерывности, постулат Паша. Лобачевский еще даже не обладал точным перечнем постулатов геометрии; но из 15 предложений, приведенных им в начале настоящего сочинения в качестве базы для всего дальнейшего построения геометрии, 10 относятся к двумерной геометрии и как бы составляют принимаемую им аксиоматику плоской геометрии. Все эти десять предложений остаются в силе на предельной поверхности, если в них заменить прямые предельными линиями. Поэтому для окончательного решения вопроса о характере геометрии остается только решить, как обстоит дело с постулатом о параллельных линиях. Но мы знаем, что этот постулат эквивалентен предложению, что сумма углов в треугольнике равна π. В предельном треугольнике на предельной поверхности сумма внутренних углов действительно равна π. Следовательно, *на предельной поверхности имеет место евклидова геометрия.* Этот замечательный результат, таким образом, обнаруживает, что с отказом от постулата Евклида о параллельных линиях двумерная евклидова геометрия не прекращает своего существования: она только переносится с плоскости на предельную поверхность. В предельном треугольнике сохраняются соотношения евклидовой геометрии, что служит точкой отправления для построения метрики неевклидова пространства.

Полезно отметить, что в гиперболическом пространстве существуют поверхности еще одного типа, на которых возможно движение фигур без деформации с тремя степенями свободы; это — *эквидистантные поверхности.* Под эквидистантной поверхностью разумеют геометрическое место точек, отстоящих от заданной плоскости (базы поверхности на одно и то же расстояние h (параметр поверхности). На плоскость можно смотреть как на эквидистантную поверхность с параметром $h = 0$. Таким образом в гиперболическом пространстве существуе три типа поверхностей, на которых возможны движения с тремя степе нями свободы: сферические, эквидистантные и предельные поверхности.

[24] В евклидовой геометрии угол обычно измеряется либо в градусах (прямой угол измеряется числом 90 или 100), либо в радианах (прямой угол измеряется числом $\frac{\pi}{2}$). Оба эти способа измерения угла применяются и в неевклидовой геометрии; но здесь возможен и своеоб-

разный *линейный* способ выражения угла. Каждому острому углу φ отвечает отрезок, выражаемый в установленной единице меры числом x, для которого $\Pi(x)=\varphi$; это число x и представляет своеобразное, только в неевклидовой геометрии существующее выражение угла; его поэтому можно назвать *гиперболическим значением угла*; нужно, однако, иметь в виду, что гиперболическое значение угла не пропорционально величине угла. Этим гиперболическим значением угла Лобачевский уже и выше пользовался для выражения угла (см., например, предложение 34; двугранный угол выражен своим гиперболическим значением a); в дальнейшем он пользуется им систематически. Заметим еще, что $\Pi(x)$ выражает в радианах тот угол, гиперболическое линейное значение которого есть x.

Здесь, однако, Лобачевский вводит дополнительное соглашение, заключающееся в следующем. Обозначая через x гиперболическое значение некоторого угла, он обозначает через x' гиперболическое значение дополнительного угла. Таким образом углы $\Pi(x)$ и $\Pi(x')$ всегда дополняют друг друга до $\frac{1}{2}\pi$; это и выражено уравнением.

[25] Действительно, положим, что существует сферический треугольник kmn (черт. 28) со сторонами $mn=\Pi(c)$, $kn=\Pi(\beta)$, $mk=\Pi(a)$ и противолежащими им углами $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$. На луче Bn отложим отрезок BA, равный c, и из точки A опустим перпендикуляр AC на прямую Bk. Полученный таким образом треугольник ABC будет удовлетворять требованию. Действительно, из точки A восставим перпендикуляр AA' к плоскости треугольника ABC; луч Bm обозначим через BB' и прямую пересечения плоскостей $B'BC$ и $A'AC$ обозначим через CC'. Угол $B'BA$ измеряется стороной mn сферического треугольника, а потому равен $\Pi(c)=\Pi(AB)$; следовательно, луч BB' параллелен AA'; вместе с тем луч CC' параллелен AA' и BB' (см. заключительный абзац предложения 25). С другой стороны, по самому построению плоскость $CC'AA'$ перпендикулярна к плоскости треугольника ABC; прямая BC перпендикулярна к плоскости $CC'AA'$, а вследствие этого она перпендикулярна и к прямой CC'; поэтому $\angle B'BC=\Pi(BC)$; но этот угол измеряется дугой mk сферического треугольника, а потому равен $\Pi(a)$; следовательно, $BC=a$. Далее, $\angle C'CA=\Pi(AC)$; но этот угол совпадает с углом k сферического треугольника, а потому равен $\Pi(b)$; следовательно, $AC=b$. Угол B прямоугольного треугольника ABC измеряется дугой kn, а потому равен $\Pi(\beta)$. Далее, двугранный угол (CC') прямой, двугранный угол (BB') совпадает с углом m сферического треугольника, а потому равен $\Pi(\alpha')$. Наконец, двугранный угол $(AA')=\frac{1}{2}\pi-(BB')$; но угол (BB') совпадает с углом $m=\Pi(\alpha')$ сферического треугольника, поэтому $(AA')=\Pi(\alpha)$; а так как угол (AA') измеряется линейным углом A, то $A=\Pi(\alpha)$. Итак, в треугольнике ABC стороны и углы имеют значения a, b, c, $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, т. е.

существование сферического треугольника со сторонами $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$ и противолежащими углами $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$ обусловливает существование прямолинейного треугольника со сторонами a, b, c и противолежащими углами $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$.

Заменим теперь обозначения, к которым привели предшествующие соображения, более общими. Именно положим

$$c = x,\ \beta = y,\ a = z;\ b = \xi,\ \alpha' = \eta. \tag{1}$$

Тогда стороны и углы сферического треугольника можно будет представить таблицей

$$\left.\begin{array}{l} \Pi(x),\ \Pi(y),\ \Pi(z), \\ \Pi(\xi),\ \Pi(\eta),\ \frac{1}{2}\pi. \end{array}\right\} \tag{A}$$

Мы можем смотреть на x и y как на линейные аргументы, определяющие катеты этого сферического треугольника, на z — как на аргумент его гипотенузы, на ξ и η — как на линейные аргументы его острых углов. Теорема, установленная в тексте и доказанная здесь, сводится к тому, что существование сферического прямоугольного треугольника (A) влечет за собой существование прямолинейного прямоугольного треугольника со сторонами и углами

$$\left.\begin{array}{l} z,\quad \xi,\quad x, \\ \Pi(\eta'),\ \Pi(y),\ \frac{1}{2}\pi. \end{array}\right\} \tag{B}$$

Это станет совершенно ясным, если заметим, что при

$$\Pi(\alpha) + \Pi(\alpha') = \frac{\pi}{2},\quad \Pi(\eta) + \Pi(\eta') = \frac{\pi}{2} \text{ и } \eta = \alpha'$$

необходимо $\eta' = \alpha$.

Но в сферическом треугольнике (A) мы можем транспонировать катеты z и y, транспонируя в то же время аргументы острых углов т. е. ξ и η. Иначе говоря, тот же сферический треугольник (A) мы можем, конечно, представить таблицей

$$\left.\begin{array}{l} \Pi(y),\ \Pi(x),\ \Pi(z), \\ \Pi(\eta),\ \Pi(\xi),\ \frac{1}{2}\pi, \end{array}\right\} \tag{A'}$$

а в таком случае он влечет за собой прямолинейный треугольник

$$\left.\begin{array}{l} z,\quad \eta,\quad y, \\ \Pi(\xi'),\ \Pi(x),\ \frac{1}{2}\pi. \end{array}\right\} \tag{B'}$$

В применении к треугольнику, о котором идет речь в тексте, при обозначениях (I) это приводит к треугольнику

$$\left.\begin{array}{c} a, \quad \alpha', \quad \beta, \\ \Pi(b'), \ \Pi(c), \ \frac{1}{2}\pi. \end{array}\right\} \tag{C}$$

Итак, существование прямолинейного прямоугольного треугольника

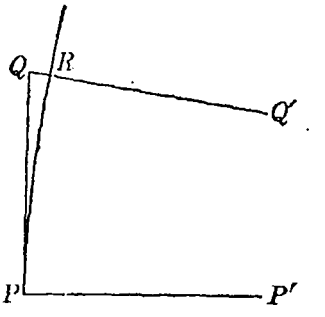
$$\left.\begin{array}{c} a, \quad b, \quad c, \\ \Pi(\alpha), \ \Pi(\beta), \ \frac{1}{2}\pi \end{array}\right\} \tag{C'}$$

влечет за собой существование сферического треугольника

$$\left.\begin{array}{c} \Pi(c), \ \Pi(\beta), \ \Pi(a), \\ \Pi(b), \ \Pi(\alpha'), \ \frac{1}{2}\pi; \end{array}\right\}$$

этот же влечет за собой, обратно, не только существование треугольника (C'), но и треугольника (C); эти два прямолинейных треугольника поэтому всегда существуют одновременно.

[26]. Воспроизводим чертежи и рассуждения, соответствующие этой второй конфигурации. Заметим предварительно следующее: если из точки P предельной линии PR (черт. *а*) проведем касательную PQ, на ней отложим отрезок PQ и из точки Q проведем луч QQ', параллельный оси PP', которая встретит предельную линию в точке R, то дуга PR вполне определяется длиной отрезка PQ. Если этот отрезок назовем *тангенциальной высотой* предельной дуги PR, то можно будет сказать, что *предельная дуга определяется своей тангенциальной высотой*. На черт. 28 и 30 r, q и l суть предельные дуги, которые соответственно определяются тангенциальными высотами c, b и a.



Черт. *а*.

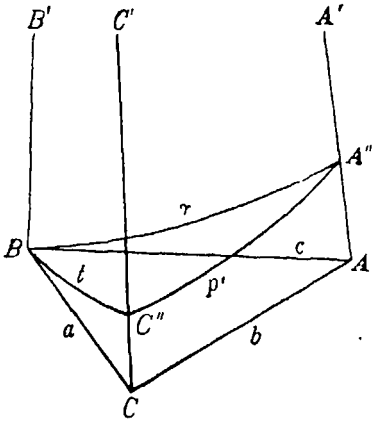
Теперь воспроизведем второе построение Лобачевского.

Перпендикуляр к плоскости прямоугольного треугольника восставим не из точки A, а из вершины B; из вершин же C и A проведем лучи CC' и AA', параллельные BB' (черт. *б*). Далее, принимая B за начало, луч BB' за ось, построим предельную поверхность, которая пересечет плоскости параллелей по предельным дугам BA'', BC'', $C''A''$. Тангенциальной высотой дуги BA'' служит отрезок c, а потому ее длина имеет то же значение r, что и в прежней конфигурации.

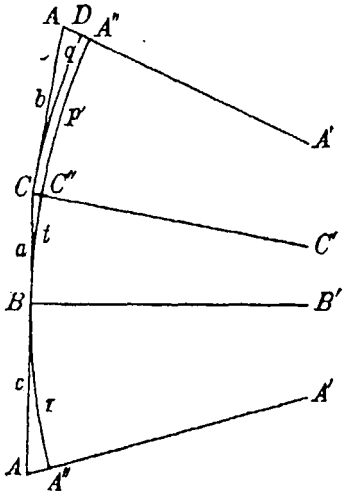
Дуга BC'' имеет тангенциальную высоту a, поэтому ее длина равна t (по прежней конфигурации). Дугу $C''A''$ обозначим через p'. Из предельного прямоугольного треугольника $A''BC''$ теперь получим

$$p' = r \sin B = r \sin \Pi(\beta); \quad t = r \cos \Pi(\beta). \qquad (!)$$

Теперь разрежем трехгранную поверхность по прямой AA' и развернем ее на плоскость (черт. *в*), подобно тому как это делает Лобачевский. В этом случае, как мы видим, $BA'' = r$, $BC'' = t$; пре-



Черт. *б*.



Черт. *в*.

дельная же дуга CD, имеющая тангенциальную высоту b, равна q, r остается без изменения, а места дуг q и t занимают дуги t и q.

Теперь, аналогично прежней конфигурации, $CC'' = f(a)$. Поэтому

$$CD = q = p' e^{f(a)}.$$

Подставляя же сюда вместо p' выражение (!), получим

$$q = r \sin \Pi(\beta)\, e^{f(a)},$$

как в тексте Лобачевского.

[27] Предложение 35 — наиболее важное во всем сочинении. Главное его содержание заключается в том, что в нем устанавливаются соотношения между сторонами и углами как в прямолинейном, так и в сферическом прямоугольном треугольнике. Вывод этих соотношений представляет собой образец тонкой, изумительно искусной цепи умозаключений, может быть, наиболее характерных синтетических рассуждений Лобачевского. Вывод нельзя не признать довольно сложным при всей элементарности отдельных его приемов. Но наиболее ценной его стороной является совместное получение уравнений как пло-

ской так и сферической тригонометрии неевклидова (гиперболического) пространства. Сделаем краткий обзор этих рассуждений.

Предложение 35 разбивается на три части. Первая часть устанавливает, что каждому прямолинейному прямоугольному треугольнику соответствует некоторый сферический прямоугольный же треугольник; это соответствие взаимное: сферический треугольник, в свою очередь, определяет тот же прямолинейный треугольник. Если в этом сферическом треугольнике транспонируем катеты и противолежащие им углы, а затем воспроизведем соответствующий прямолинейный треугольник, то последний, как оказывается, получается из исходного прямолинейного треугольника не перестановкой катетов, а особой подстановкой, которую справедливо назвать *преобразованием Лобачевского*. Таким образом от каждого прямолинейного прямоугольного треугольника можно в неевклидовой плоскости двояким путем перейти к другому прямолинейному же прямоугольному треугольнику: один получается транспонированием катетов и острых углов; этот прямоугольный треугольник отличается от исходного только расположением катетов, — он ему конгруэнтен; другой получается из исходного преобразованием Лобачевского, которое приводит к существенно отличному треугольнику. Вместе с тем всякое соотношение в прямоугольном треугольнике приводит в неевклидовой плоскости к ряду новых соотношений, которые получаются либо перестановкой катетов и острых углов, либо подстановкой Лобачевского.

Таким образом, достаточно получить одно соотношение между элементами прямоугольного треугольника, чтобы из него получить и остальные соотношения, алгебраически от него не зависящие. Этому и посвящена вторая часть этого предложения. Здесь Лобачевский строит предельную поверхность, проходящую через вершину одного из острых углов прямоугольного треугольника ABC и имеющую осью перпендикуляр к этой плоскости из той же вершины. Вместе с осями, выходящими из других вершин треугольника, эта ось определяет трехгранную поверхность, которая вырезывает на предельной поверхности предельный прямоугольный треугольник, определяемый исходным треугольником. Стороны и углы этого предельного треугольника связаны уравнениями евклидовой геометрии. Углы предельного треугольника выражаются очень просто через углы данного треугольника. Поэтому уравнения, связывающие стороны и углы прямолинейного треугольника, содержат элементы как прямолинейного, так и предельного треугольника; стороны предельного треугольника нужно исключить; в этом главная задача дальнейшего исследования.

Вершины B и C треугольника отстоят от предельной поверхности по осям на расстояниях BB'' и CC''. Длины этих отрезков, очевидно, представляют собой определенную функцию c и b сторон треугольника.

Лобачевский обозначает их поэтому через $f(c)$ и $f(b)$. Развернув трехгранную поверхность на плоскость, Лобачевский без труда доказывает, что три отрезка $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ связаны соотношением

$$f(c) = f(a) + f(b). \qquad (1)$$

По существу это уже и есть соотношение, связывающее гипотенузу и катеты прямоугольного треугольника; нужно только разыскать функцию $f(x)$.

Лобачевский вторично строит предельную поверхность, исходя из вершины второго острого угла. Сопоставляя евклидовы соотношения между сторонами предельных треугольников, полученных один на первой, другой на второй предельной поверхности, и их развертки, Лобачевский получает новые соотношения:

$$\sin \Pi(a)\, e^{f(a)} = \sin \Pi(b)\, e^{f(b)} = \sin \Pi(c)\, e^{f(c)}.$$

Но a и b суть независимые величины; все три части этих равенств представляют собой постоянные; полагая аргумент равным нулю, находим, что эта постоянная равна единице. Функция $f(x)$, таким образом, найдена:

$$e^{f(x)} = \frac{1}{\sin \Pi(x)}.$$

Написав теперь соотношение (1) в виде

$$e^{f(c)} = e^{f(a)} \cdot e^{f(b)},$$

получаем соотношение между катетами и гипотенузой уже в более конкретной форме:

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b).$$

Из этого уравнения он получает еще четыре при помощи подстановок, указанных в первой части этого предложения.

Наконец, в третьей части предложения 35, переходя от прямолинейного треугольника к связанному с ним сферическому, Лобачевский устанавливает уравнения сферической тригонометрии прямоугольного треугольника и обнаруживает, что они совпадают с соответствующими уравнениями евклидовой геометрии, т. е. не зависят от постулата о параллельных линиях.

[28] В предыдущем основном соотношении, где было введено обозначение «e», о нем говорилось только, что e есть некоторое положительное число, большее единицы. Значение этого числа остается произвольным, в том смысле, что постулаты, на которых построена геометрия Лобачевского, совместимы с любым значением числа e. Но самое установление этого числа, очевидно, связано с единицей меры.

в которой выражается длина x. С изменением единицы меры значение e будет меняться; при надлежащем выборе единицы число e должно совпасть с основанием натуральных логарифмов (см. примечание 21). При всем том, в этом рассуждении есть некоторая неувязка с предыдущим. Дело в том, что совершенно аналогичное рассуждение уже было проделано в предложении 33 в применении к соотношению $s' = se^{-x}$, связывающему длины предельных дуг, содержащихся между двумя осями. И там число e зависело от единицы меры, в которой выражено расстояние x между дугами. Единица меры была уже там установлена так, чтобы e имело значение основания неперовых логарифмов. Стало быть, вновь устанавливать единицу так, чтобы и в новой показательной функции привести основание e к неперову числу, безоговорочно нельзя. В действительности дело обстоит так, что обе экспоненциальные функции приводятся к неперову основанию при одной и той же единице меры. Лобачевский сам обнаружил этот дефект и исправил его в «Пангеометрии».

[29] Если перейти к обычным обозначениям углов, т. е. вместо $\Pi(a)$ и $\Pi(\beta)$ писать A и B, то два уравнения, приведенные в начале настоящего предложения, примут вид

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b), \tag{1}$$

$$\sin A = \sin \Pi(b) \cos B. \tag{2}$$

Транспонируя в последнем уравнении углы A и B и заменяя соответственно этому катет b катетом a, получим третье уравнение, о котором говорит Лобачевский:

$$\sin B = \sin \Pi(a) \cos A. \tag{3}$$

Перемножая уравнения (2) и (3) и учитывая (1), получаем

$$\sin \Pi(c) = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B. \tag{4}$$

Исключая B из уравнений (2) и (3), получаем

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 \Pi(b)} + \sin^2 \Pi(a) \cos^2 A = 1.$$

Освобождая это уравнение от знаменателя и заменяя в силу уравнения (1) произведение $\sin \Pi(a) \sin \Pi(b)$ через $\sin \Pi(c)$, получаем

$$\sin^2 \Pi(c) \cos^2 A = \sin^2 \Pi(b) - \sin^2 A$$

и, следовательно,

$$\cos^2 \Pi(c) \cos^2 A = \cos^2 \Pi(b).$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей и принимая во внимание, как на это указывает Лобачевский, что все углы A, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$ острые, получаем

$$\cos \Pi(c) \cos A = \cos \Pi(b). \tag{5}$$

Если из уравнений (2) и (3) исключим не угол B, а угол A, то таким же образом получим

$$\cos \Pi(c) \cos B = \cos \Pi(a). \tag{6}$$

Это и есть уравнение, приведенное в тексте ниже, под номером 2. Оно приведено и в предыдущем предложении. Теперь исключим угол A из уравнений (5) и (4). Если для этого напишем эти уравнения в виде

$$\cos A = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(c)}, \quad \operatorname{tg} A = \sin \Pi(c) \operatorname{ctg} B,$$

то исключение дает

$$\frac{\cos^2 \Pi(c)}{\cos^2 \Pi(b)} = 1 + \sin^2 \Pi(c) \operatorname{ctg}^2 B.$$

Вычисляя отсюда $\operatorname{ctg}^2 \Pi(b)$, получим:

$$\operatorname{ctg} \Pi(b) = \operatorname{ctg} \Pi(c) \sin B. \tag{7}$$

Таким же образом, исключая из уравнения (4) и (5) угол B, получим

$$\operatorname{ctg} \Pi(a) = \operatorname{ctg} \Pi(c) \sin A. \tag{8}$$

Это и есть уравнение (1), приведенное ниже в тексте.

Наконец, перемножая уравнения (5) и (8), получим

$$\operatorname{ctg} \Pi(a) \cos \Pi(c) \cos A = \operatorname{ctg} \Pi(c) \sin A \cos \Pi(b).$$

Так как $\cos \Pi(c) \neq 0$, то мы можем сократить уравнение на $\cos \Pi(c)$. Заменяя после этого в силу соотношения (1) $\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b)$, получим

$$\cos \Pi(a) = \operatorname{ctg} \Pi(b) \operatorname{tg} A \tag{9}$$

и аналогично этому

$$\cos \Pi(b) = \operatorname{ctg} \Pi(a) \operatorname{tg} B. \tag{10}$$

Уравнения (7) и (8) отличаются от соответствующих уравнений евклидовой геометрии

$$a = c \sin A, \quad b = c \sin B$$

тем, что стороны треугольника a, b, c заменены через $\operatorname{ctg} \Pi(a)$, $\operatorname{ctg} \Pi(b)$, $\operatorname{ctg} \Pi(c)$.

Как известно, Непером было указано мнемоническое правило, дающее возможность без труда запомнить соотношения между сторонами и углами сферического треугольника. Проф. А. П. Котельников показал, что это правило в несколько измененном виде может служить и для записывания тригонометрических уравнений прямоугольного треугольника в гиперболической плоскости. Оно приведено им в примечании 20 к статье «О началах геометрии», стр. 275 настоящего тома; он им очень часто пользуется.

[30] В предложении 36 было найдено основное соотношение $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)=e^{-x}$, устанавливающее функцию $\Pi(x)$. Сообразно этому Лобачевский прежде всего по известной гониометрической формуле выражает $\cos\Pi(c-x)$ через $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-x)$ и получает вторую часть комментируемого равенства. Затем по упомянутой формуле он заменяет $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-x)$ через e^{x-c} и получает третью часть равенства. Теперь он представляет член e^{2x-2c} в виде $e^{2x}\cdot e^{-2c}$, выражает обратно оба множителя через $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x)^2$ и $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)^2$ и, таким образом, получает четвертую часть равенства; наконец, выражая тангенсы половинных углов по хорошо известной формуле через косинусы целых углов, он получает последний член равенства. Это имеет двоякое значение. Во-первых, формула

$$\cos\Pi(c-x)=\frac{\cos\Pi(c)-\cos\Pi(x)}{1-\cos\Pi(c)\cos\Pi(x)}$$

устанавливает для функции $\Pi(x)$ теорему сложения. Она остается в силе и для отрицательных значений x, что дает

$$\cos\Pi(c+x)=\frac{\cos\Pi(c)+\cos\Pi(x)}{1+\cos\Pi(c)\cos\Pi(x)}.$$

См. «Новые начала», ст. 137 (64).

Во-вторых, выражая здесь $\cos\Pi(x)$ и $\cos\Pi(c-x)$ по формулам [I], Лобачевский получает основные формулы [III], связывающие в гиперболическом пространстве стороны и углы любого прямолинейного треугольника. Однако, подобно так называемым неперовым аналогиям сферической тригонометрии, каждое из этих уравнений содержит пять элементов треугольника; между тем для решения треугольника их должно быть только четыре. Лобачевский переходит поэтому к установлению уравнений, связывающих четыре элемента треугольника.

[31] Написав предыдущее соотношение в виде

$$1-\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\cos A=\frac{\cos\Pi(c)-\cos A\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(a)\cos B}, \qquad [I]$$

мы транспонируем в нем стороны a и b, а также противолежащие

им углы A и B; получим

$$1 - \cos \Pi(a) \cos \Pi(c) \cos B = \frac{\cos \Pi(c) - \cos B \cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b) \cos A}.$$

Перемножая эти равенства, получим

$$[1 - \cos \Pi(a) \cos \Pi(c) \cos B]\ [1 - \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A] =$$

$$= \frac{[\cos \Pi(c) - \cos B \cos \Pi(a)]\ [\cos \Pi(c) - \cos A \cos \Pi(b)]}{\cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos A \cos B}.$$

Выполнив в числителе правой части умножение и разделив членне содержащий $\cos \Pi(c)$, на знаменатель, приведем правую часть к виду

$$1 + \frac{\cos \Pi(c)\ [\cos \Pi(c) - \cos A \cos \Pi(b) - \cos B \cos \Pi(a)]}{\cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos A \cos B} =$$

$$= \sin^2 \Pi(c) + \frac{\cos \Pi(c) \cdot R}{\cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos A \cos B},$$

где через R обозначено выражение

$$\cos \Pi(c)\ [1 + \cos A \cos B \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)] - \cos \Pi(a) \cos B - \cos \Pi(b) \cos A.$$

Вследствие соотношения [1] R обращается в нуль, и мы получаем уравнение, приведенное в тексте.

[32] Вычисление протекает в следующем порядке:

$$1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) =$$

$$= 1 - \frac{\cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(a) \sin C}{\sin A \sin \Pi(b) + \cos A \sin C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)} =$$

$$= \frac{\sin A \sin \Pi(b)}{\sin A \sin \Pi(b) + \cos A \sin C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)}.$$

Вместе с тем уравнение, выражающее $\sin \Pi(b)^2$, после подстановки и сокращения на $\sin \Pi(b)$ примет вид

$$\sin \Pi(b) = \frac{\sin A\ \{1 - \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)\}}{\sin A \sin \Pi(b) + \cos A \sin C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)}$$

или же

$$\sin A - \sin A \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) = \sin A \sin \Pi(b)^2 +$$
$$+ \sin \Pi(b) \cos A \sin C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b).$$

Заменив теперь разность первых членов обеих частей через $\sin A \cos^2 \Pi(b)$ и разделив обе части на $\sin A \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)$, получим уравнение, приведенное в тексте.

[33] Первое из этих соотношений получаем непосредственно из первого уравнения (8), написав его в виде

$$\operatorname{ctg}\Pi(b)\sin A=\operatorname{ctg}\Pi(a)\sin B$$

и заменяя $\operatorname{ctg}\Pi(b)$ и $\operatorname{ctg}\Pi(a)$ приведенными их приближенными значениями a и b. Второе уравнение (8) после подстановки в него приближенных значений принимает вид

$$bc\cos A+\frac{\left(1-\frac{b^2}{2}\right)\left(1-\frac{c^2}{2}\right)}{1-\frac{a^2}{2}}=1.$$

Освобождаясь от знаменателя и отбрасывая члены, порядок которых выше двух, получим второе уравнение, приведенное в тексте.

Третье уравнение (8) после такой же подстановки примет вид

$$\frac{\operatorname{ctg}A\sin C}{1-\frac{b^2}{2}}+\cos C=\frac{b}{a}.$$

Освобождая от знаменателя, отбрасывая члены, порядок которых выше двух, и умножая обе части уравнения на $\sin A$, получим третье уравнение текста. Аналогично получаем и четвертое.

[34] Это соотношение, строго говоря, вытекает уже из последнего уравнения. Чтобы получить его, однако, как указывает Лобачевский, опираясь на предыдущие уравнения, проведем вывод в следующем порядке:

$$\sin(A+B+C)=\sin A\cos(B+C)+\cos A\sin(B+C).$$

Заменяя здесь согласно последней формуле $\cos(B+C)$ через $-\cos A$, получаем

$$\sin(A+B+C)=\cos A\{\sin(B+C)-\sin A\}.$$

Заменяя теперь $\sin(B+C)$ его значением, заимствованным из предпоследнего уравнения той же группы (с заменой A на B), получим

$$\sin(A+B+C)=\frac{\cos A}{b}\{a\sin B-b\sin A\}.$$

Согласно же первому уравнению той же группы, выражение, стоящее в скобках в правой части этого равенства, равно нулю. Поэтому $\sin(A+B+C)=0$; а так как $A+B+C$ больше нуля и не превышает π, то $A+B+C=\pi$.

[35] Очень важное предложение, согласно которому гиперболическая геометрия бесконечно малого совпадает с евклидовой геометрией,

нуждается в пояснении. Содержание теоремы в более точной формулировке выражается следующим образом: если стороны треугольника выражаются настолько малыми числами, что их степенями, выше второй, можно пренебречь, то уравнения, связывающие стороны и углы треугольника, не отличаются от тех, которые имеют место в евклидовой геометрии. Но числа, которыми выражаются длины отрезков, зависят от принятой единицы меры. Эта единица меры, однако, не произвольна: она зафиксирована тем требованием, чтобы в уравнении $\operatorname{ctg} \frac{1}{2}\Pi(x) = e^x$ число e представляло собой основание неперовых логарифмов (см. предложение 36 и примечание 28 на стр. 152); это имеет место при строго определенном размере отрезка. Как уже было указано выше (стр. 142), этот отрезок часто называют теперь *радиусом кривизны гиперболического пространства*. Итак, гиперболическая геометрия совпадает с евклидовой на протяжении, весьма малом по сравнению с радиусом кривизны пространства. С этим и связываются соображения, относящиеся к устройству вселенной. Уже Лобачевский в очень осторожной форме высказывал предположение, что в нашем пространстве в действительности, может быть, имеет место гиперболическая геометрия, но что размеры той части вселенной, в которой мы производим наши измерения, настолько малы по сравнению с радиусом кривизны пространства, что отклонения наблюдаемых нами метрических соотношений от евклидовых весьма ничтожны, и мы этих отклонений вовсе не замечаем: они падают за пределы точности наших измерений (см. «О началах геометрии», стр. 207 — 209 настоящего тома). Вычисления суммы углов в некотором космическом треугольнике (см. там же) не дали оснований к подтверждению такого предположения. В настоящее время выяснилось, что размеры вселенной неизмеримо больше, чем это себе представляли в эпоху, когда жил Лобачевский. Протяжения, доступные точному измерению, действительно совершенно ничтожны по сравнению с размерами вселенной. В связи с этим, а также с некоторыми течениями в физике и космологии, в последнее время чаще высказываются предположения, что действительная геометрия космоса не евклидова (Эйнштейн, Эддингтон). При этом есть основание предполагать, что эта геометрия эллиптическая (риманова), а не гиперболическая. Нужно, однако, сказать, что на эти соображения можно смотреть только как на весьма проблематические предположения, требующие еще тщательной проверки.

[36] Лобачевский имеет в виду сочинения: «О началах геометрии», напечатанное, правда, не в «Ученых записках», а в «Казанском вестнике» (1829—1830 гг.), «Воображаемая геометрия», напечатанное в «Ученых записках Казанского университета» за 1835 г., «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам», напечатанное в «Ученых записках» за 1836 г.

[37] Функция $\Pi(x)$ определена Лобачевским геометрически, а затем установлено ее аналитическое выражение, содержащееся в заключительной формуле предложения 36; в сноске * на стр. 120 это же соотношение приведено в других видах.

Если функции, этими формулами определяемые, распространить и на мнимые значения аргумента α, то получим:

$$\operatorname{ctg}\Pi(xi) = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2} = i\sin x,$$

$$\sin\Pi(xi) = \frac{2}{e^{xi} + e^{-xi}} = \frac{1}{\cos x},$$

$$\cos\Pi(xi) = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{e^{xi} + e^{-xi}} = i\operatorname{tg} x.$$

Эти именно формулы Лобачевский и приводит в тексте. Если в уравнения (8) вместо a, b, c подставить ai, bi, ci и выразить тригонометрические функции от $\Pi(ai)$, $\Pi(bi)$, $\Pi(ci)$ по приведенным выше формулам, то получим заключительные уравнения текста. Это суть соотношения между сторонами и углами сферического треугольника. Можно сказать, что и обратно, формулы, сферической тригонометрии переходят в уравнения гиперболической тригонометрии, если заменить стороны треугольника a, b, c через $\frac{a}{i}$, $\frac{b}{i}$, $\frac{c}{i}$. С другой стороны, в сферической тригонометрии под a, b, c разумеют угловые значения сторон; если под a, b, c разуметь длины этих сторон, то угловые их значения будут $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$, где R — радиус сферы. Уравнения сферической тригонометрии, содержащие эти формулы, переходят в гиперболические, если заменим $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$ через $\frac{a}{Ri}$, $\frac{b}{Ri}$, $\frac{c}{Ri}$, т. е. если заменить R через Ri. Можно сказать, что уравнения гиперболической тригонометрии имеют место на мнимой сфере. В этом именно смысле слова Ламберта: «гипотеза острого угла должна иметь место на какой-либо мнимой сфере» (см. стр. 170), высказанные им еще в 1766 г., действительно имеют характер замечательного предвидения.

Сфера радиуса R имеет кривизну $\frac{1}{R^2}$. С другой стороны, формулы гиперболической тригонометрии получаются, если в формулах сферической тригонометрии заменить R через ki; в этом смысле на гиперболическую плоскость можно формально смотреть как на сферу с кривизной $K = -\frac{1}{k^2}$; это и служило основанием для присвоения гиперболическому пространству кривизны $-\frac{1}{k^2}$. Более глубокое обоснование этот термин получает в римановой геометрии, в широком смысле этого слова (см., например, В. Каган — Геометрические идеи Римана и их современное развитие. М. — Л., 1933, стр. 14).

ЭЛЕМЕНТЫ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ У ДРУГИХ ГЕОМЕТРОВ

К. Ф. Гаусс

Как уже было упомянуто в вводной статье (стр. 72), основные работы Лобачевского при его жизни не были поняты и, более того, были подвергнуты суровой критике. Не раз было также указано, что главной причиной такого отношения современников Лобачевского к его работам было крайне сжатое изложение их, недоступное даже высоко образованному математику. Математические мемуары по старой традиции обычно составляются очень сжато. Но работы Лобачевского содержали совершенно новый, исключительно своеобразный и по существу очень трудный материал; он требовал особенно четкого, вразумительного изложения.

Между тем сжатость изложения у Лобачевского выходила далеко за пределы обычного. Трудно даже уяснить себе, что его к этому побуждало. Небольшая брошюра «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien» именно и имела целью сделать элементы неевклидовой геометрии более доступными, обратить на нее внимание широкого круга читателей, владеющих математическим образованием. Но велика была сила инерции в математических кругах, очень своеобразны были идеи автора. Выход этой брошюры не изменил у нас отношения противников Лобачевского к его идеям. Но и за границей она не привлекла общего внимания, не встретила того признания, на которое Лобачевский рассчитывал. Напротив, и здесь в распространенном библиографическом журнале был помещен отзыв о только что появившейся небольшой книге Лобачевского, подписанной символически цифрой «140» [1]); рецензент находил, что достаточно привести одно из утверждений автора, чтобы быть свободным от дальнейшей оценки книги.

При всем том в Германии все же нашелся читатель, который эту небольшую книгу Лобачевского прочитал, вполне понял его своеобраз

---

[1]) Repertorium der gesammten deutschen Litteratur. Herausgegeben von E. Gerslorf, Leipzig, 1840, 3, стр. 147.

ные идеи и оценил их по достоинству. Это был великий геометр К. Ф. Гаусс. Он заинтересовался исследованием Лобачевского настолько, что изучил русский язык, чтобы ознакомиться со всеми его работами. В результате этого ознакомления он предложил Лобачевского в члены Геттингенского ученого общества — собственно геттингенской Академии наук — и лично уведомил его о состоявшемся избрании. Но в печати Гаусс не проронил ни одного слова о своем отношении к работам Лобачевского. И все же математический мир узнал о них именно благодаря Гауссу. Это произошло следующим образом.

Гаусс скончался в 1855 г. В конце пятидесятых годов известный немецкий издатель Петерс начал выпускать в свет переписку Гаусса с его другом Шумахером [1]). *В пятом томе этого издания было опубликовано* письмо Гаусса от 28/XI 1846 г., в котором он в восторженных выражениях говорит о замечательной книге Лобачевского «Geometrische Untersuchungen»; этим было обращено внимание всего математического мира на работы Лобачевского, и его «Воображаемая геометрия» была вновь призвана к жизни.

В дальнейшем изучение переписки Гаусса с друзьями вскрыло еще ряд других фактов. Самым важным является то, что замалчивание в печати своих взглядов на работы Лобачевского не было для Гаусса случайным. В сравнительно раннем возрасте Гаусс уже сам пришел к идеям, которые представляют собой первые шаги в области неевклидовой геометрии. Возникновение этих идей у Гаусса относится к последним годам XVIII века. Однако, он продолжал размышлять над этими вопросами, и первые годы XIX столетия принесли с собой ряд колебаний и сомнений [2]). Но в десятых годах Гаусс утвердился в сознании, что возможна другая геометрия, отличная от классической, которую он сам назвал неевклидовой. В разработке этой геометрии он сделал, правда, только первые, элементарные шаги; но сомнений в том, что они допускают дальнейшее безупречное ее развитие, у него уже не оставалось. Однако, как человек весьма практический, он ясно отдавал себе отчет, что опубликование этих идей, глубоко революционных в их научном значении, вызовет бурю возражений и даже негодование со стороны подавляющего большинства математиков. Чтобы обезопасить себя от нареканий, нужно было развернуть новую геометрию гораздо глубже. Будучи занят другими исследованиями,

---

[1]) «Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und C. C. Schumacher», herausgegeben von C. A. Peters. Томы появились в различные годы, последний — в 1863 г.

[2]) P. Stäckel — Gauss als Geometer. Abdruck aus d. Heft 5 der «Materialen für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss», Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1917. Этот обширный мемуар вышел также отдельным изданием в виде приложения к X тому полного собрания сочинений Гаусса.

Гаусс откладывал эту работу, твердо намереваясь все же сохранить эти идеи для потомства. Отрывки из различных писем и отдельные заметки, найденные в его литературном наследии, не оставляют сомнения в том, что Гаусс действительно владел исходными началами неевклидовой геометрии; но, как уже сказано, результаты, полученные им в этой области, не выходили за пределы элементарной геометрии.

Так как задача о параллельных линиях была чрезвычайно популярна, то ею в первой половине прошлого века занимались многие, чаще всего молодые, иногда очень талантливые математики; они обращались к Гауссу за разъяснением возникавших у них в связи с этим сомнений. Немногих из них он посвящал в свои взгляды и эти вопросы, но строго конфиденциально, с непременным требованием не оглашать их.

Ф. К. Швейкарт и Ф. А. Тауринус

Первые сообщения этого рода пришли из России.

С 1812 по 1816 г. в Харькове состоял профессором права Фердинанд Швейкарт (1780 — 1857). Живя в Харькове в глубоком одиночестве, Швейкарт посвящал свой досуг геометрии. Он еще раньше заинтересовался теорией параллельных линий и в 1807 г. опубликовал работу, содержавшую доказательство V постулата [1]). Убедившись потом в неправильности этого доказательства, Швейкарт во время своего пребывания в Харькове пришел к тем же воззрениям, которых придерживался Гаусс. В 1817 г. Швейкарт был приглашен в Марбург, где сблизился с профессором Герлингом, и через него препроводил Гауссу заметку следующего содержания:

«Существует двоякая геометрия: геометрия в узком смысле слова — евклидова — и звездное (astralische) учение о величине.

Треугольники последней геометрии имеют ту особенность, что сумма трех углов не равна двум прямым.

Принимая это, можно самым точным образом доказать следующее:

a) что сумма трех углов в треугольнике *меньше* двух прямых;

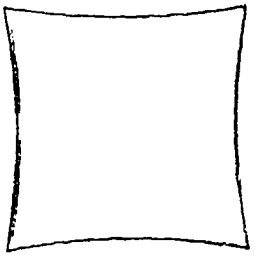
b) что сумма эта тем меньше, чем больше площадь треугольника;

c) что высота прямоугольного равнобедренного треугольника, постоянно возрастая с возрастанием боковых сторон, не может превзойти некоторую линию, которую я называю *константой*.

---

[1]) F. K. Schweikart — Die Theorie der Parallellinien, nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie. Leipzig und Jena, 1808.

Квадраты имеют поэтому следующий вид:



Если эта константа для *нас* равна радиусу Земли (в каковом случае всякая линия, проведенная в пространстве от одной неподвижной звезды к другой, отстоящей от нее на 90°, была бы касательной к *земному шару*), то она бесконечно велика по сравнению с протяжениями, которые мы встречаем в повседневной жизни.

Евклидова геометрия имеет место только в том случае, если константа бесконечно велика. Только в этом случае сумма углов каждого треугольника равна двум прямым, и это легко доказать, если принять, что константа бесконечно велика».

Для осведомленного человека совершенно ясно, что в этих немногих словах содержатся первые основные положения гиперболической геометрии. Она, конечно, не получила у Швейкарта сколько-нибудь углубленного развития; но в этой короткой заметке содержатся все те элементарные факты, из которых остальное уже непосредственно выводится.

Швейкарт, повидимому, не владел достаточно математикой, чтобы продвинуть свою «звездную геометрию» дальше того, что изложено в его заметке к Гауссу.

В переписке со своим племянником Таурипусом (1794—1874), в то время также изучавшим юридические науки, Швейкарт сообщил последнему о своих занятиях теорией параллельных линий и в общих чертах познакомил его с результатами, к которым он пришел. Таурипус отнесся к этому сначала совершенно безучастно, но через несколько лет, случайно познакомившись с упомянутой выше брошюрой Швейкарта, он с увлечением занялся теорией параллельных линий. В чем собственно его результаты в ту пору заключались, остается неизвестным, так как письмо Таурипуса к Гауссу, содержавшее изложение этих результатов, не сохранилось. Ответное письмо Гаусса от 8 ноября 1824 г. очень характерно. Он воздает, конечно, молодому автору должное, но говорит больше о себе, о своих собственных достижениях, чем об авторе. Гаусс посвящает его в собственные идеи

по этому вопросу. Чрезвычайно интересную выдержку из этого письма мы приводим в переводе.

«Допущение, что сумма трех углов треугольника меньше 180°, приводит к своеобразной, совершенно отличной от нашей (евклидовой) геометрии; эта геометрия совершенно последовательна, и я развил ее для себя (für mich selbst) совершенно удовлетворительно; я имею возможность решить в этой геометрии любую задачу, за исключением определения некоторой постоянной, значение которой a priori установлено быть не может. Чем большее значение мы придаем этой постоянной, тем ближе мы подойдем к евклидовой геометрии, а бесконечно большое ее значение приводит обе системы к совпадению. Предложения этой геометрии отчасти кажутся парадоксальными и непривычному человеку даже несуразными; но при строгом и спокойном размышлении оказывается, что они не содержат ничего невозможного. Так, например, все три угла треугольника можно сделать сколь угодно малыми, если только взять достаточно большие стороны; площадь же треугольника не может превысить, даже не может достичь некоторого предела, как бы велики ни были его стороны. Все мои старания найти в этой неевклидовой геометрии [1]) противоречие или непоследовательность остались бесплодными, и единственно, что в этой системе противится нашему разуму, это то, что в пространстве, если бы эта система была справедлива, должна была бы существовать некоторая сама по себе определенная (хотя нам и неизвестная) линейная величина. Но мне кажется, что мы, кроме ничего не выражающей словесной мудрости метафизиков, знаем очень мало или даже не знаем ничего о сущности пространства; мы не можем смешивать того, что нам представляется неестественным, с абсолютно невозможным. Если бы неевклидова геометрия была истинна и упомянутая выше постоянная находилась бы в определенном отношении к таким величинам, которые доступны нашему измерению на небе или на земле, то ее можно было бы определить a posteriori. Я поэтому иногда в шутку высказывал желание, чтобы евклидова геометрия не была истинной, потому что мы тогда имели бы a priori абсолютную меру длины».

Благожелательный тон Гаусса побудил Тауринуса продолжать свои занятия теорией параллельных линий, в результате чего

[1]) В этом письме, таким образом, впервые появляется термин «неевклидова геометрия». Заметим, что термин этот в настоящее время имеет более широкое значение, охватывающее как частный случай и ту неевклидову геометрию, которая была создана Лобачевским; последнюю в настоящее время обычно называют *геометрией Лобачевского* или *гиперболической геометрией*.

он в 1825 г. опубликовал брошюру, посвященную теории параллельных линий[1]). В следующем 1826 г. он опубликовал новую брошюру, содержащую тот же материал в исправленном и дополненном виде[2]).

Стремясь, как уже указано выше, доказать постулат о параллельных от противного, Тауринус также пришел к константе Гаусса и Швейкарта и фактически открыл тригонометрию гиперболического пространства с такой полнотой, что решает при их помощи ряд задач, в том числе вычисляет длину окружности, площадь круга, поверхность и объем тора. Методы вычисления довольно тяжеловесны, изложение сжато и мало вразумительно, — это в значительной мере обусловливалось тем, что Тауринус сам не отдавал себе полного отчета о содержании и значении проблем, решением которых он занимался. По существу, однако, Таурингусу принадлежит большая заслуга: он первый опубликовал прямолинейную тригонометрию неевклидовой (гиперболической) плоскости, повторяем, не отдавая себе, собственно, отчета в ее значении.

В предисловии к своей последней брошюре Таурингус в осторожной форме высказывает пожелание, чтобы Гаусс опубликовал свои взгляды на основы геометрии. Брошюры были, конечно, посланы Гауссу; но последний усмотрел в словах Таурингуса, помещенных в предисловии, нарушение его воли и прекратил с ним какие бы то ни было сношения. Не встретив ни малейшего признания своих идей, Таурингус впал в меланхолию; в припадке болезни он сжег оставшиеся у него экземпляры брошюр. В Европе сохранилось лишь несколько экземпляров этих брошюр. Профессор Энгель их разыскал и опубликовал те материалы, которые представляют интерес, в своем «Собрании первоисточников» (см. ниже, стр. 169).

Иоанн Больяй

Еще трагичнее была судьба молодого венгерского математика Иоанна Больяй, который был сыном друга Гаусса, Вольфганга Больяй. Молодой офицер получил математическое образование в военной академии. Назначенный в гарнизон небольшого городка в Трансильвании и находясь там в глубоком одиночестве, он занялся теорией параллельных линий и пришел к сознанию возможности другой геометрии, отличной от евклидовой. После десятилетних размышлений он построил элементарные начала той геометрии, которая в настоящее время по праву называется геометрией Лобачевского. В 1832 г. И. Больяй опубликовал эти результаты в виде приложения («Appendix»)

[1]) F. A. Taurinus — Theorie der Parallellinien. Köln, 1825.

[2]) F. A. Taurinus — Geometriae prima elementa. Köln, 1826.

к учебному руководству своего отца. Отец и сын послали это руководство вместе с приложением Гауссу. В ответном письме Гаусс после нескольких слов одобрения говорит, однако, что он затрудняется хвалить работу Иоанна потому, что это значило бы хвалить самого себя. Он сам давно владеет этими идеями, собирался их со временем опубликовать и очень доволен, что теперь освобожден от этой необходимости. Письмо носило довольно сдержанный характер; в печати же Гаусс ни единого слова об этой, несомненно замечательной, работе не проронил.

Не встретив никакой поддержки у Гаусса, И. Больяй также впал в глубокую меланхолию, близкую к умопомешательству. Это состояние особенно ухудшилось в 1848 г., когда он получил от отца экземпляр «Geometrische Untersuchungen» Лобачевского. Он чрезвычайно тщательно изучил это сочинение, «отмеченное», по его словам, «печатью гения». Он написал обширные к нему примечания; но вместе с тем он не верил в существование Лобачевского; он был убежден, что жадный Гаусс хочет вырвать у него приоритет этого открытия и опубликовал свои собственные исследования под псевдонимом Казанского профессора Лобачевского. Между тем Больяй никакого права на приоритет в открытии неевклидовой геометрии не имел: Н. И. Лобачевский опубликовал свой первый мемуар «О началах геометрии», воспроизводимый ниже в настоящем томе, в 1829 г., т. е. за три года до появления «Аппендикса», и еще в 1826 г., т. е. за шесть лет до опубликования книги Больяй, он доложил результаты своих замечательных исследований Физико-математическому факультету Казанского университета.

Однако, не столько в том, что Лобачевский опередил Больяй на несколько лет, заключается его общепризнанное преимущество. Уже в первой работе Лобачевского неевклидова геометрия развернута несравненно шире и глубже, нежели это было сделано Гауссом и Больяй; в последующих же работах он дал им еще гораздо более углубленное развитие. Можно сказать, что работа Лобачевского находится в таком же отношении к результатам Гаусса и Больяй, как современная геометрия во всем ее развитии относится к элементам геометрии, к «Началам» Евклида. Это — творение несравненно более высокого порядка.

Оставляя теперь научную и переходя к моральной стороне дела, нельзя не поставить Лобачевскому в особую заслугу то, что он не убоялся «крика беотийцев», не устрашился, как Гаусс, «ос, которые поднялись бы над его головой»; не встретив сочувствия, он не сжег своих работ, как Тауринус, не ушел от людей, как Больяй. Он мужественно боролся всю жизнь за свои идеи; не встретив ни единого человека, который понял и оценил бы их, все же на краю могилы

он еще раз продиктовал для потомства свое великое научное завещание, на базе которого геометрия совершенно изменила свой облик и свое строение.

И. Саккери и И. Г. Ламберт

Роль всего того круга людей, о которых речь шла выше, выяснилась, как мы видели, после опубликования переписки Гаусса с друзьями. Но в конце восьмидесятых годов прошлого столетия были как бы вновь открыты сочинения двух авторов, которых можно отнести к предшественникам Лобачевского и притом с тем большим правом, что хронологически они первые приблизились к этому кругу идей. Это были итальянский монах Иероним Саккери (Cirolamo Saccheri) и швейцарский философ и математик Генрих Ламберт (Johann Heinrich Lambert).

Рассуждения Лежандра, как мы видели, установили связь между теоремой о сумме углов треугольника и теорией параллельных линий. В дополнение к тому, что было уже сделано Нассир-Эддином, Лежандр доказал, что сумма углов треугольника не может быть больше двух прямых и что она либо во всех треугольниках равна двум прямым, либо во всех треугольниках меньше двух прямых. Эта дилемма считалась существенным достижением Лежандра и в течение долгого времени связывалась с его именем. Но в 1889 г. известный итальянский геометр Е. Бельтрами обратил внимание на замечательное сочинение итальянского иезуита Иеронима Саккери, в котором все результаты Лежандра не только уже были опубликованы, но получили значительно большее развитие. Это сочинение это есть издание «Начал» Евклида под широковещательным заглавием «Евклид, освобожденный от всех пятен, или опыт, устанавливающий самые первые принципы универсальной геометрии»[1]).

Это сочинение, несомненно представлявшее собой труд многих лет, было опубликовано в 1733 г., уже после смерти автора, умершего в том же году. Тонко анализируя Евклида, Саккери очень подробно останавливается на постулате о параллельных линиях и действительно дает этому вопросу существенно новое освещение.

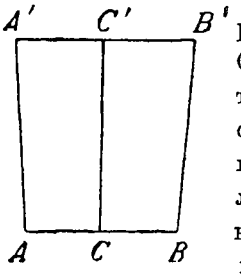
Точкой отправления для Саккери служит четырехугольник, который фактически встречается уже у Нассир-Эддина.

Из крайних точек A и B отрезка AB восставим к нему перпендикуляры AA' и BB', расположенные в одной плоскости по одну сто-

---

[1]) G. Saccheri — Euclides ab omni naevo vindicatus; sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia. Mediolani, 1733.

рону прямой AB. На этих перпендикулярах отложим равные отрезки AA' и BB'. Таким образом составится четырехугольник $AA'B'B$ с двумя прямыми углами при нижнем основании AB. Соединим середины C и C' оснований AB и $A'B'$; налагая четырехугольник $AA'B'B$ на себя другой стороной ($BB'A'A$), мы докажем, что прямая CC' перпендикулярна к обоим основаниям, а углы A' и B' равны между собой. Относительно этих углов может быть сделано три предположения: либо эти углы тупые, либо они прямые, либо острые. Саккери показывает прежде всего, что, принимая то или другое предположение относительно одного четырехугольника этого типа, мы тем самым должны принять его также относительно всех четырехугольников того же типа. Иными словами, если какой-либо один из этих четырехугольников имеет при верхнем основании, например, острые углы, то и все четырехугольники этого типа имеют острые же углы.



Саккери называет три различных допущения, которые здесь могут быть сделаны, «гипотезой острого угла», «гипотезой прямого угла» и «гипотезой тупого угла». Саккери доказывает далее, что при гипотезе тупого угла сумма углов всякого треугольника больше двух прямых, при гипотезе прямого угла она равна двум прямым, при гипотезе острого угла она меньше двух прямых. Далее доказывается, что гипотеза прямого угла эквивалентна постулату Евклида; чтобы доказать постулат, нужно, следовательно, опровергнуть две другие гипотезы. Но если принять гипотезу тупого угла, то прямые $A'B'$ и AB сближаются по обе стороны прямой CC' и сближаются настолько быстро, что по обе стороны должно произойти пересечение (Саккери это доказывает вполне строго); а так как две прямые не могут пересекаться в двух точках, то гипотеза тупого угла падает. Остается опровергнуть гипотезу острого угла. Этой гипотезе Саккери посвящает обширное исследование, занимающее около 80 страниц. Саккери показывает, что при гипотезе острого угла две непересекающиеся прямые, расположенные в одной плоскости, либо имеют общий перпендикуляр, от которого они расходятся, бесконечно удаляясь друг от друга в обе стороны, либо бесконечно удаляются друг от друга в одну сторону и неопределенно сближаются в другую сторону. Чтобы это обнаружить, нужен ряд подготовительных рассуждений, которые Саккери проводит с безупречной строгостью. Он показывает при этом, что перпендикуляр к стороне острого угла (при гипотезе острого угла) сначала пересекает вторую сторону, а потом, по мере удаления от вершины, перестает ее пересекать; что при этом существует предельный — первый не пересе-

кающий — перпендикуляр и т. д. Словом, это — целая геометрическая система, соответствующая «гипотезе острого угла». Но эта тонкая нить безупречных рассуждений внезапно прерывается теоремой XXXIII, в которой Саккери заявляет: «Гипотеза острого угла совершенно ложна, ибо противоречит природе прямой линии». В чем же сказывается это противоречие? Рассматривая неограниченно сближающиеся прямые как пересекающиеся в бесконечно удаленной точке, Саккери приходит к заключению, что в этой бесконечно удаленной точке к обеим прямым можно было бы провести общий перпендикуляр, что «противно природе прямой линии». Человек, чрезвычайно тонко разбирающий доказательства Прокла, Насир-Эддина и Клавия, искусно вылавливающий глубоко сокрытую логическую ошибку, запутывается сам в элементарных рассуждениях, потому что он не имеет твердых оснований для суждения о том, в какой мере можно пользоваться бесконечно удаленными точками. При всей категоричности, с которой формулирована упомянутая выше XXXIII теорема, Саккери, очевидно, чувствует слабость этих рассуждений, ибо он заканчивает следующим примечанием:

> «На этом я мог бы спокойно остановиться, но я не хочу отказаться от попытки доказать, что эта упорная гипотеза острого угла, которую я вырвал уже с корнем, противоречит самой себе. Этому посвящены следующие теоремы настоящей книги».

Возвращаясь, таким образом, вновь к гипотезе острого угла, Саккери показывает, что геометрическое место точек в плоскости, удаленных на данное расстояние от данной прямой, представляет собой кривую линию («кривая равных расстояний» или «эквидистанта»). За этим следует подробный анализ этой кривой, совершенно правильный до тех пор, пока он не приступает к определению ее длины при помощи метода бесконечно малых. Здесь он вновь впадает в ошибку, которая заставляет его отвергнуть гипотезу острого угла. Но и здесь он кончает примечанием, указывающим, что и эти рассуждения его, в сущности, не удовлетворяли:

> «Не могу не указать здесь, — говорит он, — разницы между приведенными опровержениями обеих гипотез. При гипотезе тупого угла дело ясно, как свет божий... Между тем опровергнуть гипотезу острого угла мне не удается иначе, как доказав, что длина эквидистанты равна длине ее прямолинейного базиса» [1]).

---

[1]) В 1895 г. германские математики Ф. Энгель и П. Штекель выпустили первый том сочинения, очень важного для изучения истории неевклидовой гео-

Аналогичную постановку вопроса мы находим в сочинении математика и философа Генриха Ламберта «Теория параллельных линий», относящемся к 1776 г. [1]).

Ламберт рассматривает четырехугольник, имеющий три прямых угла. Относительно четвертого угла могут быть опять три гипотезы: либо это угол тупой, либо прямой, либо острый. Ламберт рассматривает каждую гипотезу отдельно и в некоторых отношениях он уходит значительно дальше Саккери.

Во-первых, Ламберт указывает, что гипотеза тупого угла оправдывается на сфере, если присвоить окружностям большого круга роль прямых линий: так как окружности эти имеют по две общие точки, то предложение, при помощи которого эта гипотеза отвергается на плоскости, здесь не находит себе применения.

Во-вторых, он ведет гипотезу острого угла еще дальше, нежели Саккери; он знает, например, что при этой гипотезе площадь треугольника должна быть пропорциональна разности между $2d$ и суммой его углов. Стройность умозаключений, к которым ведет гипотеза острого угла, и в особенности упомянутый сейчас факт наводят его даже на следующее размышление:

> «Я склонен даже думать, что третья гипотеза справедлива на какой-нибудь мнимой сфере. Должна же быть причина, вследствие которой она на плоскости далеко не поддается опровержению, как это легко может быть сделано со второй гипотезой».

Гениальные люди часто предвидят истину! Слова Ламберта оправдались ровно через сто лет.

В третьих, наиболее важная заслуга Ламберта заключается в том, что он не впал в заблуждение и не признал достаточным ни одного доказательства, опровергающего гипотезу острого угла.

> «Доказательства евклидова постулата, — говорит он, — могут быть доведены столь далеко, что остается, повидимому, ничтожная

метрии; оно носит название «Собрание первоисточников по предъистории неевклидовой геометрии»: F. Engel und P. Stäckel—Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, Leipzig, 1895. В этом сочинении воспроизведены все материалы по неевклидовой геометрии, появившиеся в печати до сочинений Лобачевского. В нем помещен и немецкий перевод той части сочинения Саккери, которая относится к теории параллельных линий.

[1]) Johann Heinrich Lambert жил от 1728 по 1777 г. Он написал ряд выдающихся сочинений по физике, логике и теории познания. Сочинение «Theorie der Parallellinien» было опубликовано в 1786 г. после смерти автора.

J. H. Lambert — Theorie der Parallellinien. Magazin für die reine und angewandte Mathematik, Leipzig, 1786; помещено также в книге Энгеля и Штеккеля на стр. 152—207.

мелочь. Но при тщательном анализе оказывается, что в этой кажущейся мелочи и заключается вся суть вопроса; обыкновенно она содержит либо доказываемое предложение, либо равносильный ему постулат».

В другом месте Ламберт восклицает:

«В этом есть нечто восхитительное, что вызывает даже желание, чтобы третья гипотеза была справедлива.

И все же я желал бы, несмотря на это преимущество [1]), чтобы это было не так, потому что это было бы сопряжено с целым рядом других неудобств. Тригонометрические таблицы стали бы бесконечно пространными; подобие и пропорциональность фигур не существовали бы вовсе; ни одна фигура не могла бы быть представлена иначе, как в абсолютной своей величине, и астрономии пришлось бы плохо...»

Указывая ряд абсурдов, с точки зрения наших представлений, к которым приводит гипотеза острого угла, Ламберт замечает, что все это не дает логического доказательства, что все это, как он выражается, «argumenta ab amore ac invidia ducta» [2]), аргументы, которым не может быть места в геометрии. Как и профессор Кестнер, много занимавшийся теорией параллельных линий, — быть может, лучший знаток этого вопроса в XVIII в., как и ученик последнего, Клюгель, Ламберт приходит к твердому выводу, что все попытки доказать пятый постулат Евклида не привели ни к чему.

---

[1]) Существование абсолютной меры длины.

[2]) «Аргументы, вызываемые любовью и недоброжелательством».

ИСТОРИКО-БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ О СОЧИНЕНИИ «ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ»

Сочинение «Геометрические исследования по теории параллельных линий» было опубликовано Лобачевским в 1840 г. на немецком языке под заглавием «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien». Оно было выпущено в свет отдельной брошюрой издательством Г. Финке (G. Fincke) в Берлине; оригинальное издание содержит 61 страницу текста и два титульных листа. Брошюра напечатана в формате малой октавы готическим немецким шрифтом; к ней приложены две таблицы чертежей. В том же 1840 г. в немецком библиографическом издании «Gersdorfs Repertorium» [1]) была помещена рецензия на «Геометрические исследования», которую Гаусс справедливо назвал весьма нелепой.

В 1887 г. сочинение было переиздано Берлинской фирмой Mayer und Müller автотипическим путем, фотографически воспроизводящим первое оригинальное издание (факсимиле). Насколько нам известно, в пределах СССР экземпляр оригинального издания 1840 г. имеется только в библиотеке Всесоюзной академии наук.

Издание в общем выполнено очень тщательно, но некоторые опечатки все-таки проскользнули, в том числе и в формулах.

Было бы очень интересно установить, каким образом это сочинение казанского профессора, имя которого в Германии в ту пору совершенно не было известно, попало в небольшое берлинское издательство Финке и было принято им к печати, несмотря на то, что характер сочинения (если издательство отдавало себе в этом отчет) не обещал сколько-нибудь значительного сбыта. Этим вопросом впервые занимался проф. Ф. Энгель, выпустивший на немецком языке перевод двух больших сочинений Лобачевского («О началах геометрии» и «Новые начала») и его биографию [2]). Энгель приходит к заключению, что передача «Geometrische Untersuchungen» издательству Финке была произведена Эрнстом Кнорром, занимавшим с 1832 по 1846 г. кафедру физики

---

[1]) Repertorium der gesammten deutschen Literatur. Herausgegeben von E. Gersdorf. Leipzig, 1840, 8, стр. 147.

[2]) F. Engel—Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij. Zwei geometrische Abhandlungen, aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie

в Казанском университете [1]). Конценция, которая приводит Энгеля к этому заключению, носит весьма своеобразный характер. В переписке Гаусса с друзьями помещено его письмо к известному астроному Энке от 1 февраля 1841 г., которое мы здесь воспроизводим в переводе.

> «Я начинаю довольно успешно читать по-русски и нахожу в этом большое удовольствие. Г. *Кнорре* [2]) прислал мне небольшой мемуар Лобачевского (в Казани), написанный по-русски, и как этот мемуар, так и небольшая книжка о параллельных линиях на немецком языке (о ней появилась весьма нелепая заметка в «Реперториуме» Гердорфа) возбудили во мне желание узнать больше об этом остроумном (scharfsinnigen) математике. Как мне *сказал* [2]) Кнорре, в напечатанных на русском языке «Записках Казанского университета» имеется много его работ».

К. Ф. Кнорре (K. F. Knorre, 1801—1833) был астрономом, работавшим сначала при Дерптской морской школе, а с 1821 г. — при Николаевской астрономической обсерватории. Соображения Энгеля начинаются с того, что Гаусс назвал астронома *Кнорре* ошибочно, смешав его с профессором физики Казанского университета *Эрнстом Кнорром*. Энгель считает невероятным, чтобы астроном Кнорре прислал Гауссу мемуары Лобачевского из Николаева; между тем Эрнст Кнорр именно в 1840 г. путешествовал по Германии и мог переслать Гауссу брошюру Лобачевского. Повидимому, это было отдельное издание мемуара «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам». Этот же Э. Кнорр мог также, по мнению Энгеля, передать издательству Финке рукопись «Geometrische Untersuchungen» и при своих прежних берлинских связях мог добиться ее напечатания.

Строго говоря, в пользу этого предположения говорит только одно слово в последних строках письма Гаусса к Энке, именно слово «*сказал*»; дело в том, что астроном Кнорре в те годы в Германии не был и, следовательно, «сказать» что-либо Гауссу устно о работах Лобачевского не мог. Между тем Э. Кнорр, по свидетельству его сына, был с Лобачевским в Казани в хороших отношениях и именно в 1840 г. путешествовал по Германии.

---

des Verfassers. I Teil: Die Übersetzung; II Teil: Anmerkungen. Lobatschefskijs Leben und Schriften. Стр. 398, 400, 432, 437, Leipzig, 1898—1899. (Сочинение входит в состав издания: «Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie», herausgegeben von F. Engel und P. Stäckel, Band I.)

[1]) Ernst Knorr (1805—1879), получив образование в Берлине, состоял ассистентом при А. Гумбольдте и, повидимому, по его рекомендации был в 1832 г. приглашен профессором в Казанский университет; в 1846 г. по состоянию здоровья был переведен в Киевский университет.

[2]) Курсив наш. *В. К.*

Вся эта концепция представляется нам мало убедительной. Гаусс, вероятно, находился с астрономом Кнорре в переписке, и трудно думать, чтобы он смешал знакомого ему астронома с мало известным Э. Кнорром. Нет ничего невозможного в том, что Гаусс просил Кнорре выслать ему работы Лобачевского, и последний переслал ему мемуар, который Гаусс и получил. Ведь переписывался же Гаусс с другим астрономом В. Струве, при посредстве которого он получил другие сочинения Лобачевского. Очень легко допустить, что один из мемуаров ему ранее прислал Кнорре. Странно звучит, конечно, слово «сказал»; но не менее странно звучало бы и слово «прислал» в первых строках письма, если бы оно относилось к Э. Кнорру: по предположению Энгеля, Кнорр лично посетил Гаусса, и было бы естественно думать, что он лично же передал бы Гауссу мемуар Лобачевского. Очень возможно, что слово «сказал» неосторожно употреблено Гауссом вместо «сообщил».

У нас, со своей стороны, имеется другое предположение. Дело в том, что в Казани с 1809 по 1814 г. состоял профессором права И. А. Финке [1]). В 1814 г. И. А. Финке скончался, но семья его осталась в Казани: его дочь вышла замуж за профессора Э. И. Эйхвальда (1825), а сын в 1824 г. поступил студентом в Казанский университет. Разыскать их след нам не удалось; но, по наведенным справкам, Финке — мало распространенная в Германии фамилия; не лишено некоторой вероятности, что профессор Финке находился в родстве с берлинским издателем К. Финке и что через членов его семьи было организовано издание «Geometrische Untersuchungen». К сожалению, разыскать преемников издательства не удалось ни Энгелю, ни нам.

В 1866 г., вскоре после опубликования известной переписки Гаусса, обратившей внимание математического мира на сочинения Лобачевского, французский геометр Гуэль (Guillaume Jules Hoüel) перевел «Geometrische Untersuchungen» на французский язык и опубликовал перевод в «Известиях общества физических и естественных наук г. Бордо», а затем известное издательство Gauthier-Villars в Париже выпустило его в свет отдельным изданием под названием «Études géométriques sur la théorie des parallèles» [2]). В приложениях даны выдержки из переписки Гаусса с Шумахером.

---

[1]) Johann Christoph Fincke (в Казани называл себя «Иван Арнольдович»), 1773—1814 гг.

[2]) N. J. Lobatschewsky — Études géométriques sur la théorie des parallèles, suivis d'un extrait de la correspondance de Gauss et de Schumacher. Traduit par G. J. Hoüel. Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 4, Bordeaux, 1866. Отдельное издание того же сочинения: Paris, Gauthier-Villars, 1866, 2 изд., 1895.

В 1895 г. этот французский перевод был переиздан той же фирмой.

В 1891 г. американский профессор Гальстед (G. B. Halsted), занимавший кафедру математики в Техасском университете, перевел «Geometrische Untersuchungen» на английский язык, а Техасский университет выпустил этот перевод в свет под названием «Geometrical Researches on the Theory of Parallels» (Austin, 1891). В том же 1891 г. Техасским же университетом было выпущено второе издание этого перевода, а в 1892 г. им были выпущены еще два издания, третье и четвертое, из которых последнее было целиком отослано в Японию. В 1914 г. этот же перевод был переиздан в Чикаго (Open Court).

В 1868 г. в III томе журнала «Математический Сборник» появилась статья «О теории параллельных линий Н. И. Лобачевского». Автор, подписавшийся А. Л-ов, в нескольких словах говорит о попытках доказательства евклидова постулата и о выявившемся после опубликования писем Гаусса значении трудов Н. И. Лобачевского. Эта небольшая статья представляет несомненный интерес как первое очень осторожное признание работ Н. И. Лобачевского в России. За собственным текстом автора следует «Извлечение из переписки Гаусса с Шумахером» и перевод «Geometrische Untersuchungen» под заглавием «Геометрические изыскания о теории параллельных линий». Перевод выполнен тщательно, в настоящее время несколько устарел; повидимому, он сделан не с оригинала, а с французского перевода Гуэля. Вся статья помещена во втором отделе журнала, в котором печаталась различного рода научная хроника; автор предназначает ее, главным образом, для преподавателей математики, которым она, конечно, не могла быть доступной. На всем тексте автора лежит печать сугубой осторожности в оценке трудов Н. И. Лобачевского. Все это привело к тому, что статья осталась совершенно незамеченной; она не указана ни в одном из библиографических справочников по неевклидовой геометрии. Лишь в последнее время ее обнаружил проф. М. Я. Выгодский. Его предположение, что статья принадлежит профессору А. В. Летникову, подтвердилось: она указана в списке трудов А. В. Летникова в Энциклопедии Брокгауза и Эфрона.

В 1886 г. Казанским университетом издан второй том «Полного собрания сочинений по геометрии» Н. И. Лобачевского. Этот том содержит сочинения, опубликованные Лобачевским на иностранных языках. Он начинается сочинением «Geometrische Untersuchungen». Сочинение напечатано готическим немецким шрифтом, но содержит значительное число опечаток и мелких отступлений от точного текста оригинала.

Настоящее изданіе содержитъ выполненный проф. В. Ф. Каганомъ русскій переводъ этого сочиненія съ пояснительными примѣчаніями. Чертежи, нѣсколько увеличенные, помѣщены для удобства чтенія въ самомъ текстѣ.

Переводъ классическихъ произведеній всегда представляетъ значительныя трудности; здѣсь эти затрудненія усиливаются вслѣдствіе того, что терминологія предмета еще и по настоящее время не вполнѣ выработана и самый нѣмецкій текстъ Лобачевскаго мѣстами не вполнѣ безукоризненный. Мы предпочитали иногда пожертвовать чистотой стиля въ пользу возможно болѣе точнаго воспроизведенія фразеологіи автора.

КАЗАНСКІЙ

ВѢСТНИКЪ,

ИЗДАВАЕМЫЙ

ПРИ

ИМПЕРАТОРСКОМЪ

КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

ЧАСТЬ ДВАДЦАТЬ ПЯТАЯ.

КНИЖКА I.

МѢСЯЦЪ ГЕНВАРЬ

1829

Печатано въ Университетской Типографіи.

Титульный лист первой книжки журнала „Казанский вестник" за 1829 г.

К стр. 177

О НАЧАЛАХ ГЕОМЕТРИИ

1829

ВВОДНАЯ СТАТЬЯ И КОММЕНТАРИИ
А.Н.КОТЕЛЬНИКОВА

О НАЧАЛАХ ГЕОМЕТРИИ.

Вводная статья:

Обзор сочинения «О началах геометрии» 179
Н. И. Лобачевский — «О началах геометрии» 185
Примечания 262

Приложения:

1. Отзывы современников о сочинении «О началах геометрии» . . . 406
2. Протоколы конференции Российской Академии Наук о работе Лобачевского «О началах геометрии» 410
3. Историко-библиографические сведения о сочинении «О началах геометрии» 411

ОБЗОР СОЧИНЕНИЯ «О НАЧАЛАХ ГЕОМЕТРИИ»

В работе «О началах геометрии» Лобачевским намечены все те темы, которым были посвящены все последующие его геометрические работы; в дальнейших сочинениях эти темы нашли более полное развитие, а иногда и более простое изложение.

Сочинение «О началах геометрии» можно разделить на три части.

В первой части, представляющей собой извлечение из «Exposition succincte», устанавливаются основные геометрические понятия, налагаются свойства треугольников, теория параллельных и выводятся тригонометрические формулы. Весь этот обширный материал изложен очень кратко, в подавляющем большинстве случаев почти без всяких доказательств, и первая часть имеет характер краткого конспекта. «Изложение всех моих исследований в надлежащей связи потребовало бы слишком много места и представления в совершенно новом виде всей науки», — пишет Лобачевский. И действительно, план, набросанный в первой части, совершенно не соответствует тому порядку, которому следуют обычно при изложении начал геометрии.

Сначала вводится понятие о геометрическом теле, поверхности, линии и точке, причем за исходное единственное геометрическое свойство тела принимается прикосновение. Далее вводится расстояние между двумя точками, понятия о сфере и окружности предшествуют понятиям о плоскости и прямой линии. Одновременно рассматриваются углы линейные, плоскостные (двугранные) и телесные, и определяются все виды правильных многогранников.

Установив основные понятия, Лобачевский перечисляет свойства прямолинейных и сферических треугольников и далее пишет:

> «...сумма углов прямолинейного треугольника не может быть $> \pi$. Остается предполагать эту сумму $= \pi$ или $< \pi$. То и другое может быть принято без всякого противоречия в последствии, от чего и происходят две Геометрии — одна, *употребительная* доныне по своей простоте, соглашается со всеми измерениями на самом деле; другая, *воображаемая*, более общая...» [1]).

[1]) Стр. 194.

После этого перечисляются основные свойства параллельных в воображаемой геометрии, вводится угол параллельности и понятие о предельной линии и поверхности, в которые обращаются окружность и сфера, когда их центр удаляется в бесконечность. «Геометрия на предельной сфере совершенно та же, в каком виде мы ее знаем на плоскости» [1]), — утверждает Лобачевский без всякого доказательства.

Пользуясь этим свойством предельной поверхности, Лобачевский, при помощи соотношений между углами прямоугольного треугольника и углами параллельности, соответствующими его сторонам [формулы (3), (4), (5)], выводит основную формулу «воображаемой геометрии»

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x},$$

определяющую связь между длиной отрезка и отвечающим ему углом параллельности [2]). Эта последняя вместе с предыдущими формулами дает возможность получить тригонометрические соотношения для прямоугольного, а затем и косоугольного прямолинейного треугольника. Выводом тригонометрических формул и заканчивается первая часть, — извлечение из «Exposition succincte des principes de la Géométrie...».

Лобачевского, конечно, очень интересовал вопрос, насколько его «воображаемая геометрия» отражает геометрические соотношения нашего физического пространства, и, переходя ко второй части своей работы, он показывает, пользуясь параллаксами неподвижных звезд, что

> «...все линии, которые подлежат нашему измерению, даже расстояния между небесными телами, столько малы в сравнении с линией, принятою в теории за единицу, что употребительные до сих пор уравнения прямолинейной Тригонометрии без чувствительной погрешности должны быть справедливы...» [3]).
>
> «...Как бы то ни было, — заканчивает Лобачевский свое натурфилософское отступление, — новая Геометрия, основание которой уже здесь положено, если и не существует в природе, тем не менее может существовать в нашем воображении, и, оставаясь без употребления для измерений на самом деле, открывает новое, обширное поле для взаимных применений Геометрии и Аналитики» [4]).

Приложения воображаемой геометрии к анализу и интегральному исчислению привлекали особенное внимание Лобачевского. Им он посвятил некоторые из своих работ и вторую и третью части «Начал

---

[1]) Стр. 196.

[2]) Формула (12) на стр. 205.

[3]) Стр. 207.

[4]) Стр. 209—210.

геометрии». При этом он пользуется в большинстве случаев ортогональными системами координат — сферическими координатами или координатами, которые представляют обобщение для «воображаемой геометрии» координат Декарта и которые мы будем называть «координатами Лобачевского».

Во второй части Лобачевский сначала выводит уравнения прямой, окружности и предельной линии и вычисляет длину прямолинейного отрезка, дуги окружности и предельной линии. Он дает также общие выражения для элемента дуги в полярных (37) и в своих (34) координатах и проверяет их на выведенных раньше формулах.

Затем Лобачевский переходит к вычислению площадей сначала плоских фигур, ограниченных прямыми, дугами окружностей или предельными линиями, и дает выражение элемента площади, разбивая ее или прямыми, выходящими из одной точки (40), или прямыми, перпендикулярными к оси x (39), или прямыми, параллельными оси y (41), (42), (43). Пользуясь той или иной из этих формул, он получает различные выражения для одной и той же площади.

При вычислении площади кривой поверхности Лобачевский дает общее выражение элемента площади в своих координатах (44) и с помощью его вычисляет поверхность вырезка[1]) сферы, предельной поверхности между плоскостями, перпендикулярными к радиусу сферы или к оси предельной поверхности, и боковой поверхности конуса. Для вычисления поверхности сферы он пользуется также сферическими координатами, и сравнение величины поверхности сферы, вычисленной при помощи его координат и координат сферических, приводит к значению некоторых новых определенных интегралов (46), (47).

Переходя к вычислению объема, Лобачевский сначала вычисляет объем тела, ограниченного двумя предельными поверхностями, выгнутыми в одну сторону, с общими осями, и боковой поверхностью конуса, образующими которого служат общие оси предельных поверхностей (49). Пользуясь частным случаем полученной формулы ($c = \infty$), он вычисляет объем прямого круглого конуса, имеющего конечную высоту (55), и конуса с бесконечно большой высотой, образующие которого параллельны высоте (53), объем шара (56), конического вырезка шара, сегмента шара и тела, ограниченного предельной поверхностью, и дает общее выражение объема тела вращения (57).

Далее Лобачевский дает выражение элемента объема, все три измерения которого бесконечно малы, в своих координатах (59) и в координатах сферических (61) и очень подробно останавливается на вычислении объема трехгранной пирамиды, основанием которой служит

[1]) «Вырезком» сферы Лобачевский называет часть ее поверхности, ограниченной двумя большими кругами.

прямоугольный треугольник, а высотой — перпендикуляр, восставленный в вершине острого угла.

Если разделим такую пирамиду плоскостями, проходящими через ее высоту, то получим для ее объема формулу (63). Меняя переменную интегрирования, Лобачевский из (63) выводит три различных выражения для объема пирамиды: (67), (70) и (71).

Особенно отмечает Лобачевский тот случай, когда высота такой пирамиды делается бесконечно большой и ребра ее становятся параллельными с перпендикуляром, восставленным в вершине острого угла основания. Рассекая такую пирамиду плоскостями на элементарные пирамиды различным образом, мы получаем несколько различных выражений для ее объема: (72), (73), (74) и (75), которые, конечно, должны быть все равны между собой.

Далее Лобачевский замечает, что всякую пирамиду с конечной высотой можно составить через сложение и вычитание таких пирамид, о которых только что была речь, и таким образом интегралы (73) и (75) могут служить элементами для вычисления объема всякой пирамиды. Так, например, объем пирамиды P, определяемый по формуле (63), можно представить посредством объемов четырех бесконечных пирамид, и, следовательно, интеграл (63) и различные его видоизменения (67), (70), (71) можно разложить на сумму четырех интегралов (80) или (81). Подобным же образом бесконечную пирамиду, у которой основанием служит четырехугольник с тремя прямыми углами, одно ребро перпендикулярно к основанию в вершине прямого угла, противолежащего острому, а прочие ребра с ним параллельны, можно разбить на две подобные же пирамиды с треугольными основаниями и таким образом получить равенства (82), (84), (85) и (86)

Чтобы дать еще пример на вычисление и преобразование определенных интегралов, в конце второй части Лобачевский снова, другим способом, вычисляет объем прямого конуса и пирамиды и, сравнивая их новые выражения с вычисленными прежде (53) и (55), получает значение двух определенных интегралов [см. формулы (88), (89) и не отмеченные номером на стр. 249]. Наконец, вычисляется объем пирамиды с конечной высотой, в основании которой находится четырехугольник с тремя прямыми углами.

Рассматривая эту вторую часть, мы видим, что у Лобачевского основная идея приложений «воображаемой геометрии» заключается в преобразовании и вычислении определенных интегралов при помощи следующего метода: пользуясь геометрическими образами своей «воображаемой геометрии», отличными от образов «употребительной геометрии», Лобачевский вычисляет площадь какой-либо фигуры или объем какого-либо тела различными способами или разбивая их различным образом на элементы, или употребляя различные системы координат,

или разлагая фигуру или тело на другие более простые фигуры и тела. Имея, таким образом, для одного и того же объема или одной и той же площади различные выражения и сравнивая их, он получает преобразование одного интеграла в другой, или получает для интеграла конечное выражение, или разложение одного определенного интеграла на сумму нескольких других более элементарных.

В третьей части сочинения Лобачевский сопоставляет некоторые наиболее интересные из полученных им во второй части формул и обращает внимание читателя на большую роль, которую в вычислении объема пирамид играет интеграл

$$\mathrm{L}(x,\omega) = \int_0^x \frac{x\,dx}{e^x + e^{-x} - 2\cos\omega}.$$

Он рассматривает некоторые свойства этого интеграла и доказывает связь его с другим элементарным интегралом:

$$\Phi(x) = -\int_0^x \log\cos x\,dx$$

[равенство (95)], и этот последний разлагает в тригонометрический ряд.

Разлагая объем пирамиды конечной высоты (формула 67, или 70, или 71) на объемы четырех бесконечных пирамид, мы получаем формулы (97), (98), (99). Сравнение же выражений (67), (70) и (71) для одного и того же объема дает формулы (100) и (101). Конец сочинения посвящен преобразованию интеграла (88).

В заключении Лобачевский замечает, что уравнения (17) его «воображаемой геометрии» «переменяются в [уравнения] (20) оферической Тригонометрии, как скоро вместо боков a, b, c ставим $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$» и потому в уравнениях (17) не может заключаться никакого противоречия; «следовательно, — пишет далее Лобачевский, — обыкновенная Геометрия, Тригонометрия и эта новая Геометрия всегда будут согласны между собой». Этим и обусловливается возможность использовать геометрические образы «воображаемой геометрии» для вычисления определенных интегралов, «к познанию которых одной Аналитике без пособия Геометрии трудно было бы проложить дорогу».

Затрагивая в заключительных словах вопросы механики, Лобачевский предполагает, что «силы, измеряемые всегда скоростью», в воображаемой геометрии будут подчинены «другому закону в соединении, нежели принятому сложению их».

О НАЧАЛАХЪ ГЕОМЕТРІИ (*).

(*Г. Лобачевскаго.*)

Кажется, трудность понятій увеличивается по мѣрѣ ихъ приближенія къ начальнымъ истинамъ въ природѣ; также какъ она возрастаетъ въ другомъ направленіи, къ той границѣ, куда стремится умъ за новыми познаніями. Вотъ почему трудности въ Геометріи должны принадлежать, вопервыхъ, самому предмету. Далѣе, средства, къ которымъ надобно прибѣгнуть, чтобы достигнуть здѣсь послѣдней строгости, едва ли могутъ отвѣчать цѣли и простотѣ сего ученія. Тѣ, которые хотѣли удовлетворить симъ требованіямъ, заключили себя въ такой тѣсной кругъ, что всѣ усилія ихъ не могли быть вознаграждены успѣхомъ. Наконецъ скажемъ и то, что со времени Ньютона и Декарта, вся Математика, сдѣлавшись Аналитикой, пошла столь быстрыми шагами впередъ, что оставила далеко за собой то ученіе, безъ котораго могла уже об-

(*) Извлечено самимъ Сочинителемъ изъ разсужденія, подъ названіемъ: *Exposition succincte des principes de la Géometrie etc.*, читаннаго имъ въ засѣданіи Отдѣленія физико-Математическихъ наукъ, 12 Февраля 1826 года.

Первая страница сочинения „О началах геометрии“ (стр. 178 журнала „Казанский вестник“, кн. 2—3 за 1829 г.)

К стр. 185

КАЗАНСКІЙ ВѢСТНИКЪ.

ФЕВРАЛЬ и МАРТЪ

О НАЧАЛАХ ГЕОМЕТРІИ*

1829 II—III 178 Кажется, трудность понятий увеличивается по мере их приближения к начальным истинам в природе; так же, как она возрастает в другом направлении, к той границе, куда стремится ум за новыми познаниями. Вот почему трудности в Геометрии должны принадлежать, во-первых, самому предмету. Далее, средства, к которым надобно прибегнуть, чтобы достигнуть здесь последней строгости, едва ли могут отвечать цели и простоте сего учения. Те, которые хотели удовлетворить сим требованиям, заключили себя в такой тесный круг, что все усилия их не могли быть вознаграждены успехом. Наконец, скажем и то, что со времени Ньютона и Декарта, вся Математика, сделавшись Аналитикой, пошла столь быстрыми шагами вперед, что оставила далеко
179 за собой то учение, без которого могла уже об|ходиться и которое с тем вместе перестало обращать на себя внимание, какое прежде заслуживало. Евклидовы начала, таким образом, несмотря на глубокую древность их, несмотря на все блистательные успехи наши в Математике, сохранили до сих пор первобытные свои недостатки.

В самом деле, кто не согласится, что никакая Математическая наука не должна бы начинаться с таких темных понятий, с каких, повторяя Евклида, начинаем мы Геометрию, и что нигде в Математике нельзя терпеть такого недостатка строгости, какой принуждены были допустить в теории параллельных линий. Правда, что против ложных заключений от неясности первых и общих понятий в Геометрии предостерегает нас представление самых

---

* Извлечено самим Сочинителем из рассуждения, под названием: *Exposition succincte des principes de la Géométrie etc.*, читанного им в заседании Отделения Физико-Математических Наук, 12 февраля 1826 года. [*Примечание Лобачевского.*]

предметов в нашем воображении, а в справедливости принятых истин без доказательства убеждаемся простотою их и опытом, например астрономическими наблюдениями; однако и все это нисколько не может удовлетворить ум, приученный к строгому суждению. К тому и не в праве пренебрегать решением вопроса, покуда оно неизвестно и покуда не знаем, не послужит ли оно еще к чему другому.

180 | Здесь намерен я изъяснить, каким образом думаю пополнить такие пропуски в Геометрии. Изложение всех моих исследований в надлежащей связи потребовало бы слишком много места и представления совершенно в новом виде всей науки. О прочих недостатках Геометрии, менее важных по затруднению, не почитаю нужным говорить подробно. Ограничусь одним только замечанием, что они относятся к способу преподавания. Никто не помышляет отделить то, что исключительно принадлежит Геометрии, от того, где наука сия становится уже другою, т. е. Аналитикой.

Первые понятия, с которых начинается какая-нибудь наука, должны быть ясны и приведены к самому меньшему числу. Тогда только они могут служить прочным и достаточным основанием учения. Такие понятия приобретаются чувствами врожденным — не должно верить.

Ничего не может быть простее того понятия, которое служит основанием Арифметике. Мы познаем легко, что все в природе
191 подлежит измерению, все может быть сосчитано. | Не таковы положения Механики: человек с помощью одних ежедневных своих опытов не мог бы придти к ним. Вечность и одинаковость раз сообщенного движения, где скорость служит мерою оного [1], и массы различных тел — такого рода истины, которые требовали времени, пособия других познаний и ожидали гения *.

* После этих общих соображений Лобачевский переходит к обоснованиям начал геометрии. Это выполнено чрезвычайно конспективно. Гораздо обстоятельнее это построение начал геометрии изложено в сочинении «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных». Поэтому здесь редактором издания сделано только небольшое число примечаний — пояснений, которые нельзя опустить. Комментарий к схеме построения геометрии, которую предлагает Лобачевский, читатель найдет в «Новых началах». Существенно новый материал начинается со стр. 194 (настоящего издания).

Между свойствами, общими всем телам, одно должно назваться *Геометрическим*,— прикосновение. Словами нельзя передать совершенно того, что мы под этим разумеем: понятие приобретено чувствами, преимущественно зрением, и сими-то чувствами мы его постигаем. Прикосновение составляет отличительное свойство тел: ни в силах или времени и нигде в природе более его не находим. Отвлекая все прочие свойства, телу дают название — *Геометрического*.

Прикосновение соединяет два тела в одно. Так все тела представляем частью одного—*пространства*. Тело *ограничено*, когда прикосновение к нему другого — *окружающего* — делает невозможным прикосновение всякого третьего. Это второе будет *окружающим*
182 *пространством*, если оно с первым состав|ляет целое пространство. Пустота, занимаемая телом внутри пространства, называется *местом*. Два тела *одинаковы*, если каждое, без всякой перемены, *наполняет место*, т. е. дополняет пространство. Они *равны* только, если наполнение места одного требует в другом разделения на части и соединения сих частей в новом порядке [2].

Воображаемое разделение тела на две части будем называть *сечением*. Каждая из двух частей служит для назначения *стороны* сечения.

Геометрические свойства тел познаем в различном делении их на части. Они служат основанием Геометрии и заключаются в следующем.

I. Всякое тело может быть разделено на части, которые не касаются через одну. Такие сечения назовем *поступательными*; *число их не ограничено*.

II. Всякое тело может быть разделено на части, которые все касаются взаимно, и которых число с каждым новым сечением увеличивается двумя. Такие сечения назовем *обращательными*; число их не ограничено.

183 | III. Всякое тело может быть разделено тремя сечениями на 8 частей, которые все касаются взаимно; но далее невозможно уже новым сечением удваивать число частей. Такие сечения назовем *тремя главными* [3].

Обращательные сечения могут увеличивать число частей и одним только. Это будет тогда, когда недостающее число частей

пополняется присоединением нового тела и продолжением сюда *сечений*; так что признак обращательных сечений будет собственно не число частей, но взаимное прикосновение их. Однако и этого одного недостаточно. Надобно, чтобы поступательные сечения к обоим обращательным в тех двух долях тела, которые находятся на противоположных сторонах, всегда отделяли части в одной, неприкосновенные к другой.

Подобное замечание относится и к трем главным сечениям, из которых каждые два бывают вместе обращательными, и чего уже довольно, чтоб они были главными.

Поступательные сечения к трем главным назначают в теле его *три протяжения*.

184 | *Измерять* тело значит исчислять одинаковые части, на которые разделяется это тело и другое, принятое за меру, в трех протяжениях поступательными сечениями.

Соединение двух тел в одно будет вместе сечением в этом одном. Смотря по тому, прикосновение принадлежит одному только, или нескольким обращательным, или трем главным сечениям, оно будет *поверхностное*, *линейное*, *в точке*. Воображаем тело разделенным тремя главными сечениями на восемь частей, которые бы от других сечений происходить не могли. В таком случае с первым сечением получим поверхностное прикосновение двух частей. Вторым сечением произведем две части, которые, находясь на противоположных сторонах обоих сечений, касаются линейно. С третьим сечением происходят две части, которые, находясь на противоположных сторонах всех трех сечений, касаются в точке.

Тело получает название *поверхности*, когда оно касается другого поверхностно и когда принимают в рассуждение только взаимное прикосновение сих двух тел; а потому дозволяют отбрасывать все части одного, неприкосновенные к другому. Так уни-
185 чтожается | одно из трех протяжений, и так отделением ненужных частей поверхности доходим до тонкости листа бумаги или как далеко может идти воображение.

Два тела, которых прикосновение здесь рассматривается, будут две стороны поверхности.

Линией называется тело, которое касается линейно другого, и от которого дозволяют отбрасывать части, неприкосновенные

к этому другому. Так доходим до тонкости волоса, черты от пера на бумаге и пр. С обращением тела в линию уничтожается два протяжения, потому что линию образуют в пространстве два сечения, к которым поступательные отделяют одни излишние части.

Тело получает название *точки*, когда рассматривают его прикосновение к другому в точке, а потому дозволяют отбрасывать части первого, неприкосновенные к другому. Так можно доходить до малости песчинки или точки от острея пера на бумаге.

Точка образуется тремя главными сечениями в пространстве,
186 к которым поступатель|ные отделяют одни лишние части: следовательно в точке нет ни одного протяжения.

В поверхности, линии и точке обращают внимание только на прикосновение двух тел. Это значит, допускают все изменения в одном, которые бы не лишали части другого их прикосновения и не придавали бы новых частей, прикосновенных к другому. Вот почему при измерении поверхностей и линий дозволяется все поступательные сечения, которыми назначают протяжения, заменять их обращательными. Отсюда следует, что линия не изменяет величины поверхности, а точка — линии. Отсюда также видно, что линия должна принадлежать всей системе обращательных сечений, а потому для образования линии необходимы две поверхности, о которых говорят, что они *пересекаются в линии*. Каждая из сих поверхностей разделяется линией на две части, которые будут двумя сторонами линии.

Точка принадлежит не только трем главным сечениям, но и всем с ними обращательным; а потому для образования точки необходимы две линии, о которых говорят, что они *пересекаются*
187 *в точке*. Каждая линия разделяется | точкой на две части, которые служат для назначения двух сторон точки.

Точка не имеет величины, будучи без протяжения, а потому и не допуская измерения.

Когда два тела A, B касаются каждое третьего C в точке, тогда относительное положение двух точек или так называемое *расстояние* их друг от друга, всякий раз будет определено, как скоро A и B соединены телом D, неприкосновенным к C, хотя бы при этом в A, B, D происходили перемены отделением, или присоединением новых частей, неприкосновенных к C, или те

изменения в A и B, которые дозволяются в сем роде прикосновения A, B с C. Так, циркуль служит для назначения расстояний.

1829, IV 228 || С такими понятиями о пространстве и способе измерять его протяжения, Геометрия может быть ведена со всею строгостию доказательств в том порядке, в каком здесь ниже излагается, и где, если не дается новых определений, названия разумеются уже принятые всеми.

Сферой называется поверхность, которой все точки от одной — *центра* — находятся в равном расстоянии. Это расстояние будет *полупоперечник* сферы. *Внутренняя* сторона сферы та, где ее центр; другая — *внешняя*.

Тело, ограниченное сферою, называется *шаром*, которого центр и полупоперечник то же, что и сферы.

229 | Шары и сферы одинаковы, когда их полупоперечники равны.

Одинаковые сферы *сливаются*, т. е. покрывают друг друга, когда центры их вместе, каково бы в прочем положение их ни было.

Напротив, у сфер одноцентрных при разных полупоперечниках не может быть ни одной общей точки. Такие сферы представляют поступательные сечения в пространстве. Полупоперечник той, которая помещается внутри другой, почитается менее. Это служит первым сравнением расстояний между собою.

Сфера ограничивает со всех сторон пространство, потому что другая, одноцентрная, находясь вне первой, присоединяет такой слой, который делает уже невозможным прикосновение всякого нового тела к шару первой.

Две сферы около разных центров, входя одна внутрь другой и выходя вон, разделяют пространство на четыре части: одна A 230 принадлежит внутренней стороне той и другой сферы, другая B — внешней обеих, третья C — внешней стороне одной и внутренней другой, а четвертая D — наоборот. Новые сферы около тех же центров будут отделять от A части, неприкосновенные к B, или обратно; так же от C неприкосновенные части к D, или обратно. Итак, пересечение двух сфер дает линию, которую называют *кругом*.

Посему две сферы, пересекаясь, представляют два главных или, что все равно, два обращательных сечения в пространстве. По той же причине три сферы, если пересекаются, представляют три главных сечения.

Плоскостью называется поверхность, в которой лежат все круги от пересечения одинаковых сфер около двух точек — *центров происхождения*. Плоскость может следовательно продолжаться неограниченно, с увеличением полупоперечников одинаковых сфер.

Круг, от пересечения одинаковых сфер, покрывает сам себя,
231 какою стороною и в каком бы положении ни накладывался, покуда центры сфер сохраняют свое место, или один ставится на место другого.

Внутри всякого круга на плоскости находится точка — *центр круга*, которой расстояния — *полупоперечники* — от всех точек круга одинаковы. Всем таким кругам, производящим плоскость, одна только точка может служить центром.

Прямая линия называется та, которая между двух точек сама себя покрывает во всех положениях. Такова в плоскости круга линия, которой точки остаются на месте, когда круг покрывает сам себя другою стороной.

Расстояние двух точек может быть определено прямой линией, по свойству которой всякое расстояние составляется из повторения другого и частей его.

Прямая линия лежит вся в плоскости, как скоро две ее точки на плоскости.

232 | Через три точки, не в прямой линии, можно провести одну только плоскость.

Всякая точка вне плоскости может быть принята за центр происхождения плоскости, и тогда на противоположной стороне находится другой соответствующий центр.

Две плоскости пересекаются в прямой линии.

Величина прямой линии определяется сравнением ее с другой.

Подобным образом определяется и величина дуги круга по сравнению ее с окружностью, которой дуга будет часть. Это содержание не зависит от величины полупоперечника, но от взаимного положения тех двух полупоперечников, которые проходят чрез концы дуги. Чтобы оставить на произвол, какая дуга принимается

за единицу, мы будем означать 2π окружность. Так выраженная дуга называется *линейным углом* или углом тех двух линий, которые, идя чрез концы дуги, встречаются в центре круга.

233 | Также будем означать 2π и сферу [4], определяя с нею сравнительно ее вырезки. Когда вырезок происходит от двух плоскостей, проведенных чрез центр, тогда величина его будет *плоскостной угол*; других же вырезков — *телесным углом*.

Плоскостной и телесный углы не зависят от полупоперечника сферы, но от взаимного положения плоскостей, которые идут от центра сферы. Плоскостной угол также не зависит от места, где будет центр сферы на линии пересечения двух плоскостей.

Плоскостной угол равен линейному между перпендикулами в плоскостях к линии пересечения сих последних, и проведенных к одной точке.

Чтобы линия была перпендикулом [к] плоскости, довольно, чтоб она была перпендикулярна к двум линиям в плоскости.

Сумма углов прямолинейного треугольника не может быть $> \pi$ [5]; напротив, сумма углов сферического треугольника всегда $> \pi$.

234 | Сумма двух углов сферического треугольника бывает вместе с суммою противоположных боков $> \pi$, $= \pi$, $< \pi$.

Если один катет в прямоугольном сферическом треугольнике $< \pi$, то другой вместе с противоположным углом $> \frac{\pi}{2}$, $= \frac{\pi}{2}$, $< \frac{\pi}{2}$.

В прямолинейном треугольнике против большего бока лежит угол более, и обратно.

Сумма двух боков прямолинейного треугольника более третьего.

В сферическом треугольнике угол против большего из двух боков более или менее, смотря по тому третий бок $< \pi$ или $> \pi$.

Сумма боков сферического треугольника более третьего, если этот третий $< \pi$.

Величина телесного угла $= \frac{S - (n-2)\pi}{2}$, где S — сумма углов сферического многоугольника, n — число его боков [6].

235 | Полагаем n число граней или фигур, ограничивающих правильное тело; m число боков фигуры; t число граней, смыкающихся в один телесный угол. Каждой грани тела отвечает при центре угол $\frac{2\pi}{n}$, которого число плоскостных углов m, а величина их $\frac{2\pi}{t}$; после чего, сравнивая два значения телесного угла, находим [7]

$$n = \frac{4t}{2m - (m-2)\,t}.$$

Здесь m и t не могут быть более 5, иначе n делается отрицательным; следовательно, все предположения могут быть таковы:

$m=3$,	$t=3$,	$n=4$;	тело называется *тетраедр.*
$m=3$,	$t=4$,	$n=8$	» » *октаедр.*
$m=3$,	$t=5$,	$n=20$	» » *икосаедр.*
$m=4$,	$t=3$,	$n=6$	» » *куб.*
$m=5$,	$t=3$,	$n=12$	» » *додекаедр.*

Число углов или остреев на правильном теле $= \frac{nm}{t}$, следовательно:

236 в тетраедре 4,
» октаедре 6,
» икосаедре 12,
» кубе 8,
» додекаедре . . . . . 20.

Достойно примечания, что выше данное значение n может быть найдено, не принимая в рассуждение, каким образом телесный угол определяется из его плоскостных. Действительно, число линий, в которых смыкаются грани, ясно должно быть $\frac{nm}{2}$ по известному правилу Ейлера * оно будет $\frac{nm}{t} + n - 2$; сравнивая то и другое выражение, снова получим то же n, что и выше.

Все случаи одинаковости треугольников могут быть теперь доказаны без помощи теории параллельных линий.

237 Прямолинейные треугольники бывают одинаковы, когда у них равны:

1) один бок и два угла;
2) два бока и угол между ними;
3) два бока и угол против большего;
4) три бока;

Сферические треугольники — когда у них равны:

1) три бока;
2) два бока и угол между ними;

* Самое простое доказательство сего предложения сделал *Грунерт* (см. Journal für die Mathemat. v. Crelle, Tom. 2, p. 367). [*Примечание Лобачевского*] [3].

3) два бока и угол против одного, но сумма углов в обоих треугольниках против другого бока не $= \pi$;

4) один бок и при нем два угла;

5) два угла и бок против одного, но сумма боков против другого в обоих треугольниках не составляет π;

6) три угла.

Два прямолинейных треугольника, когда у них три угла равны, могут быть не одинаковы, если предположить сумму углов
238 в каждом π. Напротив, они должны быть одина|ковы, если в них сумма углов, подобно как в сферических, разнится от π.

Мы видели, что сумма углов прямолинейного треугольника не может быть $> \pi$. Остается предполагать эту сумму $= \pi$ или $< \pi$*. То и другое может быть принято без всякого противоречия в последствии, от чего и происходит две Геометрии: одна, *употребительная* до ныне по своей простоте, соглашается со всеми измерениями на самом деле; другая, *воображаемая*, более общая и потому затруднительная в своих вычислениях, допускает возможность зависимости линий от углов.

Если в одном прямолинейном треугольнике почитать сумму углов π, то она будет такой уже и во всех. Напротив, допуская ее в одном менее π, легко доказать, что она уменьшается с возрастанием боков треугольника *.

Всякий раз, следовательно, две линии встречаться на плоскости
239 не могут, когда они с третьею составляют углы, которых сумма π. Они могут не пересекаться и в том случае, когда эта сумма $< \pi$, если к тому предположить сумму углов в треугольнике $< \pi$.

Итак, все линии на плоскости в отношении к одной могут быть разделены на *сходящиеся* и *несходящиеся*. Последние будут называться *параллельными*, если они представляют границу, или, иначе сказать,

---

* Начиная с этого места, Лобачевский от схемы общего обоснования геометрии переходит к изложению основ «воображаемой геометрии». Отсутствующие доказательства основных ее положений Лобачевский позднее приводит в сочинениях «Новые начала» и «Геометрические исследования». Поэтому здесь мы не даем необходимых примечаний, а отсылаем читателя к соответствующему тексту сочинения «Геометрические исследования» в этом же томе. Подробные доказательства этих теорем читатель найдет также в «Новых началах», статьи 96, 97, 99, 100.

* «Геометрические исследования», предложение 20 (стр. 87 настоящего тома).

переход от одних к другим между всеми, выходящими из одной точки *.

Воображаем из точки опущенный перпендикул a на данную линию и к этой параллельную из той же точки; означаем $F(a)$ угол между a и параллельной *. Легко доказать, что для всякой линии a угол $F(a) = \frac{\pi}{2}$, если сумма углов в треугольнике $= \pi$; но в другом предположении угол $F(a)$ меняется с a, уменьшаясь до нуля с увеличением линии a и оставаясь постоянно $< \frac{\pi}{2}$. Чтобы распространить, в сем последнем предположении, означение $F(a)$ на все линии a, мы будем принимать

$$F(0) = \frac{\pi}{2}, \quad F(-a) = \pi - F(a).$$

240₁ | Тогда для всякого острого угла A можно воображать положительную, а для всякого тупого A — отрицательную линию a, такую, чтоб $A = F(a)$ ⊘.

В «Казанском вестнике» номер страницы 240 ошибочно повторен два раза, здесь эти страницы обозначены 240₁ и 240₂]

Впрочем в том и другом предположении параллельным линиям принадлежат следующие свойства ♀.

Когда две линии параллельны, то пересечение проведенных чрез них плоскостей дает также линию, параллельную обеим.

Две параллельные третьей, параллельны между собою.

Когда три плоскости пересекаются в параллельных линиях, то сумма плоскостных внутренних углов $= \pi$.

Предположение суммы углов в треугольнике $< \pi$ ведет к тому, что круг с увеличением полупоперечника приближается не к прямой линии, а к особенного рода кривой, которую назовем *предельной круга* ↧. Сфера в таком случае будет приближаться также
240₂ к кривой | поверхности, которую подобным образом назовем *предельной сферой*. Эта поверхность в пересечении с плоскостию дает или круг или предельную круга **.

---

* «Геометрические исследования», предложение 16 (стр. 82).

★ В «Геометрических исследованиях» (и вообще во всех последующих сочинениях по геометрии) Лобачевский называет этот угол *углом параллельности* и обозначает его не через $F(x)$, а через $\Pi(x)$.

⊘ «Геометрические исследования», предложение 23 (стр. 91).

♀ «Геометрические исследования», предложение 25 (стр. 94) и предложение 28 (стр. 101).

↧ «Геометрические исследования», предложение 32 (стр. 106).

** «Геометрические исследования», предложение 34 (стр. 109).

Геометрия на предельной сфере совершенно та же, в каком виде мы ее знаем на плоскости. Предельная круга заменяет в последней *прямую линию*, а углы между плоскостей, в которых предельные лежат, заступают место углов между прямыми линиями.

Предельные кругов тем ближе подходят к прямым линиям, чем их дуги менее, так что разность в содержании к длине дуги можно сделать как угодно малой. И потому все, что принадлежит одним, принадлежит и другим, если принимать те и другие чрезвычайно малыми.

Итак, если в природе существующая Геометрия такова, что две параллельные линии должны быть наклонены к третьей линии
241 под углами, которых сумма $< \pi$, то Геометрия | употребительная нами будет Геометрия чрезвычайно малых линий в сравнении с теми, при которых сумма углов треугольника может приметно разниться от π *.

1829 XI—XII 227 || Сказано было, что Геометрия на предельной сфере та же, что и на плоскости. В первой предельная круга заменяет прямую; углы между плоскостями, в которых лежат предельные, заступают место углов между прямыми линиями. Однако ж измерению треугольников на предельной сфере должно предшествовать учение о тригонометрических функциях; а что касается до геометри-
228 ческого | строения, то с треугольниками на предельной сфере должно поступать как бы с сферическими. Плоскости, в которых лежат предельные и которые можно назвать *нормальными*, будут представлять плоскости больших кругов сферы; а линии пересечения первых между собою, следовательно, *нормальные линии* или *оси* предельной сферы, будут то же, что поперечники обыкновенной сферы.

После этого, не делая различия, будем говорить о прямолинейных треугольниках, разумея под ними также и треугольники на предельной сфере, составленные из дуг предельной круга [9].

Означаем в прямолинейном треугольнике a, b — катеты, A, B — противоположные углы, c — гипотенузу.

---

* «Геометрические исследования», предложение 37, соображения, следующие за формулами (8) (стр. 125 — 126).

Содержание $\frac{a}{c}$ в таком треугольнике изменяется по иначе, как с углом A. Эту зависимость $\frac{a}{c}$ от A означают

$$\frac{a}{c} = \sin A$$

229 и $\frac{a}{c}$ называют синус A. Определение $\sin A$ | распространяют на другие углы, кроме острых положительных A, принимая

$$\sin 0 = 0, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\sin (n\pi + A) = (-1)^n \sin A; \quad \sin (\pi - A) = \sin A,$$

где A — угол от 0 до $\frac{\pi}{2}$, n — положительное целое число. Наконец, для всякого положительного A

$$\sin (-A) = -\sin A;$$

следовательно, и для A отрицательного и для $A = 0$.

Так можно синус всякого угла привести к синусу нуля, или $\frac{\pi}{2}$, или острого положительного. Значения первых двух даны; значения последних представляют содержание двух линий в прямоугольном треугольнике.

После этого легко видеть, что какой бы угол A ни был, всегда

$$\sin (\pi + A) = -\sin A.$$

Кроме тригонометрической функции, названной синус, употре-
230 бительны еще другие: косинус, тангенс и котангенс, которых | определение и означение показывают следующие уравнения:

$$\cos A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right), \quad \operatorname{tang} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \quad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

Значения всех сих тригонометрических функций не изменяются, когда к углу прибавляем 2π.

В прямоугольном треугольнике находим

$$\sin A^2 + \cos A^2 = 1 \text{ *},$$

что справедливо и для всякого угла A.

---

* Лобачевский вместо $\sin^2 A$ и $\cos^2 A$ пишет $\sin A^2$ и $\cos A^2$ и соответствующим образом и в других случаях. Это обозначение сохранено в настоящем издании.

Во всяком прямолинейном треугольнике, которого бока a, b, c, противоположные углы A, B, C,

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}; \quad c = a\cos B + b\cos A.$$

Последнее уравнение с помощью первого, и так как $\sin C = \sin(A+B)$, дает

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

для всех положительных углов A, B, которых сумма $< \pi$. Легко
231 видеть, что здесь углы A и B могут быть: $A = 0$, $B = 0$, $|\ A + B = \pi$. Пусть далее $A = n\pi + \alpha$, $B = m\pi + \beta$; n, m — целые положительные числа; α, β — положительные углы > 0, $< \pi$; тогда, разделяя уравнение на $(-1)^{n+m}$, находим то же с переменою только A на α, B на β, и где, следовательно, $\alpha + \beta < \pi$. Но так как уравнение не переменяется, когда вместо α, β ставим $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, то $\alpha + \beta$ можем принимать и $> \pi$. Так уравнение доказано для всех положительных углов A, B; отрицательные же можно представлять произведенными вычитанием 2π из положительных, но такое вычитание не переменяет вид уравнения.

Полагая $\frac{\pi}{2} - A, -B$ вместо A, B, получим

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B.$$

Полагая $A = B$, потом $A = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{8}$ и т. д., находим значение тригонометрических функций для всех углов $\frac{m}{2^n}\pi$, где m, n — целые числа.

Всякий другой угол A может быть выражен суммою $B + 2\omega$,
232 где $B = \frac{m}{2^n}\pi$ с m и n | целыми числами, а ω угол как угодно малый. Тогда [10]

$$\sin A = \sin B + 2\sin\omega\cos(B+\omega),$$

$$\cos A = \cos B - 2\sin\omega\sin(B+\omega).$$

С уменьшением острого угла в прямоугольном треугольнике, уменьшается противоположный катет и так, что содержание сего катета к другому может быть сделано как угодно малым. Сделавши $\operatorname{tang}\omega$ по желанию малым, получим $\sin\omega$ еще менее, тогда как $\sin(B+\omega)$, $\cos(B+\omega)$ не превышает единицы. Итак, разности $\sin A - \sin B$, $\cos A - \cos B$ могут быть столько малы, чтобы $\sin B$,

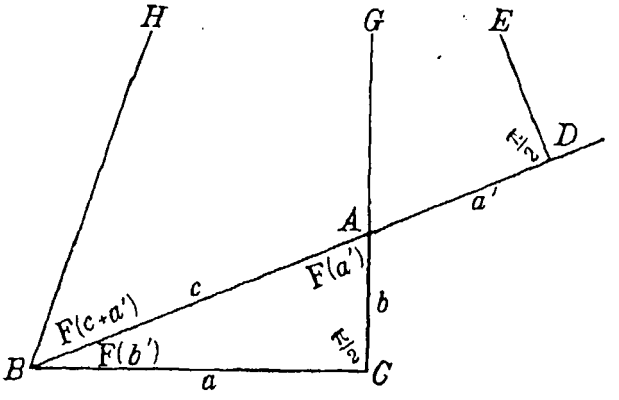
$\cos B$ принимать за $\sin A$, $\cos A$. Так можно разуметь, что значения тригонометрических функций для всех углов определены в числах. —

Теперь займемся измерением треугольников и решением задачи о параллельных.

Принимаем только то предложение справедливым, что перпендикул на линии параллельной встречает другую под острым
233 углом*. Мы условились означать такой острый | угол $\Pi(a)$, когда a перпендикул. Другое предположение и одно, которое до сих пор допускали Геометры, заключается также в этом общем, с тем ограничением, что линии должно рассматривать бесконечно малыми, следовательно, в исчислении пренебрегать их произведениями, вторыми и далее степенями в сравнении с первыми.

Итак, в прямоугольном треугольнике острые углы против катетов a, b должны быть $\Pi(a')$, $\Pi(b')$, где a', b' — прямые линии со знаком + перед числами, выражающими их меру*.

Продолжаем катет b и гипотенузу c через точку A (черт. 1) их пересечения. AD, продолжение c, делаем $= a'$ и в конце D ставим перпендикул DE на стороне AG, продолжения b.⊙ Ведем от точки B, вершины угла $\Pi(b')$, параллельную BH с AG на той же стороне. Три линии BH, AG, DE будут параллельны также с b, которой точку пересечения с a означим C.



Черт. 1.

* Точнее — прямая, перпендикулярная к данной и встречающая параллель образует с последней со стороны параллелизма острый угол (см. черт. 1).

* Устанавливаемые вслед за этим формулы (1) — (5) не отличаются ни по содержанию, ни по выводу от формул, установленных в предложении 36 «Геометрических исследований». Поэтому мы отсылаем читателя как к примечаниям 11—13 к настоящему сочинению, так и к предложению 36 «Геометрических исследований» (стр. 117).

⊙ Т. е. в ту сторону, куда направлено AG — продолжение b.

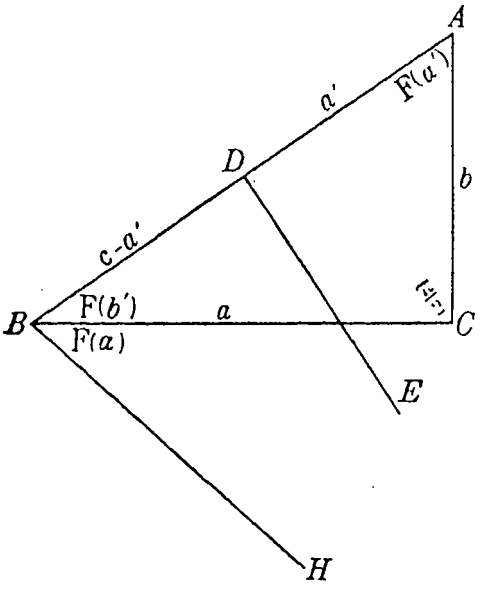
Здесь

$$\angle HBA + \angle ABC = \angle HBC,$$

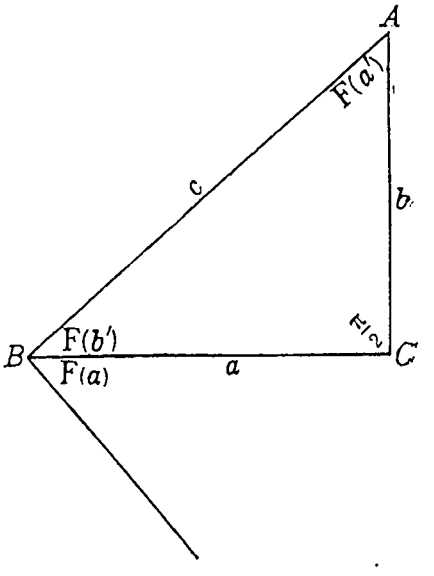
то-есть

$$F(c + a') + F(b') = F(a). \qquad (1)$$

234 | В том же $\triangle ABC$, если бы a' положили от A к B по линии c, в конце D поставили перпендикул DE и вели к нему параллель-



Черт. 2.



Черт. 3.

ную BH от точки B, следовательно, вместе и параллельную к b, то нашли бы новое отношение между линиями c, a, a', b'. Надобно, однако ж, различать три случая:

Если $c > a'$ (черт. 2), то находим

$$\angle DBH = \angle DBC + \angle CBH$$

или

$$F(c - a') = F(b') + F(a). \qquad (2)$$

Если $c = a'$ (черт. 3), то

$$\frac{\pi}{2} = F(b') + F(a).$$

Если $c < a'$ (черт. 4), то

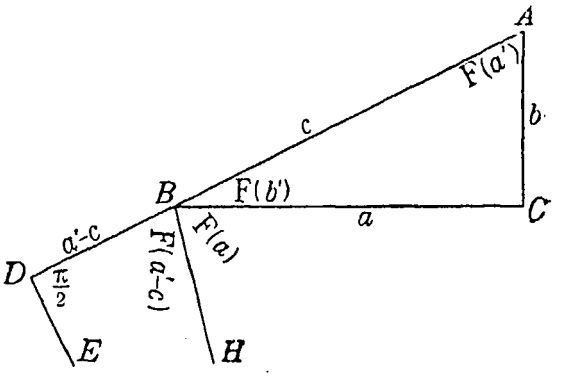
$$\pi - F(a' - c) = F(b') + F(a).$$

Но во втором случае $\frac{\pi}{2} = \mathrm{F}(0) = \mathrm{F}(c - a')$, а в последнем $\pi - \mathrm{F}(a' - c) = \mathrm{F}(c - a')$; следовательно, во всех трех случаях уравнение (2) справедливо.

Соединение уравнений (1), (2) дает

$$2\,\mathrm{F}(a) = \mathrm{F}(c - a') + \mathrm{F}(c + a'), \qquad (3)$$

$$2\,\mathrm{F}(b') = \mathrm{F}(c - a') - \mathrm{F}(c + a'). \qquad (4)$$



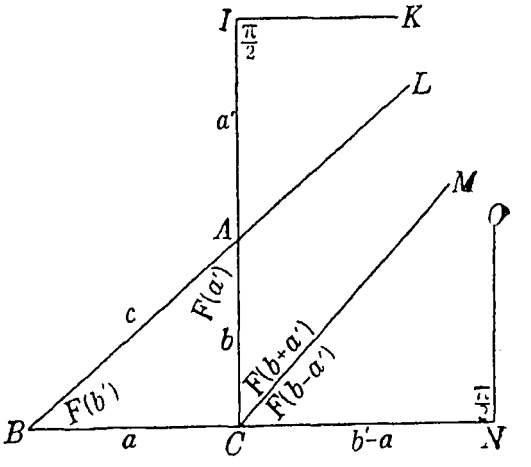
Черт. 4.

Продолжаем еще b и c чрез точку A (черт. 5), | a 235 через точку C; делаем $AI = a'$, $CN = b' - a$; ставим перпендикуляры IK, NO к CI и CN, то IK, AL, ON будут параллельны. Ведем еще им параллельную CM; тогда

$$\angle MCN + \angle MCI = \frac{\pi}{2},$$

то-есть

$$\mathrm{F}(b' - a) + \mathrm{F}(a' + b) = \frac{\pi}{2}. \qquad (5)$$



Черт. 5.

Означаем теперь α линию, определенную уравнением

$$\mathrm{F}(\alpha) + \mathrm{F}(a) = \frac{\pi}{2}.$$

Означаем β, γ, α', β' подобные линии в отношении к b, c, a', b'. Уравнение (4) может быть иначе представлено:

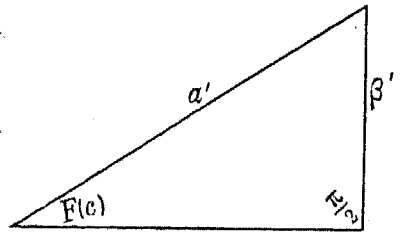
$$2\,\mathrm{F}(\beta') = \mathrm{F}(a' - c) + \mathrm{F}(a' + c), *$$

---

* Потому что $\mathrm{F}(\beta') = \frac{\pi}{2} - \mathrm{F}(b')$, а $\pi - \mathrm{F}(c - a') = \mathrm{F}(a' - c)$.

и предполагает существование прямоугольного треугольника, которого a' — гипотенуза, β' — катет, $\mathrm{F}(c)$ — противоположный ему угол (черт. 6) [11].

После этого должно заключать, что в уравнениях (3), (4), (5),
236 как и для всякой предполагаемой зависимости углов и боков | прямоугольного треугольника, можно не только переменять a на b с переменою a' на b', но и



Черт. 6.

a на β'	α на b'
$c \ldots a'$	$\gamma \ldots \alpha'$
$a' \ldots c$	$\alpha' \ldots \gamma$
$b' \ldots \alpha$	$\beta' \ldots a$,

оставляя в то же время b и β без перемены. Так уравнения (3) и (4) дают [12]:

$$\left.\begin{aligned} 2\mathrm{F}(a) &= \mathrm{F}(c-a') + \mathrm{F}(c+a') \\ 2\mathrm{F}(b) &= \mathrm{F}(c-b') + \mathrm{F}(c+b') \\ 2\mathrm{F}(b) &= \mathrm{F}(a'-\alpha) + \mathrm{F}(a'+\alpha) \\ 2\mathrm{F}(a) &= \mathrm{F}(b'-\beta) + \mathrm{F}(b'+\beta) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} 2\mathrm{F}(b') &= \mathrm{F}(c-a') - \mathrm{F}(c+a') \\ 2\mathrm{F}(a') &= \mathrm{F}(c-b') - \mathrm{F}(c+b') \\ 2\mathrm{F}(c) &= \mathrm{F}(a'-\alpha) - \mathrm{F}(a'+\alpha) \\ 2\mathrm{F}(c) &= \mathrm{F}(b'-\beta) - \mathrm{F}(b'+\beta) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} 2\mathrm{F}(a') &= \mathrm{F}(\alpha-\beta) - \mathrm{F}(\alpha+\beta) \\ 2\mathrm{F}(b') &= \mathrm{F}(\beta-\alpha) - \mathrm{F}(\alpha+\beta) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

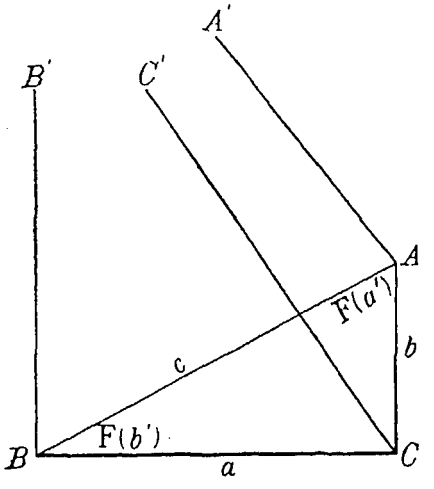
237 | Уравнение (5):

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{F}(b'-a) + \mathrm{F}(a'+b) &= \frac{\pi}{2} \\ \mathrm{F}(c-a) + \mathrm{F}(\beta+\alpha') &= \frac{\pi}{2} \\ \mathrm{F}(a'-\beta') + \mathrm{F}(\beta+\gamma) &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

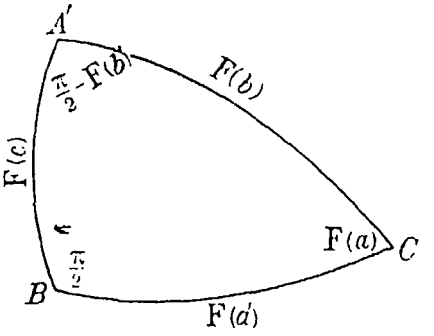
$$\left.\begin{aligned} \mathrm{F}(b'+a) + \mathrm{F}(a'-b) &= \frac{\pi}{2} \\ \mathrm{F}(c+a) + \mathrm{F}(\beta-\alpha') &= \frac{\pi}{2} \\ \mathrm{F}(a'+\beta') + \mathrm{F}(\beta-\gamma) &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Все сии уравнения, представляя в различных видах зависимость боков и углов прямоугольного треугольника, служат вместе *для определения* зависимости всякой линии a от угла $\Pi(a)$; но к решению этого последнего вопроса можно придти следующим образом.

К плоскости ABC того же прямоугольного треугольника ставим в точке B перпендикул BB' (черт. 7), к нему от точек A и C ведем параллельные AA', CC'. Сумма внутренних углов плоскостей, в которых лежат три параллельные, дает $\frac{\pi}{2} - \Pi(b')$ угол



Черт. 7.



Черт. 8.

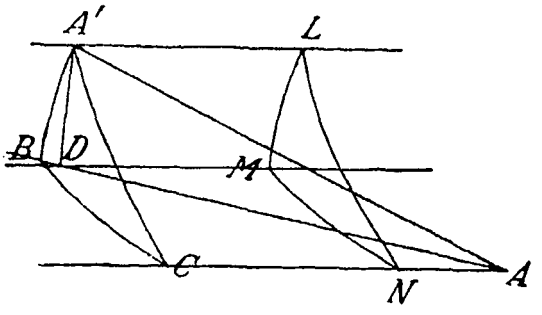
при ребре AA'. Воображаем около A, как центра, сферу; пересечение ее линиями AA', AB, AC произведет сферический прямо-
233 угольный треугольник $A'BC$ | (черт. 8), где $A'C = \Pi(b)$ — гипотенуза, $A'B = \Pi(c)$, $BC = \Pi(a')$ — катеты, $\Pi(a)$, $\frac{\pi}{2} - \Pi(b')$ — противоположные углы *.

Можно здесь мимоходом заметить, что существование такого треугольника предполагает прямоугольный прямолинейный (черт. 6), где гипотенуза a', катеты β', b, им противоположные углы $\Pi(c)$, $\frac{\pi}{2} - \Pi(a)$; следовательно, точно тот же треугольник, которого составление доказали выше [18]. Такая поверка заключений необходима, покуда остается неизвестным, которое из двух предположений истинное.

Воображаем снова сферический треугольник $A'BC$ и центр его сферы A (черт. 9). Из A' опускаем перпендикул $A'D$ к AB. Ведем

* См. сноску * на стр. 113 к сочинению «Геометрические исследования».

к AC параллельные: DM чрез точку D в плоскости ABC; $A'L$ чрез точку A' в плоскости $A'AC$. Пусть LMN — треугольник на предельной сфере, которой $A'L$, DM, CA — оси.



Черт. 9.

Можно доказать, что содержание боков в $\triangle A'BC$ и $\triangle LMN$ тем менее разнится, чем более полупоперечник AC или, что все равно, линия a' в $BC = \mathrm{F}(a')$ и что эта разность может быть сделана как угодно малой [14]. Границу, к которой приближается содержание двух линий, мы означим, ставя впереди lim. Так пишем:

229

$$\lim \frac{A'C}{BC} = \frac{LN}{NM}; \quad \lim \frac{A'B}{BC} = \frac{LM}{NM};$$

то-есть

$$\lim \frac{\mathrm{F}(b)}{\mathrm{F}(a')} = \frac{1}{\cos \mathrm{F}(a)}; \quad \lim \frac{\mathrm{F}(c)}{\mathrm{F}(a')} = \operatorname{tang} \mathrm{F}(a).$$

Отсюда

$$\lim \frac{\mathrm{F}(b) + \mathrm{F}(c)}{\mathrm{F}(a')} = \frac{1}{\cos \mathrm{F}(a)} + \operatorname{tang} \mathrm{F}(a),$$

$$\lim \frac{\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(c)}{\mathrm{F}(a')} = \frac{1}{\cos \mathrm{F}(a)} - \operatorname{tang} \mathrm{F}(a).$$

Из уравнений (6) и (7):

$$\mathrm{F}(b) + \mathrm{F}(c) = \mathrm{F}(a' - \alpha),$$

$$\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(c) = \mathrm{F}(a' + \alpha);$$

следовательно [15],

$$\lim \frac{\mathrm{F}(a' + \alpha)}{\mathrm{F}(a')} = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{F}(\alpha),$$

$$\lim \frac{\mathrm{F}(a' - \alpha)}{\mathrm{F}(a')} = \cot \frac{1}{2} \mathrm{F}(\alpha).$$

240 Первое уравнение показывает, что последнее справедливо и для всех отрицательных линий α [16]. Основываясь на этом послед-

нем, заключаем, что для всяких двух линий α, β

$$\lim \frac{F(a'+\alpha)}{F(a'+\beta)} \cdot \lim \frac{F(a'+\beta)}{F(a')} = \operatorname{tang} \frac{1}{2} F(\alpha),$$

то-есть

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} F(\alpha-\beta) \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} F(\beta) = \operatorname{tang} \frac{1}{2} F(\alpha) [17]. \tag{11}$$

Это требует, чтоб

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} F(\alpha) = e^{-\alpha} \quad [18], \tag{12}$$

где e — неопределенное постоянное число, но под которым можем разуметь основание Непперовых логарифмов, по причине неизвестности, какая линия берется единицей при измерении прямых.

Помощью уравнения (12) найденные выше (6), (7), (8) дают:

$$\left.\begin{aligned} \sin F(c) &= \sin F(a) \sin F(b), \\ \operatorname{tang} F(c) &= \operatorname{tang} F(a) \sin F(a'), \\ \cos F(b) &= \cos F(c) \cos F(a'), \\ \sin F(c) &= \operatorname{tang} F(a') \operatorname{tang} F(b'), \\ \operatorname{tang} F(a') &= \cos F(a) \operatorname{tang} F(b), \\ \sin F(b') &= \sin F(a) \cos F(a') \end{aligned}\right\} \quad [19] \tag{13}$$

241 и другие, которые непосредственно отсюда следуют.

Итак, в прямоугольном треугольнике, которого катеты a, b, противоположные углы A, B, гипотенуза c, будет:
в прямолинейном:

$$\left.\begin{aligned} \sin F(c) &= \sin F(a) \sin F(b), \\ \operatorname{tang} F(c) &= \operatorname{tang} F(a) \sin A, \\ \cos F(b) &= \cos F(c) \cos A, \\ \sin F(c) &= \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B, \\ \operatorname{tang} A &= \cos F(a) \operatorname{tang} F(b), \\ \sin B &= \sin F(a) \cos A; \end{aligned}\right\} \quad [20] \tag{14}$$

в сферическом:

$$\left.\begin{aligned} \cos c &= \cos a \cos b, \\ \sin a &= \sin A \sin c, \\ \operatorname{tang} a &= \operatorname{tang} c \cos B, \\ \cos c &= \cot A \cot B, \\ \operatorname{tang} a &= \operatorname{tang} A \sin b, \\ \cos A &= \cos a \sin B \end{aligned}\right\} \quad [21] \tag{15}$$

— известные уравнения сферической тригонометрии, и помощию
242 которых легко найти для всякого сферического треугольника, где бока a, b, c, противоположные углы A, B, C

$$\left.\begin{aligned}
&\cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c = \cos a,\\
&\sin a \sin B = \sin b \sin A,\\
&\cot A \sin C + \cos C \cos b - \cot a \sin b = 0,\\
&\cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C = \cos A.
\end{aligned}\right\} \quad [22] \qquad (16)$$

Измерение сферических треугольников, следовательно, не зависит от предположения для параллельных. Не таково измерение прямолинейных. Подобно, как уравнения (15) дают (16), так с помощью уравнений (14) находим для всякого прямолинейного треугольника, которого a, b, c бока, A, B, C противоположные углы:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{tang} \mathrm{F}(a) \sin A = \operatorname{tang} \mathrm{F}(b) \sin B,\\
&\cos A \cos \mathrm{F}(b) \cos \mathrm{F}(c) + \frac{\sin \mathrm{F}(b) \sin \mathrm{F}(c)}{\sin \mathrm{F}(a)} - 1 = 0,\\
&\cot A \sin B \sin \mathrm{F}(c) + \cos B - \frac{\cos \mathrm{F}(c)}{\cos \mathrm{F}(a)} = 0,\\
&\cos C + \cos A \cos B - \frac{\sin A \sin B}{\sin \mathrm{F}(c)} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad [23] \qquad (17)$$

Когда a, b, c предполагаются весьма малы, так что дозволяется
243 пренебрегать степенями и произведениями, которых размер выше, тогда можно ставить [24]:

$$\sin \mathrm{F}(a) = 1 - \frac{1}{2} a^2, \quad \cos \mathrm{F}(a) = a\left(1 - \frac{1}{3} a^2\right),$$

чрез что уравнения (17) сделаются [25]:

$$b \sin A = a \sin B,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$\sin (A + B) = \frac{c}{a} \sin A.$$

$$\cos C + \cos (A + B) = 0,$$

из которых первые два — известные уравнения прямолинейной тригонометрии; а две последние показывают, что $A + B + C =$

1830
III—IV
251 ||* Изложенная нами теория параллельных предполагает линии с углами в такой зависимости, которая, как после увидим, находится или нет в природе, доказать никто не в состоянии. По крайней мере наблюдения астрономические убеждают в том, что все линии, которые подлежат нашему измерению, даже расстояния между небесными телами, столько малы в сравнении с линией, принятою в теории за единицу, что употребительные до сих пор уравнения прямолинейной Тригонометрии без чувствительной погрешности должны быть справедливы.

Называем a поперечник земного пути вокруг солнца; $2p$ самый
252 большой годовой | параллакс неподвижной звезды: это значит $\frac{\pi}{2} - 2p$ будет угол между a и расстоянием одного конца a до звезды, тогда как расстояние звезды до другого конца перпендикулярно к a *. Необходимо

$$\Pi(a) > \frac{\pi}{2} - 2p,$$

отсюда

$$e^a < \frac{1 + \operatorname{tang} p}{1 - \operatorname{tang} p},$$

$$\frac{1}{2}\, a < \operatorname{tang} p + \frac{1}{3} \operatorname{tang} p^3 + \frac{1}{5} \operatorname{tang} p^5 + \ldots,$$

тем более

$$a < \operatorname{tang} 2p \quad [26].$$

Расстояние звезды сделается к a перпендикулярно, если разность в долготе звезды с солнцем составит прямой угол. Это будет именно то условие, которого должно держаться для выгоды самых наблюдений над параллаксом.

---

* Уравнения (17) и все, что за ними следует, прибавлено уже Сочинителем после к тому рассуждению, которое было им представлено 1826 года в Отделение Физико-Математических наук. [*Примечание Лобачевского.*]

★ Лобачевский рассматривает прямоугольный треугольник между солнцем, землей и звездой (соответствующий чертеж см. на стр. 284 к примечанию 28). В этом треугольнике нам известна одна сторона (поперечник земного пути) и два прилежащих к ней угла: $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} - 2p$. Треугольник может быть построен; однако для определения третьего угла мы не можем воспользоваться подобием треугольников, ибо подобия в геометрии Лобачевского не существует, и не можем воспользоваться формулами (14) для вычисления этого треугольника, ибо неизвестна длина, принятая в формуле (12) за единицу. Чтобы избежать этого затруднения и найти верхний предел для третьего угла, Лобачевский сравнивает параллаксы двух звезд, употребляя очень остроумный прием, приводимый ниже. (См. также примечания 26, 28, 29).

Кажется всего более можно положиться на способ, придуманный Г-м Дасса-Мондардье (Connaiss. des tem[p]s de 1831) [27]. Он находит годовой паралакс звезды Кейды (29 Ериднна) 2″, Ригеля 1″,43, Сириуса 1″,24. Последний дает

$$a < 0{,}00000602.$$

Самый большой

$$a < 0{,}000009696.$$

253 | Сколько ни мало таким образом должно полагать a, следовательно и все вообще линии, какие могут подлежать нашему измерению, в уравнениях (17) тем более можем довольствоваться низшими степенями боков треугольника, что здесь в функции входят или одни четные или одни нечетные степени.

Сумма углов, даже и в таких треугольниках, которые теперь рассматриваем, чрезвычайно мало разнится от двух прямых. Если означаем 2ω эту разность, то из последнего уравнения в (17), полагая $B = \frac{\pi}{2}$; $A = \frac{\pi}{2} - 2p$; $C = 2p - 2\omega$, легко находим [28]

$$\cos \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\operatorname{tang}\omega \cdot \operatorname{tang}(2p - \omega)},$$

отсюда

$$\sin(p-\omega)^2 = \sin p^2 - \cos 2p \cdot \cot \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Если p' другой паралакс, менее p, то

$$\cot \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right)^2 < \frac{\sin p^2}{\cos 2p'} \text{ [29]}.$$

Итак, с тою точностию вычисления, какую здесь надобно соблюсти, можно полагать

$$\omega < 2p \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2, \quad \text{где} \quad \sin x = \frac{\sin p'}{\sin p}\sqrt{\frac{\cos 2p}{\cos 2p'}}.$$

254 Например для Сириуса $p' = 0''{,}62$; для Кейды | $p = 1''$, следовательно, в треугольнике, который простирается до второй из сих звезд

$$2\omega < 0''{,}43.$$

Если б расстояние до звезды было тоже a, тогда $\operatorname{tang}\omega = \cos \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right)^2$ [30] $< \operatorname{tang} p^2$, где $2p$ — самый малый известный паралакс

для a[31]. Например, полагая $p = 0'',62$, находим, что сумма углов в таком треугольнике разнится от двух прямых менее, нежели на

$$0'',000372[32].$$

Вообще в прямоугольном треугольнике, которого a, b катеты, $\pi - 2\omega$ сумма углов,

$$\operatorname{tang}\omega = \left(\frac{e^a - 1}{e^a + 1}\right)\left(\frac{e^b - 1}{e^b + 1}\right).$$

Чем менее, следовательно, треугольник, тем сумма углов его менее разнится от двух прямых. После этого можно воображать, сколько эта разность, на которой основана наша теория параллельных, оправдывает точность всех вычислений обыкновенной Геометрии, и дозволяет принятые начала этой последней рассматривать как бы строго доказанными.

255 | Между тем нельзя не увлекаться мнением Г. Лапласа [33], что видимые нами звезды и млечный путь принадлежат к одному только собранию небесных светил, подобному тем, которые усматриваем как слабо мерцающие пятна в созвездиях Ориона, Андромеды, Козерога и проч. Итак, не говоря о том, что в воображении пространство может быть продолжаемо неограниченно, сама Природа указывает нам такие расстояния, в сравнении с которыми исчезают за малостию даже и расстояния нашей земли до неподвижных звезд.

После этого нельзя утверждать более, что предположение, будто мера линий не зависит от углов — предположение, которое многие Геометры хотели принимать за строгую истину, не требующую доказательства, — может быть оказалось бы приметно ложным еще прежде, нежели перейдем за пределы видимого нами мира.

С другой стороны, мы не в состоянии постигать, какая бы связь могла существовать в природе вещей и соединять в ней величины
256 | столь разнородные, каковы линии и углы. Итак, очень вероятно, что Евклидовы положения одни только истинные, хотя и останутся навсегда недоказанными.

Как бы то ни было, новая Геометрия, основание которой уже здесь положено, если и не существует в природе, тем не менее может существовать в нашем воображении, и, оставаясь без

употребления для измерений на самом деле, открывает новое, обширное поле для взаимных применений Геометрии и Аналитики.

Теперь рассмотрим, каким образом в этой воображаемой Геометрии определяется величина кривых линий, площадей, кривых поверхностей и объема тел.

Во-первых, займемся исследованием уравнений употребительнейших линий.

В прямоугольном треугольнике, которого x, y — катеты, A — угол против y [см. урав. пятое из (14)]:

$$\operatorname{tang} A = \operatorname{tang} \mathrm{F}(x) \cdot \cos \mathrm{F}(y) \quad [34]. \tag{18}$$

Это — уравнение прямой, которая пересекает ось x-ов под углом A.

25 | Ставим сюда r вместо x; потом $r+x$ вместо x; b вместо y. Сравнивая значения A, получим

$$\operatorname{tang} \mathrm{F}(r) \cdot \cos \mathrm{F}(y) = \operatorname{tang} \mathrm{F}(r+x) \cdot \cos \mathrm{F}(b)$$

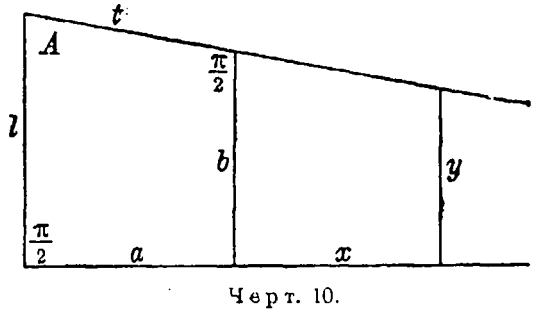
или

$$\cos \mathrm{F}(y) = \cos \mathrm{F}(b) \cdot \frac{\sin \mathrm{F}(x) \cos \mathrm{F}(r)}{\cos \mathrm{F}(x) + \cos \mathrm{F}(r)}.$$

Полагая $r = \infty$, находим

$$\cos \mathrm{F}(y) = e^{-x} \cdot \cos \mathrm{F}(b). \tag{19}$$

Уравнение прямой, параллельной с осью x в ту сторону, куда считаются x, и проведенной чрез вершину перпендикула b к оси x в начале сих координат.



Черт. 10.

Пусть теперь прямая (черт. 10) наклонена к оси y, на расстоянии l от оси x, под углом $A < \frac{\pi}{2}$, но $> \mathrm{F}(l)$. Такая линия не встречается с осью x, сколько бы ни была продолжаема.

Ищем линию a так, что [35]

$$\operatorname{tang} \mathrm{F}(l) = \operatorname{tang} A \cdot \cos \mathrm{F}(a), \tag{20}$$

следовательно,

$$a = \frac{1}{2} \log \frac{\sin [A + \mathrm{F}(l)]}{\sin [A - \mathrm{F}(l)]}.$$

258 | В прямоугольном треугольнике, которого катеты a, l, называем c гипотенузу, A' — угол против a; L — против l. Применяя сюда уравнения (14), находим

$$\text{tang } L = \cos \Pi(l)\ \text{tang } \Pi(a),$$

$$\text{tang } A' = \cos \Pi(a)\ \text{tang } \Pi(l),$$

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(l).$$

Полагаем теперь a на ось x от l в сторону, где берется угол A. Опускаем из другого конца перпендикул b к данной линии, который упадет на каком-нибудь расстоянии t от вершины l. Составится прямоугольный треугольник, которого гипотенуза c, катеты b, t, угол против первого $A - A'$, против последнего назовем L'. Получим

$$\text{tang } L' = \sin \Pi(c)\ \cot(A - A'),$$

$$\cos \Pi(b) = \cos L' \cos \Pi(c),$$

$$\text{tang } \Pi(t) = \frac{\text{tang}(A - A')}{\cos \Pi(b)} = \frac{\sin \Pi(c) \cdot \cot L'}{\cos \Pi(b)} \quad [36].$$

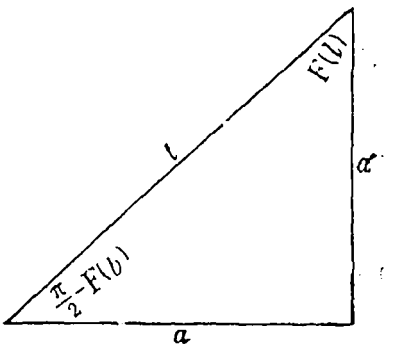
В первое уравнение, вставляя значения tang A и tang A', выраженные выше помощию a и l, открываем, что $L' = \frac{\pi}{2} - L$, следовательно b перпендикулярно к a [37].

Итак, две прямые линии в плоскости | должны быть или сходящимися, или параллельными, или перпендикулами к одной. 259

Наконец, два последние уравнения дают [38]

$$\cos \Pi(b) = \sin \Pi(a) \cdot \cos\ \Pi(l), \quad (21)$$

$$\text{tang } \Pi(t) = \sin \Pi(l) \cdot \text{tang } \Pi(a). \quad (22)$$



Черт. 11.

Примечательно, что уравнения (20), (21), (22), если к тому положим $A = \Pi(a')$, принадлежат прямоугольному треугольнику (черт. 11), где a, a' — катеты, $\Pi(l)$, $\frac{\pi}{2} - \Pi(b)$ — противоположные им углы, t — гипотенуза [39, 40, 41].

Уравнение прямой линии теперь может быть очень просто представлено, если считаем координаты x от b; именно [42]:

$$\cos \mathrm{F}(b) = \sin \mathrm{F}(x) \cdot \cos \mathrm{F}(y)$$

или

$$\sin \mathrm{F}(a) \cdot \cos \mathrm{F}(l) = \sin \mathrm{F}(x) \cdot \cos \mathrm{F}(y), \tag{23}$$

где линия a определяется уравнением (20), откуда, вставляя значение a и считая координаты x от l, находим

$$\cos \mathrm{F}(y) = \frac{\cos \mathrm{F}(l)}{\sin \mathrm{F}(x)} - \sin \mathrm{F}(l) \cdot \cot A \cdot \cot \mathrm{F}(x) \text{ [43]}, \tag{24}$$

что можно представить еще так:

$$2 \sin A \cdot \cos \mathrm{F}(y) = e^{x} \cdot \sin [A - \mathrm{F}(l)] + e^{-x} \sin [A + \mathrm{F}(l)]. \tag{25}$$

260 | Уравнение общее, как легко поверить, всем прямым линиям, и где A может быть всякий угол; но x на стороне угла A принимается положительным, а на противоположной отрицательным [44].

В круге, если считаем координаты x от центра, r называем полупоперечник:

$$\sin \mathrm{F}(r) = \sin \mathrm{F}(x) \cdot \sin \mathrm{F}(y). \tag{26}$$

Если же x считаем от окружности

$$\sin \mathrm{F}(r) = \sin \mathrm{F}(y) \cdot \sin \mathrm{F}(r - x),$$

которое уравнение можно представить иначе [45]:

$$\sin \mathrm{F}(x) \cdot \sin \mathrm{F}(y) = 1 - \cos \mathrm{F}(r) \cdot \cos \mathrm{F}(x).$$

Полагаем здесь $r = \infty$, получим уравнение предельной круга:

$$\sin \mathrm{F}(y) = e^{-x}. \tag{27}$$

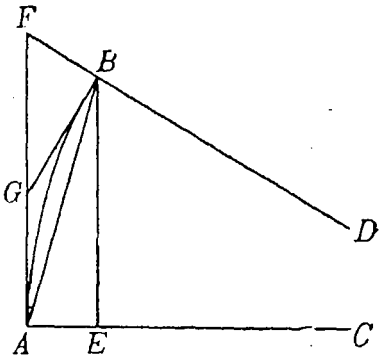
Иначе можно притти к этому уравнению, рассматривая прямоугольный треугольник, которого x, y — катеты, z — гипотенуза, $\mathrm{F}\left(\frac{z}{2}\right)$ — $\mathrm{F}(y)$, $\mathrm{F}(y)$ — углы против x, y. Здесь находим

$$\cot \mathrm{F}(y) = 2 \cot \mathrm{F}\left(\frac{1}{2}\, z\right),$$

$$\operatorname{tang} \mathrm{F}\left(\frac{1}{2}\, z\right) = \cos \mathrm{F}(y) \cdot \operatorname{tang} \mathrm{F}(x),$$

откуда стоит только исключить z [46].

Кривая линия не может быть составлена из прямых, а потому
261 измерение кривой помощию прямой дает только условную величину, за которую обыкновенно принимают границу приближения, когда соединяют прямыми точки на кривой, ближе и ближе друг от друга взятые. Легко видеть, какая цель предположена с таким исчислением. Кривые линии измеряются на самом деле помощию цепи, которая, почитают, тем вернее определяет величину кривой, чем звенья менее; так что гибкая нить дает уже эту величину без приметной погрешности.



Черт. 12.

Надобно, следовательно, доказывать только, что граница приближения существует; потом показать, каким образом ее отыскивать.

Пусть AB (черт. 12) — дуга круга; AC, BD — линии, от концов дуги направленные к центру; BE, FA — перпендикулы к AC: один опущен из конца B дуги, другой восставлен из конца A и ограничен в F продолжением BD.

Пусть BG, из точки B перпендикулярная к BD, встречает в G линию AF. Здесь $AB > BE$; $AF > AG + BG$. Отсюда легко видеть как для круга, так и для всякой кривой, что разделение дуг уве-
262 личивает сумму хорд и уменьшает сумму касательных. Между той и другой суммой должна, следовательно, находиться граница, которая и будет величина кривой линии.

Под прямыми линиями в чертеже 12 ничто не мешает представлять предельные круга, проведенные на предельной сфере. Пусть дуга AB принадлежит кругу, которого полупоперечник s, измеряемый дугою предельной круга от окружности до центра, взятого на предельной сфере [47]. Называем α угол при центре. Будет

$$BE = s \cdot \sin \alpha,$$

$$AF = s \cdot \operatorname{tang} \alpha.$$

Если $\alpha = \frac{\pi}{2^n}$, где n — целое число, то $2^n \cdot BE$ и $2^n \cdot AF$ с увеличением n приближаются к границе, которая представляет половину

окружности круга; а $2^n \cdot \sin\alpha$ и $2^n \cdot \operatorname{tang}\alpha$ — к числу

$$\pi = 3{,}141592\ldots,$$

следовательно, окружность круга

$$2\pi \cdot s,$$

а дуга для неопределенного угла α

$$\alpha \cdot s.$$

Если AB — дуга круга, а прочие линии все прямые, то называя
263 α угол при центре для | дуги AB круга, которого полупоперечник r; хорду AB означаем c; t касательную AF. Будет

$$\cot \mathrm{F}\left(\frac{c}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cot \mathrm{F}(r),$$

$$\cos \mathrm{F}(t) = \operatorname{tang}\alpha \cdot \cot \mathrm{F}(r)\ [43].$$

Если $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, где n — какое-нибудь целое число, то умножая уравнения на n [40], получим границу:

$$2\pi \cot \mathrm{F}(r),$$

к которой приближаются $2n \cot \mathrm{F}\left(\frac{c}{2}\right)$ и $n \cos \mathrm{F}(t)$ с увеличением числа n, а вместе с тем уменьшение c дает границы $2n \cot \mathrm{F}\left(\frac{c}{2}\right) = nc$, $n \cos \mathrm{F}(t) = nt$, которые обе должны представлять окружность круга. Для неопределенного угла α величина дуги будет, следовательно,

$$\alpha \cdot \cot \mathrm{F}(r) = \frac{1}{2}\alpha(e^r - e^{-r}). \qquad (28)$$

Если r весьма мало, то находим дугу αr верною до r^8.

Воображаем теперь круг вместе и на плоскости, где полупоперечник его y, и на предельной сфере, где полупоперечник его, измеряемый предельною круга, s. Окружность круга должна выражаться $2\pi s$ и $2\pi \cot \mathrm{F}(y)$, следовательно,

264
$$s = \cot \mathrm{F}(y) \qquad (29)$$

— дуга предельной круга, выраженная помощию перпендикула, опущенного от конца дуги на ось, проведенную чрез другой.

То же можно найти, выражая α в значении (28) помощию полупоперечника r и перпендикула, опущенного от одного конца

дуги круга на поперечник чрез другой, и потом, рассматривая только r переменяющимся, искать содержание

$$\frac{dx}{d\,\mathrm{tang}\,\Pi(r)}\ [50].$$

Наконец, в треугольнике, которого все острия лежат на предельной круга так, что бока a, b представляют хорды двух дуг, бок c — хорду составной из них, противоположные углы должны быть

$$A = \Pi\left(\frac{b}{2}\right) - \Pi\left(\frac{c}{2}\right),$$

$$B = \Pi\left(\frac{a}{2}\right) - \Pi\left(\frac{c}{2}\right),$$

$$C = \Pi\left(\frac{a}{2}\right) + \Pi\left(\frac{b}{2}\right).$$

Уравнения (17) в таком случае дают [51]:

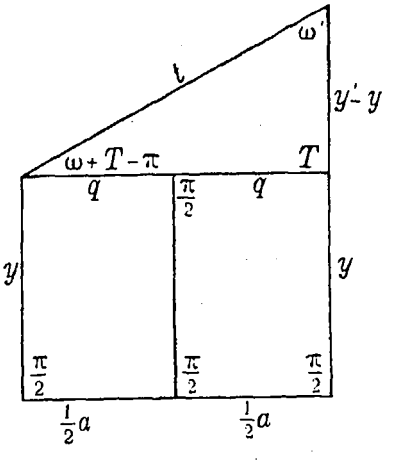
$$\cot\Pi\left(\frac{c}{2}\right) = \cot\Pi\left(\frac{a}{2}\right) + \cot\Pi\left(\frac{b}{2}\right).$$

Отсюда следует, что $\cot\Pi\left(\frac{c}{2}\right)$ пропорционально дуге предельной
366 круга, для которой c — хорда; | а как хорда, уменьшаясь, сливается с ее дугою, то $2\cot\Pi\left(\frac{c}{2}\right)$ должно изображать самую дугу, которой c хорда. Так еще доказывается справедливость уравнения (29).

Соединяя уравнения (19), (27) и (29), находим

$$s = \cos\Pi(t) \quad [52], \qquad (30)$$

где t — касательная к дуге предельной круга s в одном конце и усеченная осью чрез другой.



Черт. 13.

Чтобы найти, каким образом выражается бесконечно малая хорда, или элемент дуги кривой, помощию перпендикулярных координат x, y, рассматриваем прямую трапецию (черт. 13), где $y' > y$ перпендикулярны к a. Отделяем на y' линию,

равную y, соединяем вершины y линией $2q$, вершины y, y' линией t и называем T угол между $2q$ и $y'-y$, ω — между t и y; ω' — между t и y'. Линия чрез середины a и $2q$ должна быть перпендикулярна к a и $2q$, следовательно [смот. уравн. 20, 22 и 17] [53]:

$$\operatorname{tang} \mathrm{F}(y) = -\operatorname{tang} T \cdot \cos \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right),$$

$$\operatorname{tang} \mathrm{F}(q) = \sin \mathrm{F}(y) \cdot \operatorname{tang} \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right),$$

$$\sin \mathrm{F}(t) = \frac{\sin \mathrm{F}(2q) \cdot \sin \mathrm{F}(y'-y)}{1-\cos T \cdot \cos \mathrm{F}(2q) \cdot \cos \mathrm{F}(y'-y)},$$

$$\cot \omega' \cdot \operatorname{tang} T \cdot \sin \mathrm{F}(y'-y) + 1 = \frac{\cos \mathrm{F}(y'-y)}{\cos T \cdot \cos \mathrm{F}(2q)},$$

216 | отсюда

$$\cos T \cdot \cos \mathrm{F}(2q) = -\frac{2 \cos \mathrm{F}(y)}{2 + \sin \mathrm{F}(y)^2 \operatorname{tang} \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right)^2} \text{ [54]},$$

что вставляя, находим

$$\sin \mathrm{F}(t) = \frac{\sin \mathrm{F}(a) \cdot \sin \mathrm{F}(y) \cdot \sin \mathrm{F}(y')}{1 - \sin \mathrm{F}(a) \cdot \cos \mathrm{F}(y) \cdot \cos \mathrm{F}(y')} \text{ [55]}, \tag{31}$$

$$\cot \omega' \cos \mathrm{F}(a) \sin \mathrm{F}(y') + \sin \mathrm{F}(a) \cos \mathrm{F}(y) = \cos \mathrm{F}(y') \text{ [56]}.$$

Подобным образом

$$\cot \omega \cos \mathrm{F}(a) \sin \mathrm{F}(y) + \sin \mathrm{F}(a) \cos \mathrm{F}(y') = \cos \mathrm{F}(y) \text{ [57]}.$$

Два последние уравнения те же, что и (24), но выведенные здесь без всякого предположения, сходятся или нет линии t и a.

Далее находим еще [58]:

$$\operatorname{tang}(\omega + \omega') = \frac{\cos \mathrm{F}(a) \sin [\mathrm{F}(y') + \mathrm{F}(y)]}{\cos [\mathrm{F}(y') + \mathrm{F}(y)] - \sin \mathrm{F}(a)}, \tag{32}$$

уравнение, которое нужно нам будет в последствии.

Заметим еще, что уравнение (31) для t и a параллельных делается [59]

$$\frac{e^{2a}-1}{e^{2t}-1} = \sin \mathrm{F}(y)^2. \tag{33}$$

Если теперь полагаем $y' = y + dy$, $a = dx$, $t = ds$, разумея x, y перпендикулярные координаты кривой, которой s дуга, то

267 | $$1 - \sin \mathrm{F}(t) = \frac{1}{2} ds^2; \quad \mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(y') = dy \sin \mathrm{F}(y).$$

Уравнение (31) и значение $\cot\omega$ переменятся в

$$ds = \sqrt{dy^2 + \frac{dx^2}{\sin \mathrm{F}(y)^2}}, \tag{34}$$

$$\cot\omega' = \frac{dy}{dx}\sin \mathrm{F}(y) \quad [60]. \tag{35}$$

Первое дает элемент кривой линии, последнее определяет угол касательной с координатою y.

Можно легче найти уравнения (34), (35), заметив, что в бесконечно малом треугольнике $T = \frac{\pi}{2}$;

$$2q = \frac{a}{\sin \mathrm{F}(y)}; \quad t^2 = (y' - y)^2 + 4q^2,$$

$$\cot\omega' = \frac{y' - y}{2q} \quad [61].$$

Для круга, где x считается от центра, r — полупоперечник [см. ур. 26]:

$$dy = -\,dx\,\frac{\cos \mathrm{F}(x)}{\cos \mathrm{F}(y)},$$

интегрирование дает

$$s = \cot \mathrm{F}(r) \cdot \arcsin \frac{\cos \mathrm{F}(x)}{\cos \mathrm{F}(r)} \quad [62].$$

203 Здесь $\frac{\cos \mathrm{F}(x)}{\cos \mathrm{F}(r)}$ представляет косинус угла при центре против y [63]; следовательно, это выражение для s совершенно то же, что и (28).

Из уравнения (27) для предельной круга находим [64]

$$dx = dy \cdot \cos \mathrm{F}(y); \quad ds = \frac{dy}{\sin \mathrm{F}(y)}.$$

Интегрируя, получим

$$s = \cot \mathrm{F}(y),$$

как и выше [см. урав. (29)].

Из уравнения для прямой (25) находим

$$dy \sin \mathrm{F}(y)^2 = \frac{e^x \cdot \sin[A - \mathrm{F}(l)] - e^{-x}\sin[A + \mathrm{F}(l)]}{2\sin A}\,dx,$$

далее,

$$ds = \frac{4dx \cdot \sin \mathrm{F}(l)\sin A}{4\sin A^2 - \{\sin[A - \mathrm{F}(l)]\,e^x + \sin[A + \mathrm{F}(l)]\,e^{-x}\}^2};$$

интегрируя от $x = 0$:

$$s = \frac{1}{2}\log \frac{e^{2x}\cos\left[\frac{A - \mathrm{F}(l)}{2}\right]^2 - \cos\left[\frac{A + \mathrm{F}(l)}{2}\right]^2}{\sin\left[\frac{A + \mathrm{F}(l)}{2}\right]^2 - e^{2x}\sin\left[\frac{A - \mathrm{F}(l)}{2}\right]^2} \quad [65].$$

отсюда

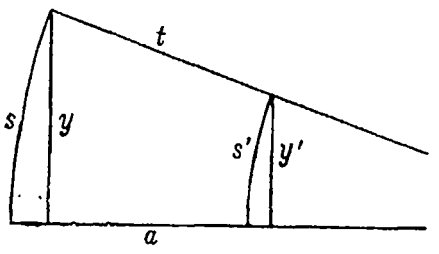
$$\cos \mathrm{F}(s) = \frac{\cos \mathrm{F}(x)}{\sin A \sin \mathrm{F}(l) + \cos A \cos \mathrm{F}(l) \cos \mathrm{F}(x)} \quad [66].$$

То же бы нашли и прямо из разрешения треугольников [67].

Полагая здесь $A = \mathrm{F}(l)$, получим для s параллельной с x

219 | $$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2s} - 1} = \sin \mathrm{F}(l)^2 \quad [68],$$

то же уравнение, что и (33). Его можно найти прямо и весьма легко, если рассматриваем перпендикулы y, y' (черт. 14), опущенные от концов линии t на параллельную с ней, где a измеряет расстояние между y и y'; далее воображаем еще от концов t дуги s, s' предельной круга, которых t — общая ось и которые отсекаются другою осью a и ее продолжением. Будет [см. урав. 29, 19]:



Черт. 14.

$$s = \cot \mathrm{F}(y); \quad s' = \cot \mathrm{F}(y');$$
$$\cos \mathrm{F}(y') = e^{-a} \cos \mathrm{F}(y),$$

отсюда

$$s = s' \frac{\sqrt{e^{2a} - \cos \mathrm{F}(y)^2}}{\sin \mathrm{F}(y)} \quad [69].$$

Воображаем еще касательные q, q' к дугам s, s', проведенные в концах перпендикулярно к оси, сливающейся с a, и отрезанные другою осью t и ее продолжением. Будет [см. урав. 30]:

$$s = \cos \mathrm{F}(q); \quad s' = \cos \mathrm{F}(q'); \quad \cos \mathrm{F}(q) = e^t \cos \mathrm{F}(q'),$$

следовательно:

$$s' = se^{-t} \quad [70], \qquad (86)$$

уравнение, которое можно найти и прямо, основываясь на свойствах предельной круга.

270 | Вставляя сюда значение s, выше найденное, находим [71]:

$$\frac{e^{-2a}-1}{e^{-2t}-1} = \sin \mathrm{F}(y')^2$$

или

$$\frac{e^{2a}-1}{e^{2t}-1} = \sin \mathrm{F}(y)^2.$$

Если r называем расстояние точки до центра координат, φ — угол r с x, то

$$dy = \frac{d\varphi \cos\varphi \cos \mathrm{F}(r) + dr \sin\varphi}{\sqrt{1-\cos\varphi^2 \cos \mathrm{F}(r)^2}},$$

$$\frac{dx}{\sin \mathrm{F}(y)} = \frac{dr \cos\varphi \sin \mathrm{F}(r) - d\varphi \sin\varphi \cot \mathrm{F}(r)}{\sqrt{1-\cos\varphi^2 \cos \mathrm{F}(r)^2}},$$

что вставляя в выражение для ds (34), получим

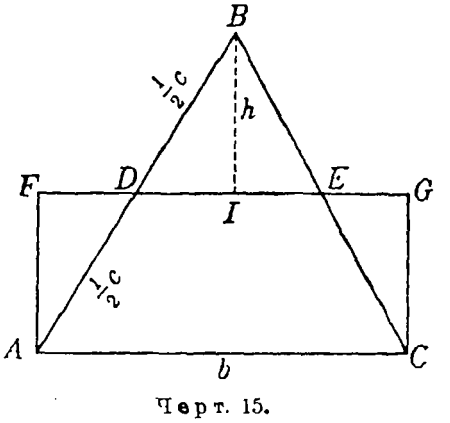
$$ds = \sqrt{dr^2 + d\varphi^2 \cot \mathrm{F}(r)^2} \quad [72]. \tag{37}$$

В круге r постоянно, следовательно, $dr = 0$, $s = \varphi \cot \mathrm{F}(r)$ как и выше.

Измерение площадей основано в Геометрии на положениях: 1-е. *Площади равны, когда они составляются из одинаковых частей, хотя бы и в другом порядке.* 2-е. *Площадь менее другой, если она* 271 *в этой второй помещается, оставляя часть незакрытой.* | 3-е. *Площадь уменьшается до бесконечности, когда хоть один бок ее так уменьшается, а другие не выходят за известную границу* [73].

Без сих положений нельзя дать общего способа для измерения площадей. Легко видеть, что действительное измерение основано на том же.

Начнем с треугольников, как таких фигур, из которых составляются все прочие прямолинейные.



Черт. 15.

В треугольнике ABC (черт. 15) делим два бока AB, BC пополам. Через середины ведем линию DE и опускаем на нее перпендикулы AF, CG, BI из остреев треугольника ABC. Произойдут

одинаковые треугольники AFD с DBI, CGE с BIE. Отсюда следует, что площадь треугольника ABC равна площади четыреугольника $AFGC$ и что площади всех треугольников на AC равны между собою, когда их вершины отстоят равно от DE — линии, проведенной чрез середину двух боков, соединяющих вершину B с основанием AC [74]. Полагаем $BI = h$, $\angle BAC = A$, $AB = c$, В $\triangle AFD$ находим

$$\sin A = \frac{\cos \mathrm{F}(h)}{\cos \mathrm{F}\left(\frac{c}{2}\right)} \quad [75],$$

уравнение, возможное, как скоро c не менее $2h$, и которое опре-
272 деляет угол A, когда даны | h и c. Обратно, находим c, когда даны A и h. Так всякий треугольник ABC превращается в прямоугольный, которого катеты будут AC и линия c', определяемая уравнением

$$\cos \mathrm{F}\left(\frac{c'}{2}\right) = \sin A \cos \mathrm{F}\left(\frac{c}{2}\right).$$

Пусть теперь в двух треугольниках бока не равны, например $c < c'$, в одном из них A' угол при c': то из предыдущего легко видеть, что без перемены площади этого последнего треугольника, вместо бока c' можно поставить c, когда вместо A' поставится угол A'' из уравнения

$$\sin A'' = \sin A' \frac{\cos \mathrm{F}\left(\frac{c'}{2}\right)}{\cos \mathrm{F}\left(\frac{c}{2}\right)}.$$

Итак, при сравнении площадей двух треугольников всегда можно полагать, что у них по одному боку равному, который и будем называть основанием. Далее, каждый из сих треугольников, оставаясь на том же основании, может быть превращен в прямоугольный. В этом виде два треугольника необходимо одинаковы, как скоро суммы их углов равны, иначе разности их площадей произвели бы треугольник, где сумма углов π. Вообще,
273 | следовательно, площади двух треугольников равны, если в них суммы углов равны [76].

Когда же площадь A треугольника более площади A' другого, то сумма углов первого, которую означим $\pi - s$, менее суммы

углов $\pi - s'$ второго, следовательно, $s > s'$. В этом можно также увериться, полагая один треугольник на другой равными основаниями и прямыми углами [77]. Разность обоих треугольников будет тоже треугольник, где сумма углов $\pi - (s - s') < \pi$.

Пусть $s' = \frac{n}{m} s$, где $n < m$ — целые числа. Называем в треугольнике A катеты a, b; означаем к тому α, β такие линии, чтобы

$$\mathrm{F}(a) + \mathrm{F}(\alpha) = \frac{\pi}{2},$$

$$\mathrm{F}(b) + \mathrm{F}(\beta) = \frac{\pi}{2}.$$

Применяя сюда уравнения (8), находим

$$s = \mathrm{F}(\alpha + \beta).$$

Если означим c, γ такие линии, что

$$\mathrm{F}(c) + \mathrm{F}(\gamma) = \frac{\pi}{2},$$

$$\mathrm{F}(\alpha + \gamma) = \frac{n}{m} s,$$

то площадь прямоугольного треугольника из катетов a, c будет A' [78]. Далее, если бы в последнем уравнении вместо n ставили
274 все числа от 1 до m по порядку, то различные | отсюда значения c разделили б треугольник A на m равных частей, из которых n должны составить A'; следовательно, $A' = \frac{s'}{s} A$.

Должно заметить, что при делении треугольника A на m частей катет b разделится тоже на m частей; следовательно, когда содержание $\frac{s}{s'}$ не выражается точно содержанием целых чисел, то по крайней мере с увеличением чисел n и m потребуется пренебречь треугольником, которого один бок может быть сделан как угодно малым [79].

Итак, площади двух треугольников содержатся как недостатки в суммах углов их до двух прямых [80]. Мы будем принимать этот недостаток в сумме углов до π за самую площадь треугольника, оставляя до времени неопределенным тот треугольник, которого площадь единица.

Означая a, b катеты прямоугольного треугольника, Δ его площадь, находим [81]

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Delta = \cos \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right)\cos \mathrm{F}\left(\frac{b}{2}\right).$$

275 | Когда a, b чрезвычайно малы, так что можно пренебрегать кубы и вы[с]ш[и]е степени, то

$$\Delta = \frac{ab}{2},$$

как в обыкновенной Геометрии принимается.

Площадь многоугольника с n боками будет недостаток в сумме его углов до $(n-2)\pi$.

В трапеции, которой бока a, a' перпендикулы к b; четвертый бок c, A — угол между a и c, A' — угол между a' и c, находим [см. урав. (32)]:

$$\operatorname{tang}(A + A') = \frac{\cos \mathrm{F}(b)\sin\{\mathrm{F}(a') + \mathrm{F}(a)\}}{\cos\{\mathrm{F}(a') + \mathrm{F}(a)\} - \sin \mathrm{F}(b)}.$$

Полагая здесь

$$\mathrm{F}(b) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{F}(\beta),$$

$$\mathrm{F}(a) + \mathrm{F}(a') = \mathrm{F}(\alpha),$$

получим площадь трапеции

$$\pi - A - A' = \mathrm{F}(\beta - \alpha) \quad [82].$$

Площадь, ограниченная кривою линией, более площади многоугольника, который вместо кривой ограничивается ее хордами, и менее многоугольника, который вместо кривой ограничивается
276 касательными к ней. Можно доказать, | что с уменьшением боков разность площадей того и другого многоугольника может быть сделана как угодно малой. Граница, к которой, таким образом, приближаются площади многоугольников, принята за величину площади, окруженной кривою линией. Измерения на самом деле производятся подобным образом.

Возьмем для примера круг. Когда от конца одного полупоперечника опускаем перпендикул на другой, а в конце этого в[ос]ставляем перпендикул, продолжая, покуда он встретит первый полупоперечник, то составятся два треугольника, из которых один менее, а другой более площади вырезка круга между двумя

полупоперечниками. Называем α угол при центре; A, A' — недостатки в сумме углов малого и большого треугольника до π; пусть r полупоперечник. Будет

$$\operatorname{tang} A = \frac{1 - \sin \mathrm{F}(r)}{\operatorname{tang} \alpha^2 + \sin \mathrm{F}(r)} \operatorname{tang} \alpha,$$

$$\sin A' = \frac{\cos \alpha - \sqrt{\sin \mathrm{F}(r)^2 - \sin \alpha^2}}{\sin \mathrm{F}(r)} \sin \alpha \quad [83].$$

С увеличением содержания $\frac{2\pi}{\alpha}$ как $\frac{2\pi}{\alpha} \operatorname{tang} A$, так и $\frac{2\pi}{\alpha} \sin A'$
277 будут приближаться к | одной границе

$$\pi \left(e^{\frac{r}{2}} - e^{-\frac{r}{2}} \right)^2 = 4\pi \cot \mathrm{F} \left(\frac{r}{2} \right)^2 \quad [84], \tag{38}$$

которая изображает площадь круга. Когда r чрезвычайно мало, то это выражение с отбрасыванием r^4 и т. д. делается πr^2.

Вообще для кривой линии, которой перпендикулярные координаты x, y, площадь dS трапеции между y, $y' = y + dy$ и dx будет, как мы видели,

$$\mathrm{F}(\beta - \alpha),$$

где

$$\mathrm{F}(\beta) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{F}(dx), \quad \mathrm{F}(\alpha) = \mathrm{F}(y) + \mathrm{F}(y'),$$

следовательно [85]:

$$2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} dS = 2 \frac{e^{dx} - 1}{e^{dx} + 1} \cot \frac{\mathrm{F}(y) + \mathrm{F}(y')}{2},$$

то-есть

$$dS = dx \cot \mathrm{F}(y) \quad [86]. \tag{39}$$

Если вместо трапеции из y, y', которая менее элемента площади, ограниченной кривою, рассматриваем трапецию из dx, y и z — продолженной y', покуда касательная к кривой чрез вершину y ее встретит, — то элемент dS будет приближаться к границе выражения

$$\mathrm{F}(\beta - \alpha'),$$

278 | которого он постоянно менее, и где

$$\mathrm{F}(\alpha') = \mathrm{F}(y) + \mathrm{F}(z).$$

Значение z определяется уравнением [см. урав. 24 и 35]

$$\cot \mathrm{F}(z) = \frac{e^{dx} + e^{-dx}}{2} \cos \mathrm{F}(y) + \frac{e^{dx} - e^{-dx}}{2dx} \cdot dy \sin \mathrm{F}(y)^2,$$

следовательно, $z = y'$ [87].

Для круга

$$dS = dx \sqrt{\frac{\sin \mathrm{F}(x)^2}{\sin \mathrm{F}(r)^2} - 1},$$

где r — полупоперечник; координаты x считаются от центра.

Интегрируя, находим

$$S = \frac{1}{\sin \mathrm{F}(r)} \arcsin \frac{\cos \mathrm{F}(x)}{\cos \mathrm{F}(r)} - \arcsin \frac{\cot \mathrm{F}(x)}{\cot \mathrm{F}(r)} \quad [88].$$

Можно поверить это выражение так. Если называем φ угол при центре, то площадь вырезка круга для угла $\frac{\pi}{2} - \varphi$ при центре будет [см. выраж. (38)]:

$$\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \left(\frac{1}{\sin \mathrm{F}(r)} - 1\right).$$

Площадь прямоугольного треугольника из x, y, r:

$$\arccos \frac{\cot \mathrm{F}(x)}{\cot \mathrm{F}(r)} - \varphi,$$

279 | сумма сих двух площадей дает снова S, и где

$$\cos \varphi = \frac{\cos \mathrm{F}(x)}{\cos \mathrm{F}(r)} \quad [89].$$

Когда x считается от окружности к центру, то [90]

$$S = \frac{1}{\sin \mathrm{F}(r)} \arccos \frac{\cos \mathrm{F}(r-x)}{\cos \mathrm{F}(r)} - \arccos \frac{\cot \mathrm{F}(r-x)}{\cot \mathrm{F}(r)}$$

или

$$S = \frac{1}{\sin \mathrm{F}(r)} \arcsin \frac{\operatorname{tang} \mathrm{F}(r)}{\operatorname{tang} \mathrm{F}(y)} - \arcsin \frac{\cos \mathrm{F}(y)}{\cos \mathrm{F}(r)}.$$

Полагая здесь $r = \infty$, получим площадь между координатами и дугою предельной круга:

$$S = \cot \mathrm{F}(y) - \frac{\pi}{2} + \mathrm{F}(y).$$

То же бы самое нашли [91], если бы в общее выражение (39) поставили значение x из уравнения (27), потом интегрировали.

Заметим, что $\frac{\pi}{2} - \mathrm{F}(y)$ представляет площадь, бесконечно простирающуюся в одну сторону и ограниченную с других сторон двумя осями и координатою y; следовательно, площадь между дугою кривой и координатами x, y [92] будет

$$\cot \mathrm{F}(y) \quad [93],$$

то же, что и самая дуга [см. урав. (29)].

280 | Наконец, площадь между двух осей и двух дуг предельной круга, на расстоянии t одна от другой, когда называем s большую дугу, будет [см. урав. (36)]:

$$s(1 - e^{-t}) \tag{39a}$$

или

$$s'(e^{t} - 1),$$

где s' — малая дуга из двух [94].

Сии два значения площади можно найти подобно уравнению (36), не предполагая известным[и] уравнения (12) и (17). Для сего стоит только представлять себе площадь, разделенную на равные части осями и дугами предельной круга.

Если r означает расстояние точки кривой от начала координат, φ — угол r с постоянною осью чрез то же начало координат проведенною, то элемент dS площади может быть представлен так [см. выр. (38)]:

$$dS = d\varphi \left(\frac{1}{\sin \mathrm{F}(r)} - 1 \right).$$

Интегрирование дает

$$S = -\varphi + \int_0 \frac{d\varphi}{\sin \mathrm{F}(r)}. \tag{40}$$

281 | Например, в предельной круга $\mathrm{F}\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \varphi$, следовательно,

$$\frac{1}{2} S = -\varphi + \operatorname{tang} \varphi \quad [95].$$

Здесь расстояние r берется от точки на кривой, а угол φ считается от касательной в той же точке.

Площадь может разделяться еще на элементы параллельными линиями. Пусть от конца координаты x параллельная с осью y встречает кривую на расстоянии u (черт. 16). Площадь, бесконечно

простирающаяся между двух параллельных, чрез концы x и $x+dx$ проведенных, будет

$$-dF(x),$$

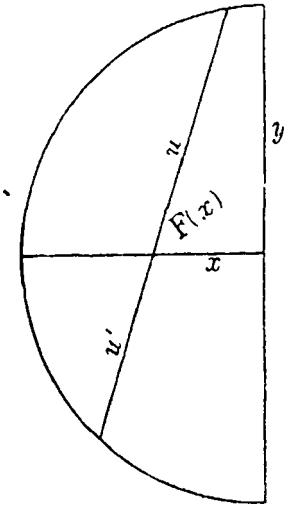
а часть этой площади, ограниченная кривою [см. выр. 39]:

$$dS = -dF(x)[1-e^{-u}] \quad [96];$$

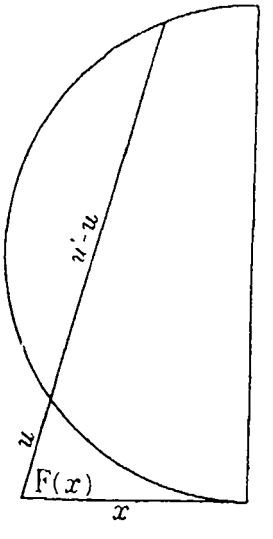
отсюда интегрирование дает

$$S = \frac{\pi}{2} - F(x) - \int_0 dx\, e^{-u} \sin F(x). \tag{41}$$

Если u' называем расстояние, на котором параллельная с осью



Черт. 16.



Черт. 17.

y встречает кривую по другую сторону оси x, то элемент площади может быть также выражен

$$dS = -dF(x)[e^{u'}-1];$$

282 | следовательно, площадь,

$$S = \int_0 dx\,(e^{u'}-e^{-u}) \sin F(x). \tag{42}$$

Если u, u' — расстояния (черт. 17), на которых параллельная с осью y встречает кривую два раза по одну сторону оси x, проведенной вне площади кривой, то

$$S = \int_0 dx\,(e^{-u}-e^{-u'}) \sin F(x). \tag{43}$$

В круге, когда x считается от центра, через который проходят оси координат x и y, треугольник из x, u и полупоперечника r с противоположным сему последнему углом $\mathrm{F}(x)$ дает

$$\cos \mathrm{F}(x)^2 \cos \mathrm{F}(u) + \frac{\sin \mathrm{F}(u) \sin \mathrm{F}(x)}{\sin \mathrm{F}(r)} = 1 \quad [97];$$

отсюда

$$e^u \sin \mathrm{F}(x) = \frac{1 + \sqrt{\cos \mathrm{F}(r)^2 - \sin \mathrm{F}(r)^2 \cos \mathrm{F}(x)^2}}{\sin \mathrm{F}(r)},$$

$$e^{u'} = \frac{\sin \mathrm{F}(x)}{\sin \mathrm{F}(r)} \cdot \frac{1 + \sqrt{\cos \mathrm{F}(r)^2 - \sin \mathrm{F}(r)^2 \cos \mathrm{F}(x)^2}}{1 + \cos \mathrm{F}(x)^2} \quad [98].$$

283 | Уравнение (41) дает после интегрирования [99]

$$S = \varphi - \arcsin [\sin \varphi \operatorname{tang} \mathrm{F}(r)] - \frac{1}{\sin \mathrm{F}(r)} \left\{ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang} (\sin \varphi) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arc\,tang} \left(\frac{\sqrt{\cos \mathrm{F}(r)^2 - \sin \mathrm{F}(r)^2 \sin \varphi^2}}{\sin \varphi} \right) \right\},$$

где $\varphi = \frac{\pi}{2} - \mathrm{F}(x)$. То же бы самое нашли, рассматривая S, составленной из вырезка круга и треугольника, которого бока x, r, против r угол $\mathrm{F}(x)$ [100].

1830 VII—VIII 571 || Кривые поверхности измеряются плоскостями сомкнутых треугольников, которых остроя лежат на поверхности и которых размер должен быть тем менее, чем более точности требуется в исчислении. Граница приближения будет воображаемая и математическая величина поверхности, которую непосредственно дает дифференциальное исчисление в предположении бесконечно малых плоскостей.

Пусть координаты: x, к ней перпендикулярная y; к y перпендикулярная z определяют место точки. Вместо $\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{F}(y)$, $\mathrm{F}(z)$ пишем для краткости X, Y, Z. Кроме точки (x, y, z) рассматриваем еще две, которых координаты

$$x,\ y + dy,\ z + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy,$$

$$x + dx,\ y,\ z + \left(\frac{dz}{dx}\right) dx.$$

572 | Находим квадраты расстояний [смотри урав. 34] [101]:

первой от второй $\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 dy^2 + \frac{dy^2}{\sin Z^2}$,

первой от третьей $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 dx^2 + \frac{dx^2}{\sin Y^2 \sin Z^2}$,

второй от третьей $\left[\left(\frac{dz}{dy}\right) dy - \left(\frac{dz}{dx}\right) dx\right]^2 + \frac{dy^2}{\sin Z^2} + \frac{dx^2}{\sin Y^2 \sin Z^2}$.

Площадь бесконечно малого треугольника из сих трех расстояний, и в котором сумму углов должно уже полагать π, будет

$$\frac{dx\,dy}{2 \sin Z} \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}{\sin Y^2} + \frac{1}{\sin Y^2 \sin Z^2}} \quad [102].$$

Если б вместо первой взяли еще точку, которой координаты происходят с переменою x на $x + dx$, y на $y + dy$, то расстояния, а следовательно и площадь треугольника, остались бы те же. Соединение двух таких площадей дает приращение поверхности, когда
573 x увеличится | на dx, y на dy. Называя S поверхность, получим

$$\left(\frac{d^2S}{dx\,dy}\right) = \frac{1}{\sin Z} \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}{\sin Y^2} + \frac{1}{\sin Y^2 \sin Z^2}}. \qquad (44)$$

Для сферы, которой полупоперечник r, координаты x, y, z считаются от центра, $F(r) = R$,

$$\sin X \sin Y \sin Z = \sin R,$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{\cos X}{\cos Z}; \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{\cos Y}{\cos Z},$$

$$\left(\frac{d^2S}{dX\,dY}\right) = \frac{1}{\sin R} \sqrt{\frac{\cos X^2}{\cos Z^2} + \frac{\cot Y^2}{\cos Z^2} + \frac{1}{\sin Y^2 \sin Z^2}} \quad [103].$$

Вставляя значение Z, находим

$$\left(\frac{d^2S}{dX\,dY}\right) = \frac{\cos R}{\sin R^2} \cdot \frac{\sin Y \sin X^2}{\sqrt{\sin X^2 \sin Y^2 - \sin R^2}} \quad [104].$$

Умножая на $4\,dY$ [105] и интегрируя от $\sin Y = \frac{\sin R}{\sin X}$ до $Y = \frac{\pi}{2}$, получим для целой окружности

$$\left(\frac{dS}{dX}\right) = 2\pi \sin X \frac{\cos R}{\sin R^2}.$$

Умножая на dX и интегрируя от X до $X = \frac{\pi}{2}$, находим

574 | $$S = 2\pi \frac{\cos R \cos X}{\sin R^2} \quad [106]$$

— вырезок сферы между плоскостями, перпендикулярными к полупоперечнику, из которых одна проходит чрез центр, а другая на расстоянии x от центра.

Вся сфера будет

$$4\pi \cot R^2 = \pi (e^r - e^{-r})^2. \tag{45}$$

Отрезок на расстоянии x от центра:

$$2\pi \frac{\cos R}{\sin R^2} (\cos R - \cos X) \quad \text{или} \quad \frac{2\pi \cos X \cos R}{1 - \cos X \cos R} \quad [107]$$

на расстоянии x от поверхности. Это последнее выражение для $r = \infty$ дает отрезок предельной сферы:

$$\pi (e^{2x} - 1) \quad [108].$$

Полагая для всякой сферы

$$\cos \psi = \operatorname{tang} R \cot \Gamma; \quad \cos X = \cos R \sin \psi \sin \varphi,$$

находим [109]

$$\left(\frac{d^2 S}{d\psi\, d\varphi}\right) = -\frac{\cos R^2}{\sin R} \cdot \frac{\sin \psi \sqrt{1 - \cos R^2 \sin \psi^2 \sin \varphi^2}}{1 - \cos R^2 \sin \psi^2}.$$

575 | Умножая на $8\, d\psi\, d\varphi$ и интегрируя от $\psi = 0$ до $\psi = \frac{\pi}{2}$, от $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{2}$, снова должны найти величину целой сферы; следовательно,

$$\frac{\pi}{2 \sin R} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi\, d\varphi \sin \psi \sqrt{1 - \cos R^2 \sin \psi^2 \sin \varphi^2}}{1 - \cos R^2 \sin \psi^2}. \tag{46}$$

Интеграл, в котором видно свойство эллиптической функции

$$E(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - a^2 \sin \varphi^2},$$

именно:

$$\frac{\pi a}{2\sqrt{1-a^2}} = \int_0^a \frac{x\,dx\,E(x)}{(1-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} \quad [110].$$

Если возьмем в помощь другую полную эллиптическую функцию

$$H(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin\varphi^2}}$$

и заметим, что

576 | $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi\,d\varphi\cos\psi\sqrt{1-\sin R^2\sin\psi^2\sin\varphi^2}}{1-\sin R^2\sin\psi^2} = H(\sin R) \quad [111]$$

или, что все равно:

$$xH(x) = \int_0^x \frac{dx\,E(x)}{1-x^2},$$

то уравнение (46), когда здесь ставим $\frac{\pi}{2} - R$ вместо R, будучи умножено на $\cos R\,dR$ и интегрировано от $R = 0$, дает [112]

$$\frac{\pi R}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi\,d\varphi\sin R\sin\psi}{\sqrt{1-\sin R^2\sin\psi^2\sin\varphi^2}}.$$

Далее, интегрируя в отношении к ψ между назначенными границами, получим [113]

$$\pi R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin\varphi}\log\left\{\frac{1+\sin R\sin\varphi}{1-\sin R\sin\varphi}\right\},$$

что можно представить еще иначе, полагая $\varphi = \mathrm{F}(x)$,

$$\pi R = \int_0^\infty dx\,\log\left\{\frac{e^{2x}+1+2e^x\sin R}{e^{2x}+1-2e^x\sin R}\right\} \quad [114]$$

577 или, интегрируя по частям,

$$\frac{\pi R}{4\sin R} = \int_0^\infty \frac{(e^{2x}-1)\,e^x x\,dx}{e^{4x}+2e^{2x}\cos 2R+1} \quad [115] \qquad (47)$$

— интеграл, который знали только для $R = \frac{\pi}{2}$, именно:

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^\infty \frac{x\,dx\,e^x}{e^{2x}-1}.$$

Справедливость интеграла (47) можно еще доказать и в том случае, когда вместо $\cos 2R$ будет число более единицы. Начинаем с

$$\int_0^\pi d\psi \log\cot\tfrac{1}{2}\psi = 0$$

или

$$\int_0^\pi d\psi \log\left(e^a \cot\tfrac{1}{2}\psi\right) = \pi a \quad [116].$$

Полагаем здесь $e^x = e^a \cot\frac{1}{2}\psi$. Интеграл переменится в [117]

578 |
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^{x-a}+e^{-x+a}} = \frac{\pi}{2}a.$$

Разделяем его на две части: одну от $x=0$ до $x=\infty$, другую от $x=-\infty$ до $x=0$. Последняя может быть представлена иначе:

$$-\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^{-x-a}+e^{x+a}}.$$

Обе вместе дадут

$$\int_0^\infty \frac{(e^x-e^{-x})\,x\,dx}{e^{2x}+(e^{2a}+e^{-2a})+e^{-2x}} = \frac{\pi a}{2(e^a-e^{-a})}.$$

Если здесь ставим $a\sqrt{-1}$ вместо a, то получим снова (47).

Для поверхности обращения около оси x в уравнении (44) должно ставить

$$\sin Y \sin Z = \sin R;\quad \left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{\cot R}{\cos Z}\cdot\left(\frac{dR}{dx}\right);\quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{\cos Y}{\cos Z},$$

где $R = \mathrm{F}(r)$; x и r — координаты точек производящей линии. После сего находим [118]

579 |
$$\left(\frac{d^2S}{dX\,dY}\right) = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dR}{dx}\right)^2}}{\sin X \sin R^2 \sqrt{1-\operatorname{tang} R^2 \cot Y^2}}.$$

Умножая на $4\,dY$ и интегрируя от $Y=R$ до $Y=\frac{\pi}{2}$, получим

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)=\frac{2\pi\cos R}{\sin R^2}\sqrt{1+\left(\frac{dR}{dx}\right)^2}. \qquad (48)$$

Для прямого конуса [см. урав. 18] [119]

$$\operatorname{tang} A=\operatorname{tang} X\cos R;$$

следовательно,

$$dS=-\frac{2\pi\cos R\,dX}{\sin R^2\sin X\cos A}.$$

Если означаем l бок конуса и полагаем $\mathrm{F}(l)=L$, то [см. урав. 14]

$$\cos L\cos A=\cos X;\quad \operatorname{tang} L=\sin A\operatorname{tang} R \quad [120],$$

после чего

$$dS=-\frac{2\pi\sin A\cos L\,dL}{\sin L^2};$$

интегрирование дает

$$S=2\pi\sin A\left(\frac{1}{\sin L}-1\right).$$

580 | Для предельной круга $\sin R=e^{-x}$, что вставляя в уравнение (48), находим то же, что и выше [121].

Сих примеров довольно, чтобы дать понятие об исчислении величины кривых поверхностей. Теперь займемся определением объема тел.

Объем тела, — ограниченного двумя предельными сферами, выгнутыми в одну сторону и которым взаимное их расстояние c служит общею осью, далее — коническою поверхностию, которой производящая c остается всегда параллельною оси двух сфер, должен быть пропорционален вырезку S на одной из двух предельных сфер, завися при том от c; следовательно, он будет SC, где C — функция от c. Если S больший из двух вырезков, т. е. тот, на внутренней стороне которого лежит c, и если он представляет прямоугольник из дуг a, b предельной круга, то $S=ab$; а меньший вырезок abe^{-2c} [смотри урав. 36]. Вообще, какой бы выре|зок S ни был, другой, который его менее, должен быть $e^{-2c}S$. Теперь,

81

продолжая коническую поверхность за меньший и на каждом расстоянии c пересекая ее предельной сферой, перпендикулярной к c, получим тела, которых объем будет

$$SC;\quad e^{-2c}SC;\quad e^{-4c}SC \text{ и т. д.}$$

и которых сумма, следовательно, тем более приближается к

$$\frac{SC}{1-e^{-2c}},$$

чем коническая поверхность простирается далее; так, что эта граница представляет уже объем тела с бесконечно продолженною поверхностью. В таком случае производитель при S не может более зависеть от c, а, следовательно, объем усеченного конуса с высотою c, какой наперед рассматривали, должно принять

$$\frac{1}{2}S(1-e^{-2c}) \quad [122] \tag{49}$$

582 с тем, чтобы для весьма малого c он | был cS, как в обыкновенной Геометрии.

После сего исчисление объема всякого тела может быть сделано разделением его на элементы помощию конических поверхностей, которых производящие параллельны с какой-нибудь осью, взятою произвольно.

Для примера, пусть четыре плоскости, перпендикулярных по порядку друг к другу, пересекаются в параллельных линиях. Наконец, тело ограничивается еще цилиндрическою поверхностию, которой управляющая дуга b большого круга [123] на одной из четырех перпендикулярных плоскостей, и где две параллельные от пересечения двумя другими плоскостями будут вместе осями дуге b, а производящая линия цилиндрической поверхности пусть перпендикул a к b, отрезанный противоположной плоскостью. Воображаем предельную сферу чрез b и называем s дугу, которая происходит на ней от пересечения с боковой плоскостию чрез a
583 и которая отрезывается противоположной. Пусть y — расстоя|ние между вершинами a и s. С изменением сих двух последних линий объем тела P разделяется параллельными плоскостями на элементы

$$dP = \frac{1}{2}be^{2y}\,ds \quad [124].$$

Вставляем сюда [см. урав. 29, 30 и 36]

$$s = \cos \mathrm{F}(a); \quad e^{-v} = \sin \mathrm{F}(a) \quad [125]$$

и, интегрируя от $a = 0$, находим

$$P = \tfrac{1}{2} ab. \tag{50}$$

Здесь под b можно разуметь также и площадь, ограниченную дугою b и от концов ее двумя бесконечно продолженными осями. Итак, если x — расстояние от прямой, dx — бесконечно малая часть x между двух параллельных с этою прямой, тогда

$$b = -d\,\mathrm{F}(x) \quad [126].$$

Пусть теперь a, b — катеты прямоугольного треугольника, A — угол против a. Рассматриваем пирамиду, которой основание такой треугольник и которая продолжается бесконечно, будучи
584 ограничена тремя плоскостями так, что все | три линии пересечения или *ребра* пирамиды параллельны между собою, а одна перпендикулярна к основанию в острее угла A. Принимаем a, b переменяющимися, A — постоянным. Пирамида P разделится плоскостями, параллельными к перпендикулу, так на элементы, что (50)

$$dP = -\tfrac{1}{2} a\, d\mathrm{F}(b) \quad [127], \tag{51}$$

куда вставляя

$$B = \mathrm{F}(b); \quad \cot B = \cot A \cos \mathrm{F}(a),$$

находим:

$$dP = -\tfrac{1}{4} dB \log \frac{\sin(B+A)}{\sin(B-A)} \quad [128]. \tag{52}$$

Если удерживаем одну первую степень tang A, вместо которой ставим 2π, потом интегрируем от $B = \frac{\pi}{2}$, то получим

$$P = -\pi \log \sin B = \pi \log \frac{e^{b} + e^{-b}}{2} \quad [129] \tag{53}$$

— объем прямого конуса, бесконечно простирающегося, которого основание круг с полупоперечником b и которого ось параллельна боку.

585 | Дифференцируя это последнее уравнение в отношении к b, получим

$$dP = \pi\, db \cos \mathrm{F}(b) \tag{54}$$

— величина конической оболочки, которой толстота db по направлению полупоперечника b круга в основании, и которая простирается бесконечно, идя параллельно с осью конуса.

Чтобы найти величину прямого конуса с высотой конечною, надобно разделять поверхность его на элементы перпендикулярными плоскостями к высоте [130]; потом, начиная от вершины, складывать все конические оболочки, которые идут от сих элементов параллельно к высоте конуса, и сумму вычесть из объема конуса, ограниченного уже последнею оболочкою. Так, пусть x — высота конуса, y — полупоперечник основания, c — бок, A — угол при вершине между x и c. Означаем для краткости X, Y, C углы $\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{F}(y)$, $\mathrm{F}(c)$. В прямоугольном треугольнике из катетов x, y, гипотенузы c, будет

566 | $\cos X = \cos A \cos C$; $\operatorname{tang} A = \cos Y \operatorname{tang} X$; $\operatorname{tang} C = \sin A \operatorname{tang} Y$.

Рассматривая здесь A постоянным, все прочие величины переменяющимися, находим

$$dy = dx \frac{\cos Y}{\sin Y^2 \cos X},$$

Таково изменение y в конусе, которого высота x; но если б $x = \infty$, тогда бы приращение y было (19)

$$dx \frac{\cos Y}{\sin Y^2}.$$

Разность того и другого дает

$$\frac{2\, dx \sin \frac{1}{2} X^2 \cos Y}{\cos X \sin Y^2}$$

— отрезок следующей ордонаты за y помощию параллельной с x проведенной чрез вершину y. После этого объем конуса (54):

$$P = \pi \int dy \cos Y - 2\pi \int \frac{dx \sin \frac{1}{2} X^2 \cos Y^2}{\cos X \sin Y^2} =$$

567 $$= \pi \int dy \cos Y \cos X = \pi \int dx \cot Y^2 \,| = \pi \int \frac{dx}{\sin Y^2} - \pi x,$$

где интегралы начинаются от $x = 0$, $y = 0$. Далее, уравнение для C и X дает

$$dx \sin X^2 = dc \cos A \sin C^2,$$

которое умножая на $\sin Y^2$ и вставляя сюда $\sin X \sin Y = \sin C$, получим

$$dx = dc \cos A \sin Y^2;$$

следовательно,

$$P = \pi (c \cos A - x). \tag{55}$$

Чтобы ввести сюда одни буквы c и A, надобно вместо x ставить

$$\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{1 + \cos \frac{1}{2} A^2 (e^{2c} - 1)}{1 + \sin \frac{1}{2} A^2 (e^{2c} - 1)} \right\} \quad [131]$$

или, строкою [132],

$$x = \frac{1}{2} \cos A \left[(e^{2c} - 1) - \frac{1}{2} (e^{2c} - 1)^2 + \frac{1}{3} (e^{2c} - 1)^3 \frac{3 + \cos A^2}{4} - \text{и т. д.} \right.$$

а продолжая приближение до c^3,

$$x = \cos A \left(c - \frac{1}{3} c^3 \sin A^2 \right),$$

588 | после чего

$$P = \frac{1}{3} \pi c^3 \cos A \sin A^2 = \frac{1}{3} \pi y^2 x,$$

как в обыкновенной Геометрии принято.

Если y так мало, что можно довольствоваться его вторыми степенями, то [133]

$$\cos A = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{tang} C^2 \cot Y^2,$$

$$x = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \cos A \cos C}{1 - \cos A \cos C} \right) = c - \frac{\cot Y^2}{2 \cos C}.$$

Вставляя сии значения в уравнение (55), потом разделяя на величину основания конуса и умножая на поверхность шара, которого полупоперечник c [(38) и (45)], находим объем шара:

$$\frac{\pi}{2} (e^{2c} - e^{-2c} - 4c) \quad [134]. \tag{56}$$

Помощию конических, бесконечно простирающихся оболочек, можем находить объем и всякого тела, ограниченного поверхностию обращения. Пусть x, y — перпендикулярные координаты производящей линии — считаются от точки пересечения поверхности тела с осью x, которая служит вместе и осью обращения.

589 Если | с переменою x на $x + dx$ координата y переменяется в $y + dy$,

то параллельная с x чрез вершину y отрежет от $y+dy$, как мы видели выше, линию

$$dy + dx\frac{\cos Y}{\sin Y^2} \quad [135].$$

Умножая на $\pi \cos Y$, получим коническую оболочку, подобную той, которой значение дано уравнением (54). Потом интегрируя от $x=0$ и отбрасывая

$$\pi \int dy \cos Y,$$

т. е. конус на круге с полупоперечником y (53), находим объем тела

$$\pi \int dx \cot Y^2, \tag{57}$$

где границы интеграла произвольны и где x может считаться в ту или другую сторону. Например, для шара

$$\sin X \sin Y = \sin R,$$

где $R = \mathrm{F}(r)$, r — полупоперечник, $X = \mathrm{F}(x)$, координата x считается от центра. Находим объем шара:

590 $$\pi \int dx \left(\frac{\sin X^2}{\sin R^2} - 1 \right),$$

после интегрирования от $x=0$, вырезок шара будет [136]

$$\pi \left(\frac{\cos X}{\sin R^2} - x \right), \tag{58}$$

умножая на 2 и полагая $X = R$, получим весь шар, как выше (56).

Называя A угол между x и r, потом умножая величину всего шара на $\sin \frac{1}{2} A^2$, находим конический вырезок шара:

$$2\pi \left(\frac{\cos R}{\sin R^2} - r \right) \sin \frac{1}{2} A^2 \quad [137].$$

Если же от половины шара отнимаем вырезок (58), то получим отрезок на расстоянии x от центра [138];

$$\pi \left(\frac{2 \cos R \sin \frac{1}{2} A^2}{\sin R^2} - (r - x) \right).$$

Разность сих двух последних выражений дает объем конуса, как найдено было выше (55).

591 | Если x считаем от поверхности шара, то отрезок плоскостью на расстоянии x будет

$$\pi\left(\frac{\cos X}{1-\cos X\cos R}-x\right) \quad [139].$$

Для $r=\infty$ находим отрезок тела, ограниченного предельною сферой

$$\pi\left(\frac{e^{2x}-1}{2}-x\right) \quad [140].$$

Общее дифференциальное выражение для вычисления объема всякого тела может быть дано в элементах, на которые делится тело помощию предельных сфер и двумя рядами параллельных плоскостей, нормальных к предельным сферам и перпендикулярных, один ряд к другому. В таком случае называем ξ расстояние от начала координат на одной из осей предельных сфер, которая вместо будет, следовательно, осью координат ξ. Называем η дугу на предельной сфере, перпендикулярную к ξ, и пусть ζ — такая же
592 дуга, проведенная от | другого конца η в плоскости, перпендикулярной к той, где лежат ξ, η. Ясно, что элемент тела может быть представлен [(49) и (50)] произведением

$$d\xi\, d\eta\, d\zeta \quad [141].$$

Воображаем перпендикулы: z от вершины ζ на плоскость линий ξ, η; y от конца z на ξ, и называем x отрезанную часть этой последней от начала координат [142]. Означая X, Y, Z углы $F(x)$, $F(y)$, $F(z)$, получим [(27), (29), (36)]:

$$\zeta=\cot Z;\quad \eta=\frac{\cot Y}{\sin Z}.$$

Принимая сперва одно z переменяющимся, потом одно y, наконец, одно x,

$$d\zeta=\frac{dz}{\sin Z};\quad d\eta=\frac{dy}{\sin Y\sin Z};\quad d\xi=dx \quad [143],$$

после чего элемент тела

$$d^3P=\frac{dx\,dy\,dz}{\sin Y\sin Z^2}. \tag{59}$$

То же бы нашли, разделяя тело перпендикулярными друг к другу
598 плоскостями и принимая произведение трех боков | за объем бес-

конечно малого элемента [144]. Интегрируя (59) от $x=0$, $y=0$, $z=0$, получим

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d^3P}{dy\,dz}\right) &= \frac{x}{\sin X^2 \sin Z^2},\\ \left(\frac{d^3P}{dx\,dz}\right) &= \frac{\cot Y}{\sin Z^2},\\ \left(\frac{d^3P}{dx\,dy}\right) &= \frac{1}{8\sin Y}\,(e^{2z}-e^{-2z}+4z)\ [145].\end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

где x, y, z относятся уже к поверхности тела. Для шара, когда координаты считаются от центра, уравнение (60) делается

$$\left(\frac{d^3P}{dX\,dZ}\right) = \frac{1}{\sin Z^2}\sqrt{\frac{1}{\sin R^2}-\frac{1}{\sin X^2 \sin Z^2}}\quad [146],$$

где $R=\mathrm{F}(r)$; r — полупоперечник. Умножая на dZ и интегрируя от $Z=\frac{\pi}{2}$ до $\sin R=\sin X \sin Z$, находим снова выражение (56).

Если r — расстояние точки от начала координат, θ — угол r с плоскостию xy, ω — угол проекции r на плоскости xy с осью x, то выражение (59) дает элемент тела в полярных координатах: 594

$$d^3P=\frac{1}{4}\,d\omega\,d\theta\,dr\cos\theta\,(e^r-e^{-r})^2\quad [147], \qquad (61)$$

которое выражение еще легче служит к исчислению объема шара и прямого конуса.

Ищем теперь величину пирамиды, которой основание прямоугольный треугольник из катетов a, b и гипотенузы c; высота h, перпендикулярная к основанию в точке пересечения a с c. Называем ψ угол между a и c; r — гипотенузу в прямоугольном треугольнике из катетов c, h; в этом же треугольнике пусть φ — угол против c. Пирамида, которую назовем P, разделится на элементы (55)

$$dP=\frac{1}{2}\,d\psi\,(r\cos\varphi-h)\quad [148], \qquad (62)$$

откуда чрез интегрирование

$$P=\frac{1}{2}\int_0 d\psi\cdot r\cos\varphi-\frac{1}{2}\,\psi h. \qquad (63)$$

Точно так же, если называем ω угол против h в треугольнике из a и h, θ — угол между b и r:

$$P=\frac{1}{2}\int_0 d\omega\cdot r\cos\theta-\frac{1}{2}\,b\omega\quad [149]. \qquad 595$$

Зависимость линий и углов a, h, r, φ, ψ, ω между собою определяется уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\varphi\cos\psi &= \cos A\operatorname{tang}H,\\ \operatorname{tang}\omega &= \cos H\operatorname{tang}A,\\ \cos H &= \cos\varphi\cos R, \end{aligned}\right\} \quad [150] \tag{64}$$

где $A = \mathrm{F}(a)$, $H = \mathrm{F}(h)$, $R = \mathrm{F}(r)$. Здесь можно переменять H, φ, ψ, ω на B, θ, ω, ψ, разумея под B угол $\mathrm{F}(b)$; следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\theta\cos\omega &= \cos A\operatorname{tang}B,\\ \operatorname{tang}\psi &= \cos B\operatorname{tang}A,\\ \cos B &= \cos\theta\cos R. \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Отсюда находим [151]

$$\left.\begin{aligned} \cos\psi &= \frac{\cos A\sin H}{\sqrt{\sin H^2-\sin R^2}},\\ \cos\varphi &= \frac{\cos\psi\sin\omega}{\sqrt{\sin A^2-\sin\omega^2\sin\psi^2}},\\ \cos R &= \frac{\cot A\sqrt{\sin A^2-\sin\omega^2\sin\psi^2}}{\cos\omega\cos\psi}. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

396 Выражение (63) может быть представлено различно. Если вводим величины A, H, R, то

$$2P = \frac{1}{2}\cos A\sin 2H\int_R \frac{dR\sin R\log\cot\frac{1}{2}R}{(\sin H^2-\sin R^2)\sqrt{\sin A^2\sin H^2-\sin R^2}} -$$

$$-\arccos\frac{\cos A\sin H}{\sqrt{\sin H^2-\sin R^2}}\log\cot\frac{1}{2}H \quad [152], \tag{67}$$

где интеграл оканчивается с $\sin R = \sin A\sin H$, как можно видеть в уравнениях (64).

Переменяя буквы и сравнивая два значения P, получим [153]

$$\cos A\sin 2H\int \frac{dR\sin R\log\cot\frac{1}{2}R}{(\sin H^2-\sin R^2)\sqrt{\sin A^2\sin H^2-\sin R^2}} -$$

$$-\cos A\sin 2B\int \frac{dR\sin R\log\cot\frac{1}{2}R}{(\sin B^2-\sin R^2)\sqrt{\sin A^2\sin B^2-\sin R^2}} =$$

$$= 2\operatorname{arctang}(\operatorname{tang}A\cos B)\log\cot\frac{1}{2}H -$$

$$-2\operatorname{arctang}(\operatorname{tang}A\cos H)\log\cot\frac{1}{2}B,$$

где интегралы начинаются, как можно заключить из уравнений (64), (65), с

$$\sin R = \sin A \sin B \sin H$$

507 | и оканчиваются, когда выражение под квадратным корнем интеграла делается нулем.

Если полагаем [154]

$$\sin \alpha = \frac{\sin \omega \sin \psi}{\sin A}, \tag{68}$$

то находим

$$2P = \alpha r - \psi h - \int \alpha \, dr,$$

куда надобно поставить [155]

$$r = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\cos \omega \cos \psi + \cos A \cos \alpha}{\cos \omega \cos \psi - \cos A \cos \alpha} \right), \tag{69}$$

после чего [156]

$$4P = 2\alpha r - 2\psi h - \cos A \sin 2\omega \int_0 \frac{\alpha \, d\alpha \sin \alpha}{(\sin \omega^2 - \sin \alpha^2) \sqrt{\sin \omega^2 - \sin \alpha^2 \sin A^2}}, \tag{70}$$

а сравнивая два значения P, получим [157]

$$\cos A \sin 2\omega \int_0 \frac{\alpha \, d\alpha \sin \alpha}{(\sin \omega^2 - \sin \alpha^2) \sqrt{\sin \omega^2 - \sin \alpha^2 \sin A^2}} -$$

$$- \cos A \sin 2\psi \int_0 \frac{\alpha \, d\alpha \sin \alpha}{(\sin \psi^2 - \sin \alpha^2) \sqrt{\sin \psi^2 - \sin \alpha^2 \sin A^2}} =$$

508 | $$= \omega \log \frac{\sin (A + \psi)}{\sin (A - \psi)} - \psi \log \frac{\sin (A + \omega)}{\sin (A - \omega)},$$

где углы A, ψ, ω не зависят друг от друга и где интегралы оканчиваются с

$$\sin \alpha = \frac{\sin \omega \sin \psi}{\sin A},$$

но где необходимо $A > \psi$ и $> \omega$.

Наконец, мы видели, что

$$\int_0 d\psi \, r \cos \varphi = \int_0 r \, d\alpha.$$

Если ставим сюда значение r (69), то последний интеграл можно представить, рассматривая в нем A, α независящими, ψ функцией от A и α, а прочие постоянными [158]:

$$2\cos\omega\int_0 d\alpha\cos\alpha\int_A^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin A\,dA}{(\sin A^2-\sin\omega^2)\cos\psi}=$$

$$=2\cos\omega\int_0\frac{\sin A}{\cos\psi}\cos\alpha\,d\alpha\int_A^{\frac{\pi}{2}}\frac{dA}{\sin A^2-\sin\omega^2}+$$

599 | $$+\frac{1}{\sin\omega}\int_0 d\alpha\cos\alpha\int_A^{\frac{\pi}{2}}\frac{dA\cos A}{\cos\psi^3}\log\frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)}$$ [159];

в последнем двойном интеграле, изменяя порядок интегрирования находим [160]

$$2\int r\,d\alpha=\psi\log\frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)}+\frac{\sin\alpha}{\sin\omega}\int_A^{\frac{\pi}{2}}\frac{dA\cos A}{\cos\psi}\log\frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)},$$

что вставляя в уравнение (63), получим [161]

$$4P=\sin 2\omega\int_A^{\frac{\pi}{2}}\frac{\psi\,dA}{\sin(A+\omega)\sin(A-\omega)}-2\,\psi h,$$ [162]

по где надобно вместо ψ поставить значение (68) и потом рассматривать одно только A переменяющимся, следовательно [163],

$$P=-\frac{1}{2}\psi h+\frac{1}{2}\cos\omega\sin\alpha^2\int\frac{\psi\,d\psi\cos\psi}{(\sin\psi^2-\sin\alpha^2)\sqrt{\sin\alpha^2-\sin\omega^2\sin\psi^2}},\quad(71)$$

где одно ψ рассматривается переменяющимся, а интеграл берется от ψ до

$$\sin\psi=\frac{\sin\alpha}{\sin\omega}.$$

600 | Для $\psi=A$ делается $b=\infty$, и пирамида P простирается бесконечно. Тогда уравнение (63) дает [164]

$$2P=\int_0^A d\psi\cdot r\cos\varphi-Ah.\qquad(72)$$

Но можно еще иначе найти значение P, применяя сюда выражение (51), именно:

$$2P = \int_A^{\frac{\pi}{2}} h\,dA$$

или, вставляя значение h из уравнений (64),

$$4P = \int_A^{\frac{\pi}{2}} dA \log \frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)} \quad [165]. \tag{73}$$

Наконец, основываясь на уравнении (53), еще можно писать [166]

$$2P = -\int_0 d\omega \log(\sin A \sin H),$$

где H рассматривается функцией от ω, а вставляя значение H из уравнений (64), получим

601 | $$4P = -\int_0 d\omega \log\left(1 - \frac{\cos A^2}{\cos \omega^2}\right); \tag{74}$$

то и другое выражение для P одинаково, как можно увериться дифференцированием [167].

Таким же образом, полагая в (71) углы ψ и A равными, следовательно, и $\alpha = \omega$, находим

$$4P = \sin 2\omega \int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{A\,dA}{\sin(A+\omega)\sin(A-\omega)} - A \log \frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)} \quad [168],$$

то же выражение, что и (73). Такое значение определенного интеграла

$$\int_0^A d\psi \cdot r \cos\varphi$$

можно, следовательно, рассматривать как доказанное геометрически и аналитически.

Уравнение (73), когда ставим сюда значение A из (64), может быть еще представлено [169]

$$P = \sin 2\omega \int_0 \frac{h\,dh}{e^{2h} + e^{-2h} - 2\cos 2\omega}. \tag{75}$$

602 | Чрез сложение и вычитание подобных пирамид с параллельными ребрами, и которых величину определили мы выражениями (73) и (75), можно составить вообще всякую пирамиду. Так, P в уравнении (63) может быть представлено

$$P = P' - P'' + P_1 - P_2, \tag{76}$$

где P', P'', P_1 и P_2 — трехсторонние пирамиды, которых ребра параллельны высоте b пирамиды P [170]. Из сих пирамид у P' основание общее с P, т. е. прямоугольный треугольник, которого катеты a, h, угол ω против h. Чтобы показать, какие треугольники служат основаниями остальным трем пирамидам и каково их положение, заметим прежде следующие линии и углы. В прямоугольном треугольнике из катетов a, b, и где ψ угол против b, называем c гипотенузу. В прямоугольном треугольнике из катетов h, c называем, как это было выше, r гипотенузу и φ угол против c (см. урав. 63), γ угол против h. Параллельная с b от прямого угла между a и h делает с c угол

603 | $$A - \psi = \mathrm{F}(c + d). \tag{77}$$

Линия d происходит от продолжения c чрез вершину пирамиды P и определяется тем, что от конца ее параллельная с b делается перпендикулярна к d и, следовательно, к плоскости треугольника из h, c, r. Опускаем теперь перпендикул g от этого конца d на продолжение r чрез вершину пирамиды P и называем l отрезок от продолжения r. Так произойдут прямоугольные треугольники: с катетами h, $c + d$, который будет основанием пирамиды P'', и где пусть λ — угол против h; с катетами g, $r + l$ — основание пирамиды P_1; наконец, основание пирамиды P_2, с катетами g, l, и где пусть μ — угол против l. Зависимость углов и боков в сих треугольниках определяется в дополнение к уравнениям (64) и (65) с означением подобно тому, как было выше

$$C = \mathrm{F}(c), \quad D = \mathrm{F}(d), \quad G = \mathrm{F}(g), \quad L = \mathrm{F}(l),$$

еще уравнениями:

604 |
$$\left.\begin{aligned}
&\cos C\cos\psi=\cos A,\\
&\cos D\cos\mu=\cos G,\\
&\sin C=\sin A\sin B,\\
&\operatorname{tang}\mu=\cos L\operatorname{tang} G,\\
&\operatorname{tang}\lambda=\cos H\operatorname{tang}(A-\psi),\\
&\sin R=\sin H\sin C,\\
&\operatorname{tang}\gamma=\cos H\operatorname{tang} C,\\
&\sin D=\operatorname{tang}\gamma\operatorname{tang}\mu;
\end{aligned}\right\}\qquad(78)$$

из двух последних находим

$$\sin D=\operatorname{tang}\mu\cos H\operatorname{tang} C;$$

заметим, что (77) дает [171]

$$\sin D=\frac{\sin(A-\psi)\sin C}{1-\cos(A-\psi)\cos C},$$

$$\cos D=\frac{\cos(A-\psi)-\cos C}{1-\cos(A-\psi)\cos C},$$

куда вставляя $\cos C$ из первого уравнения (78),

$$\sin D=\frac{\sin C\cos\psi}{\sin A};\quad \cos D=\frac{\sin\psi}{\sin A}.\quad [172].$$

После чего

$$\operatorname{tang}\mu=\frac{\cot A}{\cos H};$$

605 | сравнивая с значением $\operatorname{tang}\omega$ в уравнениях (64), заключаем [173]:

$$\mu=\frac{\pi}{2}-\omega.$$

Уравнение (68) и второе уравнение из (78) дают

$$\sin\alpha=\cos G,$$

следовательно [174],

$$G=\frac{\pi}{2}-\alpha.$$

Вставляя сии значения в уравнения (78), получим

$$\left.\begin{aligned}
&\cos C\cos\psi=\cos A,\\
&\sin C=\sin A\sin B,\\
&\cos L=\cot\omega\operatorname{tang}\alpha,\\
&\operatorname{tang}\lambda=\cos H\operatorname{tang}(A-\psi),\\
&\sin R=\sin H\sin A\sin B;
\end{aligned}\right\}\qquad(79)$$

если к тому полагаем

$$h' = r + l,$$

то, применяя сюда уравнение (75), находим

606 | [175]

$$\left.\begin{aligned} P' &= \sin 2\omega \int \frac{h\,dh}{e^{2h} + e^{-2h} - 2\cos 2\omega}, \\ P'' &= \sin 2\lambda \int \frac{h\,dh}{e^{2h} + e^{-2h} - 2\cos 2\lambda}, \\ P_1 &= \sin(2\omega - 2\lambda) \int \frac{h'\,dh'}{e^{2h'} + e^{-2h'} + 2\cos(2\omega - 2\lambda)}, \\ P_2 &= \sin 2\omega \int \frac{l\,dl}{e^{2l} + e^{-2l} + 2\cos 2\omega}, \end{aligned}\right\} \quad (80)$$

где все интегралы начинаются от нуля. Или, употребляя выражение (73) для подобных пирамид:

[176]

$$\left.\begin{aligned} 4P' &= \int_A^{\frac{\pi}{2}} dA \log \frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)}, \\ 4P'' &= \int_{A-\psi}^{\frac{\pi}{2}} dA \log \frac{\sin(A+\lambda)}{\sin(A-\lambda)}, \\ 4P_1 &= \int_0^{\alpha} d\alpha \log \frac{\sin(\alpha+\omega-\lambda)}{\sin(\omega-\alpha-\lambda)}, \\ 4P_2 &= \int_0^{\alpha} d\alpha \log \frac{\sin(\omega+\alpha)}{\sin(\omega-\alpha)}. \end{aligned}\right\} \quad (81)$$

607 | В сих значениях (80) и (81) пирамид можно переменять h, ω на b, ψ, и обратно, оставляя A и α, для составления значения (76) пирамиды P [177].

Рассматриваем еще пирамиду, которой основание трапеция из линий h, a, a', h', перпендикулярных по порядку друг к другу, и которой одно ребро перпендикулярно к основанию в точке пересечения a с a', прочие с ним параллельны. Продолжая означать

$$A = \mathrm{F}(a), \quad H = \mathrm{F}(h), \quad A' = \mathrm{F}(a'), \quad H' = \mathrm{F}(h')$$

величину такой пирамиды, находим (51) [178]:

$$-\tfrac{1}{2}\int h\,dA,$$

начиная интеграл от $a=0$ и, где надобно, поставивши (21)

$$\sin A \cos \Pi = \cos A',$$

рассматривать A и Π переменяющимися. Если разделяем эту пирамиду на две трехсторонние плоскостию чрез ребро, перпендикулярное к основанию и противоположное ему в соединении h с h',
608 называем ω угол против h в прямоугольном треугольнике из a, h и сравниваем величину четырехсторонней пирамиды с суммою двух трехсторонних (75), то получим [179]

$$\int_0 \frac{h\,dh}{e^{2h}+e^{-2h}-2\cos 2\omega} + \int_0 \frac{h'\,dh'}{e^{2h'}+e^{-2h'}+2\cos 2\omega} =$$

$$= \frac{1}{4\sin 2\omega} \int_A^{\frac{\pi}{2}} dA \log \frac{\sin A + \cos A'}{\sin A - \cos A'};$$

здесь последний интеграл составляется из двух

$$2\int dx \log \operatorname{tang} x - 2\int dy \log \operatorname{tang} y$$

$$\text{от } x = \frac{\pi}{4} + \frac{A-A'}{2} \text{ до } x = \frac{\pi - A'}{2};$$

$$\text{от } y = \frac{A+A'}{2} - \frac{\pi}{4} \text{ до } y = \frac{A'}{2} \text{ [180]};$$

но по свойству сих интегралов можно придать еще такой же между границами $\frac{\pi - A'}{2}$ и $\frac{A'}{2}$ [181], тогда все три соединятся в один между границами

$$\frac{\pi}{4} + \frac{A-A'}{2} \quad \text{и} \quad \frac{A+A'}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Итак,

608 $$\int \frac{h\,dh}{e^{2h}+e^{-2h}-2\cos 2\omega} + \int \frac{h'\,dh'}{e^{2h'}+e^{-2h'}+2\cos 2\omega} =$$

$$= \frac{1}{2\sin 2\omega} \int \frac{z\,dz}{e^z+e^{-z}} \text{ [182]} \qquad (82)$$

от $h=0$, $h'=0$; от

$$z = \log \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-A'}{2}\right)$$

до

$$z = \log \cot\left(\frac{A+A'}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Отношения между h, h', A, A' определяются уравнениями [183]

$$\operatorname{tang}\omega = \cos H \operatorname{tang} A,$$

$$\cot\omega = \cos H' \operatorname{tang} A',$$

и еще уравнением [см. (22)]

$$\operatorname{tang} H' = \sin H \operatorname{tang} A,$$

следовательно,

$$\operatorname{tang} H' = \operatorname{tang}\omega \operatorname{tang} H,$$

отсюда

$$\cos A' = \cos A \operatorname{tang}\omega, \tag{83}$$

610 $$e^{h'} = \frac{1}{2}\cot\omega\,(e^h - e^{-h}) + \sqrt{\frac{1}{4}\cot\omega^2\,(e^h - e^{-h})^2 + 1} \quad [184],$$

а крайние значения для z будут $h' - h$ и $h' + h$ [185]; для $h = \infty$ находим $h' = \infty$, $A = \omega$, $A' = \frac{\pi}{2} - \omega$. После чего

$$\int_0^\infty \frac{(e^h + e^{-h})\,h\,dh}{e^{2h} + e^{-2h} - 2\cos 2\omega} = \frac{1}{\sin\omega}\int \frac{z\,dz}{e^z + e^{-z}}, \tag{84}$$

где интеграл в отношении к z берется от $z = \log\cot\frac{1}{2}\omega$ до $z = \infty$.

Если в уравнение (82) вместо h и h' вводим A и A', то [см. (73)] получим [186]

$$\int_A^{\frac{\pi}{2}} dA \log\frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)} + \int_{A'}^{\frac{\pi}{2}} dA' \log\frac{\cos(A'-\omega)}{\cos(A'+\omega)} = 2\int \frac{z\,dz}{e^z + e^{-z}},$$

или, полагая $A' = \frac{\pi}{2} - A_1$,

$$\int dA \log\frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)} + \int dA_1 \log\frac{\sin(A_1+\omega)}{\sin(A_1-\omega)} = 2\int \frac{z\,dz}{e^z + e^{-z}}, \tag{85}$$

611 | где интегралы берутся от A до $A = \frac{\pi}{2}$; от $A_1 = 0$ до [см. (83)]

$$\sin A_1 = \cos A \operatorname{tang}\omega \quad [187]$$

и от $z = \log\cot\left(\frac{A + A_1}{2}\right)$ до $z = \log\cot\left(\frac{A - A_1}{2}\right)$. Надобно заметить, что в уравнении (85) числа, от которых берутся логарифмы, принимаются всегда положительными.

Для $A = A_1$ уравнение (85) делается [188]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dA \log \frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)} = 2\int^{\infty} \frac{z\,dz}{e^z + e^{-z}}. \qquad (86)$$

Последний интеграл начинается с $z = \log\cot\omega$.

Чтоб показать еще на некоторых примерах, как много теория определенных интегралов может ожидать от введения новых начал Геометрии, мы займемся вычислением по различному способу объема прямых пирамид и конусов *.

612 | Пусть основание прямого конуса — круг, которого полупоперечник r, а центр служит началом координатам x, y точек на окружности. Полагаем

$$R = \mathrm{F}(r), \quad X = \mathrm{F}(x), \quad Y = \mathrm{F}(y).$$

Когда бока параллельны с осью, то объем конуса, как мы видели (53), будет

$$-\pi \log \sin R$$

и может быть еще выражен иначе (51) [189]:

$$2\int_R^{\frac{\pi}{2}} y\,dX.$$

Вставляя сюда значения X, Y из уравнения круга [190]:

$$\sin X \sin Y = \sin R$$

и сравнивая два значения для объема конуса, находим

$$\int_R^{\frac{\pi}{2}} dX \log \frac{\sin X + \sqrt{\sin X^2 - \sin R^2}}{\sin X - \sqrt{\sin X^2 - \sin R^2}} = -\pi \log \sin R,$$

613 |
$$\int_R^{\frac{\pi}{2}} \frac{dY \cot Y \log\cot\frac{1}{2}Y}{\sqrt{\sin Y^2 - \sin R^2}} = -\frac{\pi \log \sin R}{2 \sin R} \quad [191].$$

* Все дальнейшие интегральные вычисления впервые расшифрованы и местами исправлены А. П. Котельниковым в примечаниях к этому тексту. [*Примечание главного редактора*].

Интегрируя по частям, первый интеграл переменим в

$$\int_R^{\frac{\pi}{2}} \frac{X\,dX\cos X}{\sqrt{\sin X^2 - \sin R^2}} = \frac{\pi}{2}\log(1+\cos R) \quad [192],$$

как и Лежандр нашел два эти последние интеграла (Suppl. aux Exercices de calcul intégral. T. I) [193].

Если высота конуса не бесконечная, то в пирамиде, которой высота h та же, что и конуса, и которой основанием служит треугольник из x, y, означаем c, q линии от вершины до конца y на окружности и до другого конца y на оси x; ω — угол q с h, φ — угол c с h, θ — угол c с q. Далее, под C, Q, H разумеем углы $\mathrm{F}(c)$, $\mathrm{F}(q)$, $\mathrm{F}(h)$. Такая пирамида дана уравнением (61), которое в настоящем случае делается [194]

$$d^3P = \frac{1}{4}\,d\omega\,d\theta\,dc\cos\theta\,(e^c - e^{-c})^2.$$

614 | Интегрируя в отношении к c от $c=0$, получим

$$4\,d^2P = d\omega\,d\theta\cos\theta\left(\frac{2\cos C}{\sin C^2} - \log\frac{1+\cos C}{1-\cos C}\right) \quad [195].$$

Ставим сюда

$$\cos\theta\cos C = \cos Q$$

и интегрируем в отношении к θ от $\theta = 0$:

$$4\,dP = d\omega\left(\frac{2y}{\sin Q} - 2\sin\theta\log\cot\frac{1}{2}C\right) \quad [196];$$

наконец, ставя

$$\sin Q = \sin H\sin X,$$

$$\operatorname{tang}\omega = \operatorname{tang} H\cos X, \quad [197]$$

$$\operatorname{tang}\theta = \cos Y\operatorname{tang} Q,$$

получим

$$2dP = -\frac{\cos H\,y\,dX}{1-\sin H^2\sin X^2} + \sin H^2\cos H\frac{c\cos Y\sin X^2\,dX}{\cos C(1-\sin H^2\sin X^2)} \quad (87)$$

для $h = \infty$, следовательно и $H = 0$, находим снова выражение (51) элемента в пирамиде с параллельными ребрами.

615 | Интегрирование уравнения (87) [198] в отношении к X дает конус, где высота стоит в начале координат x, y и где основание ограничено линией, которая определяется уравнением между X и Y. Например, когда основание круг, то c и r постоянны,

$$\sin X \sin Y = \sin R.$$

В таком случае, распространяя интеграл на все основание конуса и сличая с значением, какое было найдено прежде (55), заметив к тому, что здесь

$$\int_R^{\frac{\pi}{2}} \cos Y dY = \frac{\pi}{2}(1 - \sin R),$$

после всех приведений заключаем:

$$\int_R^{\frac{\pi}{2}} \frac{dY \sin Y \cos Y \log \cot \frac{1}{2} Y}{(\sin Y^2 - \sin C^2)\sqrt{\sin Y^2 - \sin R^2}} = \frac{\pi \log (\cot \frac{1}{2} C \operatorname{tang} \frac{1}{2} H)}{2 \sin R \cos H}, \quad (88)$$

где $\sin C = \sin H \sin R$. Из этого интеграла следуют все те, к кото-
616 рым Г. Лежандр приходит помощию эллиптических функций (Exercices de calcul intégral, suppl. à la 1-e partie, par Legendre).

Если основание пирамиды — трапеция, которая составляется, когда от вершины y' опускается перпендикул на ось y и здесь отрезывает к началу координат линию a, то полагая $A = \mathrm{F}(a)$, надобно ставить [см. ур. (21)]

$$\sin X \cos Y = \cos A,$$

и тогда уравнение (87) сделается [199]

$$2P = \cos H \cos A \int_Y^A \frac{dY \sin Y \cos Y \log \cot \frac{1}{2} Y}{(\cos Y^2 - \sin H^2 \cos A^2)\sqrt{\cos Y^2 - \cos A^2}} -$$

$$- \cos H \sin H \cos A \int \frac{dC \sin C \log \cot \frac{1}{2} C}{(\cos C^2 - \sin H^2 \cos A^2)\sqrt{\sin A^2 \sin H^2 - \sin C^2}}. \quad (89)$$

Последний интеграл берется от $\sin C = \sin A \sin H$ до $\sin C = \sin H \cos A \operatorname{tang} Y$. Пирамида P происходит в таком случае из

соединения двух трехсторонних прямых, из которых величина
617 каждой может быть выражена, как мы | видели, суммою интегралов такого вида [см. (76) и (80)]:

$$\int_0 \frac{h\,dh}{e^{2h} + e^{-2h} - 2\cos 2\omega},$$

где ω — постоянный угол.

Сравнение интегралов и найденные вновь определенные интегралы.

Следующие двойные интегралы заслуживают внимания (46):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi\, d\varphi \sin\psi \sqrt{1-\alpha^2 \sin\psi^2 \sin\varphi^2}}{1-\alpha^2 \sin\psi^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-\alpha^2}}, \tag{90}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi\, d\varphi \cos\psi \sqrt{1-\alpha^2 \sin\psi^2 \sin\varphi^2}}{1-\alpha^2 \sin\psi^2} = H(\alpha). \tag{91}$$

Буква H означает эллиптическую функцию, именно:

$$H(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin\varphi^2}}.$$

618 | Если берем другую эллиптическую функцию

$$E(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1-\alpha^2 \sin\varphi^2},$$

то два интеграла (90) и (91) представляют свойство сих двух эллиптических функций:

$$\frac{\pi\alpha}{2\sqrt{1-\alpha^2}} = \int_0^{\alpha} \frac{x\,dx\,E(x)}{(1-x^2)\sqrt{\alpha^2-x^2}} \quad [200],$$

$$xH(x) = \int_0^{\cdot} \frac{dx\,E(x)}{1-x^2}.$$

Из уравнений (90) и (91) еще следует

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi\, d\varphi \sin\alpha \sin\psi}{\sqrt{1-\sin\alpha^2 \sin\psi^2 \sin\varphi^2}} = \frac{\pi\alpha}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} \log\left(\frac{1+\sin\alpha\sin\varphi}{1-\sin\alpha\sin\varphi}\right) = \pi\alpha,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{(e^x - e^{-x})\, x\, dx}{e^{2x}+e^{-2x}+2\cos 2\alpha} = \frac{\pi\alpha}{4\sin\alpha} \quad [201]. \tag{92}$$

619 | Этот интеграл был известен до сих пор только для $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Справедливость его можно доказать и для числа > 1 вместо $\cos 2\alpha$. Тогда он сделается

$$\int_0^{\infty} \frac{(e^x - e^{-x})\, x\, dx}{e^{2x}+e^{-2x}+e^{2\alpha}+e^{-2\alpha}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\alpha}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}$$

или, что все равно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\, dx}{e^{\alpha-x}+e^{-\alpha+x}} = \frac{\pi}{2}\alpha.$$

Этот интеграл может быть еще представлен, следуя нашему означению,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, dx \sin \mathrm{F}(x-\alpha) = \pi\alpha.$$

Дифференцируя в отношении к α, находим для целого числа i:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, dx \sin(2i+1)\,\mathrm{F}(x-\alpha) = \pi\alpha,$$

620 | $$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, dx \sin 2i\,\mathrm{F}(x-\alpha) = 2\pi\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2i-1}\right) \quad [302].$$

Полагая здесь $\alpha = 0$ и $\mathrm{F}(x) = \varphi$, получим

$$\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} \sin 2i\varphi \log\cot\frac{1}{2}\varphi = 2\pi\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2i-1}\right).$$

Мы видели (84), что

$$\int_0^\infty \frac{(e^x + e^{-x})\,x\,dx}{e^{2x} + e^{-2x} - 2\cos 2\omega} = \frac{1}{2\sin\omega}\int_0^\omega d\omega \log\cot\frac{1}{2}\omega \quad [203]. \qquad (93)$$

Соединяя этот интеграл с (92), поставя сюда $\frac{\pi}{2} - \omega$ вместо ω, получим [204]

$$\int_0^\infty \frac{e^x\,x\,dx}{e^{2x} + e^{-2x} - 2\cos 2\omega} = \frac{\pi(\pi - 2\omega)}{16\cdot\cos\omega} + \frac{1}{4\sin\omega}\int_0^\omega d\omega \log\cot\frac{1}{2}\omega,$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,x\,dx}{e^{2x} + e^{-2x} - 2\cos 2\omega} = -\frac{\pi(\pi - 2\omega)}{16\cos\omega} + \frac{1}{4\sin\omega}\int_0^\omega d\omega \log\cot\frac{1}{2}\omega.$$

631 | Два определенные интеграла, которых значения мы теперь дали, могут быть представлены еще помощию интеграла

$$\int_0 \frac{x\,dx}{e^x + e^{-x} - 2\cos\omega},$$

который будем означать для краткости

$$L(x,\ \omega),$$

когда он берется от $x = 0$, и просто будем писать

$$L(\omega),$$

когда $x = \infty$. Этому интегралу, во-первых, принадлежит то свойство, что

$$L(\omega) - L(\pi - \omega) = \cos\omega\, L(2\omega) \quad [205],$$

$$L(x,\ \omega) - L(x,\ \pi - \omega) = \cos\omega\, L(2x,\ 2\omega).$$

Уравнение (93) дает еще

$$L(\omega) + L(\pi - \omega) = \frac{1}{\sin\omega}\int_0^\omega d\omega \log\cot\frac{1}{2}\omega \quad [206].$$

От интегралов $L(x, \omega)$ зависит много других. Так [см. (64), (73), (74), (75)]:

623 |
$$\int_0^\omega d\xi \log\frac{\cos(\xi - \omega)}{\cos(\xi + \omega)} = \sin 2\omega L(x,\ 2\omega), \qquad (94)$$

$$\int_0^\omega d\omega \log\frac{\cos\omega^2}{\cos(\omega + \xi)\cos(\omega - \xi)} = \sin 2\omega L(x,\ 2\omega) \quad [207],$$

где

$$x = \log \frac{\cos(\xi - \omega)}{\cos(\xi + \omega)}.$$

Из сих двух интегралов видно, что $L(x, 2\omega)$ зависит также от интеграла более простого

$$-\int_0 dx \log\cos x = \Phi(x),$$

именно:

$$\sin 2\omega\, L(x, 2\omega) = \Phi(\omega + \xi) + \Phi(\omega - \xi) - 2\Phi(\omega) \quad [208], \qquad (95)$$

где

$$\operatorname{tang} \xi = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \cot \omega.$$

Интеграл (94) дает еще такой [209]:

623 |
$$\int_0 \frac{\xi\, d\xi}{\cos(\xi + \omega)\cos(\xi - \omega)} = \frac{\xi}{\sin 2\omega} \log \frac{\cos(\xi - \omega)}{\cos(\xi + \omega)} - L(x, 2\omega). \qquad (96)$$

Лежандр рассматривал такого рода интеграл (Exercices de calcul intégral, T. II, page 217) и для $\xi = \frac{\pi}{2}$ находит строку в синусах кратной дуги ω, но как такою строкою может быть представлена $\Phi(\omega)$, то выражение (95) подает средство к подобному разложению и для всякого ξ.

Из уравнений (64), (65), (67), (76), (79) и (80) после всех приведений находим [210]:

$$\sin 2\beta \cos\alpha \cos\omega \int_\xi^\alpha \frac{d\xi \sin\xi \log\cot\frac{1}{2}\xi}{(\sin\beta^2 - \sin\xi^2)\sqrt{\sin\alpha^2 - \sin\xi^2}} =$$

$$= 2 \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tang}\alpha \cos\xi \cos\eta}{\sin\beta\cos\omega}\right) \log\cot\frac{1}{2}\beta +$$

$$+ \sin 2\omega\, L(2x, 2\omega) - \sin(2\omega - 2\lambda)\, L(2x, 2\omega - 2\lambda) +$$

$$+ \sin 2\lambda\, L(2y, \pi - 2\lambda) - \sin 2\omega\, L(2y - 2x, \pi - 2\omega), \qquad (97)$$

где

$$\sin\omega = \operatorname{tang}\alpha \cot\beta; \quad \sin\eta = \cot\alpha \operatorname{tang}\xi,$$

624
$$\cot\lambda = \frac{\operatorname{tang}\beta\cos\omega}{\sin\xi}(\operatorname{tang}\eta + \operatorname{tang}\alpha\sin\xi),$$

$$x = \log\cot\frac{1}{2}\beta; \quad y = \log\left(\cot\frac{1}{2}\beta \cot\frac{1}{2}\eta\right).$$

Можно присоединить еще сюда уравнение

$$\cot(\omega-\lambda)=\frac{\sin\beta^2}{\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta(1-\cos\xi\cos\eta)}-\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\cos\beta}.$$

Еще иначе представляется значение того же интеграла

$$\sin 2\beta\cos\alpha\cos\omega\int_{\xi}^{\alpha}\frac{d\xi\sin\xi\log\cot\frac{1}{2}\xi}{(\sin\beta^2-\sin\xi^2)\sqrt{\sin\alpha^2-\sin\xi^2}}=$$

$$=2\arctan\operatorname{tang}\left(\frac{\operatorname{tang}\alpha\cos\xi\cos\eta}{\sin\beta\cos\omega}\right)\log\cot\frac{1}{2}\beta+$$

$$+\sin 2\psi L(2x',\ 2\psi)-\sin 2\lambda' L(2x',\ 2\lambda')+$$

$$+\sin(2\psi-2\lambda')L(2y',\ \pi-2\psi+2\lambda')-\sin 2\psi L(2y'-2x',\ 2\psi)\quad[211],$$

где

$$2x'=\log\left(\frac{1+\cos\xi\cos\eta}{1-\cos\xi\cos\eta}\right),$$

625 |
$$2y'-2x'=\log\left(\frac{\cos\xi+\cos\beta}{\cos\xi-\cos\beta}\right),$$

$$\operatorname{tang}\psi=\operatorname{tang}\alpha\frac{\cos\xi\cos\eta}{\sin\beta\cos\omega},$$

$$\operatorname{tang}\lambda'=\cos\omega\cot\alpha.$$

Подобным образом уравнения (70) и (76) дают

$$2\cos\omega\sqrt{\sin\beta^2-\sin\omega^2}\int_{0}^{\alpha}\frac{\alpha\,d\alpha\sin\alpha}{(\sin\omega^2-\sin\alpha^2)\sqrt{\sin\beta^2-\sin\alpha^2}}=$$

$$=2\alpha(h'-l)-2h\arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)-\sin 2\omega L(2h,\ 2\omega)+$$

$$+\sin 2\lambda L(2h,\ 2\lambda)-\sin(2\omega-2\lambda)L(2h',\ \pi-2\omega+2\lambda)+$$

$$+\sin 2\omega L(2l,\ \pi-2\omega)\quad[212],\qquad(98)$$

где

$$2h'=2l+\log\frac{\cos\omega\sqrt{\sin\beta^2-\sin\alpha^2}+\cos\alpha\sqrt{\sin\beta^2-\sin\omega^2}}{\cos\omega\sqrt{\sin\beta^2-\sin\alpha^2}-\cos\alpha\sqrt{\sin\beta^2-\sin\omega^2}},$$

$$2l=\log\frac{\sin(\omega+\alpha)}{\sin(\omega-\alpha)},$$

§26 |
$$2h = \log \frac{\cos\omega + \sqrt{\sin\beta^2 - \sin\omega^2}}{\cos\omega - \sqrt{\sin\beta^2 - \sin\omega^2}},$$

$$\cot(\omega - \lambda) = \operatorname{tang}\omega \cot\beta^2 + \frac{\sqrt{\sin\beta^2 - \sin\omega^2}\sqrt{\sin\beta^2 - \sin\alpha^2}}{\sin\alpha\cos\omega\sin\beta^2}.$$

Наконец, уравнения (71) и (76), с переменою в последнем ω, h, ψ на ψ, b, ω дают [213]

$$2\sin\alpha\sqrt{\sin\beta^2 - \sin\alpha^2}\int_{\psi}^{\beta}\frac{\psi\, d\psi\cos\psi}{(\sin\psi^2 - \sin\alpha^2)\sqrt{\sin\beta^2 - \sin\psi^2}} =$$

$$= \psi\log\left\{\frac{\sin\psi\sqrt{\sin\beta^2 - \sin\alpha^2} + \sin\alpha\sqrt{\sin\beta^2 - \sin\psi^2}}{\sin\psi\sqrt{\sin\beta^2 - \sin\alpha^2} - \sin\alpha\sqrt{\sin\beta^2 - \sin\psi^2}}\right\} +$$

$$+ \sin 2\psi L(2b,\ 2\psi) - \sin 2\lambda L(2b,\ 2\lambda) +$$

$$+ \sin(2\psi - 2\lambda) L(2h',\ \pi - 2\psi + 2\lambda) - \sin 2\psi L(2l,\ \pi - 2\psi), \qquad (99)$$

где

$$2h' = 2l + \log\left\{\frac{\cos\psi\sqrt{\sin\beta^2 - \sin\alpha^2} + \cos\alpha\sqrt{\sin\beta^2 - \sin\psi^2}}{\cos\psi\sqrt{\sin\beta^2 - \sin\alpha^2} - \cos\alpha\sqrt{\sin\beta^2 - \sin\psi^2}}\right\},$$

§27 |
$$2l = \log\left\{\frac{\sqrt{\sin\beta^2 - \sin\alpha^2} + \cos\alpha}{\sqrt{\sin\beta^2 - \sin\alpha^2} - \cos\alpha}\right\},$$

$$2b = \log\left\{\frac{\cos\psi + \sqrt{\sin\beta^2 - \sin\psi^2}}{\cos\psi - \sqrt{\sin\beta^2 - \sin\psi^2}}\right\},$$

$$\cot(\psi - \lambda) = \operatorname{tang}\psi\cot\beta^2 + \frac{\sqrt{\sin\beta^2 - \sin\alpha^2}\sqrt{\sin\beta^2 - \sin\psi^2}}{\sin\alpha\cos\psi\sin\beta^2}.$$

Интегралы (97), (98), (99), как неопределенные, могут служить для интегрирования во всех случаях с обращением, если нужно, воображаемых в действительные. Они также могут быть приведены один к другому. Их зависимость открывается в сравнении значений пирамиды (67), (70), (71). Так [214]:

$$\int_{a}^{\xi}\frac{d\xi\sin\xi\log\cot\frac{1}{2}\xi}{(\sin\beta^2 - \sin\xi^2)\sqrt{\sin a^2 - \sin\xi^2}} =$$

$$= \frac{\sin a^2 - \sin\xi^2}{\sin a\cos a^2(\sin\beta^2 - \sin\xi^2)}\int_{\psi}^{b}\frac{\psi\, d\psi\cos\psi}{(\sin\psi^2 - \sin\alpha^2)\sqrt{\sin b^2 - \sin\psi^2}}, \qquad (100)$$

628 где

$$\sin b = \frac{\sin \beta \sin \psi}{\sin a},$$

$$\sin \alpha = \frac{\cos \beta \sin \psi}{\cos a},$$

$$\sin \psi = \frac{\sqrt{\sin a^2 - \sin \xi^2}}{\sqrt{\sin \beta^2 - \sin \xi^2}},$$

рассматривая a, b постоянными, ψ одно переменяющимся в интеграле.

Другое сравнение дает [215]

$$2 \cot \omega \sin \varphi^2 \int_{\psi}^{a} \frac{\psi \, d\psi \cos \psi}{(\sin \psi^2 - \sin \varphi^2) \sqrt{\sin a^2 - \sin \psi^2}} =$$

$$= \psi \log \frac{\sin (A + \omega)}{\sin (A - \omega)} - \omega \log \frac{\sin (A + \psi)}{\sin (A - \psi)} +$$

$$+ \varphi \log \frac{\cos \omega \cos \psi + \cos A \cos \varphi}{\cos \omega \cos \psi - \cos A \cos \varphi} +$$

629

$$+ \cot A \sin 2\psi \int_{0}^{\varphi} \frac{\varphi \, d\varphi \sin \varphi}{(\sin \varphi^2 - \sin \psi^2) \sqrt{\sin a^2 - \sin \varphi^2}}, \qquad (101)$$

где $\sin A = \frac{\sin \psi}{\sin a}$; $\sin \varphi = \sin a \sin \omega$; прочие величины не зависят друг от друга, и где интегрирование в отношении к ψ предполагает φ постоянным, как и обратно.

Помощию геометрического рассмотрения нашли мы (88), что

$$\int_{b}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi \sin \xi \cos \xi \log \cot \frac{1}{2} \xi}{(\sin \xi^2 - \sin a^2) \sqrt{\sin \xi^2 - \sin b^2}} = \frac{\pi \log \left(\cot \frac{1}{2} a \operatorname{tang} \frac{1}{2} c \right)}{2 \sin b \cos c}, \qquad (102)$$

где

$$\sin a = \sin b \sin c.$$

Можно придти к этому интегралу, рассматривая двойной [216]

$$\int \int \frac{dp \, d\varphi \sin \varphi^2}{(1 - p^2 \sin \varphi^2)(1 - n^2 \sin \varphi^2)}$$

630 | от $p=0$ и от $\varphi=0$ до $\varphi=\frac{\pi}{2}$; а после интегрирования, в том и другом порядке, полагая

$$\sin\varphi=\frac{\cos\xi}{\cos b};\quad p=\cos b;\quad n=\frac{\cos b}{\cos a}.$$

Таким же образом можно найти значение определенного интеграла (102), когда в знаменателе вместо $\sin\xi^2-\sin a^2$ будет вообще полином с четными степенями $\sin\xi$.

В интеграле (102) полагая

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{\sqrt{\sin\xi^2-\sin b^2}}{\sin b\cos c};\quad \sin\gamma=\frac{\cos b}{\cos a},$$

потом интегрируя по частям, находим [217]

$$\int_0^{\gamma}\frac{\varphi\,d\varphi\sin\varphi}{(1-\sin c^2\sin\varphi^2)\sqrt{\sin\gamma^2-\sin\varphi^2}}=$$

631 | $$=\frac{\pi\log\left\{\dfrac{\cos c+\sqrt{1-\sin\gamma^2\sin c^2}}{2\cos\gamma\cos\frac{1}{2}c^2}\right\}}{2\cos c\sqrt{1-\sin\gamma^2\sin c^2}} \qquad (103)$$

— другой интеграл более общий, нежели найденный Лежандром (Suppl. aux Exercices de calcul intégral. T. I).

Если интеграл (103) разлагаем в строку по степеням $\sin c$, то производитель при $\sin c$ с показателем n целым положительным числом будет [218]

$$<\frac{\pi}{2}\sin\gamma^n\log\frac{1}{\cos\gamma},$$

следовательно, строка остается справедливой и тогда, когда вместо $\sin c$ ставим $\frac{1}{\sin c}$, предполагая при том $\sin c>\sin\gamma$. Так получим, переходя от воображаемых к действительным [219],

632 $$\int_0^{\gamma}\frac{\varphi\,d\varphi\sin\varphi}{(\sin c^2-\sin\varphi^2)\sqrt{\sin\gamma^2-\sin\varphi^2}}=\frac{\pi\left[c-\arccos\left(\dfrac{\cos c}{\cos\gamma}\right)\right]}{2\cos c\sqrt{\sin c^2-\sin\gamma^2}}. \qquad (104)$$

Для $c=\frac{\pi}{2}$ то и другое выражение интеграла дает [220]

$$\int_0^{\gamma}\frac{\varphi\,d\varphi\sin\varphi}{\cos\varphi^2\sqrt{\sin\gamma^2-\sin\varphi^2}}=\frac{\pi\sin\frac{1}{2}\gamma^2}{\cos\gamma^2}.$$

Интеграл (104), когда сюда поставим $\frac{\pi}{2} - \varphi$ вместо φ, переменится в такой [221]:

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi\, d\varphi \cos\varphi}{(\sin\varphi^2 - \sin\beta^2)\sqrt{\sin\varphi^2 - \sin\alpha^2}} =$$

$$= \frac{\pi\left\{\operatorname{arctang}\dfrac{\sin\beta\sqrt{\sin\alpha^2 - \sin\beta^2}}{\cos\alpha + \cos\beta^2} - \beta\right\}}{2\sin\beta\sqrt{\sin\alpha^2 - \sin\beta^2}}.$$

Можно бы умножить подобные применения к определенным интегралам помощью тех уравнений, к которым приводят исчисления, основанные на новых началах Геометрии. Особенно должно заметить этот обширный род интегралов, который зависит единственно от познания одного

$$-\int_0 dx \log\cos x = \Phi(x),$$

или, представляя строкой,

$$\Phi(x) = x\log 2 - \frac{2}{2^2}\sin 2x + \frac{2}{4^2}\sin 4x - \text{ и т. д.} \quad [222],$$

откуда

$$\Phi(\pi + x) = \Phi(x) + \pi\log 2,$$

$$\Phi(\pi - x) + \Phi(x) = \pi\log 2.$$

Особенные случаи:

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(\pi) = \pi\log 2, \quad \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\log 2.$$

Заключение

После того, как мы нашли уравнения (17), которые представляют зависимость углов и боков треугольника; когда, наконец, дали мы общие выражения для элементов линий, площадей и объема тел, все прочее в Геометрии будет уже аналитикой, где исчисления необходимо должны быть согласны между собою и ничего не в состоянии открыть нам нового, чего бы не заключа-

лось в тех первых уравнениях, откуда должны быть взяты все отношения геометрических величин друг к другу. Итак, если надобно предполагать теперь, что какое-нибудь противоречие принудит впоследствии опровергнуть начала, принятые нами в этой новой Геометрии, то это противоречие может только скрываться в самых уравнениях (17). Заметим однако ж, что эти уравнения переменяются в (20) сферической Тригонометрии, как скоро вместо боков a, b, c ставим $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$; но в обыкновенной Геометрии и сферической Тригонометрии везде входят одни содержания линий: следовательно, обыкновенная Геометрия,
635 Триго|нометрия и эта новая Геометрия всегда будут согласны между собой.

Если теперь аналитика с новой — назовем *воображаемой* Геометрией, в отличие от *употребительной* — соглашены уже между собою, то можно ожидать от той и другой взаимного пособия. Это ожидание кажется не без основания после того, как, предположивши собственно достигнуть только одной цели — дать общие правила для измерения всех геометрических величин, — идя прямо к этой цели и дозволивши себе мимоходом только некоторые применения, мы были в состоянии открыть значения определенных интегралов, к познанию которых одной аналитике, без пособия Геометрии, трудно было бы проложить дорогу.

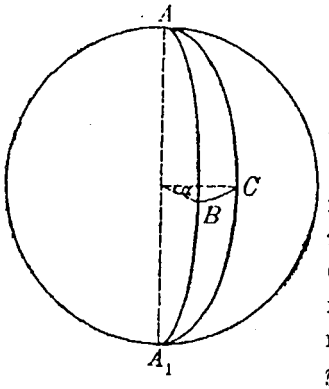
Оставалось бы исследовать, какого рода перемена произойдет от введения воображаемой Геометрии в Механику, и не встретится ли здесь принятых уже и несомнительных понятий о природе
636 вещей, по которые принудят нас | ограничивать или совсем не допускать зависимости линий и углов. Однако ж можно предвидеть, что перемены в Механике при новых началах Геометрии будут того же рода, какие показал Г. Лаплас (Mécanique céleste. T. I, Liv. I, Ch. II), предполагая возможной всякую зависимость скорости от силы, или — выразимся вернее — предполагая силы, измеряемые всегда скоростию, подчиненными другому закону в соединении, нежели принятому сложению их.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] В изданиях сочинения «О началах геометрии» — как первом, так и втором — после слова «оного» занятая была пропущена. В этом виде фраза приобретала другой смысл — получалось, что скорость и массы тел служат мерою движения, в то время как Лобачевский, конечно, хотел сказать: «Вечность и одинаковость раз сообщенного движения (где скорость служит мерою оного) и массы различных тел — такого рода истины, которые требовали времени, пособия других познаний и ожидали гения». Отсутствие занятой ввело в заблуждение и проф. Энгеля, который перевел эту фразу так: «Die ewige Dauer und Unveränderlichkeit einer einmal ertheilten Bewegung, die gemessen wird durch die Geschwindigkeit eines Körpers und durch die Massen verschidenen Körper, das sind die Wahrheiten...».

[2] Лобачевский употребляет термин «одинаковы» там, где мы теперь говорим «конгруэнтны», и «равны» — там, где мы говорим «равносоставлены». О понятии равносоставленности см. В. Ф. Каган, «О преобразовании многогранников», ГТТИ, 1933 г.

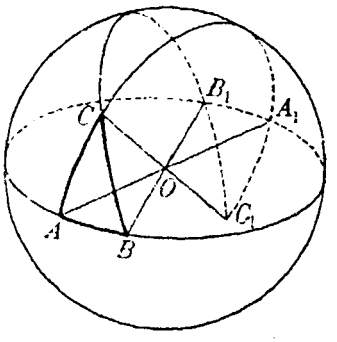
[3] Следует отметить, что указанное Лобачевским свойство трех главных сечений — невозможность провести четвертое сечение, удваивающее число частей, — является топологическим признаком трехмерности пространства.



[4] Сумма телесных углов с общей вершиной, заполняющих все пространство, обычно считается равной 4π. Лобачевский принимает ее равной 2π, т. е. для измерения телесных углов он берет единицу, вдвое большую обычной. Поэтому телесный угол между двумя плоскостями ABA_1 и ACA_1 или, как его называет Лобачевский, *плоскостной угол*, обычно считается равным двойному двугранному углу α или двойному сферическому углу α. Лобачевский же считает его равным двугранному или сферическому углу α. Такой способ измерения телесных углов иногда представляет некоторое преимущество сравнительно с обычным.

[5] Доказательство этого положения, данное Гауссом и Лежандром, приведено в статье «Учение о параллельных линиях и открытие неевклидовой геометрии» на стр. 57—58.

[6] Если в треугольнике ABC мы сложим сначала телесные углы A и B, т. е. плоскостные углы, ограниченные плоскостями $OABA_1$ и $OACA_1$ и плоскостями $OBCB_1$ и $OBAB_1$, то получим



$$A + B = \pi + S - OA_1B_1C,$$

где S — телесный угол, соответствующий треугольнику ABC. Если еще прибавим телесный угол C, т. е. угол между плоскостями OCB_1C_1 и OCA_1C_1, равный $S + OA_1B_1C$, то получим $\pi + 2S$. Таким образом

$$A + B + C = \pi + 2S.$$

Из этой формулы для треугольника получим формулу, данную в тексте для многоугольника, разделяя многоугольник диагоналями на треугольники. См. «Геометрические исследования», черт. 15.

[7] Если мы спроектируем из центра правильный многогранник на сферу с тем же центром, то на сфере получим сетку из правильных сферических многоугольников. Так как в каждой вершине многоугольника сходятся t сторон, то каждый сферический угол в многоугольнике будет равен $\frac{2\pi}{t}$, а телесный угол с вершиной в центре, соответствующий одной грани, по предыдущей формуле будет равен

$$\frac{m\frac{2\pi}{t} - (m-2)\pi}{2}.$$

Повторив эту сумму n раз, получим 2π. Отсюда

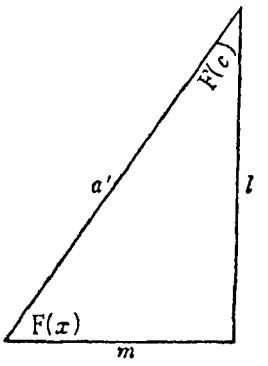
$$n\,\frac{m\frac{2\pi}{t} - (m-2)\pi}{2} = 2\pi \quad \text{и} \quad [2m - (m-2)t]\,n = 4t.$$

[8] Занимающая одну страницу работа Grunert'a имеет заглавие: «Einfacher Beweis der von Cauchy und Euler gefundenen Sätze von Figurennetzen und Polyedern».

[9] Переходя к определению тригонометрических величин, Лобачевский пользуется прямолинейным прямоугольным треугольником, если имеет место евклидова геометрия, и прямоугольным треугольником на предельной сфере — в неевклидовой геометрии.

[10]
$$\sin(B + 2\omega) - \sin B = 2\sin\omega\cos(B + \omega),$$
$$\cos(B + 2\omega) - \cos B = -2\sin\omega\sin(B + \omega).$$

[11] В справедливости сказанного убеждаемся таким образом. Построим прямоугольный треугольник с гипотенузой a' и прилежащим углом $F(c)$ и обозначим в нем катет, прилежащий к углу $F(c)$, через l, другой катет через m и прилежащий к нему угол — через $F(x)$ [1]. Этот треугольник, как утверждает Лобачевский, будет иметь второй катет, равный β'. Докажем это.



Применяя к этому треугольнику формулы (3), (4), (5), мы получаем:

$$2F(l) = F(a' - x) + F(a' + x), \qquad (I)$$

$$2F(c) = F(a' - x) - F(a' + x), \qquad (II)$$

$$2F(m) = F(a' - c) + F(a' + c), \qquad (III)$$

$$2F(x) = F(a' - c) - F(a' + c), \qquad (IV)$$

$$2F(x - m) + F(c + l) = \frac{\pi}{2}, \qquad (V)$$

$$2F(c - l) + F(x + m) = \frac{\pi}{2}. \qquad (VI)$$

Сравнивая уравнение (IV) с (3), имеем

$$\pi - 2F(x) = \pi - F(a' - c) + F(a' + c) = F(c - a') + F(c + a') = 2F(a)$$

или

$$\frac{\pi}{2} = F(x) + F(a),$$

откуда $x = a$.

Сравнивая (III) с (4), имеем

$$\pi - 2F(m) = \pi - F(a' - c) - F(a' + c) = F(c - a') - F(c + a') = 2F(b')$$

или

$$\frac{\pi}{2} = F(m) + F(b'),$$

откуда $m = \beta'$, что и требовалось доказать.

Уравнения (I), (II), (V), (VI) могут быть теперь переписаны таким образом:

$$2F(l) = F(a' - \alpha) + F(a' + \alpha),$$

$$2F(c) = F(a' - \alpha) - F(a' + \alpha),$$

$$F(\alpha - \beta') + F(c + l) = \frac{\pi}{2},$$

$$F(c - l) + F(\alpha + \beta') = \frac{\pi}{2}.$$

Из сопоставления этих уравнений с (3), (4) и (5) мы не можем еще заключить, что катет $l = b$, как говорит далее Лобачевский

[1] Так как каждому углу соответствует такой отрезок x, при котором этот угол есть $F(x)$.

(«... оставляя в то же время b и β без перемены»). Справедливость этого равенства вытекает из данного ниже построения Лобачевского, связывающего прямолинейный треугольник со сферическим (см. примечание 13).

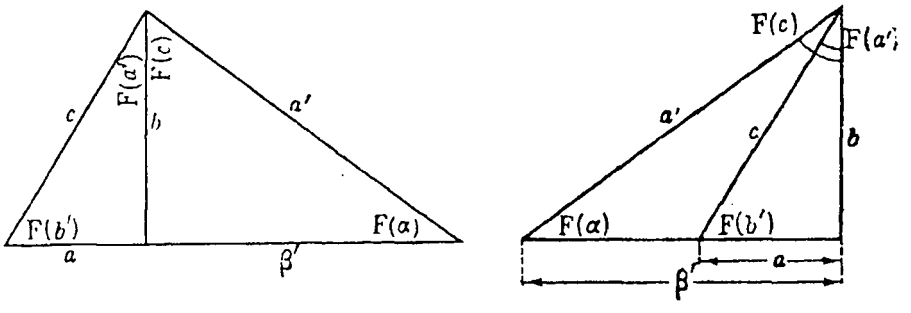
Допустим, однако, что $l = b$, и приложим к данному треугольнику ABC с элементами

$$b,\ \Pi(a'),\ c,\ \Pi(b'),\ a$$

треугольник с элементами

$$b,\ \Pi(c),\ a',\ \Pi(\alpha),\ \beta'$$

(существование которого сейчас доказано) так, чтобы у них совпали равные катеты (чертеж a или $б$). Мы получим следующую теорему:

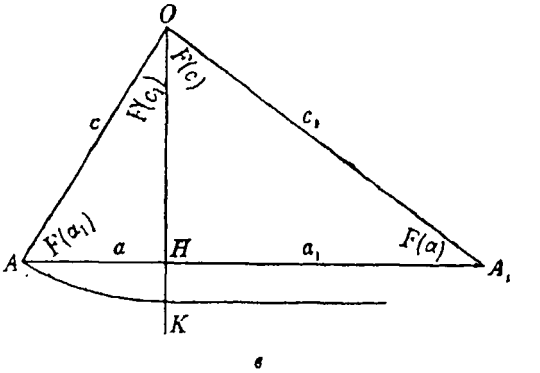


а *б*

Если два угла $\Pi(c)$ и $\Pi(c_1)$ (черт. *в*) имеют общую вершину и общую сторону и на стороне угла $\Pi(c)$ мы отложим отрезок $c_1 = OA_1$, а на стороне угла $\Pi(c_1)$ — отрезок $c = OA$, то перпендикуляры, опущенные из точек A и A_1 на общую сторону, будут лежать на одной прямой; длины этих перпендикуляров будут соответственно равны a и a_1, если через $\Pi(\alpha)$ и $\Pi(\alpha_1)$ обозначим образовавшиеся при точках A_1 и A углы, причем

$$\Pi(a) + \Pi(\alpha) = \frac{\pi}{2},$$

$$\Pi(a_1) + \Pi(\alpha_1) = \frac{\pi}{2}.$$



в

Из этой теоремы вытекает решение следующих задач:

Пусть нам дан отрезок c, соответствующий углу параллельности $\Pi(c)$. Требуется найти:

1) для данного угла $\mathrm{F}(c_1)$ соответствующий отрезок c_1,

2) для данного отрезка c_1 соответствующий угол $\mathrm{F}(c_1)$,

3) для данного отрезка a угол $\mathrm{F}(\alpha)$,

4) для данного угла $\mathrm{F}(\alpha_1)$ — отрезок a_1.

Решение. Построим (черт. *в*) данный угол $\mathrm{F}(c) = A_1OH$, отложим на одной из его сторон отрезок $OK = c$ и опишем из O радиусом $OK = c$ окружность. Перпендикуляр, восставленный в точке K к линии OK, будет параллелен линии OA_1.

1) При точке O построим угол $KOA = \mathrm{F}(c_1)$, отложим на его стороне отрезок $OA = OK = c$ и из A опустим перпендикуляр на OK. Этот перпендикуляр отсечет от стороны OA_1 отрезок $OA_1 = c_1$.

2) Отложим на стороне угла $\mathrm{F}(c)$ отрезок $OA_1 = c_1$ и из точки A_1 опустим перпендикуляр на OK. Этот перпендикуляр пересечет линию OK в точке H между O и K и, следовательно, пересечет окружность в некоторой точке A. Соединяя точку A с точкой O, мы получим угол $AOK = \mathrm{F}(c_1)$.

3) и 4) Строим треугольник AOH по гипотенузе c и катету a для решения задачи 3) и по гипотенузе c и углу $\mathrm{F}(\alpha_1)$ для решения задачи 4). К треугольнику OHA пристраиваем треугольник OHA_1 с углом $\mathrm{F}(c)$ при точке O и катетом OH. Тогда $HA_1 = a_1$ и угол при точке $A_1 = \mathrm{F}(\alpha)$.

[12] На основании сказанного, по данному прямоугольному треугольнику с гипотенузой c, стороны и углы которого (по порядку) равны

$$b,\ \mathrm{F}(a'),\ c,\ \mathrm{F}(b'),\ a, \tag{I}$$

можно построить еще ряд треугольников:

$$b,\ \mathrm{F}(c),\ a',\ \mathrm{F}(\alpha),\ \beta', \tag{II}$$

$$\gamma,\ \mathrm{F}(\beta),\ \alpha,\ \mathrm{F}(a'),\ \beta', \tag{III}$$

$$\gamma,\ \mathrm{F}(\alpha),\ \beta,\ \mathrm{F}(b'),\ \alpha', \tag{IV}$$

$$a,\ \mathrm{F}(c),\ b',\ \mathrm{F}(\beta),\ \alpha', \tag{V}$$

$$a,\ \mathrm{F}(b'),\ c,\ \mathrm{F}(a'),\ b, \tag{I}$$

применяя каждый раз указанную Лобачевским замену и оставляя без перемены то катет, стоящий в начале, то катет, стоящий в конце строки.

Последний треугольник тождествен с первым, и дальнейшее построение треугольников по правилу Лобачевского привело бы к повторению предыдущих.

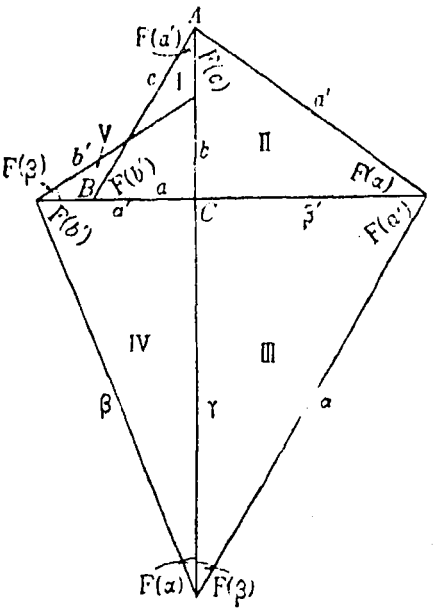
Таким образом по данному треугольнику ABC можно построить еще четыре новых.

Приложим эти треугольники один к другому равными катетами. В эти пять треугольников входят величины

$$\left.\begin{array}{l} a,\ b,\ c,\ a',\ b', \\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha',\ \beta', \end{array}\right\} \quad \text{(VI)}$$

связанные между собой соотношениями

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{F}(a)+\mathrm{F}(\alpha)=\frac{\pi}{2}, \\ \mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(\beta)=\frac{\pi}{2}, \\ \mathrm{F}(a')+\mathrm{F}(\alpha')=\frac{\pi}{2}, \\ \mathrm{F}(b')+\mathrm{F}(\beta')=\frac{\pi}{2}, \\ \mathrm{F}(c)+\mathrm{F}(\gamma)=\frac{\pi}{2}. \end{array}\right\} \quad \text{(VII)}$$



По образцу уравнений (3) и (4) мы можем написать двадцать уравнений между величинами (VI). Но десять из них будут следствиями десяти уравнений (6), (7) и (8), данных в тексте, и пяти соотношений (VII). Из десяти уравнений, написанных по образцу (5), в тексте приведено шесть уравнений (урав. 9 и 10) и опущены следующие четыре для треугольников (II) и (IV):

$$\mathrm{F}(c-b)+\mathrm{F}(\alpha+\beta')=\frac{\pi}{2},$$

$$\mathrm{F}(\alpha-\beta')+\mathrm{F}(c+b)=\frac{\pi}{2},$$

$$\mathrm{F}(\alpha-\gamma)+\mathrm{F}(b'+\alpha')=\frac{\pi}{2},$$

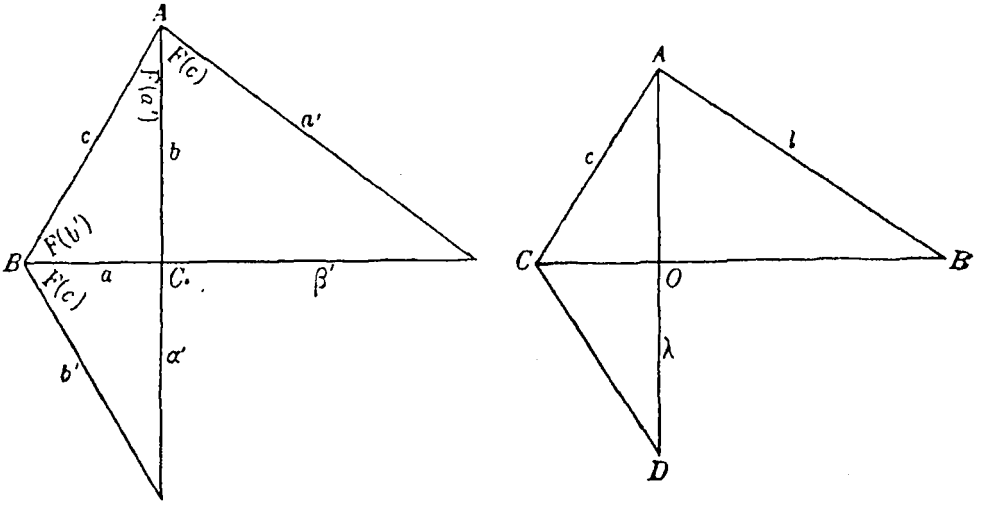
$$\mathrm{F}(b'-\alpha')+\mathrm{F}(\alpha+\gamma)=\frac{\pi}{2}.$$

Если мы приложим к треугольнику ABC (I) треугольники (II) и (V), то получим чертеж (a), который позволяет решить такую задачу:

дан угол параллельности $\Pi(c)$, соответствующий отрезку c. Требуется для отрезка l построить отрезок λ, связанный с l соотношением:

$$\Pi(l) + \Pi(\lambda) = \frac{\pi}{2}.$$

На стороне данного угла $\Pi(c) = OAB$ отложим отрезок $AB = l$ (черт. *б*), из точки B опустим перпендикуляр BO на сторону OA и продолжим его до пересечения в точке C с окружностью, описанной



а *б*

из точки A радиусом $AC = c$. Угол OAC будет равен $\Pi(l)$. При точке C строим угол $OCD = OAB = \Pi(c)$ и находим точку D пересечения его стороны CD с продолжением катета AO. Отрезок $OD = \lambda$.

[13] См. примечание 11. Действительно, возьмем полученный Лобачевским сферический треугольник $A'BC$. На радиусе AB отложим отрезок $AB_1 = a'$ и в точке B_1 восставим перпендикуляр B_1C_1 к плоскости $A'AB$; он будет параллелен с радиусом AC, ибо угол $CAB = \Pi(a')$. Через этот перпендикуляр проведем плоскость, перпендикулярную к линии AA'. Эта плоскость пересечется плоскостями ABA' и ACA' по прямым B_1A_1 и A_1C_1, перпендикулярным к AA'. Прямая A_1C_1 будет параллельна с B_1C_1 и с AC, как линия пересечения двух плоскостей ACA' и $A_1B_1C_1$, проходящих через две параллельные прямые AC и B_1C_1. Мы получаем, таким образом, прямолинейный прямоугольный при точке A_1 треугольник AB_1A_1. В нем гипотенуза будет a'; катет $AA_1 = b$, так как A_1C_1 параллельна с AC и угол $A_1AC = \Pi(b)$; катет $A_1B_1 = \beta'$, так как A_1C_1 параллельна с B_1C_1 и угол $B_1A_1C_1 = \Pi(\beta')$; острый угол $A = \Pi(c)$; острый угол $B_1 = \frac{\pi}{2} - \Pi(a) = \Pi(\alpha)$, так как сумма углов при трех параллельных лезвиях AC, B_1C_1 и A_1C_1

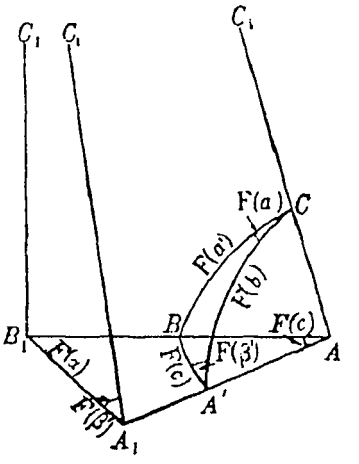
равна π, угол же при ребрии A_1C_1 равен $\frac{\pi}{2}$, а при ребрии AC равен $\mathrm{F}(a)$.

Связь между сферическим треугольником $A'BC$ с элементами $\mathrm{F}(a')$, $\mathrm{F}(a)$, $\mathrm{F}(b)$, $\mathrm{F}(\beta')$, $\mathrm{F}(c)$ и двумя прямолинейными треугольниками с элементами

$$a,\ \mathrm{F}(b'),\ c,\ \mathrm{F}(a'),\ b, \qquad \text{(I)}$$

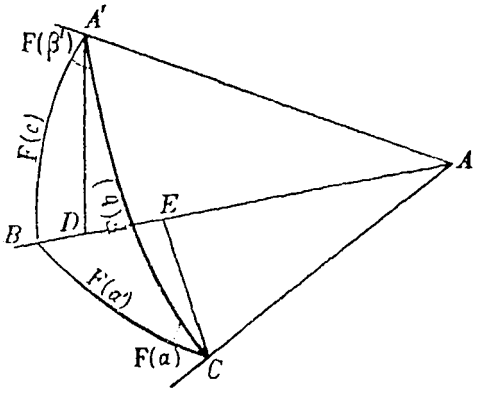
$$\beta',\ \mathrm{F}(\alpha),\ a',\ \mathrm{F}(c),\ b, \qquad \text{(II)}$$

о которых говорится в примечании 11, можно представить очень просто при помощи следующего построения.



Вообразим снова сферический треугольник $A'BC$ с катетами $\mathrm{F}(c)$, $\mathrm{F}(a')$, противолежащими углами $\mathrm{F}(a)$, $\mathrm{F}(\beta')$ и гипотенузой $\mathrm{F}(b)$. Опустим из вершин острых углов A' и C перпендикуляры $A'D$ и CE на радиус сферы, проведенный к вершине прямого угла B. Если радиус сферы AA' мы сделаем равным a', то в треугольнике ADA' гипотенуза будет $AA' = a'$, острый угол $A = \mathrm{F}(c)$. Так как по гипотенузе и острому углу треугольник определяется вполне, то треугольник ADA' будет тождествен с треугольником (II) и

$$AD = b, \quad A'D = \beta',$$
$$\angle AA'D = \mathrm{F}(\alpha).$$



Если же радиус сферы AC сделаем равным c, то в треугольнике ACE гипотенуза будет $AC = c$, острый угол $A = \mathrm{F}(a')$ и треугольник ACE будет тождествен с треугольником (I):

$$AE = b,\ CE = a,\ \angle ACE = \mathrm{F}(b').$$

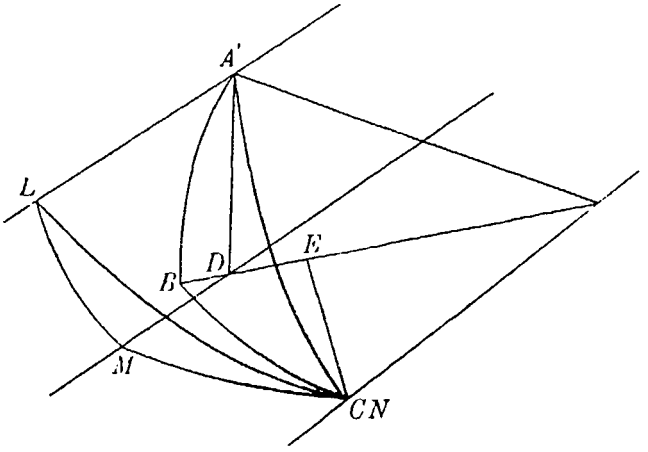
[14] Вообразим снова сферический треугольник $A'BC$ с катетами $CB = \mathrm{F}(a')$, $A'B = \mathrm{F}(c)$, противолежащими углами $\mathrm{F}(\beta')$, $\mathrm{F}(a)$ и гипотенузой $A'C = \mathrm{F}(b)$, о котором говорится в примечании 13. Этому сферическому треугольнику будут соответствовать два прямолинейных треугольника с элементами

$$a,\ \mathrm{F}(b'),\ c,\ \mathrm{F}(a'),\ b, \qquad \text{(I)}$$

$$\beta',\ \mathrm{F}(\alpha),\ a',\ \mathrm{F}(c),\ b. \qquad \text{(II)}$$

На вершин C и A' опустим перпендикуляры $A'D$ и CE на радиус AB и через точки D и A' проведем линии DM и $A'L$, параллельные с AC.

Будем увеличивать радиус сферы, удаляя его центр A по прямой AC, проводя сферу всегда через точку C и не изменяя положения плоскостей ACA' и ACD. На изменяющейся таким образом сфере мы строим прямоугольный сферический треугольник $A_1'B_1C$ [1]), у которого одна вершина находится в точке C, другой вершиной служит точка A_1'



в пересечении сферы с прямой $A'L$, и третья вершина B_1 выбирается так, чтобы она всегда оставалась в плоскости ACD. Так как плоскости $ACLA'$ и $ACDM$ не меняют своего положения, то угол $F(a)$ при вершине C, а следовательно, и a остаются постоянными; будет оставаться постоянной и величина α, связанная с a соотношением

$$F(a)+F(\alpha)=\frac{\pi}{2}.$$

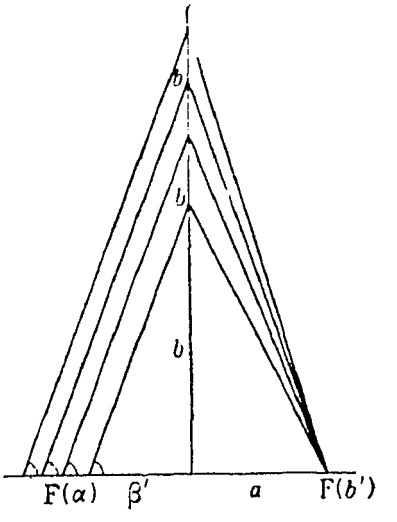
Поэтому, если мы предположим, что радиус изменяющейся сферы равен c или a' [см. примечание 13], то в прямоугольных треугольниках (I) и (II), соответствующих изменяющемуся сферическому треугольнику $A_1'B_1C$, при увеличении радиуса сферы a, $F(a)$, α, $F(\alpha)$ будут оставаться постоянными, c и a' будут возрастать до бесконечности, $F(b')$ будет стремиться к $F(a)$, и $F(\beta')$ к $F(\alpha)$ (см. чертеж на стр. 269).

Если мы представим себе, что радиус сферы с центром A равен c, то, как мы видели в примечании 13, длина перпендикуляра CE, опущенного из постоянной вершины C на радиус AB, будучи равна a, будет оставаться постоянной, и радиус AB_1 при увеличении c всегда будет касаться окружности, лежащей в плоскости $ACDM$, описанной

[1]) На чертеже этот треугольник не изображен.

из центра C радиусом, равным a, и в пределе обратится в ось DM предельной поверхности, касающуюся той же окружности, ибо в пределе $\angle ACE = \mathrm{F}(b') = \mathrm{F}(a)$.

Таким образом треугольник $A_1'B_1C$, который вначале совпадал с $A'BC$, в пределе, когда центр удалится в бесконечность, совпадет с треугольником NML, начерченным на предельной поверхности, осями которой служат прямые AC, $A'L$ и DM. Пределом дуги $CA_1' = \mathrm{F}(b)$ будет дуга NL, пределом дуги $CB_1 = \mathrm{F}(a')$ — дуга NM и пределом дуги $B_1A_1' = \mathrm{F}(c)$ — дуга LM, и мы будем иметь



$$\lim \frac{A_1'C}{B_1C} = \lim \frac{\mathrm{F}(b)}{\mathrm{F}(a')} = \frac{LN}{NM},$$

$$\lim \frac{A_1'B_1}{B_1C} = \lim \frac{\mathrm{F}(c)}{\mathrm{F}(a')} = \frac{LM}{NM}.$$

Более строгое доказательство читатель найдет в «Новых началах», ст. 137.

[15] Если примем во внимание, что $\mathrm{F}(a) + \mathrm{F}(\alpha) = \frac{\pi}{2}$, то получим:

$$\frac{1}{\cos \mathrm{F}(a)} + \operatorname{tg} \mathrm{F}(a) = \frac{1 + \sin \mathrm{F}(a)}{\cos \mathrm{F}(a)} = \frac{1 + \cos \mathrm{F}(\alpha)}{\sin \mathrm{F}(\alpha)} = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \mathrm{F}(\alpha),$$

$$\frac{1}{\cos \mathrm{F}(a)} - \operatorname{tg} \mathrm{F}(a) = \frac{1 - \sin \mathrm{F}(a)}{\cos \mathrm{F}(a)} = \frac{1 - \cos \mathrm{F}(\alpha)}{\sin \mathrm{F}(\alpha)} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \mathrm{F}(\alpha).$$

[16] Если в последних формулах изменим знак при α, то получим:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \mathrm{F}(-\alpha) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\pi - \mathrm{F}(\alpha)) = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \mathrm{F}(\alpha),$$

$$\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \mathrm{F}(-\alpha) = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\pi - \mathrm{F}(\alpha)) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \mathrm{F}(\alpha),$$

т. е. вторая формула перейдет в первую, и обратно.

[17] Первый множитель левой части этого равенства получим, положив в предыдущей формуле

$$\lim \frac{\mathrm{F}(a' + \alpha)}{\mathrm{F}(a')} = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{F}(\alpha)$$

$\alpha - \beta$ вместо α и $a' + \beta$ вместо a'.

[15] Если $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(\alpha)$ обозначим для краткости $\varphi(\alpha)$, то уравнение (11, обратится в функциональное уравнение для функции φ:

$$\varphi(\alpha-\beta)\varphi(\beta)=\varphi[(\alpha-\beta)+\beta]$$

или

$$\varphi(x)\varphi(y)=\varphi(x+y).$$

Это уравнение, как известно, при непрерывной функции $\varphi(x)$ имеет только одно решение:

$$\varphi(x)=e^{ax}.$$

Лобачевский полагает $a=-1$, с одной стороны, «по причине неизвестности, какая линия берется единицей», а с другой — потому, что с увеличением длины x угол параллельности должен уменьшаться. Это последнее соображение требует, чтобы a было числом отрицательным, так что можно положить $\varphi(x)=e^{-\alpha x}$, где $\alpha>0$. Если теперь увеличим единицу меры в α раз, то число x заменится числом $\frac{x}{\alpha}$ и формула примет вид $\varphi(x)=e^{-x}$; но единица меры этим фиксирована.

Формула (12) является основной в теории параллельных Лобачевского. По поводу нее см. также примечание 28 к «Геометрическим исследованиям» (стр. 152). Связь между отрезком x и соответствующим углом параллельности $\Pi(x)$ можно представить в другом виде при помощи гиперболических функций:

$$\sin\Pi(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}x},\quad \cos\Pi(x)=\operatorname{th}x,\quad \operatorname{tg}\Pi(x)=\frac{1}{\operatorname{sh}x},\tag{I}$$

если в формулах

$$\sin\Pi(x)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\Pi(x)},$$

$$\cos\Pi(x)=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\Pi(x)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\Pi(x)},$$

$$\operatorname{tg}\Pi(x)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)}{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\Pi(x)},$$

мы заменим $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)$ через e^{-x}.

Проф. Штекель обратил внимание на то, что угол параллельности $\Pi(x)$ связан очень простым соотношением с углом ω, введенным еще Ламбертом [1]); он имеет важное значение в теории гипербо-

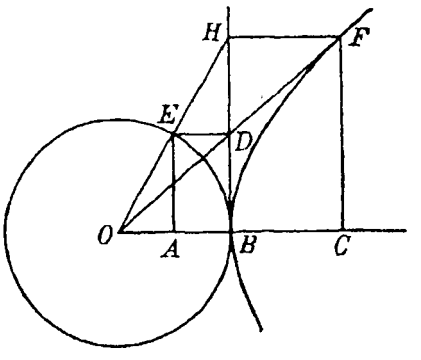
---

[1]) J. H. Lambert — Observations trigonométriques. Mémoires de Berlin, Année 1768, стр. 327—354, Berlin, 1770. Ср. также Zusätze zu den Logarithmischen und Trigonometrischen Tafeln, стр. 182, Berlin, 1770.

лических функций и носит название «гудермании» по имени Гудермана.

Угол ω имеет следующее геометрическое значение. Построим окружность с радиусом, равным единице, и равностороннюю гиперболу:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 1.$$



Проведем радиус-вектор гиперболы OF, через F — линию, параллельную оси x, до пересечения с касательной BH в точке H и линию OH. Обозначим прямоугольные координаты точки F через x и y и полярные ее координаты — через r, φ, угол BOH — через ω. Тогда получаем формулы (учитывая, что $OH = OC$):

$$\left.\begin{aligned} &x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi, \\ &x = \frac{1}{\cos\omega}, \qquad y = \operatorname{tg}\omega, \qquad \frac{y}{x} = \sin\omega. \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Если в круговых функциях

$$AE = \sin\omega, \quad OA = \cos\omega, \quad BH = \operatorname{tg}\omega$$

будем рассматривать аргумент ω не как меру угла BOE, а как удвоенную площадь сектора BOE, то аналогия между круговыми и гиперболическими функциями сделается ясной. Действительно, обозначая через u двойную площадь гиперболического сектора BOF, мы из уравнения гиперболы имеем

$$u = \int_0^{\varphi} r^2\, d\varphi = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi} = \frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right),$$

откуда получаем:

$$BD = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{th} u,$$
$$OC = x = \operatorname{ch} u,$$
$$FC = y = \operatorname{sh} u.$$

Сравнение этих формул с формулами (I) и (II) дает:

$$\operatorname{th} u = \cos \mathrm{F}(u) = \sin\omega,$$
$$\operatorname{ch} u = \frac{1}{\sin \mathrm{F}(u)} = \frac{1}{\cos\omega},$$
$$\operatorname{sh} u = \operatorname{ctg} \mathrm{F}(u) = \operatorname{tg}\omega$$

и показывает, что

$$\mathrm{F}(u) = \frac{\pi}{2} - \omega.$$

[19] Из уравнения (12) мы имеем формулы

$$\left.\begin{aligned}
\sin \mathrm{F}(a) &= \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\mathrm{F}(a)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\mathrm{F}(a)} = \frac{2}{e^a+e^{-a}} = \frac{1}{\operatorname{ch} a},\\
\cos \mathrm{F}(a) &= \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\mathrm{F}(a)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\mathrm{F}(a)} = \frac{e^a-e^{-a}}{e^a+e^{-a}} = \operatorname{th} a,\\
\operatorname{tg} \mathrm{F}(a) &= \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\mathrm{F}(a)}{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\mathrm{F}(a)} = \frac{2}{e^a-e^{-a}} = \frac{1}{\operatorname{sh} a},\\
\cos\frac{1}{2}\mathrm{F}(a) &= \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\mathrm{F}(a)}} = \frac{e^{1/2a}}{\sqrt{e^a+e^{-a}}},\\
\sin\frac{1}{2}\mathrm{F}(a) &= \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\mathrm{F}(a)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\mathrm{F}(a)}} = \frac{e^{-1/2a}}{\sqrt{e^a+e^{-a}}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

Применим эти формулы к следующим четырем из формул (6) и (7)

$$2\mathrm{F}(a) = \mathrm{F}(c-a') + \mathrm{F}(c+a'),\ 2\mathrm{F}(b) = \mathrm{F}(a'-\alpha) + \mathrm{F}(a'+\alpha),$$
$$2\mathrm{F}(b') = \mathrm{F}(c-a') - \mathrm{F}(c+a'),\ 2\mathrm{F}(c) = \mathrm{F}(a'-\alpha) - \mathrm{F}(a'+\alpha).$$

Первая даст нам:

$$\sin \mathrm{F}(a) = \sin\left[\frac{1}{2}\mathrm{F}(c-a') + \frac{1}{2}\mathrm{F}(c+a')\right] =$$

$$= \sin\frac{1}{2}\mathrm{F}(c-a')\cos\frac{1}{2}\mathrm{F}(c+a') + \sin\frac{1}{2}\mathrm{F}(c+a')\cos\frac{1}{2}\mathrm{F}(c-a') =$$

$$= \frac{e^{-1/2(c-a')}e^{1/2(c+a')} + e^{-1/2(c+a')}e^{1/2(c-a')}}{\sqrt{e^{2c}+e^{-2c}+e^{2a'}+e^{-2a'}}}$$

или, если обозначим

$$\frac{1}{\sqrt{e^{2c}+e^{-2c}+e^{2a'}+e^{-2a'}}}$$

через M, то получим:

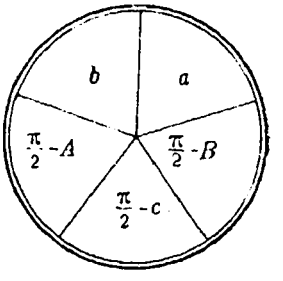
$$\sin \mathrm{F}(a) = M(e^{a'}+e^{-a'}).$$

Подобным образом получаются 8 равенств:

$$\left.\begin{aligned}
\sin \mathrm{F}(a) &= M(e^{a'}+e^{-a'}),\\
\sin \mathrm{F}(b') &= M(e^{a'}-e^{-a'}),\\
\cos \mathrm{F}(a) &= M(e^{c}-e^{-c}),\\
\cos \mathrm{F}(b') &= M(e^{c}+e^{-c'}),\\
\sin \mathrm{F}(b) &= N(e^{\alpha}+e^{-\alpha}),\\
\sin \mathrm{F}(c) &= N(e^{\alpha}-e^{-\alpha}),\\
\cos \mathrm{F}(b) &= N(e^{a'}-e^{-a'}),\\
\cos \mathrm{F}(c) &= N(e^{a'}+e^{-a'}).
\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II})$$

Из формул (II), принимая во внимание формулы (I) и равенство $F(\alpha) + F(\alpha) = \frac{\pi}{2}$, находим все формулы (13) между элементами прямоугольного треугольника. Так например, разделив (II_6) на (II_2), принимая во внимание (I_2) и указанное равенство, получаем (13_1). При этом формулы (13_2) и (13_3) получаются два раза.

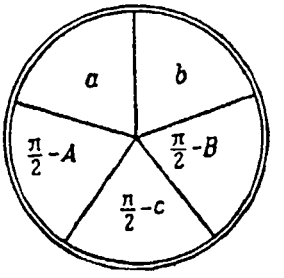
Если мы применим одну из формул (13), не содержащую тангенсов, к треугольникам, о которых говорилось в примечании 12, то мы получим формулы (13_1), (13_3), (13_6). Поступая таким же образом с какой-нибудь из формул, содержащих тангенсы, получим формулы (13_2), (13_4), (13_5).



а

[20] Непер у принадлежит следующее мнемоническое правило для запоминания формул, связывающих элементы прямоугольного сферического треугольника.

Разделим круг радиусами на пять частей и, пропустив в сферическом треугольнике прямой угол, *запишем в каждом секторе катеты, дополнения* $\left(до\ \frac{\pi}{2}\right)$ *гипотенузы и острых углов в том порядке, в котором они встречаются при обходе треугольника.* Мы получаем для треугольника с гипотенузой c, катетами a, b и противолежащими углами A, B «диаграмму», изображенную на чертеже *а*. Выберем какую-нибудь часть и назовем ее средней частью; лежащие рядом с ней назовем прилегающими и две остальные—противоположными. Тогда правило Непера таково:



б

1. *Синус средней части равен произведению тангенсов прилегающих частей.*

2. *Синус средней части равен произведению косинусов противоположных частей.*

Подобное же правило мы можем дать и для запоминания формул (13) и (14) Лобачевского.

Составим схему, отличающуюся от предыдущей тем, что теперь рядом с частью, относящейся к катету, находится часть, относящаяся не к прилегающему углу, а к противолежащему (чертеж *б*).

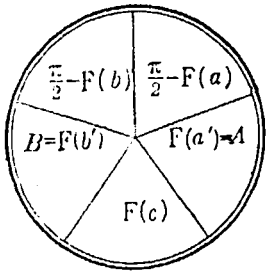
Тогда формулы (13) и (14) составятся по такому правилу [1]):

1. *Косинус средней части равен произведению котангенсов прилегающих частей.*

2. *Косинус средней части равен произведению синусов противолежащих частей.*

[1]) Это правило принадлежит А. П. Котельникову. [*Примечание главного редактора.*]

Можно ли треугольника Лобачевского сохранить и правило Непера без изменения, если возьмем следующую схему:



в

Вместо катетов a, b *мы берем дополнения* $\left(до\ \frac{\pi}{2}\right)$ *их углов параллельности, т. е.*

$$F(\alpha)=\frac{\pi}{2}-F(a),\quad F(\beta)=\frac{\pi}{2}-F(b),$$

вместо гипотенузы c — *ее угол параллельности* $F(c)$ *и располагаем эти элементы и углы треугольника на диаграмме в таком порядке, чтобы между частями, относящимися к гипотенузе и катету, находился угол, противолежащий катету* (чертеж *в*).

Применяя к такой диаграмме правило Непера, получаем все формулы (13) и (14) между тремя частями прямолинейного прямоугольного треугольника.

В некоторых отношениях удобнее пользоваться диаграммой *в* и правилом Непера в его первоначальном виде. Действительно, прямолинейному треугольнику с элементами

$$a,\ F(b'),\ c,\ F(a'),\ b$$

соответствует, как было доказано выше (примечание 13), сферический треугольник с элементами

$$F(c),\ F(\beta'),\ F(b),\ F(a),\ F(a').$$

Строя для этого сферического треугольника по правилу Непера диаграмму, мы должны в секторы по порядку вписать

$$F(c),\ \frac{\pi}{2}-F(\beta')=F(b'),\ \frac{\pi}{2}-F(b),\ \frac{\pi}{2}-F(a),\ F(a').$$

Тогда мы, очевидно, получим ту же диаграмму *в*, как и для соответствующего прямолинейного треугольника. Таким образом одна и та же диаграмма принадлежит как прямолинейному, так и соответствующему сферическому треугольнику.

Но только мы должны различным образом по диаграмме определять элементы соответствующего ей сферического и прямолинейного треугольников. Для прямолинейного треугольника сектор $F(c)$ соответствует гипотенузе, элементы определяются по выше данному правилу:

$$a,\ F(a'),\ c,\ F(b'),\ b.$$

Для сферического треугольника гипотенузе соответствует сектор $F(\beta)$, а элементы определяются по правилу Непера

$$F(c),\ \frac{\pi}{2}-F(b')=F(\beta'),\ \frac{\pi}{2}-F(\beta)=F(b),\ \frac{\pi}{2}-F(\alpha)=F(a),\ F(a').$$

Так как для этих двух треугольников мы имеем одну и ту же диаграмму, то по правилу Непера для обоих мы получим одни и те же формулы.

Построим теперь диаграммы для прямолинейных треугольников, о которых говорится в примечании 12:

$$\begin{array}{l} b,\ \mathrm{F}(a'),\ c,\ \mathrm{F}(b'),\ a, \\ b,\ \mathrm{F}(c),\ a',\ \mathrm{F}(\alpha),\ \beta', \\ \gamma,\ \mathrm{F}(\beta),\ \alpha,\ \mathrm{F}(a'),\ \beta', \\ \gamma,\ \mathrm{F}(\alpha),\ \beta,\ \mathrm{F}(b'),\ \alpha', \\ a,\ \mathrm{F}(c),\ b',\ \mathrm{F}(\beta),\ \alpha'. \end{array}$$

По данному выше правилу мы должны в секторы вписать по порядку

$$\begin{array}{llll} \frac{\pi}{2}-\mathrm{F}(b)=\mathrm{F}(\beta), & \mathrm{F}(b'), & \mathrm{F}(c), \ \mathrm{F}(a'); & \frac{\pi}{2}-\mathrm{F}(a)=\mathrm{F}(a); \\ \frac{\pi}{2}-\mathrm{F}(b)=\mathrm{F}(\beta), & \mathrm{F}(\alpha)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{F}(a), & \mathrm{F}(a'),\ \mathrm{F}(c), & \frac{\pi}{2}-\mathrm{F}(\beta')=\mathrm{F}(b'); \\ \frac{\pi}{2}-\mathrm{F}(\gamma)=\mathrm{F}(c), & \mathrm{F}(a'), \ \mathrm{F}(\alpha)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{F}(a), & \mathrm{F}(\beta)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{F}(b), & \frac{\pi}{2}-\mathrm{F}(\beta')=\mathrm{F}(b'); \\ \frac{\pi}{2}-\mathrm{F}(\gamma)=\mathrm{F}(c), & \mathrm{F}(b'), \ \mathrm{F}(\beta)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{F}(b), & \mathrm{F}(\alpha)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{F}(a), & \frac{\pi}{2}-\mathrm{F}(a')=\mathrm{F}(a'); \\ \frac{\pi}{2}-\mathrm{F}(a)=\mathrm{F}(a), & \mathrm{F}(\beta)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{F}(b), & \mathrm{F}(b'),\ \mathrm{F}(c), & \frac{\pi}{2}-\mathrm{F}(\alpha')=\mathrm{F}(a') \end{array}$$

Очевидно, что для всех этих треугольников мы получим опять ту же диаграмму *в*. В этой последней мы можем, следовательно, любой сектор принять за сектор, соответствующий гипотенузе или катету, или острому углу, и по одной и той же диаграмме написать элементы всех пяти треугольников.

Но мы видели выше, что каждому прямолинейному прямоугольному треугольнику соответствует сферический треугольник, имеющий ту же диаграмму. Поэтому пяти прямолинейным треугольникам, о которых сейчас идет речь, будут соответствовать пять сферических треугольников и для всех этих десяти треугольников — пяти сферических и пяти прямолинейных — мы имеем одну и ту же диаграмму и одни и те же десять основных формул, получающихся из диаграммы по правилу Непера.

Положим, например, что сектор $\mathrm{F}(a')$ соответствует гипотенузе прямолинейного треугольника, а сектор $\mathrm{F}(b')$ — гипотенузе сферического треугольника; тогда элементы этих треугольников будут:

для прямолинейного

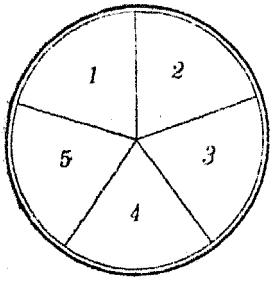
$$b,\ \mathrm{F}(c),\ a',\ \frac{\pi}{2}-\mathrm{F}(a)=\mathrm{F}(\alpha),\ \beta';$$

для сферического

$$\frac{\pi}{2} - \mathrm{F}(a) = \mathrm{F}(\alpha),\ \mathrm{F}(b),\ \mathrm{F}(\beta'),\ \frac{\pi}{2} - \mathrm{F}(c) = \mathrm{F}(\gamma),\ \mathrm{F}(a').$$

Иногда приходится пользоваться формулами, содержащими четыре элемента треугольника.

Отметим следующие две формулы. Если в диаграмме с секторами (1), (2), (3), (4), (5) по правилу Непера напишем формулы



$$\sin(2) = \cos(5)\cos(4),\quad \sin(3) = \cos(1)\cos(5)$$

и умножим первое равенство на cos (1), второе на cos (4), то будем иметь

$$\cos(1)\sin(2) = \sin(3)\cos(4) = \\ = \cos(1)\cos(4)\cos(5),$$

равенство, которое составляется по следующему правилу:

Возьмем в диаграмме по порядку четыре элемента; произведение косинуса первого на синус второго равно произведению синуса третьего на косинус четвертого.

Сравнивая два выражения sin (5):

$$\sin(5) = \mathrm{tg}(1)\,\mathrm{tg}(4),$$
$$\sin(5) = \cos(2)\cos(3),$$

имеем

$$\mathrm{tg}(1)\,\mathrm{tg}(4) = \cos(2)\cos(3),$$

т. е. *произведение косинусов двух соседних элементов равняется произведению тангенсов элементов, с ними рядом лежащих.*

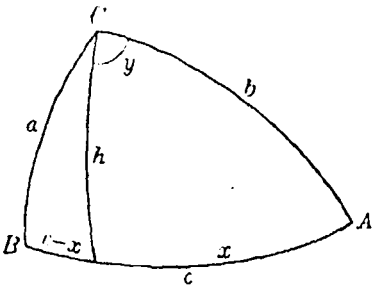
[21] Если в формулах (14) мы введем катеты a, b, c вместо соответствующих им углов параллельности $\mathrm{F}(a)$, $\mathrm{F}(b)$, $\mathrm{F}(c)$, пользуясь формулами (I) примечания (18), то вместо формул (14) мы будем иметь формулы

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{ch}\,c = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b, & \mathrm{ch}\,c = \mathrm{ctg}\,A\,\mathrm{ctg}\,B, \\ \mathrm{sh}\,a = \mathrm{sh}\,c\sin A, & \mathrm{th}\,a = \mathrm{tg}\,A\,\mathrm{sh}\,b, \\ \mathrm{th}\,b = \mathrm{th}\,c\cos A, & \cos A = \mathrm{ch}\,a\sin B, \end{array}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

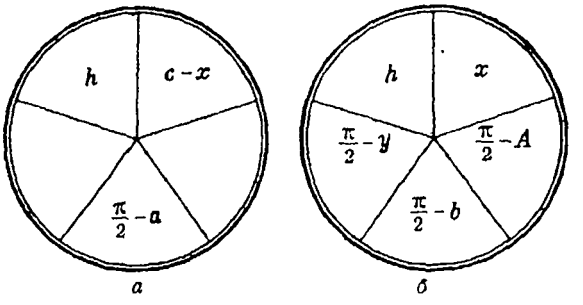
отличающиеся от соответствующих формул сферической тригонометрии (15) только тем, что вместо тригонометрических функций от катетов и гипотенузы сферического треугольника стоят гиперболические функции от катетов и гипотенузы прямолинейного треугольника.

Аналогия этих формул с формулами сферической тригонометрии представляет некоторое удобство. Но, с другой стороны, формулы (13) и (14) Лобачевского, в которых вместо сторон треугольника введены соответствующие им углы параллельности, представляют то

большое преимущество перед формулами (I), что они все могут быть получены по правилу Непера из диаграммы *в* (примечание 20), которая принадлежит 15 различным фигурам: десяти треугольникам, о которых говорится в примечании 20, и четырехугольникам, о которых будет речь в примечании 41. Одна и также диаграмма устанавливает связь между 15 фигурами.



Формулы (15) здесь выведены в предположении, что a, b, c, A и B все меньше $\frac{\pi}{2}$. Доказательство же их правильности для других случаев Лобачевский дает в «Новых началах», ст. 144.



[22] Основную формулу сферической тригонометрии можно получить, опустив из одной его вершины C перпендикуляр h на противоположную сторону и разделив данный треугольник на два прямоугольных. Для этих треугольников мы имеем диаграммы *а* и *б* и формулы

$$\cos a = \cos h \cos(c - x), \quad \cos b = \cos h \cos x$$

и

$$\sin x = \sin b \sin y, \quad \cos A = \cos h \sin y.$$

Исключая из этих уравнений $\cos x$, $\sin x$, $\cos y$, получим

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

основную формулу сферической тригонометрии, из которой, как известно, могут быть выведены все остальные.

Вывод формул (16) Лобачевский дает в «Новых началах», ст. 145.

[23] Для вывода формул (17) и в других случаях полезно иметь формулы для $\sin F(x+y)$, $\cos F(x+y)$, $\sin F(x-y)$, $\cos F(x-y)$.

Проще всего мы их получим, если воспользуемся связью между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$\sin \mathrm{F}(x+y) = \frac{1}{\mathrm{ch}\,(x+y)} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,y\,\mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sin \mathrm{F}(x)} \cdot \frac{1}{\sin \mathrm{F}(y)} + \frac{1}{\mathrm{tg}\,\mathrm{F}(x)} \cdot \frac{1}{\mathrm{tg}\,\mathrm{F}(y)}} = \frac{\sin \mathrm{F}(x) \sin \mathrm{F}(y)}{1 + \cos \mathrm{F}(x) \cos \mathrm{F}(y)},$$

$$\cos \mathrm{F}(x+y) = \mathrm{th}\,(x+y) = \frac{\mathrm{th}\,x + \mathrm{th}\,y}{1 + \mathrm{th}\,x\,\mathrm{th}\,y} = \frac{\cos \mathrm{F}(x) + \cos \mathrm{F}(y)}{1 + \cos \mathrm{F}(x) \cos \mathrm{F}(y)}. \quad \text{(I)}$$

Так как $\mathrm{F}(-y) = \pi - \mathrm{F}(y)$, то $\sin \mathrm{F}(-y) = \sin \mathrm{F}(y)$, $\cos \mathrm{F}(-y) = -\cos \mathrm{F}(y)$, и, меняя y на $-y$, имеем:

$$\left.\begin{aligned} \sin \mathrm{F}(x-y) &= \frac{\sin \mathrm{F}(x) \sin \mathrm{F}(y)}{1 - \cos \mathrm{F}(x) \cos \mathrm{F}(y)}, \\ \cos \mathrm{F}(x-y) &= \frac{\cos \mathrm{F}(x) - \cos \mathrm{F}(y)}{1 - \cos \mathrm{F}(x) \cos \mathrm{F}(y)}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

Эти же формулы могут быть выведены еще иначе без помощи гиперболических функций, при помощи формул (I) примечания 19. Замечая, что на основании уравнения (12)

$$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{F}(x+y) = \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{F}(x)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{F}(y),$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{F}(x-y) = \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{F}(x)\,\mathrm{ctg}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{F}(y),$$

мы будем иметь

$$\sin \mathrm{F}(x+y) = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\,\mathrm{F}(x+y)}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\,\mathrm{F}(x+y)} =$$

$$= \frac{2 \sin \mathrm{F}(x) \sin \mathrm{F}(y)}{[1 + \cos \mathrm{F}(x)]\,[1 + \cos \mathrm{F}(y)] + [1 - \cos \mathrm{F}(x)]\,[1 - \cos \mathrm{F}(y)]} =$$

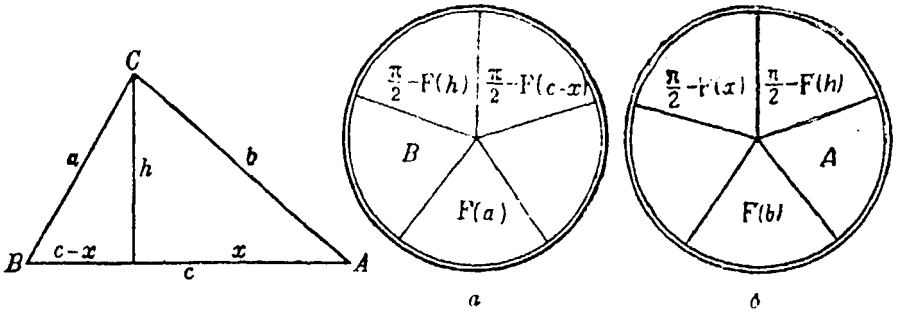
$$= \frac{\sin \mathrm{F}(x) \sin \mathrm{F}(y)}{1 + \cos \mathrm{F}(x) \cos \mathrm{F}(y)}.$$

Подобным же образом выводятся и остальные формулы.

Полагая $x = y$, получим

$$\left.\begin{aligned} \sin \mathrm{F}(2x) &= \frac{\sin^2 \mathrm{F}(x)}{1 + \cos^2 \mathrm{F}(x)} = \frac{\mathrm{tg}^2 \mathrm{F}(x)}{2 + \mathrm{tg}^2 \mathrm{F}(x)}, \\ \cos \mathrm{F}(2x) &= \frac{2 \cos \mathrm{F}(x)}{1 + \cos^2 \mathrm{F}(x)} = \frac{2}{\cos \mathrm{F}(x)\,[2 + \mathrm{tg}^2 \mathrm{F}(x)]}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}$$

Чтобы вывести первую и вторую из формул (17), проводим из вершины C треугольника ABC высоту h и разделяем данный треугольник



а *б*

на два прямоугольных треугольника. Для них имеем диаграммы *а* и *б*. Первая формула получается из формул

$$\sin A = \operatorname{tg} \mathrm{F}(b) \operatorname{ctg} \mathrm{F}(h), \quad \sin B = \operatorname{tg} \mathrm{F}(a) \operatorname{ctg} \mathrm{F}(h)$$

делением одной на другую.

Для вывода второй из формул (17) напишем

$$\sin \mathrm{F}(a) = \sin \mathrm{F}(h) \sin \mathrm{F}(c-x), \quad \sin \mathrm{F}(b) = \sin \mathrm{F}(h) \sin \mathrm{F}(x)$$
$$\cos \mathrm{F}(x) = \cos \mathrm{F}(b) \cos A$$

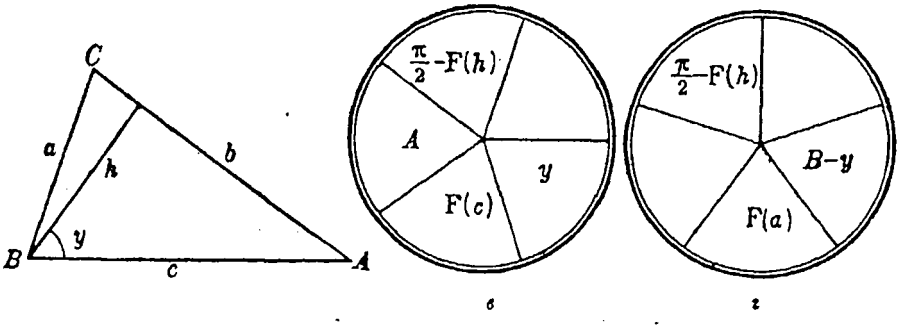
и, пользуясь формулой (II), исключим $\mathrm{F}(x)$ и $\mathrm{F}(h)$:

$$\sin \mathrm{F}(a) = \frac{\sin \mathrm{F}(h) \sin \mathrm{F}(c) \sin \mathrm{F}(x)}{1 - \cos \mathrm{F}(c) \cos \mathrm{F}(x)}$$

или

$$\sin \mathrm{F}(a) = \frac{\sin \mathrm{F}(c) \sin \mathrm{F}(b)}{1 - \cos \mathrm{F}(c) \cos \mathrm{F}(b) \cos A}.$$

Чтобы получить третью формулу (17), разделим треугольник ABC на два прямоугольных треугольника высотой, проведенной из вер-



в *г*

шины B, и напишем по их диаграммам *в* и *г* формулы

$$\cos \mathrm{F}(h) = \cos \mathrm{F}(c) \cos y, \quad \sin \mathrm{F}(c) = \operatorname{tg} y \operatorname{tg} A,$$
$$\cos \mathrm{F}(h) = \cos \mathrm{F}(a) \cos (B - y).$$

Из них имеем:

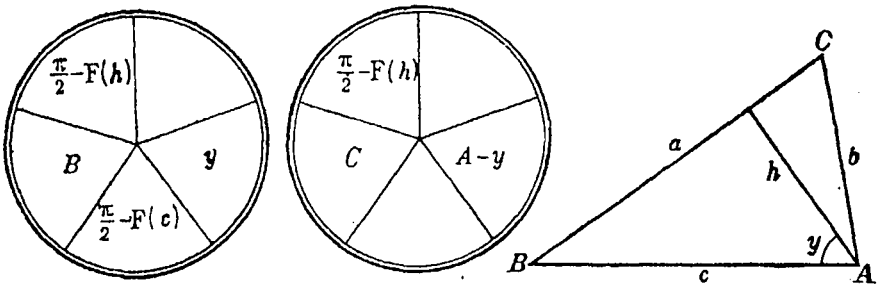
$$\cos \mathrm{F}(c) \cos y = \cos \mathrm{F}(a)\ (\cos B \cos y + \sin B \sin y);$$

определяя отсюда $\operatorname{tg} y$, получаем далее:

$$\sin \mathrm{F}(c) = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} A \frac{\cos \mathrm{F}(c) - \cos \mathrm{F}(a) \cos B}{\cos \mathrm{F}(a) \sin B},$$

$$\frac{\cos \mathrm{F}(c)}{\cos \mathrm{F}(a)} - \cos B = \sin \mathrm{F}(c) \sin B \operatorname{ctg} A.$$

Наконец, для вывода формулы четвертой разделим треугольник ABC



∂ e

высотой, проведенной из вершины A; напишем по диаграммам ∂ и e

$$\sin y = \sin \mathrm{F}(h) \cos B,\ \sin(A - y) = \sin \mathrm{F}(h) \cos C,$$
$$\sin \mathrm{F}(c) = \operatorname{tg} y \operatorname{tg} B.$$

Отсюда

$$\cos B (\sin A \cos y - \cos A \sin y) = \cos C \sin y,$$

$$\frac{\sin \mathrm{F}(c)}{\operatorname{tg} B} = \operatorname{tg} y = \frac{\sin A \cos B}{\cos C + \cos A \cos B},$$

$$\sin \mathrm{F}(c) = \frac{\sin A \sin B}{\cos C + \cos A \cos B}.$$

Если бы для вывода формул (17_3) и (17_4) мы воспользовались разделением треугольника на два прямоугольных высотой, проведенной через вершину C, то вместо формул (17_3) и (17_4) получили бы аналогичные:

$$\frac{\cos \mathrm{F}(b)}{\cos \mathrm{F}(a)} - \cos C = \sin \mathrm{F}(b) \sin C \operatorname{ctg} A,$$

$$\sin \mathrm{F}(b) = \frac{\sin A \sin C}{\cos B + \cos A \cos C}.$$

[24] Эти формулы получим, замечая, что

$$\sin F(a) = \frac{2}{e^a + e^{-a}}, \quad \cos F(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}},$$

и разлагая e^a и e^{-a} в ряды по степеням a.

[25] Во второй формуле (17) члены конечные сокращаются, члены первого порядка малости отсутствуют, и потому надо взять члены второго порядка. В остальных трех формулах достаточно взять члены первого порядка, т. е. заменить $\sin F(a)$ через единицу, $\cos F(a)$ через a.

[26] Так как

$$e^{-a} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}F(a) > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - p\right) = \frac{1 - \operatorname{tg} p}{1 + \operatorname{tg} p},$$

то

$$e^a < \frac{1 + \operatorname{tg} p}{1 - \operatorname{tg} p}$$

и

$$a < \ln \frac{1 + \operatorname{tg} p}{1 - \operatorname{tg} p},$$

или

$$a < \operatorname{tg} p + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 p + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 p + \ldots$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2p = \frac{\operatorname{tg} p}{1 - \operatorname{tg}^2 p} = \operatorname{tg} p + \operatorname{tg}^3 p + \operatorname{tg}^5 p + \ldots,$$

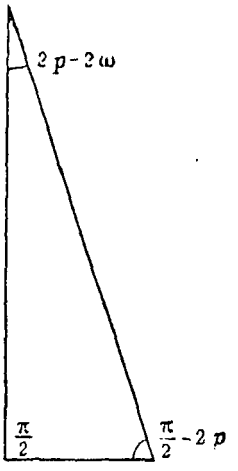
откуда

$$2a < \operatorname{tg} 2p.$$

[27] Статья, на которую ссылается Лобачевский, помещена в Connaissance des temps pour l'an 1831, Paris 1828, стр. 120—148 и озаглавлена: «Mémoire sur la détermination de la parallaxe et du mouvement propre en déclinaison des étoiles au moyen d'une nouvelle méthode d'occultations artificielles» par M. le comte d'Assas-Montdardier ancien capitaine de vaisseau chevalier de Saint-Louis. На стр. 149—151 помещена краткая заметка Delambre'a.

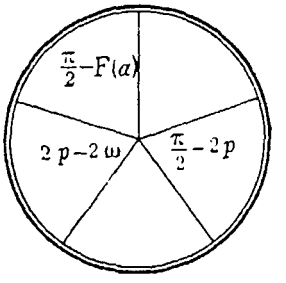
По поводу этой ссылки проф. Энгель в своем переводе делает следующее замечание: «По мнению Harzer'a в Киле, способ, описанный в этой статье, совершенно непригоден. На это указывают уже данные в тексте параллаксы, которые все слишком велики, тогда как действительные параллаксы этих звезд едва ли могут быть измерены. Название „29 Eridani“ относится к известным обозначениям Flamsteed'a неподвижных звезд („Historia caelestis“, pars I, London, 1712). Названия „Keida“, однако, там нет и вообще оно не употребительно».

[28] В уравнении (17_4) обменяем сначала местами C и A, c и a; потом, делая указанную Лобачевским подстановку, получаем формулу



$$\sin \mathrm{F}(a) = \frac{\cos 2p}{\cos(2p - 2\omega)},$$

которую можно было бы непосредственно написать, пользуясь диаграммой прямоугольного треугольника между солнцем, звездой и землей.



По формулам III (примечания 23):

$$\sin \mathrm{F}(a) = \frac{\sin^2 \mathrm{F}\left(\frac{1}{2} a\right)}{1 + \cos^2 \mathrm{F}\left(\frac{1}{2} a\right)} = \frac{1 - \cos^2 \mathrm{F}\left(\frac{1}{2} a\right)}{1 + \cos^2 \mathrm{F}\left(\frac{1}{2} a\right)},$$

$$\cos^2 \mathrm{F}\left(\frac{1}{2} a\right) = \frac{1 - \sin \mathrm{F}(a)}{1 + \sin \mathrm{F}(a)} = \frac{\cos(2p - 2\omega) - \cos 2p}{\cos(2p - 2\omega) + \cos 2p} = \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg}(2p - \omega).$$

Отсюда

$$\operatorname{ctg}^2 \mathrm{F}\left(\frac{1}{2} a\right) = \frac{\operatorname{tg} \omega \operatorname{tg}(2p - \omega)}{1 - \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg}(2p - \omega)} = \frac{\sin \omega \sin(2p - \omega)}{\cos 2p}.$$

Но

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x + y) \sin(x - y),$$

поэтому

$$\sin^2 p - \sin^2(p - \omega) = \sin \omega \sin(2p - \omega) = \cos 2p \operatorname{ctg}^2 \mathrm{F}\left(\frac{1}{2} a\right). \qquad (1)$$

[29] Из формулы (I) предыдущего примечания следует, что $\operatorname{ctg}^2 \mathrm{F}\left(\frac{1}{2} a\right)$ всегда меньше $\frac{\sin^2 p}{\cos 2p}$. Поэтому для $p' < p$ имеем

$$\operatorname{ctg}^2 \mathrm{F}\left(\frac{1}{2} a\right) < \frac{\sin^2 p'}{\cos 2p'} < \frac{\sin^2 p}{\cos 2p},$$

и, если мы в формуле (I) заменим $\operatorname{ctg}^2 \mathrm{F}\left(\frac{1}{2}a\right)$ через $\frac{\sin^2 p'}{\cos 2p'}$, то получим

$$\sin^2(p-\omega) > \sin^2 p - \sin^2 p' \frac{\cos 2p}{\cos 2p'},$$

причем правая часть останется положительной. Далее, Лобачевский полагает

$$\sin x = \frac{\sin p'}{\sin p} \sqrt{\frac{\cos 2p}{\cos 2p'}}$$

и, заменяя $\sin(p-\omega)$ и $\sin p$ через $p-\omega$ и p, получает $p-\omega > p\cos x$, откуда

$$\omega < 2p \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Для $p' = 0'',62$ и $p = 1''$ с точностью, вполне достаточной, имеем:

$$\sin x = 0{,}62, \quad \lg \sin x = 9{,}79239, \quad x = 38°19',$$

$$\frac{x}{2} = 19°9',5, \quad \lg \sin \frac{x}{2} = 9{,}51611,$$

$$\lg 2p \sin^2 \frac{x}{2} = 9{,}33325,$$

$$\omega < 0'',2154, \quad 2\omega < 0'',43.$$

[30] По формулам (8) имеем для суммы острых углов прямоугольного треугольника:

$$\mathrm{F}(a') + \mathrm{F}(b') = \frac{1}{2}\mathrm{F}(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\mathrm{F}(\beta-\alpha) - \mathrm{F}(\alpha+\beta) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{F}(\alpha+\beta),$$

$$\pi - 2\omega = \frac{\pi}{2} + \mathrm{F}(a') + \mathrm{F}(b') = \pi - \mathrm{F}(\alpha+\beta).$$

Отсюда

$$2\omega = \mathrm{F}(\alpha+\beta),$$

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\mathrm{F}(\alpha+\beta) = e^{-\alpha}e^{-\beta};$$

но

$$\mathrm{F}(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{F}(a),$$

поэтому

$$e^{-\alpha} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\mathrm{F}(\alpha) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\mathrm{F}(a)\right) = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\mathrm{F}(a)}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\mathrm{F}(a)} = \frac{e^a-1}{e^a+1},$$

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{e^a-1}{e^a+1}\cdot\frac{e^b-1}{e^b+1}.$$

Если теперь положим, что $a = b$, то получим

$$\operatorname{tg}\omega = \left(\frac{e^a - 1}{e^a + 1}\right)^2 = \cos^2 \mathrm{F}\left(\frac{1}{2}\,a\right).$$

[31] По формуле

$$\cos^2 \mathrm{F}\left(\frac{1}{2}\,a\right) = \frac{1 - \sin \mathrm{F}(a)}{1 + \sin \mathrm{F}(a)},$$

данной в примечании 28, принимая во внимание, что $\mathrm{F}(a) > \frac{\pi}{2} - 2p$ и $\sin \mathrm{F}(a) > \cos 2p$, имеем

$$\cos^2 \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right) < \frac{1 - \cos 2p}{1 + \cos 2p} = \operatorname{tg}^2 p.$$

[32] Если через α обозначим угол в $1''$, выраженный в радианах:

$$\alpha = 0{,}00000484814,$$

то угол $p'' = 0'',62$, выраженный в радианах, будет

$$\bar{p} = 0{,}62\alpha;$$

заменяя $\operatorname{tg}\omega$ и $\operatorname{tg} p$ через ω и p, будем иметь для ω, выраженного в радианах, $\bar{\omega} < \bar{p}^2$, и в секундах:

$$\omega'' < \frac{\bar{p}^2}{\alpha} = \alpha \cdot 0{,}62^2 = \alpha \cdot 0{,}3844,$$

$$2\omega'' < \alpha \cdot 0{,}7688 = 0{,}0000037273''.$$

У Лобачевского в «Казанском вестнике» и во всех дальнейших работах стоит:

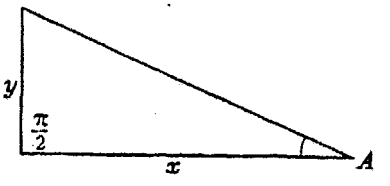
$$2\omega < 0{,}000372,$$

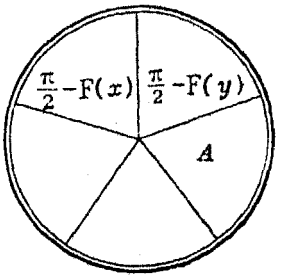
т. е. число в сто раз большее. На эту погрешность обратил внимание проф. Энгель в его примечании к переводу «О началах геометрии».

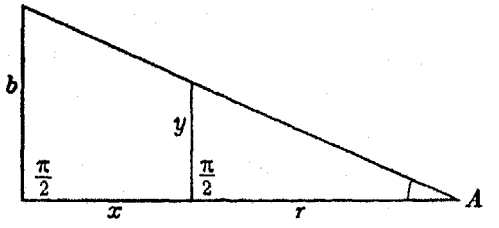
[33] Вероятно, Лобачевский подразумевает следующее место P. S. Laplace — Exposition du système du monde. Paris, 3-е изд., 1808: «Повидимому звезды, рассеянные далеко не на одинаковых расстояниях одна от другой, собраны в группы, из которых некоторые содержат миллиарды звезд. Наше солнце и наиболее яркие звезды образуют, вероятно, часть одной из этих групп, которая, когда мы рассматриваем ее с той точки, где мы находимся, представляется нам в виде млечного пути, опоясывающего небо... Таким образом вероятно, что многие из туманностей образуют группы большого числа звезд, которые, если их рассматривать изнутри, будут представляться подобными млечному пути».

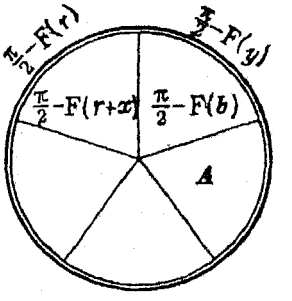
Чутье и здесь не обмануло Лобачевского. Более того, современные исследования установили, что звездных миров, удаленных от нас на миллионы световых годов, неизмеримо больше, чем себе представлял Лаплас, чем «увлекался» Лобачевский. Вывод, к которому приходит Лобачевский, таким образом, в настоящее время еще несравненно больше обоснован.

[84] Формула (18) и следующая за ней соответствуют следующим чертежам и диаграммам:









Тангенс $F(r+x)$ находится по формулам (I) примечания 23, и мы имеем

$$\cos F(y) = \cos F(b)\,\frac{\operatorname{tg} F(r+x)}{\operatorname{tg} F(r)} = \frac{\sin F(r)\sin F(x)}{\cos F(r)+\cos F(x)} \cos F(b)\operatorname{ctg} F(r),$$

$$\cos F(y) = \frac{\sin F(x)\cos F(r)}{\cos F(x)+\cos F(r)} \cos F(b).$$

Для $r=\infty$,

$$F(r)=0, \quad \cos F(r)=1,$$

$$\cos F(y) = \frac{\sin F(x)}{1+\cos F(x)} \cos F(b) = \operatorname{tg}\frac{1}{2} F(x)\cos F(b) = e^{-x}\cos F(b).$$

При $r=\infty$ прямая становится параллельной оси абсцисс.

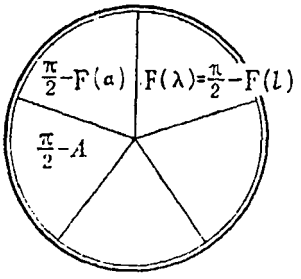
[85] Так как $A > F(l)$, то $\cos F(a) < 1$ и существует отрезок a, удовлетворяющий уравнению (20). Если мы перепишем это уравнение таким образом:

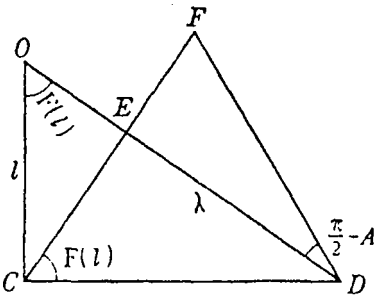
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - F(l)\right)\cos F(a),$$

то получим формулу (13_5), соответствующую прилагаемой диаграмме; поэтому отрезок a представляет собой катет прямоугольного треугольника, у которого другой катет равен отрезку λ, связанному с l соотношением

$$\mathrm{F}(\lambda) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{F}(l),$$

и прилежащий к катету λ угол равен $\frac{\pi}{2} - A$. Такой треугольник построить нетрудно, если нам известен угол параллельности $\mathrm{F}(l)$ (см. примечание 12). На стороне этого угла $\mathrm{F}(l) = DOC$ отложим отре-

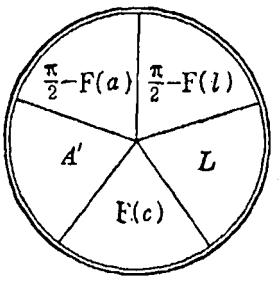




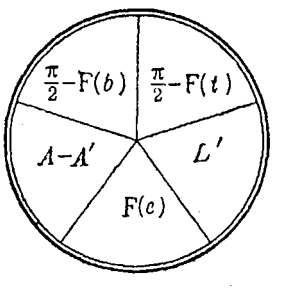
зок $l = OC$; из точки C опустим перпендикуляр CE на сторону OD, при точке C построим угол $ECD = \mathrm{F}(l)$, тогда $ED = \lambda$. При точке D построим угол $EDF = \frac{\pi}{2} - A$; пересечение стороны DF с продолжением CE дает отрезок $EF = a$.

Линия CD пересечет продолжение OE в некоторой точке D, ибо в прямоугольном треугольнике OCE сторона $CE < OC = l$, и $\mathrm{F}(CE) > > \mathrm{F}(l)$.

[36] Данные в тексте формулы получаем из двух треугольников, построение которых описывает Лобачевский, и соответствующих этим треугольникам диаграмм a и $б$.



a



$б$

[37] Подставляя в формулу

$$\mathrm{tg}\, L' = \sin \mathrm{F}(c)\, \frac{1 + \mathrm{tg}\, A \cdot \mathrm{tg}\, A'}{\mathrm{tg}\, A - \mathrm{tg}\, A'}.$$

выражения

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} \mathrm{F}(l)}{\cos \mathrm{F}(a)}, \quad \operatorname{tg} A' = \operatorname{tg} \mathrm{F}(l) \cos \mathrm{F}(a),$$

имеем

$$\operatorname{tg} L' = \sin \mathrm{F}(c) \cos \mathrm{F}(a) \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \mathrm{F}(l)}{\operatorname{tg} \mathrm{F}(l) \sin^2 \mathrm{F}(a)} = \frac{\sin \mathrm{F}(c) \cos \mathrm{F}(a)}{\sin \mathrm{F}(l) \cos \mathrm{F}(l) \sin^2 \mathrm{F}(a)},$$

и, принимая во внимание равенство

$$\sin \mathrm{F}(c) = \sin \mathrm{F}(a) \sin \mathrm{F}(l),$$

получаем

$$\operatorname{tg} L' = \frac{\cos \mathrm{F}(a)}{\sin \mathrm{F}(a) \cos \mathrm{F}(l)} = \operatorname{ctg} L.$$

[38] Эти формулы при помощи предыдущих и формул

$$\sin L \operatorname{ctg} \mathrm{F}(c) = \operatorname{ctg} \mathrm{F}(l); \quad \cos \mathrm{F}(a) = \cos \mathrm{F}(c) \cos L$$

для треугольника со сторонами c, l, a получаются таким образом:

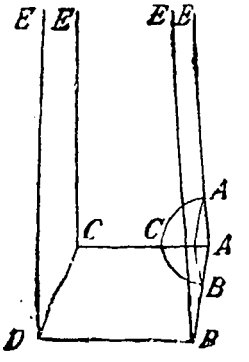
$$\cos \mathrm{F}(b) = \sin L \cos \mathrm{F}(c) = \sin L \operatorname{ctg} \mathrm{F}(c) \sin \mathrm{F}(c) =$$

$$= \sin L \operatorname{ctg} \mathrm{F}(c) \sin \mathrm{F}(a) \sin \mathrm{F}(l) = \sin \mathrm{F}(a) \cos \mathrm{F}(l),$$

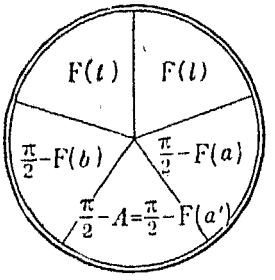
$$\operatorname{tg} \mathrm{F}(l) = \frac{\sin \mathrm{F}(c) \operatorname{tg} L}{\cos \mathrm{F}(b)} = \frac{\sin \mathrm{F}(a) \sin \mathrm{F}(l) \operatorname{tg} L}{\sin L \cos \mathrm{F}(c)} =$$

$$= \frac{\sin \mathrm{F}(a) \sin \mathrm{F}(l)}{\cos L \cos \mathrm{F}(c)} = \operatorname{tg} \mathrm{F}(a) \sin \mathrm{F}(l).$$

[39] В том, что четырехугольнику (черт. 10 текста) соответствует треугольник (черт. 11 текста), можно убедиться еще иначе геометрическим построением. Восставим в вершине D прямого угла, противолежащего острому A, перпендикуляр DE к плоскости четырехугольника, и через вершины A, B и C проведем к нему параллельные AE, BE и CE. Сумма внутренних двугранных углов между плоскостями, в которых лежат четыре параллельные, равняется 2π, а так как углы с ребрами BE, DE, CE — прямые, то и четвертый угол с лезвием AE также прямой. Воображаем около A как центра сферу; пересечение ее линиями AE, AB, AC произведет прямоугольный при AE сферический треугольник ABC, в котором гипотенуза $BC = \angle A$, катеты $AC = \mathrm{F}(l)$, $AB = \mathrm{F}(l)$ и противоположные углы $\mathrm{F}(a)$ и $\mathrm{F}(b)$. Для этого треугольника мы

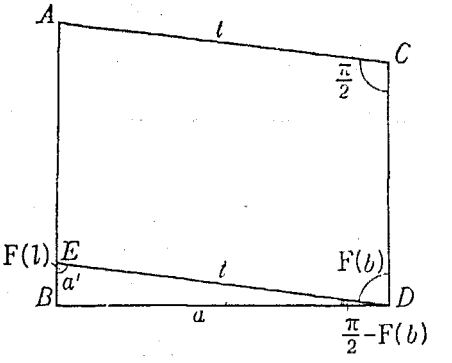


будем иметь прилагаемую диаграмму, этой диаграмме соответствуют (см. примечание 20) пять прямолинейных треугольников, между которыми отметим треугольник с гипотенузой l. В нем катеты будут a, a', причем $\mathrm{F}(a') = A$, и противоположные углы $\frac{\pi}{2} - \mathrm{F}(b)$ и $\mathrm{F}(l)$.



[40] Если мы полученный в предыдущем примечании треугольник положим на четырехугольник так, чтобы катет a треугольника совпал со стороной a четырехугольника, то будем иметь фигуру, изображенную на чертеже.

Из нее вытекает построение отрезка a иное, чем данное в примечании 35. По углу $A = \mathrm{F}(a')$ построим отрезок $AB = a'$ (см. примечание 11) и, отложив $BE = a'$, строим при точке E угол $BED = \mathrm{F}(l)$. Так как $\mathrm{F}(l) < \mathrm{F}(a')$, то $a' < l$ и точка E лежит между A и B; следовательно, сторона ED угла BED пересечет BD. Катет BD треугольника BED будет равен a.



Та же фигура дает два способа построения прямой, проходящей через данную точку, параллельную данной прямой.

Из чертежа, приведенного в примечании 39 на стр. 289 мы видим, что угол EDC будет углом параллельности, соответствующим отрезку b, и, следовательно, линия ED будет параллельна AC. Поэтому, чтобы через точку D провести линию, параллельную AC, опускаем из D перпендикуляр $DC = b$ на линию AC и проводим прямую DB, перпендикулярную к DC. Из произвольной точки A данной линии AC опускаем перпендикуляр AB на DB. В четырехугольнике $ABDC$ с прямыми углами B, D, C и острым A сторона $a < l$. Поэтому окружность, описанная из D радиусом $AC = l$, пересечет линию AB в точке E между точками A и C, и линия DE будет параллельна линии AC.

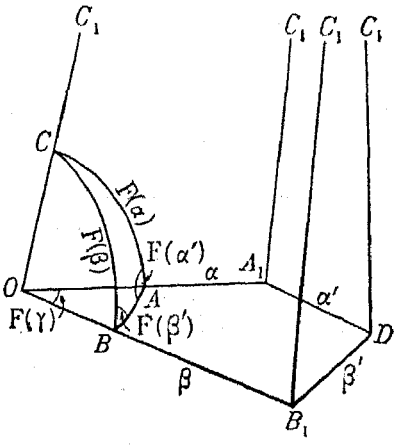
Другой способ заключается в следующем. Чтобы через точку A провести линию, параллельную прямой BD, опускаем из точки A перпендикуляр AB на линию BD; в произвольной точке D восставляем к линии BD перпендикуляр DC и из A опускаем на DC перпендикуляр AC. Если сделаем $DE = AC$, то угол BED будет углом параллельности, соответствующим отрезку AB. Построив на AB при точке A угол, равный углу BED, получим линию, параллельную BD.

Эти два построения параллельной линии Энгелем в его примечаниях к переводу «О началах геометрии». Проф. Энгель сопровождает их следующим замечанием:

«Надо думать, что Лобачевский знал эти построения, хотя он нигде не говорит о них. Общеизвестно было до сих пор только второе, которое дает Иоанн Больай в § 34 своего „Аппендикса"».

[41] Мы видели выше, что всякому четырехугольнику с тремя прямыми углами соответствует сферический прямоугольный треугольник. Нетрудно доказать обратное положение.

Действительно, пусть мы имеем прямоугольный при точке C сферический треугольник ABC с гипотенузой $F(\gamma)$, катетами $F(\alpha)$, $F(\beta)$ и прилежащими углами $F(\alpha')$, $F(\beta')$. Отложим по радиусам OA и OB отрезки $OA_1 = \alpha$, $OB_1 = \beta$ и через точки A_1 и B_1 проведем в плоскости AOB перпендикуляры A_1D и B_1D к радиусам OA и OB. Эти перпендикуляры пересекутся в некоторой точке D, ибо по свойству сферического треугольника $F(\alpha) + F(\beta) > F(\gamma)$. Мы получим, таким образом, четырехугольник OA_1DB_1, у которого два прямых угла A_1 и B_1 и острый угол O.



Докажем, что четвертый угол D будет прямой. Проведем через точки A_1 и B_1 линии A_1C_1 и B_1C_1, перпендикулярные к радиусам, соответственно в плоскостях AOC и BOC. Так как $OB_1 = \beta$, $OA_1 = \alpha$, то эти линии будут параллельны с OC_1 и, следовательно, параллельны между собой. Плоскости DA_1C_1 и DB_1C_1 будут перпендикулярны к радиусам OA и OB и к плоскости AOB и пересекутся по прямой DC_1, параллельной с B_1C_1, A_1C_1 и OC_1. Сумма углов между плоскостями C_1OB_1, C_1B_1D, C_1A_1D и C_1OA_1 равна 2π, а так как три из этих углов прямые, то четвертый с ребром DC_1 и линейным углом D в четырехугольнике OA_1DB_1 будет тоже прямым. На чертежа видно, что угол $DB_1C_1 = F(\beta')$ и угол $DA_1C_1 = F(\alpha')$ и потому вследствие параллельности DC_1 с A_1C_1 и B_1C_1 стороны четырехугольника $B_1D = \beta'$ и $A_1D = \alpha'$.

Таким образом сферическому треугольнику с элементами

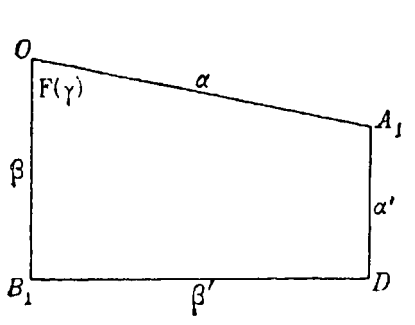
$$F(\alpha),\ F(\alpha'),\ F(\gamma),\ F(\beta'),\ F(\beta)$$

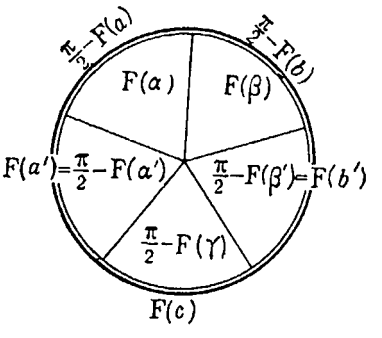
соответствует четырехугольник с тремя прямыми углами, острым

углом $F(\gamma)$, прилежащими ему сторонами α, β и противолежащими сторонами α', β':

$$\alpha',\ \alpha,\ F(\gamma),\ \beta,\ \beta'.$$

Формулы сферического треугольника будут выражать вместе с тем и соотношения между частями четырехугольника. Эти формулы мы получим по правилам Непера, если для треугольника ABC построим





ту же диаграмму, которая будет принадлежать и четырехугольнику.

Мы приходим, таким образом, к следующему мнемоническому правилу для формул четырехугольника с тремя прямыми углами.

Вместо сторон α и β, прилегающих к острому углу $F(\gamma)$, берем их углы параллельности $F(\alpha)$, $F(\beta)$; вместо сторон α' и β', противолежащих острому углу, — дополнения до $\frac{\pi}{2}$ их углов параллельности:

$$\frac{\pi}{2} - F(\alpha') = F(a'), \quad \frac{\pi}{2} - F(\beta') = F(b'),$$

вместо острого угла $F(\gamma)$ — его дополнение

$$\frac{\pi}{2} - F(\gamma) = F(c).$$

Начиная с прямого угла, противолежащего острому, вписываем все величины, относящиеся к сторонам, в том порядке, в котором мы их встречаем при обходе по контуру четырехугольника, и последней вписываем величину, относящуюся к острому углу.

Применяя к полученной диаграмме правило Непера, мы имеем все десять формул для четырехугольника с тремя прямыми углами. Но мы видели выше, что одна и та же диаграмма может считаться принадлежащей пяти различным сферическим треугольникам. Поэтому той же диаграмме будет соответствовать пять различных четырехугольников, каждый сектор мы можем принимать за сектор, принадлежащий гипотенузе треугольника или острому углу четырех-

угольника. Так, например, если сектор $F(\beta)$ будет соответствовать гипотенузе, то части сферического треугольника будут

$$F(a'), \quad \frac{\pi}{2} - F(\alpha) = F(a), \quad \frac{\pi}{2} - F(\beta) = F(b), \quad \frac{\pi}{2} - F(b'), \quad F(c),$$

а части четырехугольника —

$$a,\ a',\ F(b),\ c,\ \beta',$$

если тот же сектор соответствует острому углу.

Принимая во внимание сказанное в примечании 20, мы видим, таким образом, что одна и та же диаграмма и одни и те же формулы, написанные для этой диаграммы по правилу Непера, соответствуют 15 различным фигурам: пяти прямолинейным прямоугольным треугольникам, пяти сферическим прямоугольным треугольникам и пяти четырехугольникам с тремя прямыми углами.

Пользуясь одними и теми же десятью формулами для всех 15 фигур, мы должны помнить, что десять величин:

$$a,\ b,\ c,\ a',\ b',$$
$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha',\ \beta',$$

связаны между собой соотношениями

$$F(a) + F(\alpha) = \frac{\pi}{2}, \quad F(a') + F(\alpha') = \frac{\pi}{2},$$

$$F(b) + F(\beta) = \frac{\pi}{2}, \quad F(b') + F(\beta') = \frac{\pi}{2}, \quad F(c) + F(\gamma) = \frac{\pi}{2}.$$

Мы видим на примере этих 15 фигур, какое большое значение представляет собой угол параллельности, введенный Лобачевским, позволяющий линии выражать через углы и, обратно, углы через линии, вводить в тригонометрические формулы или только линии, или только углы. Если бы мы отказались в формулах пользоваться углами параллельности и ввели бы сообразно с этим вместо круговых функций гиперболические, то вместо простых формул:

$$\sin F(a) = \cos F(\alpha), \quad \cos F(a) = \sin F(\alpha), \quad \operatorname{tg} F(a) = \operatorname{ctg} F(\alpha),$$

нам пришлось бы пользоваться более сложными:

$$\operatorname{sh} a = \operatorname{ctg} F(a) = \operatorname{tg} F(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha},$$

$$\operatorname{ch} a = \frac{1}{\sin F(a)} = \frac{1}{\cos F(\alpha)} = \frac{1}{\operatorname{th} \alpha},$$

$$\operatorname{th} a = \cos F(a) = \sin F(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha}.$$

Для каждой из 15 фигур мы получили бы различные формулы, и простота связи между фигурами утратилась бы.

[42] Формулу

$$\cos \mathrm{F}(b) = \sin \mathrm{F}(x) \cos \mathrm{F}(y)$$

получаем из формулы

$$\cos \mathrm{F}(b) = \sin \mathrm{F}(a) \cos \mathrm{F}(l),$$

ставя вместо a и l, x и y. Если x отсчитывать от l, то в формуле (23) надо x заменить через $a - x$. Тогда получим

$$\cos \mathrm{F}(y) = \frac{\sin \mathrm{F}(a) \cos \mathrm{F}(l)}{\sin \mathrm{F}(a - x)}.$$

По формуле (11) примечания 23:

$$\cos \mathrm{F}(y) = \frac{\sin \mathrm{F}(a) \cos \mathrm{F}(l)\,(1 - \cos \mathrm{F}(a) \cos \mathrm{F}(x))}{\sin \mathrm{F}(a) \sin \mathrm{F}(x)},$$

$$\cos \mathrm{F}(y) = \frac{\cos \mathrm{F}(l)}{\sin \mathrm{F}(x)} - \sin \mathrm{F}(l) \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} \mathrm{F}(x),$$

$$\sin A \cos \mathrm{F}(y) = \operatorname{ch} x \cos \mathrm{F}(l) \sin A - \operatorname{sh} x \sin \mathrm{F}(l) \cos A.$$

Отсюда, выражая $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ через показательные функции, получаем уравнение (25).

[43] По поводу уравнения (24) можно сделать следующее замечание. Это уравнение *линейное* относительно $\cos \mathrm{F}(y) \sin \mathrm{F}(x)$ и $\cos \mathrm{F}(x)$, и если мы положим

$$\xi = \cos \mathrm{F}(x), \quad \eta = \cos \mathrm{F}(y) \sin \mathrm{F}(x), \tag{I}$$

оно примет вид:

$$\eta = \cos \mathrm{F}(l) - \sin \mathrm{F}(l) \operatorname{ctg} A \cdot \xi.$$

Координаты ξ и η, в которых прямая выражается линейным уравнением, называются *бельтрамиевыми координатами*.

Исключая из уравнений (I) $\sin \mathrm{F}(x)$, мы получаем:

$$\xi^2 + \frac{\eta^2}{\cos^2 \mathrm{F}(y)} = 1$$

и затем, полагая $y = \infty$:

$$\xi^2 + \eta^2 = 1.$$

Расстояние точки $(x, 0)$ от начала координат xOy на плоскости Лобачевского связано с расстоянием соответствующей точки $(\xi, 0)$ от начала системы $\xi O \eta$ на плоскости Евклида равенством

$$\xi = \cos \mathrm{F}(x) = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

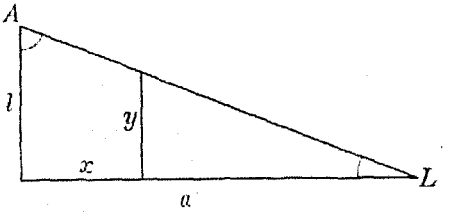
или

$$x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\xi}{1-\xi} = \frac{1}{2}\ln(1, -1, 0, \xi),$$

где через $(1, -1, 0, \xi)$ обозначено ангармоническое отношение четырех точек $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 0)$ и $(\xi, 0)$, из которых первые две лежат в пересечении оси ξ с кругом $\xi^2+\eta^2=1$.

Таким образом, если мы будем точку (x, y) плоскости Лобачевского отображать точкой (ξ, η) на плоскости Евклида, то каждая прямая первой плоскости отобразится прямой на второй, а все бесконечно отдаленные точки плоскости Лобачевского изобразятся точками круга радиуса единица. Расстояние же между двумя точками на плоскости Лобачевского будет равно $\frac{1}{2}$ ln ангармонического отношения между их отображениями на плоскости Евклида и двумя точками, в которых прямая, их соединяющая, пересекается окружностью. Короче говоря, проективное мероопределение Кэли (Cayley), для которого круг $\xi^2+\eta^2=1$ является абсолютом, будет служить отображением плоскости Лобачевского на площади круга евклидовой плоскости.

[44] Уравнение (25) выведено в предположении, что $F(l) < A$. В том, что оно остается справедливым для всякого угла A, убеждаемся таким образом.

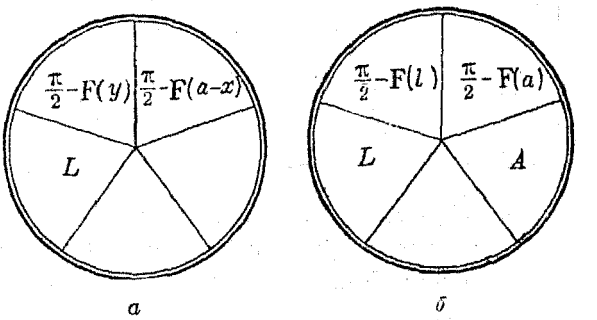


а

Если $A = F(l)$, то прямая линия становится параллельной оси x и уравнение (25) обращается в

$$2\sin F(l)\cos F(y) =$$
$$= e^{-x}\sin 2F(l) =$$
$$= 2\sin F(l)\cos F(l)\,e^{-x},$$

т. е. в уравнение (19).



а *б*

Если $A < F(l)$, то линия пересечет ось x в некоторой точке L. Тогда из двух прямоугольных треугольников с катетом y и катетом l, которым соответствуют диаграммы *а* и *б*, имеем формулы

$$\cos F(y) = \operatorname{tg} L \operatorname{ctg} F(a-x),$$
$$\cos F(a) = \operatorname{tg} A \operatorname{ctg} F(l),$$
$$\cos F(l) = \operatorname{tg} L \operatorname{ctg} F(a).$$

Первая при помощи двух других и формул (II) примечания 23 преобразуется в уравнение (24):

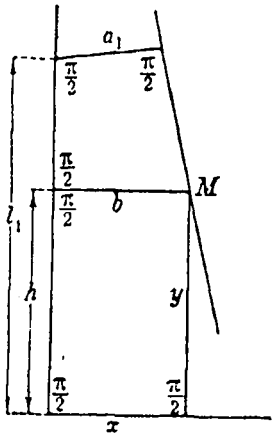
$$\cos \mathrm{F}(y) = \operatorname{tg} L \frac{\cos \mathrm{F}(a) - \cos \mathrm{F}(x)}{\sin \mathrm{F}(x) \sin \mathrm{F}(a)} = \frac{\cos \mathrm{F}(l)}{\sin \mathrm{F}(x)} - \frac{\cos \mathrm{F}(l)}{\cos \mathrm{F}(a)} \operatorname{ctg} \mathrm{F}(x) =$$

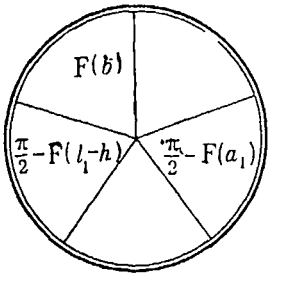
$$= \frac{\cos \mathrm{F}(l)}{\sin \mathrm{F}(x)} - \sin \mathrm{F}(l) \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} \mathrm{F}(x)$$

и затем в уравнение (25).

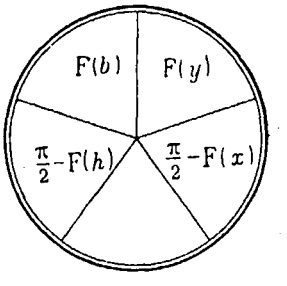
Если $A > \frac{\pi}{2}$, то продолжение прямой в сторону отрицательной оси x образует с осью y угол $\pi - A < \frac{\pi}{2}$, и, следовательно, уравнение прямой мы получим, заменив в (25) x на $-x$ и A на $\pi - A$; но вследствие такой замены уравнение (25) не изменит своего вида. Таким образом это уравнение имеет место и для угла $A > \frac{\pi}{2}$.

Когда прямая не пересекает оси y, то положение ее можно задать длиной общего перпендикуляра a_1 к прямой и оси y и расстоянием его l_1 от начала координат. Опустим из точки M прямой перпенди-





б



г

куляры y и b на оси x и y; мы получим два четырехугольника с тремя прямыми углами. Для них мы будем иметь диаграммы (черт. *в* и *г*) и по правилу Непера получим

$$\cos \mathrm{F}(a_1) = \cos \mathrm{F}(b) \sin \mathrm{F}(l_1 - h), \quad \cos \mathrm{F}(h) = \cos \mathrm{F}(y) \sin \mathrm{F}(x),$$

$$\cos \mathrm{F}(x) = \cos \mathrm{F}(b) \sin \mathrm{F}(h).$$

По формуле (II) примечания 23

$$\cos \mathrm{F}(a_1) = \cos \mathrm{F}(b) \frac{\sin \mathrm{F}(l_1) \sin \mathrm{F}(h)}{1 - \cos \mathrm{F}(l_1) \cos \mathrm{F}(h)} =$$

$$= \frac{\cos \mathrm{F}(x) \sin \mathrm{F}(l_1)}{1 - \cos \mathrm{F}(l_1) \cos \mathrm{F}(h)} = \frac{\cos \mathrm{F}(x) \sin \mathrm{F}(l_1)}{1 - \cos \mathrm{F}(l_1) \cos \mathrm{F}(y) \sin \mathrm{F}(x)};$$

отсюда

$$\cos \mathrm{F}(y) = \frac{1}{\cos \mathrm{F}(l_1) \sin \mathrm{F}(x)} - \frac{\operatorname{tg} \mathrm{F}(l_1)}{\cos \mathrm{F}(a_1)} \operatorname{ctg} \mathrm{F}(x) =$$

$$= \frac{\operatorname{ch} x}{\cos \mathrm{F}(l_1)} - \frac{\operatorname{tg} \mathrm{F}(l_1)}{\cos \mathrm{F}(a_1)} \operatorname{sh} x,$$

$$2 \cos \mathrm{F}(y) = e^x \left[\frac{1}{\cos \mathrm{F}(l_1)} - \frac{\operatorname{tg} \mathrm{F}(l_1)}{\cos \mathrm{F}(a_1)} \right] + e^{-x} \left[\frac{1}{\cos \mathrm{F}(l_1)} + \frac{\operatorname{tg} \mathrm{F}(l_1)}{\cos \mathrm{F}(a_1)} \right],$$

$$2 \operatorname{ctg} \mathrm{F}(a_1) \cos \mathrm{F}(y) =$$

$$= e^x \left[\frac{\operatorname{ctg} \mathrm{F}(a_1)}{\cos \mathrm{F}(l_1)} - \frac{\operatorname{tg} \mathrm{F}(l_1)}{\sin \mathrm{F}(a_1)} \right] + e^{-x} \left[\frac{\operatorname{ctg} \mathrm{F}(a_1)}{\cos \mathrm{F}(l_1)} + \frac{\operatorname{tg} \mathrm{F}(l_1)}{\sin \mathrm{F}(a_1)} \right].$$

Нетрудно видеть, что это уравнение тождественно с уравнением (25), если в последнем мы будем считать как угол A, так и расстояние l мнимыми и положим $A = ia_1$ и $l = \frac{\pi}{2} i - l_1$. Действительно, тогда

$$\sin A = i \operatorname{sh} a_1 = i \operatorname{ctg} \mathrm{F}(a_1),$$

$$\sin \mathrm{F}(l) = \frac{1}{\operatorname{ch} l} = \frac{i}{\operatorname{sh} l_1} = i \operatorname{tg} \mathrm{F}(l_1),$$

$$\cos A = \operatorname{ch} a_1 = \frac{1}{\sin \mathrm{F}(a_1)},$$

$$\cos \mathrm{F}(l) = \operatorname{th} l = \operatorname{cth} l_1 = \frac{1}{\cos \mathrm{F}(l_1)},$$

$$\sin [A - \mathrm{F}(l)] = \sin A \cos \mathrm{F}(l) - \cos A \sin \mathrm{F}(l) = i \left[\frac{\operatorname{ctg} \mathrm{F}(a_1)}{\cos \mathrm{F}(l_1)} - \frac{\operatorname{tg} \mathrm{F}(l_1)}{\sin \mathrm{F}(a_1)} \right],$$

$$\sin [A + \mathrm{F}(l)] = \sin A \cos \mathrm{F}(l) + \cos A \sin \mathrm{F}(l) = i \left[\frac{\operatorname{ctg} \mathrm{F}(a_1)}{\cos \mathrm{F}(l_1)} + \frac{\operatorname{tg} \mathrm{F}(l_1)}{\sin \mathrm{F}(a_1)} \right].$$

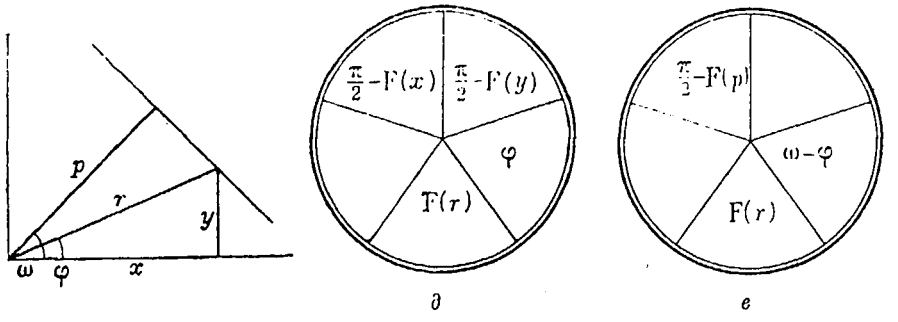
Таким образом уравнение (25) есть уравнение, общее всем прямым линиям, если мы для линий, пересекающих ось y, будем A и l считать действительными, а для линий, ось y не пересекающих, — мнимыми.

Чтобы иметь общее уравнение прямой, содержащее только действительные параметры, проф. Энгель [1]) опускает из начала коорди-

---

[1]) См. F. Engel—N. J. Lobatschefskij, Zwei Geometrische Abhandlungen, стр. 258.

нат перпендикуляр на прямую и определяет положение прямой длиной p этого перпендикуляра и углом ω, который он образует с осью x.



б *в*

Из прямоугольных треугольников с катетами p и x имеем (диаграммы *б* и *в*):

$$\cos \mathrm{F}(r) \cos(\omega - \varphi) = \cos \mathrm{F}(p),$$

$$\cos \mathrm{F}(r) \cos \varphi = \cos \mathrm{F}(x), \quad \operatorname{tg} \varphi = \cos \mathrm{F}(y) \operatorname{tg} \mathrm{F}(x);$$

отсюда

$$\cos \mathrm{F}(r) \sin \varphi = \cos \mathrm{F}(y) \sin \mathrm{F}(x),$$

$$\cos \omega \cos \mathrm{F}(x) + \sin \omega \cos \mathrm{F}(y) \sin \mathrm{F}(x) = \cos \mathrm{F}(p)$$

или, в бельтрамиевых координатах:

$$\xi \cos \omega + \eta \sin \omega = \cos \mathrm{F}(p),$$

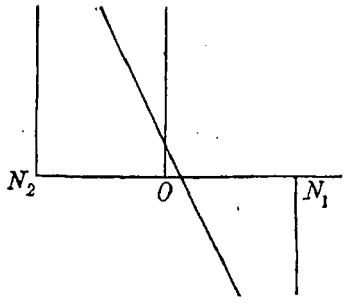
— общее уравнение прямой, которое можно привести к виду

$$2 \sin \omega \cos \mathrm{F}(y) = [\cos \mathrm{F}(p) - \cos \omega]\, e^{x} + [\cos \mathrm{F}(p) + \cos \omega]\, e^{-x},$$

если $\sin \mathrm{F}(x)$ и $\cos \mathrm{F}(x)$ выразить через показательные функции.

Положение прямой можно определить еще иначе.

Какова бы ни была данная прямая, всегда можно провести две линии, с ней параллельные и перпендикулярные к оси x. Действительно,



если в уравнении (25) прямой мы положим $y = \pm\infty$, $\mathrm{F}(y) = 0$ или π, $\cos \mathrm{F}(y) = \pm 1$, то соответствующее значение $x = n$ определит на оси x точку $(n,\ 0)$; ордината, проведенная через эту точку (N_1 или N_2), пересечет данную прямую в бесконечности, т. е. будет параллельна данной прямой в положительном направлении оси y, если $x = n$ соответствует $y = +\infty$, и в отрицательном, если $y = -\infty$. Но полагая в уравнении (25) $\cos \mathrm{F}(y) = \pm 1$, для определения e^{x} мы имеем или уравнение:

$$e^{2x} \sin[A - \mathrm{F}(l)] - 2\, e^{x} \sin A + \sin[A + \mathrm{F}(l)] = 0, \qquad (\mathrm{I})$$

когда $y = +\infty$ и $\cos F(y) = +1$, или уравнение

$$e^{2x} \sin [A - F(l)] + 2e^{x} \sin A + \sin [A + F(l)] = 0, \qquad (II)$$

когда $y = -\infty$ и $\cos F(y) = -1$.

Так как $\sin^2 A - \sin [A - F(l)] \sin [A + F(l)] = \sin^2 F(l)$, то корнями этих уравнений будут

$$\varepsilon_1 e^{n_1} = \frac{\sin A + \sin F(l)}{\sin [A - F(l)]}, \quad \varepsilon_2 e^{n_2} = \frac{\sin A - \sin F(l)}{\sin [A - F(l)]}, \qquad (III)$$

где $\varepsilon_1 = \pm 1$ и $\varepsilon_2 = \pm 1$.

Эти корни действительны не только в том случае, когда углы A и $F(l)$ действительны и прямая пересекает ось y, но также и тогда, когда прямая оси y не пересекает. В последнем случае, хотя A и l становятся мнимыми, но, как мы видели выше, числитель и знаменатель сокращаются на общий множитель i.

Значениям $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = +1$ соответствуют корни уравнения (I) и прямые, параллельные данной прямой в направлении положительной оси y, значениям же $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = -1$ — корни уравнения (II) и прямые, параллельные данной, идущие в отрицательную сторону y.

Ясно, что два из этих корней положительны и два отрицательны. Положительным корням будут соответствовать действительные абсциссы n_1 и n_2 и действительные прямые, параллельные данной; отрицательным — мнимые абсциссы, и их надо отбросить.

Таким образом возможны три случая: или оба положительных корня принадлежат уравнению (I), тогда прямые будут параллельны данной в положительном направлении оси y и $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, или оба положительных корня будут принадлежать уравнению (II), тогда обе прямые будут параллельны данной в сторону отрицательной оси y и $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = -1$, или, наконец, один положительный корень принадлежит уравнению (I), а другой — уравнению (II), и тогда одна из параллельных данной будет итти в сторону положительной, а другая — в сторону отрицательной оси y.

Если формулы (III) сложим и перемножим, то получим

$$\varepsilon_1 e^{n_1} + \varepsilon_2 e^{n_2} = \frac{\sin A}{\sin [A - F(l)]},$$

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 e^{n_1 + n_2} = \frac{\sin^2 A - \sin^2 F(l)}{\sin^2 [A - F(l)]} = \frac{\sin [A + F(l)]}{\sin [A - F(l)]},$$

и уравнение (25) можно представить в виде

$$e^{x} + e^{-x} \varepsilon_1 \varepsilon_2 e^{n_1 + n_2} - 2 (\varepsilon_1 e^{n_1} + \varepsilon_2 e^{n_2}) \cos F(y) = 0.$$

В таком виде уравнение прямой было дано Dr. V. Varićak'ом [1]). В этом уравнении параметры n_1 и n_2 всегда действительны. Принимая, однако,

[1]) V. Varićak — Općena jednadžba pravca u hyperbolnoj ravnini. (Резюме на немецком языке.) Agram, Rad Jugoslav. Akad., 1906, т. 169, стр. 167—168.

во внимание, что

$$e^{n} = e^{\pi i + n_1} = -e^{n_1},$$

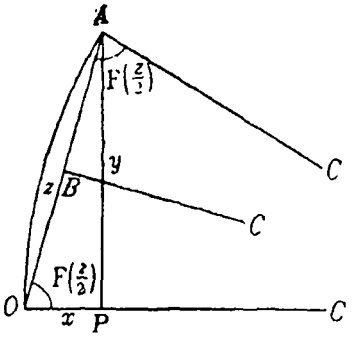
мы можем освободиться от двойных знаков и писать это уравнение так:

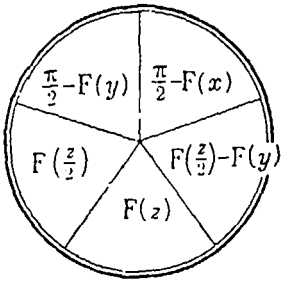
$$e^{x} + e^{-x} e^{n_1 + n_2} - (e^{n_1} + e^{n_2}) \cos \mathrm{F}(y) = 0,$$

и вместо уравнений (I) и (II) пользоваться для определения n_1 и n_2 только первым, если условимся, что положительные корни уравнения (I) и действительные величины n_1 и n_2 определяют положение прямых, параллельных данной в направлении положительной оси y, а отрицательные корни того же уравнения и соответствующие им мнимые значения n_1 или n_2 — прямые, параллельные данной в направлении отрицательной оси y.

[45] В первой формуле после формулы (26) можно положить $\sin \mathrm{F}(x-r) = \sin \mathrm{F}(r-x)$, так как $\sin \mathrm{F}(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}\, x}$, т. е. является функцией четной. Вторая формула после формулы (26) получена при помощи формул, указанных в примечании 23.

[46] Опустим из центра C круга перпендикуляр CB на хорду, соединяющую концы O и A двух радиусов. В пределе, когда центр удалится в бесконечность, дуга круга обратится в предельную кривую, а радиусы CO, CA и перпендикуляр CB к середине хорды — в параллельные





оси этой кривой. Примем один конец хорды за начало, ось OC за ось x и построим координаты точки $A(x, y)$. Если через z обозначим хорду OA, то

$$\angle OAC = \angle AOC = \mathrm{F}\left(\frac{z}{2}\right), \quad \angle PAC = \mathrm{F}(y), \quad \angle OAP = \mathrm{F}\left(\frac{z}{2}\right) - \mathrm{F}(y).$$

Из треугольника OAP имеем (см. диаграмму)

$$\mathrm{tg}\, \mathrm{F}(z) = \mathrm{tg}\, \mathrm{F}(y) \sin \mathrm{F}\left(\frac{z}{2}\right), \quad \mathrm{tg}\, \mathrm{F}\left(\frac{z}{2}\right) = \mathrm{tg}\, \mathrm{F}(x) \cos \mathrm{F}(y).$$

Но по формулам (I) примечания 23, полагая в них $x = \frac{z}{2}$, $y = \frac{z}{2}$, получаем

$$\mathrm{tg}\, \mathrm{F}(z) = \frac{\sin^2 \mathrm{F}\left(\frac{z}{2}\right)}{2 \cos \mathrm{F}\left(\frac{z}{2}\right)}.$$

Следовательно, из уравнения (1) имеем

$$\frac{\sin^2 \mathrm{F}\left(\frac{z}{2}\right)}{2\cos \mathrm{F}\left(\frac{z}{2}\right)} = \operatorname{tg} \mathrm{F}(y) \sin \mathrm{F}\left(\frac{z}{2}\right), \quad 2 \operatorname{ctg} \mathrm{F}\left(\frac{z}{2}\right) = \operatorname{ctg} \mathrm{F}(y);$$

сопоставляя это равенство с выражением для $\operatorname{tg} \mathrm{F}\left(\frac{z}{2}\right)$, получим

$$\frac{2 \sin \mathrm{F}(y)}{\cos^2 \mathrm{F}(y)} = \operatorname{tg} \mathrm{F}(x),$$

откуда

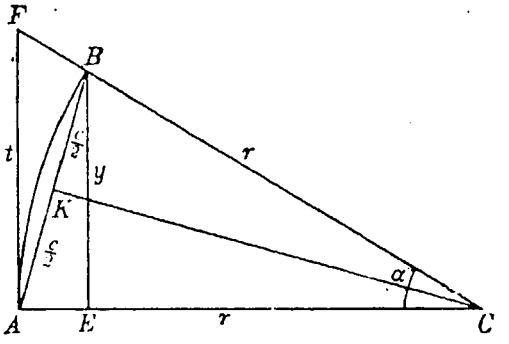
$$\sin^2 \mathrm{F}(y) \operatorname{tg} \mathrm{F}(x) + 2 \sin \mathrm{F}(y) - \operatorname{tg} \mathrm{F}(x) = 0,$$

$$\sin \mathrm{F}(y) = \frac{-\cos \mathrm{F}(x) \pm 1}{\sin \mathrm{F}(x)} = -\operatorname{sh} x \pm \operatorname{ch} x,$$

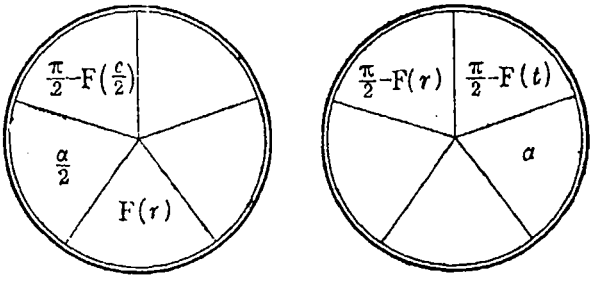
$$\sin \mathrm{F}(y) = e^{-x}, \quad \sin \mathrm{F}(y) = -e^{x}.$$

Второе равенство должно быть отброшено, ибо $e^x > 1$ при $x > 0$.

[47] Лобачевский рассматривает окружность как линию, лежащую на предельной поверхности, и пользуется тем обстоятельством, что геометрия предельной поверхности совпадает с геометрией Евклида.



[48] Первая формула не соответствует чертежу 12 и обозначениям текста. Ее надо заменить следующей. Повторив чертеж 12, получим из треугольников BKC и FAC (см. диаграммы $а$ и $б$):



$а$ $б$

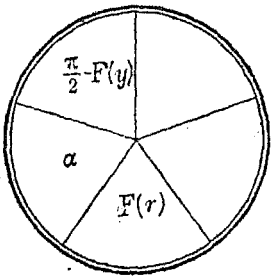
$$\sin \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \mathrm{F}(r) \operatorname{ctg} \mathrm{F}\left(\frac{c}{2}\right), \quad \cos \mathrm{F}(t) = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \mathrm{F}(r).$$

[49] Чтобы в пределе получить длину окружности, мы должны $\operatorname{ctg} \mathrm{F}\left(\frac{c}{2}\right)$ помножить не на n, а на $2n$:

$$2n \operatorname{ctg} \mathrm{F}\left(\frac{c}{2}\right) = 2\pi \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \operatorname{ctg} \mathrm{F}(r).$$

[50] Из треугольника BEC (черт. 12 текста) и соответствующей диаграммы имеем

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \mathrm{F}(r) \operatorname{ctg} \mathrm{F}(y). \qquad (\mathrm{I})$$



Дуга окружности в пределе при $\alpha \to 0$, $r \to \infty$ обращается в дугу s предельной линии, а потому

$$s = [\alpha \operatorname{ctg} \mathrm{F}(r)]_{r\to\infty} = \left[\frac{\frac{d\alpha}{dr}}{\frac{d \operatorname{tg} \mathrm{F}(r)}{dr}}\right]_{r\to\infty}$$

Если y остается постоянным, то согласно уравнению (I)

$$\cos \alpha \frac{d\alpha}{dr} = \frac{d \operatorname{tg} \mathrm{F}(r)}{dr} \operatorname{ctg} \mathrm{F}(y);$$

следовательно, дуга предельной:

$$s = \left[\frac{\operatorname{ctg} \mathrm{F}(y)}{\cos \alpha}\right]_{\alpha\to 0} = \operatorname{ctg} \mathrm{F}(y);$$

тот же результат получим, умножив равенство (I) на α:

$$s = [\alpha \operatorname{ctg} \mathrm{F}(r)]_{\alpha\to 0} = \left[\frac{\alpha}{\sin \alpha} \operatorname{ctg} \mathrm{F}(y)\right]_{\alpha\to 0} = \operatorname{ctg} \mathrm{F}(y).$$

[51] Взяв первую из формул (17), имеем (см. чертеж на следующей странице)

$$\operatorname{tg} \mathrm{F}(a) \sin A = \operatorname{tg} \mathrm{F}(b) \sin B,$$

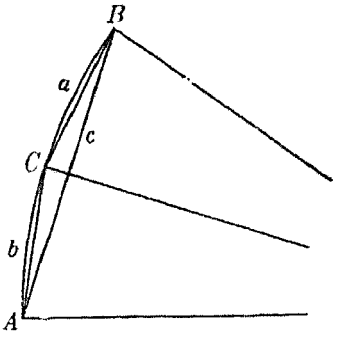
$$\operatorname{tg} \mathrm{F}(a) \sin\left[\mathrm{F}\left(\frac{b}{2}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{c}{2}\right)\right] = \operatorname{tg} \mathrm{F}(b) \sin\left[\mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{c}{2}\right)\right];$$

подставив

$$\operatorname{tg} \mathrm{F}(a) = \frac{\sin^2 \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right)}{2 \cos \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right)}, \quad \operatorname{tg} \mathrm{F}(b) = \frac{\sin^2 \mathrm{F}\left(\frac{b}{2}\right)}{2 \cos \mathrm{F}\left(\frac{b}{2}\right)}$$

(см. примечание 23) и делим все уравнение на произведение

$$\cos \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right) \cos \mathrm{F}\left(\frac{b}{2}\right) \sin \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right),$$



получим

$$\operatorname{tg}^2 \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right)\left[\operatorname{tg} \mathrm{F}\left(\frac{b}{2}\right) \operatorname{ctg} \mathrm{F}\left(\frac{c}{2}\right) - 1\right] =$$

$$= \operatorname{tg}^2 \mathrm{F}\left(\frac{b}{2}\right)\left[\operatorname{tg} \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right) \operatorname{ctg} \mathrm{F}\left(\frac{c}{2}\right) - 1\right],$$

и затем

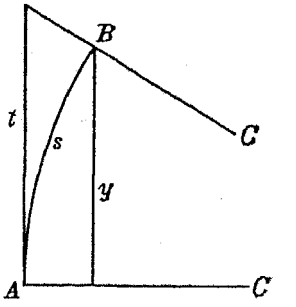
$$\operatorname{ctg} \mathrm{F}\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg} \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right) + \operatorname{tg} \mathrm{F}\left(\frac{b}{2}\right)}{\operatorname{tg} \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right) \operatorname{tg} \mathrm{F}\left(\frac{b}{2}\right)} = \operatorname{ctg} \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right) + \operatorname{ctg} \mathrm{F}\left(\frac{b}{2}\right).$$

[52] На приводимом чертеже линии AC и BC параллельны и линия AB — предельная линия. По формулам

$$\cos \mathrm{F}(y) = \cos \mathrm{F}(t)\, e^{-x}, \qquad (19)$$

$$\sin \mathrm{F}(y) = e^{-x}, \qquad (27)$$

$$s = \operatorname{ctg} \mathrm{F}(y) \qquad (29)$$



получаем

$$s = \operatorname{ctg} \mathrm{F}(y) = \cos \mathrm{F}(t).$$

[53] Из этих четырех уравнений первые два получаются путем применения формул (20) и (22) к четырехугольнику с тремя прямыми углами и со сторонами q, y, $\frac{a}{2}$ на черт. 13, а последние два — путем применения формул (17_2) и (17_8) к треугольнику со сторонами t, $2q$, $y' - y$ на том же чертеже.

[54] Из первых двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \mathrm{F}(y) &= -\operatorname{tg} T \cos \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right), \\ \operatorname{tg} \mathrm{F}(q) &= \sin \mathrm{F}(y) \operatorname{tg} \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

получаем

$$\frac{1}{\cos^2 T} = 1 + \operatorname{tg}^2 T = 1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \mathrm{F}(y)}{\cos^2 \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right)} =$$

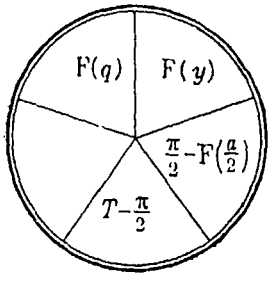
$$= \frac{1}{\cos^2 \mathrm{F}(y)} \left[1 + \sin^2 \mathrm{F}(y) \operatorname{tg}^2 \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \mathrm{F}(y)} [1 + \operatorname{tg}^2 \mathrm{F}(q)] = \frac{1}{\cos^2 \mathrm{F}(y) \cos^2 \mathrm{F}(q)},$$

откуда, так как угол $T > \frac{\pi}{2}$:

$$\cos T = -\cos \mathrm{F}(y) \cos \mathrm{F}(q).$$

Последнюю формулу и формулы (1) можно было бы получить по правилу Непера непосредственно из четырехугольника с тремя прямыми углами (черт. 13 текста), с острым углом $\pi - T$ и прилегающими к нему сторонами q и y, составив для него прилагаемую диаграмму (см. примечание 41).



Написав по формулам (III) примечания 23

$$\left.\begin{aligned} \cos \mathrm{F}(2q) &= \frac{2\cos \mathrm{F}(q)}{1 + \cos^2 \mathrm{F}(q)}, \\ \sin \mathrm{F}(2q) &= \frac{\sin^2 \mathrm{F}(q)}{1 + \cos^2 \mathrm{F}(q)}, \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II})$$

будем иметь

$$\cos T \cos \mathrm{F}(2q) = -\frac{2\cos^2 \mathrm{F}(q) \cos \mathrm{F}(y)}{1 + \cos^2 \mathrm{F}(q)} = -\frac{2\cos \mathrm{F}(y)}{2 + \operatorname{tg}^2 \mathrm{F}(q)}, \qquad (\mathrm{III})$$

и, заменяя $\operatorname{tg} \mathrm{F}(q)$ его выражением через y и $\frac{a}{2}$, получаем

$$\cos T \cos \mathrm{F}(2q) = -\frac{2\cos \mathrm{F}(y)}{2 + \sin^2 \mathrm{F}(y) \operatorname{tg}^2 \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right)}. \qquad (\mathrm{IV})$$

[55] Чтобы вывести формулу (31), вычислим сначала числитель и знаменатель в формуле

$$\sin \mathrm{F}(t) = \frac{\sin \mathrm{F}(2q) \sin \mathrm{F}(y' - y)}{1 - \cos T \cos \mathrm{F}(2q) \cos \mathrm{F}(y' - y)}.$$

По формуле (III) предыдущего примечания и формулам (II) примечания 23 имеем

$$1 - \cos T \cos \mathrm{F}(2q) \cos \mathrm{F}(y' - y) =$$

$$= 1 + \frac{2 \cos \mathrm{F}(y) [\cos \mathrm{F}(y') - \cos \mathrm{F}(y)]}{(2 + \operatorname{tg}^2 \mathrm{F}(q))(1 - \cos \mathrm{F}(y') \cos \mathrm{F}(y))} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2 \mathrm{F}(q) [1 - \cos \mathrm{F}(y) \cos \mathrm{F}(y')] + 2 \sin^2 \mathrm{F}(y)}{(2 + \operatorname{tg}^2 \mathrm{F}(q))(1 - \cos \mathrm{F}(y) \cos \mathrm{F}(y'))},$$

$$\sin \mathrm{F}(2q) \sin \mathrm{F}(y' - y) = \frac{\operatorname{tg}^2 \mathrm{F}(q)}{2 + \operatorname{tg}^2 \mathrm{F}(q)} \cdot \frac{\sin \mathrm{F}(y) \sin \mathrm{F}(y')}{1 - \cos \mathrm{F}(y) \cos \mathrm{F}(y')};$$

затем

$$\sin \mathrm{F}(t) = \frac{\operatorname{tg}^2 \mathrm{F}(q) \sin \mathrm{F}(y) \sin \mathrm{F}(y')}{\operatorname{tg}^2 \mathrm{F}(q) [1 - \cos \mathrm{F}(y) \cos \mathrm{F}(y')] + 2 \sin^2 \mathrm{F}(y)},$$

и по формуле (I_2) предыдущего примечания

$$\sin \mathrm{F}(t) = \frac{\operatorname{tg}^2 \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right) \sin \mathrm{F}(y') \sin \mathrm{F}(y)}{\operatorname{tg}^2 \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right) [1 - \cos \mathrm{F}(y) \cos \mathrm{F}(y')] + 2}.$$

Но по формуле (III_1) примечания 23, заменив в ней $2x$ на a, мы имеем

$$\operatorname{ctg}^2 \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \sin \mathrm{F}(a)}{2 \sin \mathrm{F}(a)}.$$

Если это значение $\operatorname{ctg}^2 \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right)$ подставим в $\sin \mathrm{F}(t)$, то получим формулу (31).

[56] Пользуясь формулами (III) и (I) примечания 54 и формулами примечания 23, мы можем переписать формулу текста

$$\operatorname{ctg} \omega' \operatorname{tg} T \sin \mathrm{F}(y' - y) + 1 = \frac{\cos \mathrm{F}(y' - y)}{\cos T \cos \mathrm{F}(2q)}$$

в таком виде:

$$\operatorname{ctg} \omega' \frac{\operatorname{tg} \mathrm{F}(y)}{\cos \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right)} \cdot \frac{\sin \mathrm{F}(y') \sin \mathrm{F}(y)}{1 - \cos \mathrm{F}(y) \cos \mathrm{F}(y')} - 1 =$$

$$= \frac{\cos \mathrm{F}(y') - \cos \mathrm{F}(y)}{1 - \cos \mathrm{F}(y) \cos \mathrm{F}(y')} \cdot \frac{2 + \sin^2 \mathrm{F}(y) \operatorname{tg}^2 \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right)}{2 \cos \mathrm{F}(y)},$$

$$2\operatorname{ctg}\omega'\frac{\sin F(y')}{\cos F\left(\frac{a}{2}\right)}-2\cos F(y')=\operatorname{tg}^2 F\left(\frac{a}{2}\right)[\cos F(y')-\cos F(y)],$$

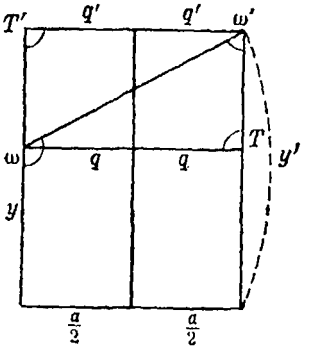
$$2\operatorname{ctg}\omega'\frac{\sin F(y')}{\cos F\left(\frac{a}{2}\right)}=\cos F(y')\left[2+\operatorname{tg}^2 F\left(\frac{a}{2}\right)\right]-\operatorname{tg}^2 F\left(\frac{a}{2}\right)\cos F(y').$$

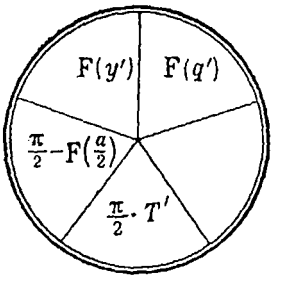
Но по формулам (III) примечания 23, заменив в них $2x$ на a, мы имеем

$$\sin F(a)=\frac{\operatorname{tg}^2 F\left(\frac{a}{2}\right)}{2+\operatorname{tg}^2 F\left(\frac{a}{2}\right)};\quad \cos F(a)=\frac{2}{\cos F\left(\frac{a}{2}\right)\left[2+\operatorname{tg}^2 F\left(\frac{a}{2}\right)\right]},$$

и из предыдущего уравнения получается уравнение, следующее за (31). Следующее уравнение, очевидно, получаем, обменяв местами y с y' и ω с ω'.

[57] В «Казанском вестнике» и «Полном собрании сочинений по геометрии» в этой формуле в левой части перед $\operatorname{ctg}\omega$ стоит знак минус, а должен быть знак плюс. Действительно, чтобы получить эту формулу, дополним чертеж 13 текста таким образом. Для четырех-





угольника с тремя прямыми углами и острым углом T' мы имеем приводимую диаграмму и формулы:

$$\left.\begin{aligned}\cos F\left(\frac{a}{2}\right)&=\operatorname{ctg}T'\operatorname{tg}F(y'),\\ \sin F(y')&=\operatorname{tg}F(q')\operatorname{ctg}F\left(\frac{a}{2}\right),\\ \cos T'&=\cos F(y')\cos F(q')\end{aligned}\right\}\quad (I)$$

и на треугольника со сторонами $y' - y$, $2q'$ и углами T' и $\pi - \omega$ [формула (17_3)]:

$$\operatorname{ctg}(\pi - \omega)\operatorname{tg} T' \sin \mathrm{F}(y' - y) + 1 = \frac{\cos \mathrm{F}(y' - y)}{\cos \mathrm{F}(2q')\cos T'}, \qquad \text{(II)}$$

но по формулам (II), (III) и (IV) в примечании 54

$$\cos \mathrm{F}(2q') = \frac{2\cos \mathrm{F}(q')}{1 + \cos^2 \mathrm{F}(q')},$$

$$\cos \mathrm{F}(2q')\cos T' = \frac{2\cos^2 \mathrm{F}(q')\cos \mathrm{F}(y')}{1 + \cos^2 \mathrm{F}(q')} = \frac{2\cos \mathrm{F}(y')}{2 + \operatorname{tg}^2 \mathrm{F}(q')},$$

$$\cos T' \cos \mathrm{F}(2q') = \frac{2\cos \mathrm{F}(y')}{2 + \sin^2 \mathrm{F}(y')\operatorname{tg}^2 \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right)};$$

заменив в (II) $\operatorname{tg} T'$ по формуле (I) и подставив во (II) найденное значение $\cos T' \cos \mathrm{F}(2q')$, получим по формулам (II) примечания 23

$$-\operatorname{ctg}\omega \frac{\operatorname{tg} \mathrm{F}(y')}{\cos \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right)} \cdot \frac{\sin \mathrm{F}(y)\sin \mathrm{F}(y')}{1 - \cos \mathrm{F}(y)\cos \mathrm{F}(y')} + 1 =$$

$$= \frac{\cos \mathrm{F}(y') - \cos \mathrm{F}(y)}{1 - \cos \mathrm{F}(y)\cos \mathrm{F}(y')} \cdot \frac{2 + \sin^2 \mathrm{F}(y')\operatorname{tg}^2 \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right)}{2\cos \mathrm{F}(y')},$$

$$2\operatorname{ctg}\omega \frac{\sin \mathrm{F}(y)}{\cos \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right)} - 2\cos \mathrm{F}(y) = \operatorname{tg}^2 \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right)[\cos \mathrm{F}(y) - \cos \mathrm{F}(y')],$$

$$2\operatorname{ctg}\omega \frac{\sin \mathrm{F}(y)}{\cos \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right)} = \cos \mathrm{F}(y)\left[2 + \operatorname{tg}^2 \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right)\right] - \operatorname{tg}^2 \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right)\cos \mathrm{F}(y');$$

отсюда, так же, как и в предыдущем примечании,

$$\operatorname{ctg}\omega \cos \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right)\sin \mathrm{F}(y) + \sin \mathrm{F}(a)\cos \mathrm{F}(y') = \cos \mathrm{F}(y).$$

Проще это уравнение получается из уравнения, следующего за (31) заменой ω', y', y на ω, y, y'.

[58] Принимая во внимание формулы

$$\cos a \sin a + \cos b \sin b = \sin(a + b)\cos(a - b),$$

$$\cos^2 a + \cos^2 b = 1 + \cos(a + b)\cos(a - b)$$

и пользуясь предыдущими формулами, получаем

$$\operatorname{ctg}\omega + \operatorname{ctg}\omega' = \frac{[\sin \mathrm{F}(y) + \sin \mathrm{F}(y')]\,[1 - \sin \mathrm{F}(a)\cos(\mathrm{F}(y') - \mathrm{F}(y))]}{\cos \mathrm{F}(a)\sin \mathrm{F}(y)\sin \mathrm{F}(y')},$$

$$\operatorname{ctg}\omega \operatorname{ctg}\omega' - 1 =$$

$$= \frac{\{\cos[\mathrm{F}(y') - \mathrm{F}(y)] - \sin \mathrm{F}(a)\}\,\{1 - \sin \mathrm{F}(a)\cos[\mathrm{F}(y') - \mathrm{F}(y)]\}}{\cos^2 \mathrm{F}(a)\sin \mathrm{F}(y)\sin \mathrm{F}(y')}$$

и затем находим

$$\operatorname{tg}(\omega + \omega') = \frac{\cos \mathrm{F}(a)\sin[\mathrm{F}(y) + \mathrm{F}(y')]}{\cos[\mathrm{F}(y) + \mathrm{F}(y')] - \sin \mathrm{F}(a)}.$$

[59] Если прямые t и a параллельны в сторону положительной оси x, то по уравнению (19):

$$\cos \mathrm{F}(y') = \cos \mathrm{F}(y)\, e^{-a};$$

кроме того, имеем

$$\sin \mathrm{F}(a) = \frac{2}{e^a + e^{-a}}$$

и, возводя уравнение (31) в квадрат, получим

$$\left[1 - \cos^2 \mathrm{F}(y)\,\frac{2e^{-a}}{e^a + e^{-a}}\right]^2 \sin^2 \mathrm{F}(t) =$$

$$= \frac{4}{(e^a + e^{-a})^2}\sin^2 \mathrm{F}(y)\,[1 - \cos^2 \mathrm{F}(y)\, e^{-2a}]$$

или

$$[1 - e^{-2a} + 2e^{-2a}\sin^2 \mathrm{F}(y)]^2 \sin^2 \mathrm{F}(t) =$$

$$= 4e^{-2a}\sin^2 \mathrm{F}(y)\,[1 - e^{-2a} + \sin^2 \mathrm{F}(y)\, e^{-2a}].$$

Полагая

$$\sin^2 \mathrm{F}(y)\, e^{-2a} = z,$$

для определения z будем иметь квадратное уравнение:

$$-(1 - e^{-2a})^2 \sin^2 \mathrm{F}(t) + 4z(1 - e^{-2a})\cos^2 \mathrm{F}(t) + 4z^2 \cos^2 \mathrm{F}(t) = 0,$$

из которого найдем

$$z = \frac{1 - e^{-2a}}{2}\,\frac{\cos \mathrm{F}(t) \mp 1}{\cos \mathrm{F}(t)};$$

действительное значение для $\sin \mathrm{F}(y)$ будем иметь только при верхнем знаке; следовательно,

$$z = \frac{1 - e^{-2a}}{e^{2t} - 1},$$

$$\sin^2 \mathrm{F}(y) = \frac{e^{2a} - 1}{e^{2t} - 1}.$$

[60] Дифференцируя равенство (12)

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\mathrm{F}(y)=e^{-y},$$

имеем

$$\frac{d\,\mathrm{F}(y)}{2\cos^2\frac{1}{2}\,\mathrm{F}(y)}=-e^{-y}\,dy=-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\mathrm{F}(y)\,dy,$$

$$d\,\mathrm{F}(y)=-\sin\mathrm{F}(y)\,dy.$$

По приближенным формулам

$$\sin\mathrm{F}(a)=1-\frac{1}{2}\,a^2$$

и

$$\cos\mathrm{F}(a)=a\left(1-\frac{1}{3}\,a^2\right)$$

и по теореме Тэйлора имеем

$$\sin\mathrm{F}(a)=1-\frac{1}{2}\,dx^2,\quad \sin\mathrm{F}(t)=1-\frac{1}{2}\,ds^2,\quad \cos\mathrm{F}(a)=dx,$$

$$\cos\mathrm{F}(y')=\cos\mathrm{F}(y)+\sin^2\mathrm{F}(y)\,dy-\frac{1}{2}\sin\mathrm{F}(y)\sin 2\mathrm{F}(y)\,dy^2,$$

$$\sin\mathrm{F}(y')=\sin\mathrm{F}(y)-\sin\mathrm{F}(y)\cos\mathrm{F}(y)\,dy+\frac{1}{2}\sin\mathrm{F}(y)\cos 2\mathrm{F}(y)\,dy^2,$$

$$\cos[\mathrm{F}(y')-\mathrm{F}(y)]=1-\frac{1}{2}\sin^2\mathrm{F}(y)\,dy^2.$$

Подставляя эти величины в

$$\frac{1}{2}\,ds^2=1-\sin\mathrm{F}(t)=\frac{1-\sin\mathrm{F}(a)\cos[\mathrm{F}(y')-\mathrm{F}(y)]}{1-\sin\mathrm{F}(a)\cos\mathrm{F}(y)\cos\mathrm{F}(y')},$$

$$\operatorname{ctg}\omega'=\frac{\cos\mathrm{F}(y')-\sin\mathrm{F}(a)\cos\mathrm{F}(y)}{\cos\mathrm{F}(a)\sin\mathrm{F}(y')},$$

$$\operatorname{ctg}\omega=\frac{\cos\mathrm{F}(y)-\sin\mathrm{F}(a)\cos\mathrm{F}(y')}{\cos\mathrm{F}(a)\sin\mathrm{F}(y)}$$

и ограничиваясь членами второго порядка, имеем:

$$\frac{1}{2}\,ds^2=\frac{1-\left(1-\frac{1}{2}\,dx^2\right)\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\mathrm{F}(y)\,dy^2\right)}{1-\cos^2\mathrm{F}(y)}=\frac{1}{2}\left(dy^2+\frac{dx^2}{\sin^2\mathrm{F}(y)}\right),$$

$$\operatorname{ctg}\omega'=\frac{\cos\mathrm{F}(y)+\sin^2\mathrm{F}(y)\,dy-\cos\mathrm{F}(y)}{dx\sin\mathrm{F}(y)}=\sin\mathrm{F}(y)\frac{dy}{dx},$$

$$\operatorname{ctg}\omega=\frac{\cos\mathrm{F}(y)-\cos\mathrm{F}(y)-\sin^2\mathrm{F}(y)\,dy}{dx\sin\mathrm{F}(y)}=-\operatorname{ctg}\omega'.$$

Формула (34) представляет собой основную квадратичную форму плоскости, в которой имеет место геометрия Лобачевского (как обыкновенно говорят — гиперболической плоскости). На ней основана вся дифференциальная геометрия плоскости. Эта форма совпадает с той, которую приводит Больай в § 32 «Аппендикса»; но Лобачевский использовал ее несравненно шире, чем Больай: в сущности, все дальнейшее содержание настоящего мемуара составляет применение этой формулы.

В настоящее время пользуются основной формой гиперболической плоскости в различных других координатах. Так, в бельтрамиевых координатах (см. примечание 43) квадрат линейного элемента имеет вид

$$ds^2 = \frac{(1-y^2)\,dx^2 + (1-x^2)\,dy^2 + 2xy\,dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^3}.$$

[61] Первая формула вытекает из формулы текста (стр. 216):

$$\operatorname{tg} \mathrm{F}(q) = \sin \mathrm{F}(y) \operatorname{tg} \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right),$$

если в ней положить

$$\operatorname{tg} \mathrm{F}(q) = \frac{1}{q}, \quad \operatorname{tg} \mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{2}{a}.$$

Последние же две формулы текста можно получить, применив к бесконечно малому треугольнику формулы евклидовой геометрии.

[62] Дифференцируя уравнение окружности (26), сначала имеем

$$0 = \sin \mathrm{F}(x) \cos \mathrm{F}(y) \sin \mathrm{F}(y)\,dy + \sin \mathrm{F}(y) \cos \mathrm{F}(x) \sin \mathrm{F}(x)\,dx,$$

потом

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos \mathrm{F}(x)}{\cos \mathrm{F}(y)}$$

и

$$ds^2 = \left(\frac{\cos^2 \mathrm{F}(x)}{\cos^2 \mathrm{F}(y)} + \frac{1}{\sin^2 \mathrm{F}(y)}\right) dx^2.$$

Исключая отсюда $\cos \mathrm{F}(y)$ и $\sin \mathrm{F}(y)$ при помощи уравнения окружности (26), имеем

$$ds = \frac{\sin^2 \mathrm{F}(x)\,dx}{\sqrt{\cos^2 \mathrm{F}(r) - \cos^2 \mathrm{F}(x)}} \operatorname{ctg} \mathrm{F}(r)$$

или

$$ds = \frac{d \cos \mathrm{F}(x)}{\sqrt{\cos^2 \mathrm{F}(r) - \cos^2 \mathrm{F}(x)}} \operatorname{ctg} \mathrm{F}(r);$$

интегрирование этого уравнения и дает уравнение текста.

[63] По формуле (13_3) на стр. 205 текста.

[64] Дифференцируя уравнение (27), имеем

$$-\cos \mathrm{F}(y) \sin \mathrm{F}(y)\,dy = -e^{-x}\,dx = -\sin \mathrm{F}(y)\,dx$$

и затем

$$ds = \frac{dy}{\sin \mathrm{F}(y)} = -\frac{d\,\mathrm{F}(y)}{\sin^2 \mathrm{F}(y)}.$$

[65] Положим для краткости

$$u = e^x \sin [A - \mathrm{F}(l)] + e^{-x} \sin [A + \mathrm{F}(l)],$$

$$v = e^x \sin [A - \mathrm{F}(l)] - e^{-x} \sin [A + \mathrm{F}(l)].$$

Тогда уравнение (25) можно представить в виде

$$2 \sin A \cos \mathrm{F}(y) = u,$$

и, дифференцируя его, имеем

$$2 \sin A \sin^2 \mathrm{F}(y)\, dy = du = v\, dx;$$

затем, замечая, что

$$4 \sin^2 A \sin^2 \mathrm{F}(y) = 4 \sin^2 A - u^2,$$

находим

$$ds^2 = \left[\frac{v^2}{4 \sin^2 A \sin^4 \mathrm{F}(y)} + \frac{1}{\sin^2 \mathrm{F}(y)} \right] dx^2,$$

$$ds^2 = \frac{1}{4 \sin^2 A \sin^4 \mathrm{F}(y)} [v^2 - u^2 + 4 \sin^2 A]\, dx^2.$$

Но

$$v^2 - u^2 + 4 \sin^2 A = 4 \sin^2 A - \sin [A - \mathrm{F}(l)] \sin [A + \mathrm{F}(l)] = 4 \sin^2 \mathrm{F}(l),$$

следовательно,

$$ds = \frac{\sin \mathrm{F}(l)}{\sin A \sin^2 \mathrm{F}(y)}\, dx.$$

Чтобы интегрировать это выражение, мы должны разложить знаменатель на множители. Предварительно умножим числитель и знаменатель на $4e^{2x}$. Полученное при этом уравнение

$$4e^{2x} \sin^2 A \sin^2 \mathrm{F}(y) = e^x (2 \sin A - u)\, e^x (2 \sin A + u) = 0,$$

четвертой степени по отношению к e^x, распадается на два квадратных, тождественных с теми, которые мы получили [см. уравнения (I) и (II) примечания 44 на стр. 298 — 299], когда искали отрезки, отсекаемые на оси x линиями, параллельными данной и перпендикулярными оси x, и приравнивали $\cos \mathrm{F}(y) = \pm 1$. Поэтому

$$e^x (2 \sin A + u) = \sin [A - \mathrm{F}(l)] (e^x + u_1) (e^x + u_2),$$

$$e^x (2 \sin A - u) = -\sin [A - \mathrm{F}(l)] (e^x - u_1) (e^x - u_2),$$

где

$$u_1 = e^{n_1} = \frac{\sin A + \sin \mathrm{F}(l)}{\sin [A - \mathrm{F}(l)]} = \frac{\sin \dfrac{A + \mathrm{F}(l)}{2}}{\sin \dfrac{A - \mathrm{F}(l)}{2}},$$

$$u_2 = e^{n_2} = \frac{\sin A - \sin \mathrm{F}(l)}{\sin [A - \mathrm{F}(l)]} = \frac{\cos \dfrac{A + \mathrm{F}(l)}{2}}{\cos \dfrac{A - \mathrm{F}(l)}{2}}.$$

Мы можем теперь представить ds таким образом:

$$ds = -\frac{2 \sin A \sin \mathrm{F}(l)\, de^{2x}}{\sin^2 [A - \mathrm{F}(l)]\,(e^{2x} - u_1^2)\,(e^{2x} - u_2^2)}$$

или

$$ds = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{e^{2x} - u_2^2} - \frac{1}{e^{2x} - u_1^2}\right] de^{2x},$$

и затем

$$s = \frac{1}{2} \ln \frac{e^{2x} - u_2^2}{u_1^2 - e^{2x}} + C.$$

Определив C из условия $s = 0$ при $x = 0$, получим

$$C = -\frac{1}{2} \ln \frac{1 - u_2^2}{u_1^2 - 1} = -\frac{1}{2} \ln \operatorname{tg}^2 \frac{A - \mathrm{F}(l)}{2},$$

$$s = \frac{1}{2} \ln \frac{e^{2x} - u_2^2}{u_1^2 - e^{2x}} - \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg}^2 \frac{A - \mathrm{F}(l)}{2}.$$

Если подставим выражения u_1 и u_2, то получим или формулу, данную Лобачевским, или выражение s через отрезки n_1 и n_2, которыми V. Varićak определяет положение прямой:

$$s = \frac{1}{2} \ln \frac{e^{2x} - e^{2n_2}}{e^{2n_1} - e^{2x}} - \ln \operatorname{tg} \frac{A - \mathrm{F}(l)}{2}.$$

[66] Из формулы для s мы имеем

$$e^{-2s} = \frac{\sin^2 \dfrac{A + \mathrm{F}(l)}{2} - e^{2x} \sin^2 \dfrac{A - \mathrm{F}(l)}{2}}{e^{2x} \cos^2 \dfrac{A + \mathrm{F}(l)}{2} - \cos^2 \dfrac{A - \mathrm{F}(l)}{2}},$$

и затем

$$\cos \mathrm{F}(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{1 + e^{-2s}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} \cos [A - \mathrm{F}(l)] - \cos [A + \mathrm{F}(l)]},$$

$$\cos \mathrm{F}(s) = \frac{\operatorname{sh} x}{\cos A \cos \mathrm{F}(l) \operatorname{sh} x + \sin A \sin \mathrm{F}(l) \operatorname{ch} x}.$$

Разделив числитель и знаменатель на $\operatorname{ch} x$ и заменив $\operatorname{th} x$ через $\cos \mathrm{F}(x)$, получим формулу для $\cos \mathrm{F}(s)$, данную в тексте.

[67] Ту же формулу можно получить, как указывает Лобачевский, из разрешения треугольников. Исключая $\sin \mathrm{F}(a)$ из формул (14_1) и (17_2):

$$\sin \mathrm{F}(a) = \sin \mathrm{F}(x) \sin \mathrm{F}(y),$$

$$\cos A \cos \mathrm{F}(s) \cos \mathrm{F}(l) + \frac{\sin \mathrm{F}(s) \sin \mathrm{F}(l)}{\sin \mathrm{F}(a)} - 1 = 0,$$

мы получаем

$$\cos A \cos \mathrm{F}(s) \cos \mathrm{F}(l) + \frac{\sin \mathrm{F}(s) \sin \mathrm{F}(l)}{\sin \mathrm{F}(x) \sin \mathrm{F}(y)} - 1 = 0. \qquad (\mathrm{I})$$

Но по формуле (31), в которой a, y, y', t заменены через x, l, y, s:

$$\frac{\sin \mathrm{F}(s) \sin \mathrm{F}(l)}{\sin \mathrm{F}(x) \sin \mathrm{F}(y)} = \frac{\sin^2 \mathrm{F}(l)}{1 - \sin \mathrm{F}(x) \cos \mathrm{F}(y) \cos \mathrm{F}(l)},$$

и по формуле (24)

$$1 - \cos \mathrm{F}(y) \sin \mathrm{F}(x) \cos \mathrm{F}(l) = \sin^2 \mathrm{F}(l) + \cos \mathrm{F}(l) \sin \mathrm{F}(l) \operatorname{ctg} A \cos \mathrm{F}(x);$$

из последних двух равенств и равенства (I) получаем снова формулу, данную в тексте для $\cos \mathrm{F}(s)$.

[68] При $A = \mathrm{F}(l)$ из формулы для s получим

$$e^{2s} = \frac{e^{2x} - 1}{\sin^2 \mathrm{F}(l)} + 1.$$

[69] Заменяя $\cos \mathrm{F}(y)$ через $\cos \mathrm{F}(y') e^a$, имеем

$$s = \operatorname{ctg} \mathrm{F}(y) = \frac{\cos \mathrm{F}(y') e^a}{\sin \mathrm{F}(y)} = \operatorname{ctg} \mathrm{F}(y') \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \mathrm{F}(y')}}{\sin \mathrm{F}(y)} e^a,$$

$$s = s' \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \mathrm{F}(y) e^{-2a}}}{\sin \mathrm{F}(y)} e^a.$$

[70] Проведем на черт. 14 текста касательные к предельным линиям q и q'. Отрезки t осей между предельными линиями равны, и по формуле (19) мы можем написать

$$\cos \mathrm{F}(q') = e^{-t} \cos \mathrm{F}(q),$$

но по формуле (30)

$$s' = \cos \mathrm{F}(q'), \quad s = \cos \mathrm{F}(q),$$

следовательно, $s' = se^{-t}$.

[71] Из формул для s и s' имеем

$$\cos \mathrm{F}(y') = e^{-a} \cos \mathrm{F}(y),$$
$$\operatorname{ctg} \mathrm{F}(y') = e^{-t} \operatorname{ctg} \mathrm{F}(y),$$
$$\sin \mathrm{F}(y') = e^{t} e^{-a} \sin \mathrm{F}(y).$$

Исключаем отсюда y':

$$\sin^2 \mathrm{F}(y') + \cos^2 \mathrm{F}(y') = 1 = e^{-2a}[1 - \sin^2 \mathrm{F}(y')] + e^{2t}e^{-2a} \sin^2 \mathrm{F}(y),$$

$$e^{2a} - 1 = (e^{2t} - 1) \sin^2 \mathrm{F}(y);$$

исключаем y:

$$\sin^2 \mathrm{F}(y) + \cos^2 \mathrm{F}(y) = 1 = e^{2a}[1 - \sin^2 \mathrm{F}(y')] + e^{-2t}e^{2a} \sin^2 \mathrm{F}(y'),$$

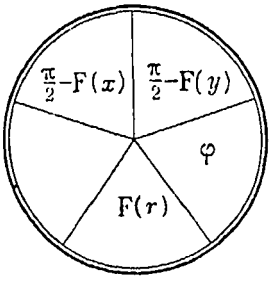
$$e^{-2a} - 1 = (e^{-2t} - 1) \sin^2 \mathrm{F}(y').$$

Эти формулы Лобачевский получает, подставляя в найденную выше формулу

$$s = s' \frac{\sqrt{e^{2a} - \cos^2 \mathrm{F}(y)}}{\sin \mathrm{F}(y)}$$

вместо $s' = se^{-t}$. Другой вывод этого равенства дает Лобачевский в «Новых началах», § 117.

[72] Из треугольника между ординатой y, абсциссой x и радиусом-вектором r, проведенным из начала, имеем, пользуясь приводимой диаграммой:



$$\sin \mathrm{F}(r) = \sin \mathrm{F}(x) \sin \mathrm{F}(y), \qquad \text{(I)}$$

$$\cos \mathrm{F}(x) = \cos \mathrm{F}(r) \cos \varphi, \qquad \text{(II)}$$

$$\operatorname{ctg} \mathrm{F}(y) = \operatorname{ctg} \mathrm{F}(r) \sin \varphi. \qquad \text{(III)}$$

Из уравнения (II)

$$\sin^2 \mathrm{F}(x) = 1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \mathrm{F}(r) =$$

$$= \sin^2 \varphi + \sin^2 \mathrm{F}(r) \cos^2 \varphi;$$

дифференцируя уравнение (III), имеем

$$\frac{dy}{\sin \mathrm{F}(y)} = \frac{\sin \varphi \, dr + \cos \mathrm{F}(r) \cos \varphi \, d\varphi}{\sin \mathrm{F}(r)},$$

$$dy = \frac{\sin \varphi \, dr + \cos \mathrm{F}(r) \cos \varphi \, d\varphi}{\sin \mathrm{F}(x)}. \qquad \text{(IV)}$$

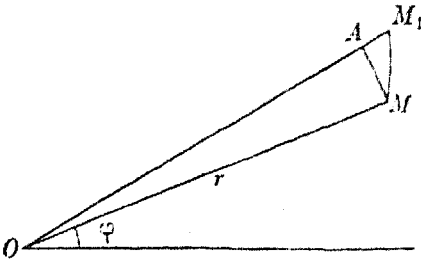
Дифференцируя (II), получим

$$\sin^2 \mathrm{F}(x) \, dx = \sin^2 \mathrm{F}(r) \cos \varphi \, dr - \cos \mathrm{F}(r) \sin \varphi \, d\varphi,$$

$$\frac{dx}{\sin \mathrm{F}(y)} = \frac{\sin \mathrm{F}(r) \cos \varphi \, dr - \operatorname{ctg} \mathrm{F}(r) \sin \varphi \, d\varphi}{\sin \mathrm{F}(x)}. \qquad \text{(V)}$$

Из (IV) и (V) по формуле (34), принимая во внимание (II), получаем формулу (37).

Эту формулу можно было бы получить еще таким образом. Пусть M, M_1 — две точки кривой; опишем радиусом r из полюса O дугу круга MA и применим к бесконечно малому прямоугольному треугольнику AMM_1 теорему Пифагора; получим

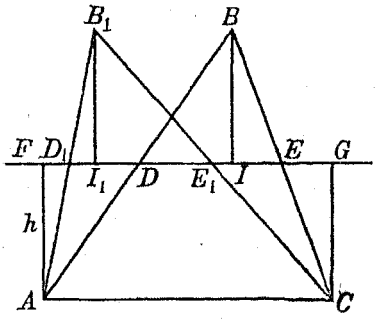


$$ds^2 = AM^2 + AM_1^2.$$

Но $AM_1 = dr$, AM на основании формулы (28) равно $\operatorname{ctg} \mathrm{F}(r)\, d\varphi$.

[73] Положение 3-е относится только к треугольникам.

[74] Действительно, если расстояние B_1I_1 вершины B_1 треугольника от линии DE равно $h = BI = AF = CG$, то в прямоугольных треугольниках $B_1D_1I_1$ и AFD_1 будут равны катеты B_1I_1 и AF и острые углы при точке D_1; треугольники будут равны. Также равны и треугольники $B_1I_1E_1$ и CGE_1 и, следовательно, площадь треугольника AB_1C равна площади того же четырехугольника $AFGC$ и площади треугольника ABC.



Заметим еще, что сумма углов как в треугольнике ABC, так и в треугольнике AB_1C равняется сумме углов A и C в четырехугольнике $AFGC$.

Таким образом, когда треугольники имеют общее основание AC, а вершины их равно отстоят от DE (линии, проведенной через середины двух боков, соединяющих вершину B с основанием), то не только площади всех этих треугольников равны между собой, но и сумма углов в каждом будет одна и та же.

[75] Эта формула — неверная. В настоящем рассуждении, цель которого заключается в доказательстве теоремы «площадь треугольника определяется суммой его углов», Лобачевский допустил недосмотр, однако не повлиявший на правильность окончательного заключения.

Если через α мы обозначим угол FAD (черт. 15 в тексте) в прямоугольном при точке F треугольнике FAD, так что

$$A + \alpha = \angle FAC,$$

то по формуле (13_3) мы будем иметь

$$\cos\alpha = \frac{\cos \mathrm{F}(h)}{\cos \mathrm{F}\left(\frac{c}{2}\right)}.$$

Лобачевский пишет

$$\sin A = \frac{\cos \Pi(h)}{\cos \Pi\left(\frac{c}{2}\right)},$$

т. е. считает, что $\angle FAC = A + \alpha$ будет прямым. Но $\angle FAC$ не может быть прямым. Если бы он был прямым, то мы имели бы четырехугольник $FACG$ с четырьмя прямыми углами, что невозможно.

Таким образом формула, данная в тексте, неверна. Тем не менее, на окончательный результат эта ошибка не влияет. Рассмотрим это подробнее.

Для доказательства теоремы о том, что площадь треугольника определяется суммой его углов, Лобачевский показывает, что 1) «при сравнении площадей двух треугольников всегда можно положить, что у них по одному боку равному», и 2) «каждый из сих треугольников, оставаясь на том же основании, может быть превращен в прямоугольный».

Второе положение не всегда справедливо, и для доказательства теоремы о том, что сумма углов треугольника является мерой его площади, нет необходимости превращать данные треугольники в равновеликие с ними *прямоугольные* треугольники, а достаточно показать, что два треугольника с общим основанием могут быть превращены в два равновеликих с ними треугольника *с общим углом при основании*, причем этот угол может и не быть прямым.

Чтобы яснее видеть, как исправляется допущенный Лобачевским недосмотр, докажем указанные выше два положения двумя способами: при помощи геометрических построений и аналитически.

Рассмотрим сначала первый способ.

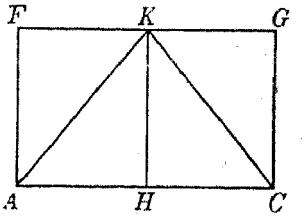
Докажем такие две теоремы:

1. Если у двух треугольников с общим основанием середины трех из остальных сторон лежат на одной прямой, то и середина четвертой стороны лежит на той же прямой, и все вершины треугольников находятся от этой прямой на равных расстояниях.

Пусть D, E и D_1 — середины сторон AB, BC и AB_1 (см. чертеж в предыдущем примечании) — лежат на одной прямой DED_1; BI, B_1I_1, AF, CG — перпендикуляры, опущенные из вершин треугольников на линию DE. В тексте выше было доказано, что $AF = BI = CG$. Далее, в прямоугольных треугольниках AFD_1 и $D_1B_1I_1$ гипотенузы AD_1 и B_1D_1 равны по предположению, а углы D_1 равны как вертикальные; следовательно, эти треугольники равны, и $B_1I_1 = AF = CG$. Треугольники $B_1I_1E_1$ и CGE_1, имея по доказанному равные катеты B_1I_1 и CG и равные углы E_1, будут равны, и поэтому $B_1E_1 = E_1C$, что и требовалось доказать.

Из сказанного в тексте следует, что оба треугольника ABC и AB_1C будут равновелики, ибо площадь каждого из них равна площади четырехугольника $AFGC$ и суммы углов в обоих треугольниках будут одинаковы, ибо каждая из них равна сумме углов A и C четырехугольника $AFGC$.

2. Если в четырехугольнике $ACGF$ с двумя прямыми углами F и G прилегающие к этим углам стороны AF и GC равны, то углы A и C также будут равны, и линия HK, соединяющая середины неравных сторон AC и FG, будет перпендикулярна к ним [1]).



Действительно, проведя прямые AK и KC, где K — середина стороны FG, получим два прямоугольных треугольника AFK и CGK, которые будут равны, ибо катеты одного равны катетам другого. Вследствие равенства этих треугольников: $\angle FKA = \angle GKC$, $\angle FAK = \angle GCK$, $AK = KC$ и, следовательно, все три стороны треугольника AKH, где H — середина стороны AC, равны соответствующим сторонам треугольника CKH. Эти треугольники равны и $\angle AHK = \angle CHK$, $\angle AKH = \angle CKH$. Таким образом углы FKH, GKH и углы при точке H все прямые, а углы A и C четырехугольника $AFGC$ равны.

Из этой теоремы следует также, что перпендикуляр к AC, восставленный в середине, делит противоположную сторону пополам и пересекает ее под прямым углом.

Пользуясь первой теоремой, мы можем всякий треугольник ABC превратить в равновеликий треугольник с такой же суммой углов так, чтобы одна из его сторон была равна или больше удвоенной длины $2h$ перпендикуляра, опущенного из вершины основания треугольника на прямую, соединяющую середины сторон, прилегающих к вершине, противоположной основанию.

В самом деле, через середины сторон AB и BC (см. чертеж предыдущего примечания, стр. 315) проведем прямую DE и опустим на нее перпендикуляр h из вершины треугольника ABC. Опишем из точки A как из центра окружность радиусом $\frac{c_1}{2} \geqslant h = AF$. Эта окружность пересечет линию DE в некоторой точке D_1. Продолжим линию AD_1 до точки B_1 так, чтобы $D_1B_1 = AD_1 = \frac{c_1}{2}$, и соединим точку B_1 с C. Мы получим треугольник AB_1C со стороной c_1, равновеликий на основании теоремы первой с треугольником ABC, имеющий одинаковую с последним сумму углов

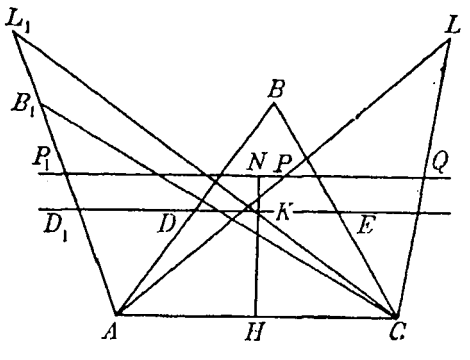
---

[1]) Это — четырехугольник Саккери, см. стр. 168 настоящего тома.

«Итак, при сравнении площадей двух треугольников всегда можно полагать, что у них по одному боку равному, который и будем называть основанием», — говорит Лобачевский (стр. 220).

Далее, два треугольника, имеющие общее основание, всегда могут быть превращены в равновеликие с ними треугольники с общим углом при основании.

Действительно, проведем в треугольниках ABC и ALC с общим основанием AC линии DE и PQ, соединяющие середины их сторон. По



доказанной теореме 2, перпендикуляр, восставленный в середине H стороны AC, пересечет эти линии в точках K и N под прямыми углами, так что три прямые AC, DE и PQ все будут перпендикулярны к прямой HN и между собой не пересекаются. Возьмем на прямой PQ где-нибудь точку P_1 и соединим ее с точкой A прямой линией. Так как точки A и P_1 лежат с разных сторон прямой DE, то линия AP_1 пересечет линию DE в некоторой точке D_1. Отложив по прямой AP_1 отрезки $D_1B_1 = AD_1$ и $P_1L_1 = AP_1$ и соединив точки B_1 и L_1 с точкой C, получим два треугольника AB_1C и AL_1C, равновеликих с данными ABC и ALC и имеющих общий угол A.

Таким образом два треугольника всегда можно, не изменяя ни их площади, ни суммы их углов, превратить в два других с общим основанием и общим углом при основании.

Лобачевский при этом утверждает, что этот общий угол всегда можно сделать прямым.

«Так всякий треугольник ABC превращается в прямоугольный, которого катеты будут AC и линия c', определяемая уравнением

$$\cos \mathrm{F}\left(\frac{c'}{2}\right) = \sin A \cos \mathrm{F}\left(\frac{c}{2}\right).»$$

Если это равенство мы сопоставим с равенством

$$\cos \mathrm{F}(h) = \sin A \cos \mathrm{F}\left(\frac{c}{2}\right),$$

то найдем, что $c' = 2h$ и, следовательно, в треугольнике со сторонами AC и c' и равновеликом с данным сторона c' пойдет по линии AF, и угол CAF между этими сторонами не будет прямым, и треугольник не будет прямоугольным.

Мы построили бы прямоугольный треугольник с катетами c'' и AC, равновеликий данному ABC, если бы в точке A восставили к линии AC перпендикуляр, определили бы отрезок h'' этого перпендикуляра от A до линии DE и сделали бы $c'' = 2h''$. Но это построение возможно только в том случае, если перпендикуляр в точке A пересечется линией DE. Таким образом не всякий треугольник можно обратить в прямоугольный треугольник с тем же основанием и равновеликий с данным.

Чтобы исправить допущенный Лобачевским недосмотр и сохранить в то же время аналитический характер его доказательства, проф. Энгель [1]) предлагает изменить рассуждения Лобачевского таким образом.

Если мы возьмем отрезок $c_1 > c$, то

$$\mathrm{F}\left(\frac{c_1}{2}\right) < \mathrm{F}\left(\frac{c}{2}\right), \quad \cos \mathrm{F}\left(\frac{c_1}{2}\right) > \cos \mathrm{F}\left(\frac{c}{2}\right),$$

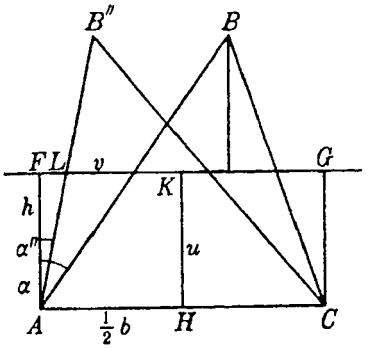
и мы можем определить угол α_1 так, чтобы

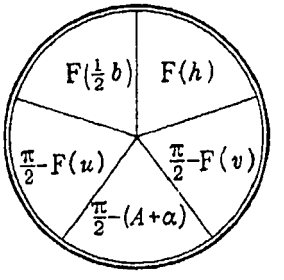
$$\cos \alpha_1 \cos \mathrm{F}\left(\frac{c_1}{2}\right) = \cos \alpha \cos \mathrm{F}\left(\frac{c}{2}\right) = \cos \mathrm{F}(h).$$

Треугольник AB_1C со стороной c_1 вместо c и углом α_1 между c_1 и линией AF вместо α будет иметь вершину B_1, отстоящую от DE на расстоянии h, и будет равновелик с треугольником ABC и иметь одинаковую с ним сумму углов и общее основание AC.

Мы можем, таким образом, в двух треугольниках, не изменяя ни суммы их углов ни площадей, сделать общее основание c_1.

Рассмотрим теперь прилагаемый чертеж. Мы видели, что прямая HK, соединяющая середины сторон FG и AC, будет перпенди-





кулярна к FG и AC, и четырехугольник $HKFL$ будет иметь три прямых угла. Обозначим $HK = u$, $FK = v$. Мы будем иметь приводимую здесь

[1]) См. F. Engel—N. J. Lobatschefskij, Zwei Geometrische Abhandlungen, стр. 266.

диаграмму, и правила Непера дают формулы

$$\operatorname{tg}(A+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\mathrm{F}(h)}{\cos\mathrm{F}(v)}=\frac{\operatorname{tg}\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}b\right)}{\cos\mathrm{F}(u)},$$

$$\cos(A+\alpha)=\cos\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}b\right)\cos\mathrm{F}(h)>\cos\left[\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}b\right)+\mathrm{F}(h)\right].$$

Из первых формул следует, что

$$A+\alpha>\mathrm{F}(h) \quad \text{и} \quad A+\alpha>\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}b\right),$$

а из последней, что

$$A+\alpha<\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}b\right)+\mathrm{F}(h).$$

Поэтому, если мы положим $\alpha''=A+\alpha-\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}b\right)$, то $\alpha''<\mathrm{F}(h)$, и мы можем определить из уравнения

$$\cos\alpha''\cos\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}c''\right)=\cos\mathrm{F}(h)$$

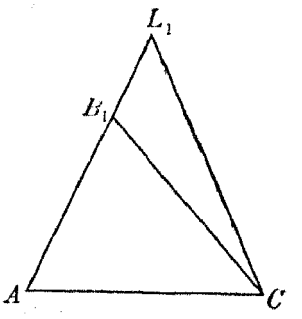
величину $\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}c''\right)$ и c'', и тогда треугольник со сторонами AC и c'' и углом $A+\alpha''$ между ними будет равновелик с данным и будет иметь одинаковую с ним сумму углов. В этом треугольнике угол между AC и c'' будет равен $\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}b\right)$ и его сторона c'' будет параллельна с $ПК$.

В том, что такой треугольник возможно построить, легко убедиться еще иначе. Из предыдущих неравенств следует, что если через точку A мы проведем прямую, параллельную с $ПК$ и, следовательно, образующую со стороной AC угол $\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}b\right)$, то эта линия пойдет внутри четырехугольника $AFKП$ (так как $\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}b\right)<A+\alpha$), а поскольку она не может пересечь ни одной из сторон AF, AC и $ПК$ его, то она пересечет четвертую линию DE в некоторой точке L. Отложив отрезок $LB''=AL$ и соединив точку B'' с C, мы получим треугольник $AB''C$, равновеликий с ABC и имеющий одинаковую с ним сумму углов.

Таким образом можно два треугольника, не изменяя их площади и суммы углов в каждом, превратить в два треугольника с общим основанием b и общим углом $\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}b\right)$ при основании.

[76] Предположим, что мы имеем два треугольника. Преобразуем их, не изменяя их площади и суммы углов, в треугольники AB_1C и AL_1C с общим основанием AC и общим углом A. Как было показано в предыдущем примечании, угол A может иметь бесчисленное множество значений. В частности, его можно сделать равным $\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}b\right)$, где b есть общее основание треугольников. Лобачевский ошибочно утверждает,

что его можно всегда сделать прямым. В этом нет необходимости: рассуждения Лобачевского остаются без перемены, хотя бы этот общий угол A и не был прямым. Действительно:



1. Если данные треугольники равновелики, то треугольники AB_1C и AL_1C будут также равновелики, и сторона CB_1 первого должна совпадать со стороной CL_1 второго; треугольники AB_1C и AL_1C будут равны, и суммы углов их будут одинаковы. Одинаковы будут и суммы углов в данных треугольниках.

2. Если суммы углов в данных треугольниках одинаковы, то суммы углов в треугольниках AB_1C и AL_1C будут равны, и линия CB_1 должна совпасть с CL_1, ибо в противном случае образовался бы треугольник CB_1L_1, в котором сумма углов была бы π, что невозможно. Таким образом площади треугольников AB_1C и AL_1C, а следовательно, и площади данных треугольников будут равны.

[77] Вместо «прямыми углами» надо сказать «равными углами».

[78] Сначала определяем из второго уравнения γ, а потом из первого c.

[79] Эти рассуждения основаны на теореме: если данный треугольник разделим на несколько треугольников, то недостаток суммы углов до двух прямых в данном треугольнике равен сумме недостатков его частей.

[80] Предыдущими рассуждениями это положение доказано Лобачевским только для треугольников, которые можно превратить в равновеликие прямоугольные треугольники. Но оно справедливо и для любых треугольников, ибо всякий треугольник можно высотой разложить на два прямоугольных треугольника.

[81] По формуле $\operatorname{tg}\omega = \dfrac{e^a-1}{e^a+1}\cdot\dfrac{e^b-1}{e^b+1}$ (стр. 209 текста).

[82] Подставляя значение $\mathrm{F}(b)$, $\mathrm{F}(a)+\mathrm{F}(a')$, имеем

$$\operatorname{tg}(A+A') = \frac{\sin \mathrm{F}(\beta)\sin \mathrm{F}(\alpha)}{\cos \mathrm{F}(\alpha) - \cos \mathrm{F}(\beta)},$$

что по формулам примечания 23 дает

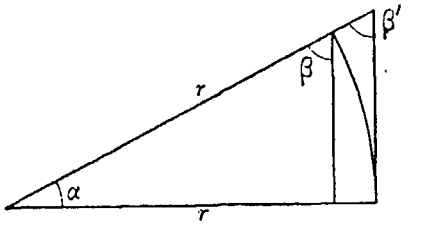
$$\operatorname{tg}(A+A') = \operatorname{tg}\mathrm{F}(\alpha-\beta),$$

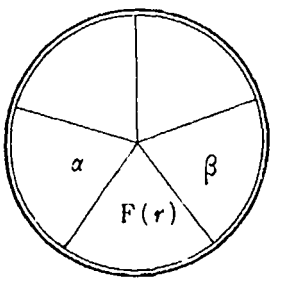
откуда, так как углы $A+A'$ и $\mathrm{F}(\alpha-\beta) < \pi$,

$$A+A' = \mathrm{F}(\alpha-\beta) = \pi - \mathrm{F}(\beta-\alpha).$$

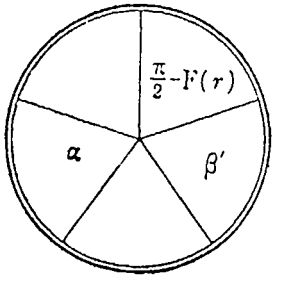
[83] Из треугольников на приводимом чертеже имеем (диаграммы *а* и *б*)

$$\sin \mathrm{F}(r) = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta, \quad \sin\alpha = \sin \mathrm{F}(r)\cos\beta';$$





а



б

отсюда

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \frac{1 - \sin \mathrm{F}(r)}{\operatorname{tg}^2\alpha + \sin \mathrm{F}(r)} \operatorname{tg}\alpha$$

$$\sin A' = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta'\right) = \cos(\alpha+\beta') =$$

$$= \cos\alpha \frac{\sin\alpha}{\sin \mathrm{F}(r)} - \sin\alpha \sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 \mathrm{F}(r)}} =$$

$$= \frac{\cos\alpha - \sqrt{\sin^2 \mathrm{F}(r) - \sin^2\alpha}}{\sin \mathrm{F}(r)} \sin\alpha.$$

[84] Действительно,

$$\lim \frac{2\pi}{\alpha} \operatorname{tg} A = \lim 2\pi \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} \cdot \frac{1 - \sin \mathrm{F}(r)}{\operatorname{tg}^2\alpha + \sin \mathrm{F}(r)} = 2\pi \frac{1 - \sin \mathrm{F}(r)}{\sin \mathrm{F}(r)},$$

$$\lim \frac{2\pi}{\alpha} \sin A' = \lim 2\pi \frac{\sin\alpha}{\alpha} \left[\frac{\cos\alpha - \sqrt{\sin^2 \mathrm{F}(r) - \sin^2\alpha}}{\sin \mathrm{F}(r)}\right] = 2\pi \frac{1 - \sin \mathrm{F}(r)}{\sin \mathrm{F}(r)},$$

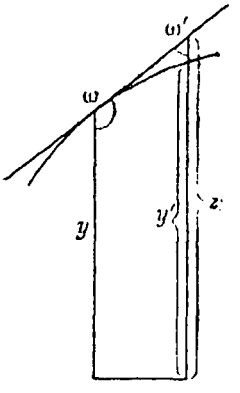
$$\lim \frac{2\pi}{\alpha} \operatorname{tg} A = \lim \frac{2\pi}{\alpha} \sin A' = 2\pi(\operatorname{ch} r - 1) = \pi(e^r + e^{-r} - 2) = \pi\left(e^{\frac{r}{2}} - e^{-\frac{r}{2}}\right)^2.$$

[85] Мы имеем

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}dS = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\mathrm{F}(\beta-\alpha) = \operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\mathrm{F}(\beta)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\mathrm{F}(\alpha) =$$

$$= \frac{1-\operatorname{tg}\mathrm{F}(dx)}{1+\operatorname{tg}\mathrm{F}(dx)}\operatorname{ctg}\frac{\mathrm{F}(y)+\mathrm{F}(y')}{2} = \frac{e^{dx}-1}{e^{dx}+1}\operatorname{ctg}\frac{\mathrm{F}(y)+\mathrm{F}(y')}{2}.$$

[86] В «Казанском вестнике» для обозначения дуги употребляется буква s, а для обозначения площади буква S; в «Полном собрании сочинений по геометрии» для обозначения площади плоской фигуры ставится буква s и, только начиная с формулы (44), для обозначения площади кривой поверхности ставится буква S.



[87] В уравнении (24) вместо x, l, $\operatorname{ctg} A$ подставляем dx, y, $\operatorname{ctg}\omega$; получаем

$$\cos\mathrm{F}(z) = \frac{\cos\mathrm{F}(y)}{\sin\mathrm{F}(dx)} - \operatorname{ctg}\mathrm{F}(dx)\sin\mathrm{F}(y)\operatorname{ctg}\omega.$$

Но

$$\sin\mathrm{F}(dx) = 1, \quad \operatorname{ctg}\mathrm{F}(dx) = dx,$$

$$\operatorname{ctg}\omega = -\operatorname{ctg}\omega' = -\sin\mathrm{F}(y)\frac{dy}{dx}$$

(см. примечание 60) и потому, пренебрегая членами выше первого порядка:

$$\cos\mathrm{F}(z) = \cos\mathrm{F}(y) + \sin^2\mathrm{F}(y)\,dx\frac{dy}{dx} = \cos\mathrm{F}(y').$$

[88] Из уравнения круга (26) имеем

$$\operatorname{ctg}\mathrm{F}(y) = \frac{\sqrt{\sin^2\mathrm{F}(x)-\sin^2\mathrm{F}(r)}}{\sin\mathrm{F}(r)}.$$

Разложив dS [см. формулу (39)] на две части

$$dS = \frac{\sin^2\mathrm{F}(x)\,dx}{\sin\mathrm{F}(r)\sqrt{\cos^2\mathrm{F}(r)-\cos^2\mathrm{F}(x)}} - \frac{\sin\mathrm{F}(r)\,dx}{\sqrt{\sin^2\mathrm{F}(x)-\sin^2\mathrm{F}(r)}},$$

положим в первой $\cos\mathrm{F}(x) = u$, $d\cos\mathrm{F}(x) = \sin^2\mathrm{F}(x)\,dx = du$, а во второй, представив ее в виде

$$\frac{dx}{\sin\mathrm{F}(x)\sqrt{\operatorname{ctg}^2\mathrm{F}(r)-\operatorname{ctg}^2\mathrm{F}(x)}},$$

$$\operatorname{ctg}\mathrm{F}(x) = v, \quad \frac{dx}{\sin\mathrm{F}(x)} = dv.$$

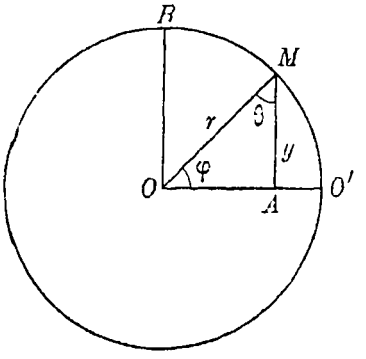
Тогда

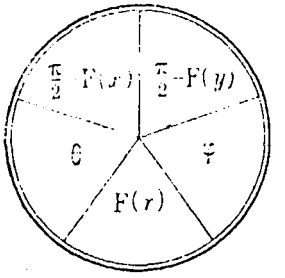
$$dS = \frac{du}{\sin\mathrm{F}(r)\sqrt{\cos^2\mathrm{F}(r)-u^2}} - \frac{dv}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\mathrm{F}(r)-v^2}}.$$

Отсюда вытекает формула, данная в тексте.

[89] Так как площадь сектора пропорциональна центральному углу, то по формуле (38) площадь сектора BOM будет

$$2\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\operatorname{ctg}^2 \mathrm{F}\left(\frac{r}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\frac{1-\sin \mathrm{F}(r)}{\sin \mathrm{F}(r)}.$$





Площадь же треугольника OAM равняется

$$\frac{\pi}{2}-\varphi-\vartheta,$$

и, следовательно, площадь фигуры $OAMB$:

$$\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\frac{1}{\sin \mathrm{F}(r)}-\vartheta.$$

Определив углы φ и ϑ по формулам

$$\cos \mathrm{F}(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\cos \mathrm{F}(r);\quad \sin\vartheta=\operatorname{ctg}\mathrm{F}(x)\operatorname{tg}\mathrm{F}(r)$$

(см. диаграмму), получим прежний результат.

[90] Если считать x от окружности к центру, т. е. поместить начало в точке O' (см. чертеж предыдущего примечания) и ось x направить к центру, то в данной выше формуле для S мы должны заменить x через $r-x$. Вычитая площадь S из площади четверти круга:

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sin \mathrm{F}(r)}-1\right),$$

получим площадь сегмента AMO':

$$\frac{1}{\sin \mathrm{F}(r)}\arccos\frac{\cos \mathrm{F}(r-x)}{\cos \mathrm{F}(r)}-\arccos\frac{\operatorname{ctg}\mathrm{F}(r-x)}{\operatorname{ctg}\mathrm{F}(r)}.$$

Теперь уравнение круга напишется таким образом:

$$\sin \mathrm{F}(r)=\sin \mathrm{F}(r-x)\sin \mathrm{F}(y),$$

и мы имеем

$$\frac{\cos^2 \mathrm{F}(r-x)}{\cos^2 \mathrm{F}(r)} + \frac{\operatorname{tg}^2 \mathrm{F}(r)}{\operatorname{tg}^2 \mathrm{F}(y)} = 1.$$

$$\frac{\operatorname{ctg}^2 \mathrm{F}(r-x)}{\operatorname{ctg}^2 \mathrm{F}(r)} + \frac{\cos^2 \mathrm{F}(y)}{\cos^2 \mathrm{F}(r)} = 1.$$

Отсюда видно, что

$$\arccos \frac{\cos \mathrm{F}(r-x)}{\cos \mathrm{F}(r)} = \arcsin \frac{\operatorname{tg} \mathrm{F}(r)}{\operatorname{tg} \mathrm{F}(y)},$$

$$\arccos \frac{\operatorname{ctg} \mathrm{F}(r-x)}{\operatorname{ctg} \mathrm{F}(r)} = \arcsin \frac{\cos \mathrm{F}(y)}{\cos \mathrm{F}(r)}.$$

Если положим $r = \infty$, то $\mathrm{F}(r) = 0$,

$$\lim \frac{1}{\sin \mathrm{F}(r)} \arcsin \frac{\operatorname{tg} \mathrm{F}(r)}{\operatorname{tg} \mathrm{F}(y)} = \operatorname{ctg} \mathrm{F}(y),$$

и мы получаем

$$S = \operatorname{ctg} \mathrm{F}(y) - \left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{F}(y) \right).$$

[91] На уравнения (27) мы имеем

$$\cos \mathrm{F}(y)\, d\,\mathrm{F}(y) = -e^{-x}\, dx = -\sin \mathrm{F}(y)\, dx,$$

$$dx = -\operatorname{ctg} \mathrm{F}(y)\, d\,\mathrm{F}(y),$$

и формула (39) дает

$$dS = -\operatorname{ctg}^2 \mathrm{F}(y) \cdot d\,\mathrm{F}(y) = d\,\mathrm{F}(y) - \frac{d\,\mathrm{F}(y)}{\sin^2 \mathrm{F}(y)},$$

$$S = \operatorname{ctg} \mathrm{F}(y) + \mathrm{F}(y) + C;$$

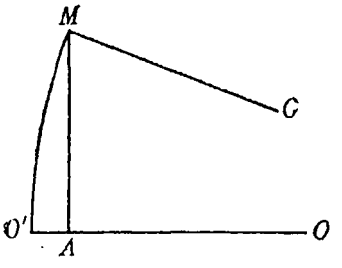
C определяется из условий: при $y = 0$, $\mathrm{F}(y) = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{ctg} \mathrm{F}(y) = 0$, $S = 0$.

[92] Вместо «между дугой кривой и координатами x, y» надо сказать «между двумя осями и предельной линией».

[93] Если в чертеже примечания 89 (стр. 324) мы будем, оставляя точку O' на месте, отодвигать O влево, то в пределе окружность обратится в предельную линию, треугольник OAM превратится в бесконечную полосу, о которой говорит Лобачевский. Угол φ при этом будет стремиться к нулю, угол θ к $\mathrm{F}(y)$, и площадь треугольника OAM к $\frac{\pi}{2} - \mathrm{F}(y)$.

Эту формулу можно получить также при помощи общей формулы (39).

Поместим начало координат в точке A, обозначим текущие координаты прямой MO, параллельной оси x, через (x, z). Из уравнения прямой MO (19):



$$\cos \mathrm{F}(z) = e^{-x} \cos \mathrm{F}(y),$$

получим

$$-\sin \mathrm{F}(z)\, d\mathrm{F}(z) = -e^{-x} \cos \mathrm{F}(y)\, dx = -\cos \mathrm{F}(z)\, dx,$$

$$dx = \operatorname{tg} \mathrm{F}(z)\, d\mathrm{F}(z),$$

и уравнение (39) дает

$$dS = d\mathrm{F}(z).$$

Интегрируя в пределах от $z = y$ до $z = 0$, будем иметь

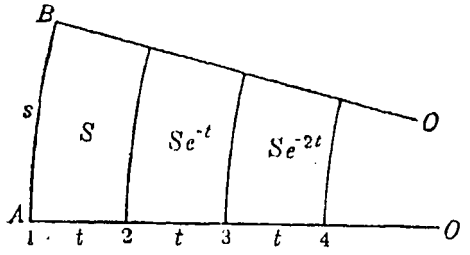
$$S = \frac{\pi}{2} - \mathrm{F}(y).$$

Прибавив к этой площади площадь сегмента (см. примечание 90), ограниченного предельной линией $O'M$ и ординатой AM, получим площадь между дугой предельной линии и двумя осями:

$$S = \operatorname{ctg} \mathrm{F}(y).$$

[94] Формула (39а) может быть выведена с помощью того же приема, который далее Лобачевский употребляет для вывода объема, ограниченного двумя предельными поверхностями с общими осями и конической поверхностью, образующие которой служат осями предельной поверхности (см. «Новые начала», § 117).

Проведем две параллельные AO и BO и между ними ряд предельных линий $1, 2, 3, \ldots$, которые находятся одна от другой на расстоянии t. Пусть S есть площадь, заключенная между параллельными и первыми двумя предельными линиями. Эта площадь при переменном t пропорциональна дуге s первой предельной линии, и потому



$$S = sT,$$

где T есть некоторая функция от t. Так как дуга второй предельной линии по формуле (36) равна se^{-t}, то площадь, заключенная между второй и третьей предельными линиями, будет

$$se^{-t}T = Se^{-t},$$

между третьей и четвертой:

$$se^{-2t}T = Se^{-2t},$$

и т. д. Вся же площадь между параллельными и первой предельной линией, простирающаяся в бесконечность, будет равна сумме

$$S(1+e^{-t}+e^{-2t}+\ldots)=S\frac{1}{1-e^{-t}}=\frac{sT}{1-e^{-t}}.$$

Так как она, очевидно, не зависит от t, то

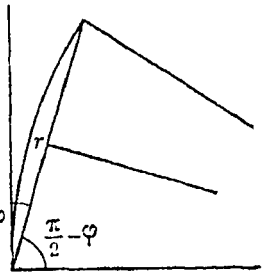
$$\frac{T}{1-e^{-t}}=c,$$

где c — постоянная. Следовательно, $S=sc(1-e^{-t})$, причем c должно быть равно единице, так чтобы при бесконечно малом t

$$S=sct$$

обращалась в $S=st$, как в евклидовой плоскости.

[95] Из чертежа видно, что $\frac{\pi}{2}-\varphi=\mathrm{F}\left(\frac{r}{2}\right)$; по формуле (III) примечания 23:



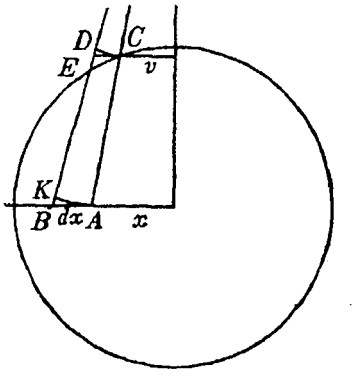
$$\sin\mathrm{F}(r)=\frac{1-\cos^2\mathrm{F}\left(\frac{r}{2}\right)}{1+\cos^2\mathrm{F}\left(\frac{r}{2}\right)}=\frac{\cos^2\varphi}{1+\sin^2\varphi},$$

$$\frac{d\varphi}{\sin\mathrm{F}(r)}=\frac{1+\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}d\varphi=\frac{2d\varphi}{\cos^2\varphi}-d\varphi,$$

$$dS=2d\operatorname{tg}\varphi-2d\varphi.$$

[96] Мы видели выше (см. примечание 93), что площадь бесконечной полосы между осью x, осью y и параллельной с y линией из конца координаты x равна

$$S=\frac{\pi}{2}-\mathrm{F}(x).$$



Следовательно, площадь, бесконечно простирающаяся между двумя параллельными через концы x и $x+dx$, будет

$$-d\mathrm{F}(x).$$

Точно так же, если мы обозначим через v длину перпендикуляра, опущенного из точки кривой C на ось y, то площадь той части бесконечной полосы, которая ограничена линией CD, будет

$$-d\mathrm{F}(v),$$

а площадь элемента $ABDC$:

$$d\mathrm{F}(v)-d\mathrm{F}(x).$$

Но по уравнениям (33) и (19) мы имеем

$$\cos \mathrm{F}(v) = e^{-y} \cos \mathrm{F}(x), \tag{I}$$

$$\frac{e^{2y} - 1}{e^{2u} - 1} = \sin^2 \mathrm{F}(x). \tag{II}$$

Дифференцируя уравнение (I) при y постоянном и заменяя e^{-y} через $\frac{\cos \mathrm{F}(v)}{\cos \mathrm{F}(x)}$, получим

$$\operatorname{tg} \mathrm{F}(v)\, d\mathrm{F}(v) = \operatorname{tg} \mathrm{F}(x)\, d\mathrm{F}(x).$$

С другой стороны, если мы из двух уравнений (I) и (II) исключим e^y, то получим

$$\operatorname{tg} \mathrm{F}(v) = \operatorname{tg} \mathrm{F}(x)\, e^u.$$

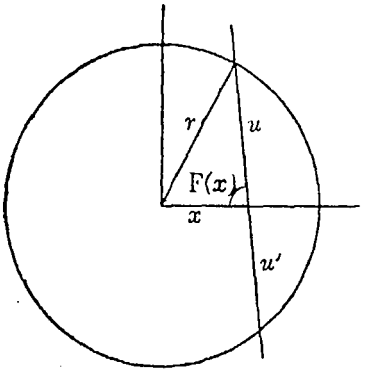
Поэтому

$$d\mathrm{F}(v) = \operatorname{tg} \mathrm{F}(x) \operatorname{ctg} \mathrm{F}(r)\, d\mathrm{F}(x) = e^{-u}\, d\mathrm{F}(x),$$

$$dS = (e^{-u} - 1)\, d\mathrm{F}(x).$$

Эту формулу можно получить иначе, если мы в элементе площади $ABEC$ заменим отрезок оси x и отрезок кривой EC дугами предельных линий, для которых параллельные AC и BD служат осями.

Длину дуги предельной линии AK можно определить из бесконечно малого прямоугольного при точке K треугольника, рассматривая его как прямолинейный треугольник и применяя к нему формулы евклидовой геометрии.



Мы будем иметь

$$AK = dx \sin \mathrm{F}(x) = -\, d\mathrm{F}(x),$$

и, следовательно, по формуле (39) получим прежнюю формулу для dS.

[97] Это уравнение получаем из приводимого чертежа, применяя формулу (17_2).

[98] Заменив в полученном уравнении

$$\sin \mathrm{F}(u) = \frac{2}{e^u + e^{-u}}, \quad \cos \mathrm{F}(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}},$$

мы приведем его к квадратному уравнению относительно $e^u \sin \mathrm{F}(x)$:

$$\sin \mathrm{F}(r) \sin^2 \mathrm{F}(x)\, e^{2u} - 2 \sin \mathrm{F}(x)\, e^u + \sin \mathrm{F}(r)\, [1 + \cos^2 \mathrm{F}(r)] = 0.$$

То же уравнение служит и для определения u', ибо оно при замене угла $\mathrm{F}(x)$ на $\pi - \mathrm{F}(x)$ не изменяется. Из уравнения мы получаем два корня:

$$e^u \sin \mathrm{F}(x) = \frac{1 \pm \sqrt{\cos^2 \mathrm{F}(r) - \sin^2 \mathrm{F}(r) \cos^2 \mathrm{F}(r)}}{\sin \mathrm{F}(r)}.$$

Так как при $x = 0$, $\mathrm{F}(x) = \frac{\pi}{2}$

$$e^{u} = \frac{1 - \cos \mathrm{F}(r)}{\sin \mathrm{F}(r)} = e^{\pm r},$$

то для определения u мы должны перед корнем взять знак плюс, для u' — знак минус; u будет положительным, а u' отрицательным.

Таким образом для $e^{u} \sin \mathrm{F}(x)$ мы получаем формулу, приведенную в тексте, а для $e^{u'} \sin \mathrm{F}(x)$ имеем

$$e^{u'} \sin \mathrm{F}(x) = \frac{1 - \sqrt{\cos^2 \mathrm{F}(r) - \sin^2 \mathrm{F}(r) \cos^2 \mathrm{F}(x)}}{\sin \mathrm{F}(r)},$$

откуда

$$e^{-u'} = \frac{\sin \mathrm{F}(r) \sin \mathrm{F}(x) \left[1 + \sqrt{\cos^2 \mathrm{F}(r) - \sin^2 \mathrm{F}(r) \cos^2 \mathrm{F}(x)}\right]}{1 - \cos^2 \mathrm{F}(r) + \sin^2 \mathrm{F}(r) \cos^2 \mathrm{F}(x)},$$

$$e^{-u'} = \frac{\sin \mathrm{F}(x) \left[1 + \sqrt{\cos^2 \mathrm{F}(r) - \sin^2 \mathrm{F}(r) \cos^2 \mathrm{F}(x)}\right]}{\sin \mathrm{F}(r) \left(1 + \cos^2 \mathrm{F}(x)\right)}.$$

Как выше было показано, u' будет величиной отрицательной; поэтому абсолютная величина $|u'| = -u'$. В тексте под u' подразумевается абсолютная величина u', поэтому вместо $e^{-u'}$ стоит $e^{u'}$.

[99] Интеграл выражения

$$e^{-u} \sin \mathrm{F}(x)\, dx = \frac{\sin \mathrm{F}(r) \sin^2 \mathrm{F}(x)\, dx}{1 + \sqrt{\cos^2 \mathrm{F}(r) - \sin^2 \mathrm{F}(r) \cos^2 \mathrm{F}(x)}}$$

можно разбить на три интеграла. Положим $\frac{\pi}{2} - \mathrm{F}(x) = \varphi$, $\sin \varphi = t$; тогда

$$\cos \mathrm{F}(x) = \sin \varphi = t, \quad d \cos \mathrm{F}(x) = \sin^2 \mathrm{F}(x)\, dx = \cos \varphi\, d\varphi = dt$$

и

$$e^{-u} \sin \mathrm{F}(x)\, dx = \frac{\sin \mathrm{F}(r)\, dt}{1 + \sqrt{\cos^2 \mathrm{F}(r) - \sin^2 \mathrm{F}(r)\, t^2}}$$

разделится сначала на две части, если умножим числитель и знаменатель на величину, сопряженную с знаменателем, и во второй части радикал перенесем снова в знаменатель, а затем на три части, если во второй части в числителе добавим $\sin^2 \mathrm{F}(r)\, dt$ и такой же член вычтем:

$$e^{-u} \sin \mathrm{F}(x)\, dx = \frac{1}{\sin \mathrm{F}(r)} \frac{dt}{1 + t^2} - \frac{dt \left[\cos^2 \mathrm{F}(r) - \sin^2 \mathrm{F}(r)\, t^2\right]}{\sin \mathrm{F}(r) \left(1 + t^2\right) \sqrt{\cos^2 \mathrm{F}(r) - \sin^2 \mathrm{F}(r)\, t^2}},$$

$$e^{-u} \sin \mathrm{F}(x)\, dx = \frac{1}{\sin \mathrm{F}(r)} \frac{dt}{1 + t^2} + \frac{\sin \mathrm{F}(r)\, dt}{\sqrt{\cos^2 \mathrm{F}(r) - \sin^2 \mathrm{F}(r)\, t^2}} -$$

$$- \frac{dt}{\sin \mathrm{F}(r) \left(1 + t^2\right) \sqrt{\cos^2 \mathrm{F}(r) - \sin^2 \mathrm{F}(r)\, t^2}}.$$

В последнюю часть введем новую переменную:

$$z = \frac{\sqrt{\cos^2 \mathrm{F}(r) - \sin^2 \mathrm{F}(r)\, t^2}}{t}.$$

Будем иметь

$$dz = -\frac{\cos^2 \mathrm{F}(r)\, dt}{t^2 \sqrt{\cos^2 \mathrm{F}(r) - \sin^2 \mathrm{F}(r)\, t^2}},$$

$$1 + z^2 = \frac{\cos^2 \mathrm{F}(r)\,(1 + t^2)}{t^2},$$

и окончательно

$$e^{-u} \sin \mathrm{F}(x)\, dx = \frac{1}{\sin \mathrm{F}(r)} \frac{1}{1 + t^2} + \frac{\operatorname{tg} \mathrm{F}(r)\, dt}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \mathrm{F}(r)\, t^2}} + \frac{1}{\sin \mathrm{F}(r)} \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Интегрируя, мы получим выражение для S, данное в тексте.

В «Казанском вестнике» и в «Собрании сочинений Лобачевского» отсутствует член $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sin \mathrm{F}(r)}$. Действительно, если мы будем отсчитывать площадь S от оси y, то при $x = 0$, $\mathrm{F}(x) = \frac{\pi}{2}$, $\sin \varphi = 0$ мы должны для S получить величину, равную нулю. Однако при этом значении φ по формуле, данной в тексте, мы получим

$$-\frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin \mathrm{F}(r)}.$$

Следовательно, в формуле пропущен член

$$\frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin \mathrm{F}(r)}.$$

Величину S можно представить в более простом виде, если в интеграл мы введем новую переменную ϑ, связанную с x уравнением

$$\sin \mathrm{F}(r) \cos \mathrm{F}(x) = \cos \mathrm{F}(r) \sin \vartheta.$$

В пределах интегрирования угол ϑ будет действителен, так как величина, стоящая под знаком радикала, должна быть положительна. В том, что угол ϑ действителен, можно убедиться иначе.

Соединим конец абсциссы x с точкой пересечения A оси y с окружностью и для образовавшегося треугольника напишем по приводимой диаграмме (стр. 331):

$$\cos \mathrm{F}(x) = \operatorname{tg} A \operatorname{ctg} \mathrm{F}(r),$$

откуда видно, что $\sin \vartheta = \operatorname{tg} A$.

Когда x будет меняться от нуля до r, угол A будет меняться от нуля до величины, меньшей $\frac{\pi}{4}$, а $\operatorname{tg} A$ — от нуля до величины, меньшей единицы. Следовательно, $\sin \vartheta = \operatorname{tg} A$ всегда будет меньше единицы.

Введя переменную ϑ, мы получаем

$$\sin \mathrm{F}(r) \sin^2 \mathrm{F}(x)\, dx = \cos \mathrm{F}(r) \cos \vartheta\, d\vartheta,$$

$$e^{-u} \sin \mathrm{F}(x)\, dx = \frac{\cos \mathrm{F}(r) \cos \vartheta\, d\vartheta}{1 - \cos \mathrm{F}(r) \cos \vartheta} = d\vartheta - \frac{d\vartheta}{1 - \cos \mathrm{F}(r) \cos \vartheta}$$

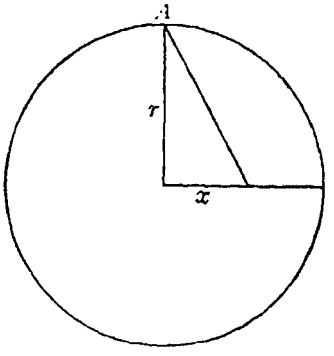
и, воспользовавшись известной формулой

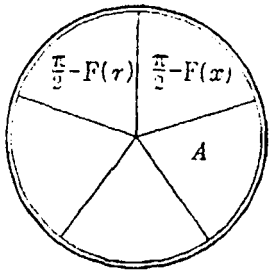
$$\int \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

будем иметь

$$\int e^{-u} \sin \mathrm{F}(x)\, dx = \vartheta - \frac{2}{\sin \mathrm{F}(r)} \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} \mathrm{F}(r) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta \right].$$

Вторую часть можно представить еще проще, если ввести в нее





отрезок ρ, соответствующий углу параллельности ϑ, и положить $\vartheta = \mathrm{F}(\rho)$; тогда

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \mathrm{F}(r) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \mathrm{F}(r + \rho),$$

$$\int e^{-u} \sin \mathrm{F}(x)\, dx = \vartheta - \frac{\mathrm{F}(r+\rho)}{\sin \mathrm{F}(r)},$$

$$S = \varphi - \vartheta + \frac{\mathrm{F}(r+\rho)}{\sin \mathrm{F}(r)}.$$

Это выражение можно представить еще иначе. По формулам примечания 23 мы можем написать

$$\operatorname{tg} \mathrm{F}(r+\rho) = \frac{\sin \mathrm{F}(r) \sin \vartheta}{\cos \mathrm{F}(r) + \cos \vartheta}$$

и, следовательно,

$$S = \varphi - \vartheta + \frac{1}{\sin \mathrm{F}(r)} \operatorname{arctg} \frac{\sin \mathrm{F}(r) \sin \vartheta}{\cos \mathrm{F}(r) + \cos \vartheta}.$$

Первые два члена этого выражения тождественны с первыми двумя членами формулы Лобачевского. В том, что

$$\mathrm{F}(r+\rho)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\sin\varphi-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\cos^2\mathrm{F}(r)-\sin^2\mathrm{F}(r)\sin^2\varphi}}{\sin\varphi},$$

можно убедиться, если взять тангенс правой и левой частей:

$$\operatorname{tg}\mathrm{F}(r+\rho)=\frac{\sin\mathrm{F}(r)\sin\vartheta}{\cos\mathrm{F}(r)+\cos\vartheta}=$$

$$=\frac{\sin^2\mathrm{F}(r)\cos\mathrm{F}(x)}{\cos^2\mathrm{F}(r)+\sqrt{\cos^2\mathrm{F}(r)-\sin^2\mathrm{F}(r)\cos^2\mathrm{F}(x)}},$$

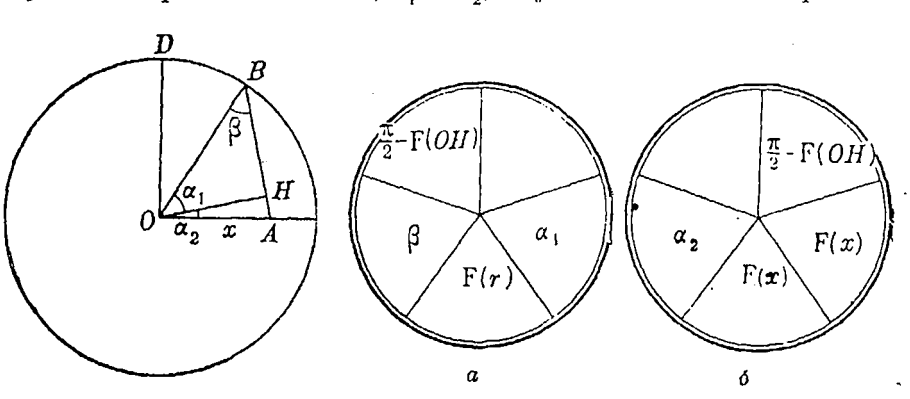
$$\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\sin\varphi-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\cos^2\mathrm{F}(r)-\sin^2\mathrm{F}(r)\sin^2\varphi}}{\sin\varphi}\right]=$$

$$=\operatorname{ctg}\left[\operatorname{arctg}\sin\varphi+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\cos^2\mathrm{F}(r)-\sin^2\mathrm{F}(r)\sin^2\varphi}}{\sin\varphi}\right]=$$

$$=\frac{(1-\sqrt{\cos^2\mathrm{F}(r)-\sin^2\mathrm{F}(r)\sin^2\varphi})\sin\varphi}{\sin^2\varphi+\sqrt{\cos^2\mathrm{F}(r)-\sin^2\mathrm{F}(r)\sin^2\varphi}}.$$

Помножив числитель и знаменатель на величину, сопряженную с числителем, после преобразований убедимся в тождестве этого последнего выражения с предыдущим.

[100] Площадь S равняется сумме площадей сектора OBD и площади треугольника OAB. Обозначим угол B треугольника OBA через β, а угол AOB разделим на два, α_1 и α_2, опустив из точки O перпенди-



куляр OH на сторону AB. Площадь сектора по формуле (38) (см. примечание 89) равна

$$\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_1-\alpha_2\right)\left(\frac{1}{\sin\mathrm{F}(r)}-1\right),$$

а площадь треугольника

$$\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - F(x) - \beta,$$

и, следовательно,

$$S = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 - \alpha_2\right)\left(\frac{1}{\sin F(r)} - 1\right) + \pi - \alpha_1 - \alpha_2 - F(x) - \beta,$$

$$S = \frac{\pi}{2} - F(x) - \beta + \frac{1}{\sin F(r)}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 - \alpha_2\right).$$

Но по формулам (17) и (14) из треугольников OAB, OAH, OBH мы имеем (см. диаграммы a и $\bar{a}$):

$$\sin\beta \operatorname{tg} F(x) = \sin F(x) \operatorname{tg} F(r),$$

$$\sin F(r) = \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\beta,$$

$$\sin F(x) = \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg} F(x).$$

На основании первого уравнения

$$\sin\beta = \operatorname{tg} F(r) \cos F(x),$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg} F(r) \cos F(x)}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 F(r) \cos^2 F(x)}}$$

и, далее,

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) \cos^2 F(x)}}{\cos F(x)},$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \cos F(x);$$

подставляя взятые из этих формул значения α_1, α_2 и β в формулу для S, мы получим прежнее выражение.

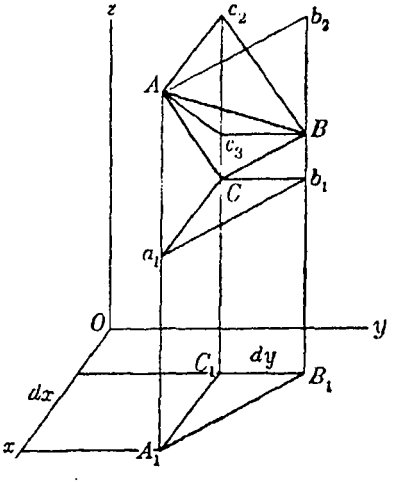
Мы видим теперь, какое геометрическое значение имеет каждый член формулы для S.

[101] Построим сначала на плоскости xOy точки

$$C_1(x, y, 0),$$

$$A_1(x + dx, y, 0),$$

$$B_1(x, y + dy, 0).$$



Восставим в них перпендикуляры к плоскости xOy и отложим на них соответственно отрезки $C_1C = z$, $A_1A = z + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx$ и $B_1B = z + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy$; мы получим в конце их точки C, A, B. Отложим, кроме того, на пер-

пендикулярах отрезки

$$A_1a_1 = B_1b_1 = C_1C = z,$$

$$C_1c_2 = B_1b_2 = A_1A = z + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx,$$

$$C_1c_3 = B_1B = z + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy.$$

Применяя теперь формулу (34), мы получим

$$\left.\begin{aligned} &B_1C_1 = dy,\ b_1C = \frac{dy}{\sin Z},\\ &Bb_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy, \end{aligned}\right\} a^2 = BC^2 = Bb_1^2 + b_1C^2 = \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 Z}\right] dy^2,$$

$$\left.\begin{aligned} &A_1C_1 = \frac{dx}{\sin Y},\ Ca_1 = \frac{dx}{\sin Y \sin Z},\\ &Aa_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx, \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} b^2 = AC^2 = Ca_1^2 + a_1A^2 = \\ = \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 Y \sin^2 Z}\right] dx^2, \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + C_1B_1^2 = dy^2 + \frac{dx^2}{\sin^2 Y},\\ &Ab_2^2 = a_1b_1^2 = \frac{dy^2}{\sin^2 Z} + \frac{dx^2}{\sin^2 Y \sin^2 Z},\\ &Bb_2 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx. \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c^2 = AB^2 = Ab_2^2 + b_2B^2 = \\ = \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx\right]^2 + \\ + \left[\frac{dy^2}{\sin^2 Z} + \frac{dx^2}{\sin^2 Y \sin^2 Z}\right] = \\ = a^2 + b^2 - 2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy. \end{aligned}$$

[102] Подставляя величины a^2, b^2 и c^2 в известную формулу евклидовой геометрии для площади треугольника,

$$\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2},$$

получим

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 dx^2dy^2}$$

и затем формулу, данную в тексте.

Ту же формулу можно вывести другим способом, пользуясь известной теоремой евклидовой геометрии: квадрат площади треугольника равен сумме квадратов площадей его трех проекций на три взаимно перпендикулярные плоскости. Так как мы имеем дело с бесконечно малыми треугольниками, то мы имеем право применить эту теорему.

Три плоскости CBb_1, CAa_1, Ca_1b_1 по построению мы можем считать взаимно перпендикулярными. Проекции треугольника ABC на эти плоскости будут треугольники CBc_2, CAc_3 и Ca_1b_1.

Для первого — основание: $Cc_2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx$, высота: $Cb_1 = \frac{dy}{\sin Z}$, площадь: $\frac{1}{2} Cc_2 \cdot Cb_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{dx\,dy}{\sin Z}$.

Для второго — основание: $Cc_3 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy$, высота: $Ca_1 = \frac{dx}{\sin Y \sin Z}$, площадь: $\frac{1}{2} Cc_3 \cdot Ca_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dx\,dy}{\sin Y \sin Z}$.

Для третьего — основание: $Cb_1 = \frac{dy}{\sin Z}$, высота: $Ca_1 = \frac{dx}{\sin Y \sin Z}$, площадь: $\frac{1}{2} Cb_1 \cdot Ca_1 = \frac{1}{2}\frac{dx\,dy}{\sin Y \sin^2 Z}$.

Подставив эти величины в равенство

$$ABC^2 = (CBc_2)^2 + (CAC_3)^2 + (Ca_1b_1)^2,$$

получим прежнюю формулу.

[103] В «Казанском вестнике» приведена формула

$$\frac{d^2S}{dX\,dY} = \frac{1}{\sin R}\sqrt{\frac{\cos^2 X}{\cos^2 Z} + \frac{\operatorname{ctg}^2 Y}{\cos^2 Z} + \frac{1}{\sin^2 Y \sin^2 Z}},$$

которая в «Полном собрании сочинений по геометрии» заменена следующей:

$$\frac{d^2S}{dx\,dy} = \frac{1}{\sin Z}\sqrt{\frac{\cos^2 X}{\cos^2 Z} + \frac{\operatorname{ctg}^2 Y}{\cos^2 Z} + \frac{1}{\sin^2 Y \sin^2 Z}}.$$

Обе формулы верны, ибо $dX = -\sin X\,dx$, $dY = -\sin Y\,dy$.

[104] Имеем, полагая $\sin R = \sin X \sin Y \sin Z$,

$$\frac{\cos^2 X + \operatorname{ctg}^2 Y}{\cos^2 Z} + \frac{1}{\sin^2 Y \sin^2 Z} =$$

$$= \frac{(\cos^2 X + \operatorname{ctg}^2 Y)\sin^2 X \sin Y}{\sin^2 X \sin^2 Y - \sin^2 R} + \frac{\sin^2 X}{\sin^2 R} =$$

$$= \frac{\sin^4 X \sin^2 Y \cos^2 R}{\sin^2 R\,(\sin^2 X \sin^2 Y - \sin^2 R)},$$

откуда получаем формулу, данную в тексте. Если же в формуле текста заменим $\sin Y \sin X$ через $\frac{\sin R}{\sin Z}$, то получим

$$\frac{d^2S}{dX\,dY} = \frac{\cos R \sin X}{\sin^2 R \cos Z}.$$

[105] На $4dY$ надо умножить потому, что вдоль оси x расположены четыре октанта сферы, а интегрирование распространяется только на один.

[106] Неопределенный интеграл равен

$$\int \frac{\sin Y \sin^2 X\, dY}{\sqrt{\sin^2 X \sin^2 Y - \sin^2 R}} = -\int \frac{\sin^2 X\, d\cos Y}{\sqrt{\sin^2 X - \sin^2 R - \sin^2 X \cos^2 Y}} =$$

$$= -\sin X \arcsin \frac{\sin X \cos Y}{\sqrt{\sin^2 X - \sin^2 R}}.$$

Нижними пределами интегрирования служат $y = 0$, $Y = \mathrm{F}(y) = \frac{\pi}{2}$. Верхний предел Y соответствует какому-нибудь значению X и найдется из уравнения

$$\sin X \sin Y = \sin R$$

большого круга, лежащего в плоскости xOy. Подставляя эти пределы, получим после первого интегрирования

$$-\frac{\pi}{2}\sin X.$$

При втором интегрировании по X нижним пределом служит $x = 0$ и $X = \frac{\pi}{2}$, а верхним — какое-нибудь X. Поэтому после второго интегрирования будем иметь

$$\frac{\pi}{2}\cos X.$$

При первом и втором интегрировании Лобачевский меняет порядок пределов, отчего знак двойного интеграла не меняется.

[107] Надо $X = \mathrm{F}(x)$ заменить через $\mathrm{F}(r - x)$. Тогда по формуле примечания 23:

$$\cos R - \cos \mathrm{F}(r - x) = \cos R - \frac{\cos R - \cos X}{1 - \cos R \cos X} = \frac{\cos X \sin^2 R}{1 - \cos R \cos X}.$$

[108] При $r = \infty$, $R = \mathrm{F}(r) = 0$, $\cos R = 1$ и $\frac{2\pi \cos X}{1 - \cos X} = 2\pi \frac{e^x - e^{-x}}{2e^{-x}} =$ $= \pi(e^{2x} - 1)$.

[109] Когда в двойной интеграл вместо переменных X и Y мы вводим новые переменные φ и ψ, то $dX\,dY$ мы должны заменить через

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\frac{\partial Y}{\partial \psi} - \frac{\partial X}{\partial \psi}\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right) d\varphi\, d\psi.$$

В данном случае Y не зависит от φ и потому нужно заменить $dX\,dY$ через $\frac{\partial X}{\partial \varphi}\frac{\partial Y}{\partial \psi}\, d\varphi\, d\psi$.

Из уравнений, связывающих новые переменные φ и ψ со старыми, мы имеем

$$-\sin X\frac{\partial X}{\partial\varphi}=\cos R\sin\psi\cos\varphi,$$

$$\frac{1}{\sin^2 Y}\frac{\partial Y}{\partial\varphi}=\operatorname{ctg} R\sin\psi;$$

следовательно,

$$dX\,dY=-\frac{\cos^2 R\sin^2\psi\sin^2 Y\cos\varphi}{\sin R\sin X}\,d\varphi\,d\psi.$$

В примечании 104 мы видели, что

$$\frac{d^2S}{dX\,dY}=\frac{\cos R\sin X}{\sin^2 R\cos Z},$$

поэтому

$$\frac{d^2S}{d\varphi\,d\psi}=-\frac{\cos^3 R\sin^2\psi\sin^2 Y\cos\varphi}{\sin^3 R\cos Z}.$$

Но

$$\sin^2 Y=\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 Y}=\frac{\sin^2 R}{1-\sin^2\psi\cos^2 R},$$

$$\frac{\sin^2 X\sin^2 Y}{\sin^2 R}=\frac{\sin^2 X}{1-\sin^2\psi\cos^2 R},$$

$$\cos^2 Z=1-\frac{\sin^2 R}{\sin^2 X\sin^2 Y}=\frac{\sin^2\psi\cos^2 R-\cos^2 X}{\sin^2 X}=\frac{\sin^2\psi\cos^2 R\cos^2\varphi}{\sin^2 X},$$

и, следовательно,

$$\frac{d^2S}{d\varphi\,d\psi}=-\frac{\cos^3 R\sin^2\psi\cos\varphi\sin^2 R\sin X}{\sin^3 R\sin\psi\cos R\cos\varphi(1-\sin^2\psi\cos^2 R)}=$$

$$=-\frac{\cos^2 R\sin X\sin\psi}{\sin R(1-\sin^2\psi\cos^2 R)},$$

откуда получается формула, данная в тексте.

Новым переменным φ и ψ можно дать такое геометрическое толкование. Пусть x, y, z суть координаты точки M; $(x, y, 0)$ — координаты точки A на плоскости xOy; $(x, 0, 0)$ — координаты точки P на оси x. Возьмем на оси z точку Q, лежащую от A на расстоянии r, и соединим ее прямыми $QA=r$ и $QP=t$ с точками A и P. Мы получим два прямоугольных треугольника AQP и OQP; угол Q в первом и угол P

во втором будут равны соответственно $\frac{\pi}{2}-\psi$ и $\frac{\pi}{2}-\varphi$. Действительно, для этих двух треугольников мы имеем (по диаграммам a и $б$) формулы

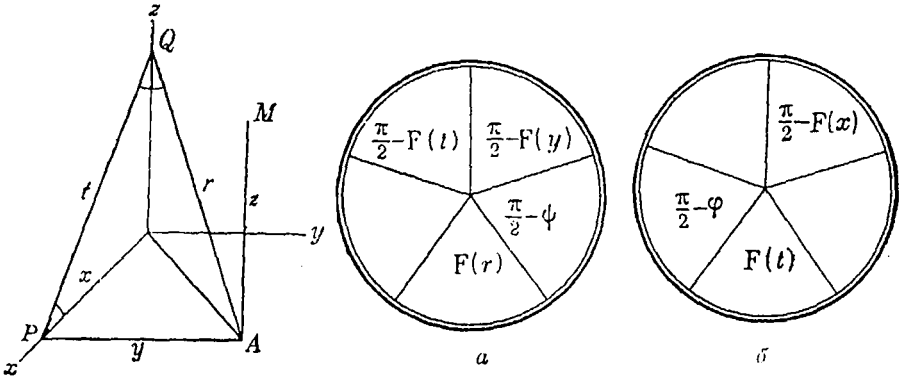
$$\cos\psi = \operatorname{tg} R \operatorname{ctg} Y,$$

$$\cos X = \cos \mathrm{F}(t) \sin\varphi,$$

$$\cos \mathrm{F}(t) = \cos R \sin\psi,$$

тождественные с теми, которые связывают переменные X, Y с переменными φ, ψ.

Если точка A будет отодвигаться от оси y так, что координата y будет оставаться постоянной, то угол ψ не будет меняться, треуголь-



ник APQ не будет изменять своих размеров, вершина Q будет опускаться до тех пор, пока она не дойдет до начала; тогда точка A дойдет до окружности, а треугольник APQ упадет на плоскость xOy; угол φ будет при этом меняться от нуля до $\frac{\pi}{2}$.

Когда затем y будет меняться от нуля до r, то угол ψ будет меняться от $\frac{\pi}{2}$ до нуля.

Таким образом, когда мы распространяем двойной интеграл на один октант, пределами интегрирования будут для φ и ψ, 0 и $\frac{\pi}{2}$.

Чтобы получить поверхность всей сферы, мы должны умножить на $8\,d\varphi\,d\psi$, потому что интегрирование распространяется только на восьмую ее часть. Знак минус во второй части должен быть отброшен, ибо в формуле преобразования, заменяя $dX\,dY$ через

$$\pm\left(\frac{\partial X}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial Y}{\partial\psi}-\frac{\partial X}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial Y}{\partial\varphi}\right)d\varphi\,d\psi,$$

мы должны перед детерминантом взять надлежащий знак: в данном случае знак минус, потому что обе переменные X и Y при интегрировании уменьшаются, φ увеличивается, а ψ уменьшается; произведения

$dX\,dY$ и $d\varphi\,d\psi$ будут иметь разные знаки, а коэфициент при $d\varphi\,d\psi$ должен быть отрицательным.

[110] Это равенство получится, если обозначим ось R через a и вместо ψ введем переменную x, положив

$$\cos R \sin\psi = x; \quad \cos R \cos\psi\, d\psi = dx,$$

$$d\psi = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Для переменной x пределами интегрирования будут нуль и a. Интеграл (46) преобразуется в следующий:

$$\frac{1}{a}\int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sqrt{1 - x^2\sin^2\varphi}}{(1-x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx\,d\varphi.$$

Если начнем интегрирование по переменной φ, то и получим желаемое равенство.

[111] Заменим переменную ψ другой переменной z, положив

$$z = \sin R \sin\psi,$$

$$dz = \sin R \cos\psi\, d\psi,$$

и обозначим для краткости $\sin R$ через x. Пределами интегрирования по z будут $z = 0$ и $z = x$, и двойной интеграл по умножении на $x = \sin R$ примет вид

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^x \frac{\sqrt{1 - z^2\sin^2\varphi}}{1 - z^2}\,dz\,d\varphi.$$

Если его будем интегрировать сначала по φ, то получим

$$I = \int_0^x \frac{E(z)}{1 - z^2}\,dz.$$

Изменим теперь порядок интегрирования и начнем интегрировать по переменному z. В справедливости равенства

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1 - z^2\sin^2\varphi}}{1 - z^2}\,dz =$$

$$= \sin\varphi \arcsin(x\sin\varphi) + \frac{\cos\varphi}{2}\ln\frac{\sqrt{1 - x^2\sin^2\varphi} + x\cos\varphi}{\sqrt{1 - x^2\sin^2\varphi} - x\cos\varphi}$$

легко убедиться, дифференцируя обе части по x и замечая, что обе части при $x=0$ обращаются в нуль. При вторичном интегрировании этого выражения по частям, проинтегрированная часть

$$-\cos\varphi \arcsin(x\sin\varphi)+\frac{\sin\varphi}{2}\ln\frac{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}+x\cos\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}-x\cos\varphi}$$

для пределов $\varphi=0$ и $\varphi=\frac{\pi}{2}$ обращается в нуль, и таким образом

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\, d[\arcsin(x\sin\varphi)]-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\, d\ln\frac{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}+x\cos\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}-x\cos\varphi}=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos^2\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}}d\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin^2\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}}d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\,d\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}}=$$

$$=\pi H(x).$$

[112] Мы получаем сначала

$$\frac{\pi R}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{R}dR\,\frac{\cos R\sin\psi\sqrt{1-\sin^2R\sin^2\psi\sin^2\varphi}}{1-\sin^2R\sin^2\psi}.$$

Обозначая снова $\sin R\sin\psi$ через z, приведем двойной интеграл по переменным R и φ к виду (см. предыдущее примечание):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{z}\frac{\sqrt{1-z^2\sin^2\varphi}}{1-z^2}dz=\pi H(z)=\sin R\sin\psi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2R\sin^2\psi\sin^2\varphi}}.$$

Это равенство интегрируем по ψ и получаем формулу, данную в тексте.

[113] Положив в предыдущем интеграле

$$z=\sin R\sin\varphi\cos\psi \quad\text{и}\quad x=\sin R\sin\varphi,$$

$$dx=-\sin R\sin\varphi\sin\psi\, d\psi,$$

получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin R\sin\psi\, d\psi}{\sqrt{1-\sin^2\psi R\sin^2\psi\cos^2\varphi}}=-\frac{1}{\sin\psi}\int_x^0\frac{dz}{\sqrt{1-x^2+z^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sin\psi}\ln\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}.$$

[114] Тогда

$$\sin\varphi = \sin F(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad d\varphi = dF(x) = -\sin F(x)\,dx, \quad \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = -dx,$$

и пределами интеграла будут при $x = 0$, $x = \infty$, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$.

[115] Проинтегрированная часть

$$x \ln \frac{e^{2x} + 1 + 2e^x \sin R}{e^{2x} + 1 - 2e^x \sin R}$$

обращается в нуль не только при $x = 0$, но и при $x = \infty$, ибо

$$\lim_{x\to\infty} x \ln \frac{1 + 2e^{-x}\sin R + e^{-2x}}{1 - 2e^{-x}\sin R + e^{-2x}} = 0.$$

Действительно, если e^{-x} заменим через y и разложим натуральный логарифм по степеням y, то старший член разложения будет

$$4 \sin R \cdot y \ln y.$$

[116] Ибо

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

суть величины, обратные одна другой,

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right),$$

логарифмы их равны по абсолютной величине и противоположны по знаку и при суммировании сокращаются.

[117] Дифференцируя $e^x = e^a \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\psi$, получим

$$e^x\,dx = -e^a \frac{d\psi}{2\sin^2\frac{\psi}{2}} = -\frac{e^a}{2}\left(1 + e^{2(x-a)}\right)d\psi,$$

$$d\psi = -\frac{2e^{x-a}}{1 + e^{2(x-a)}}\,dx.$$

[118] Здесь r означает расстояние точки поверхности от оси x, $R = F(r)$ есть функция одного только x, и потому при дифференцировании первого равенства по y мы должны R считать постоянным. Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = -\sin Z \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -\sin Z \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial z} = -\sin Z,$$

мы получаем формулы для $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Подставим эти значения в формулу (44), предварительно заменив в ней $\sin Y \sin Z$ на $\sin R$, и приведем дроби под радикалом к одному знаменателю:

$$\sin^2 Y \sin^2 Z \sin^2 R.$$

Получим в числителе:

$$\sin^2 Y \cos^2 R \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 + \cos^2 Y \sin^2 R + \cos^2 Z \sin^2 Y =$$

$$= \sin^2 Y \cos^2 R \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 + \cos^2 Y \sin^2 R + (1 - \sin^2 Z) \sin^2 Y =$$

$$= \sin^2 Y \cos^2 R \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 + \cos^2 Y \sin^2 R + \sin^2 Y - \sin^2 R =$$

$$= \sin^2 Y \cos^2 R \left[1 + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2\right],$$

и, следовательно,

$$\frac{d^2S}{dx\,dy} = \frac{\sin Y \cos R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2}}{\sin Y \sin Z \sin R \cos Z} = \frac{\sin Y \cos R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2}}{\sin^2 R \sqrt{1 - \frac{\sin^2 R}{\sin^2 Y}}} =$$

$$= \frac{\sin^2 Y \cos R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2}}{\sin^2 R \sqrt{\sin^2 Y - \sin^2 R}}.$$

Чтобы получить $\frac{d^2S}{dx\,dY}$, надо положить $dY = -\sin Y\,dy$; тогда

$$\frac{d^2S}{dx\,dY} = -\frac{\sin Y \cos R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2}}{\sin^2 R \sqrt{\sin^2 Y - \sin^2 R}} =$$

$$= -\frac{\cos R}{\sin^2 R} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2} \frac{\sin Y}{\sqrt{\cos^2 R - \cos^2 Y}}.$$

По переменному y надо произвести интегрирование от нуля до r, а по переменному Y — от $\frac{\pi}{2}$ до R (а не наоборот, как сказано в тексте). Тогда получаем

$$\frac{dS}{dx} = 4 \frac{\cos R}{\sin^2 R} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{R} \frac{d\cos Y}{\sqrt{\cos^2 R - \cos^2 Y}} =$$

$$= 4\frac{\cos R}{\sin^2 R}\sqrt{1+\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{R}\arcsin\frac{\cos Y}{\cos R} = 2\pi\frac{\cos R}{\sin^2 R}\sqrt{1+\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2}.$$

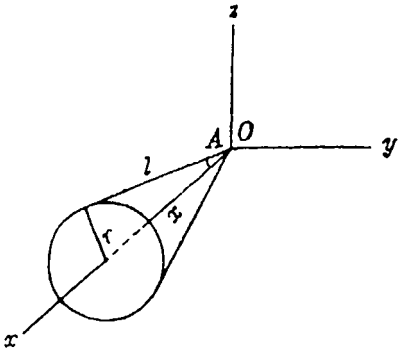
[119] Дифференцируя уравнение конуса (см. чертеж и диаграмму), получаем

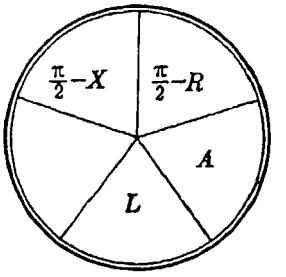
$$-\sin R\frac{\partial R}{\partial x}\operatorname{tg} X - \cos R\frac{\sin X}{\cos^2 X} = 0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{\operatorname{ctg} R}{\cos X},$$

и затем

$$\frac{dS}{dX} = \frac{dS}{dx}\cdot\frac{dx}{dX} = -\frac{2\pi\cos R}{\sin^2 R\sin X}\sqrt{1+\frac{\operatorname{ctg}^2 R}{\cos^2 X}}.$$





Подкоренная величина преобразуется следующим образом:

$$1+\frac{\operatorname{ctg}^2 R}{\cos^2 X} = 1+\operatorname{ctg}^2 R(1+\operatorname{tg}^2 X) = \frac{1}{\sin^2 R}+\frac{\operatorname{tg}^2 A}{\sin^2 R} = \frac{1}{\sin^2 R\cos^2 A}.$$

[120] Кроме этих двух формул, напишем еще третью:

$$\sin L = \sin X\sin R.$$

Дифференцируя первое уравнение, имеем

$$\sin L\cos A\,dL = \sin X\,dX,$$

$$dS = -\frac{2\pi\cos R\sin L\,dL}{\sin^3 R\sin^2 X} = -\frac{2\pi\sin L\sin A\operatorname{ctg} L}{\sin^2 L}\,dL.$$

[121] Мы имеем

$$\cos R\frac{dR}{dx} = -e^{-x};\qquad \frac{dR}{dx} = -\operatorname{tg} R,\qquad \frac{dS}{dx} = \frac{2\pi}{\sin^2 R} = 2\pi e^{2x}.$$

[122] Так как объем с бесконечно продолженной поверхностью не зависит от выбора c, то

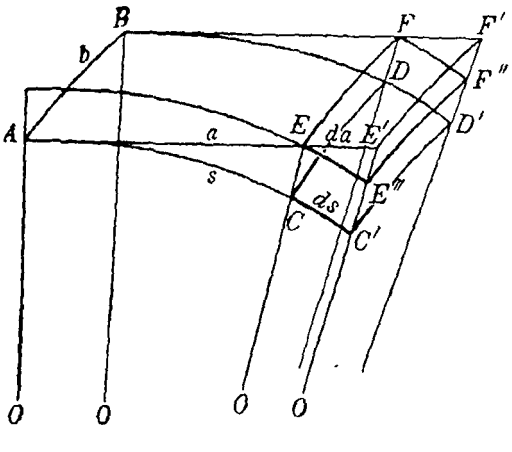
$$\frac{C}{1-e^{-2c}}$$

есть величина постоянная. Но при c бесконечно малом объем равен cS и $C=c$, и, следовательно,

$$\frac{C}{1-e^{-2c}}=\frac{C}{2c}=\frac{1}{2}.$$

[123] Рассматривая предельную поверхность как сферу бесконечно большого радиуса, Лобачевский иногда смотрит на предельные линии как на окружности больших кругов этой сферы. Вся конфигурация выяснена в следующем примечании.

[124] Построим на предельной поверхности прямоугольник $ABDC$ со сторонами b и s и через вершины его проведем оси AO, BO, DO и CO и четыре плоскости ABO, BDO, DCO, CAO. На предельной линии AB построим цилиндр, образующие которого перпендикулярны к плоскости AOB и касаются предельной поверхности. Пусть AE и BF — две из этих образующих. Нетрудно видеть, что кривая EF пересечения цилиндра с плоскостью CDO будет предельной линией. Действительно, вследствие равенства дуг AC и BD, фигуры AEC и BFD будут равны и $EC=FD$. Так же убедимся, что отрезки осей, заключенных между кривыми CD и EF, все одинаковы, а так как CD есть дуга предельной линии, то FE будет предельной с теми же осями, как и у линии CD.



Когда мы увеличим a на da и s на ds, то объем P получит приращение dP, равное объему тела, заключенному между плоскостями OEF и $OE'F'$ и цилиндрической поверхностью $EFF'E'$. При вычислении этого объема мы можем поверхность цилиндра заменить предельной поверхностью $EFF''E''$, проведенной через линию EF, и воспользоваться формулой (49), которая для $c=\infty$ обращается в $\frac{1}{2}S$, где S есть площадь $EFF''E''$:

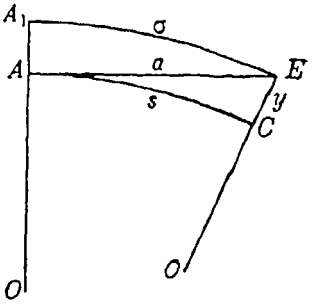
$$S=EF\cdot EE''=be^{v}\cdot ds\,e^{v}=be^{2v}\,ds.$$

[125] Проведем через точку E предельную дугу $EA_1 = \sigma$ с осями A_1O и EO; по формулам (29) и (30):

$$\sigma = \operatorname{ctg} F(a), \qquad s = \cos F(a);$$

принимая во внимание формулу (36), $\sigma = se^{y}$, получим

$$e^{-y} = \sin F(a).$$



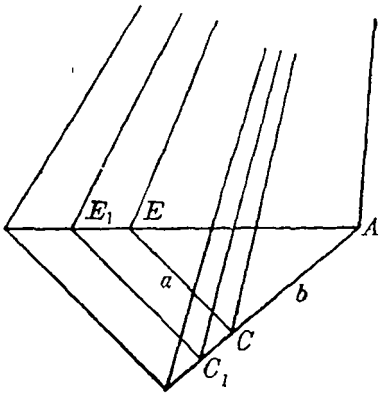
Дифференцируя второе уравнение, получим

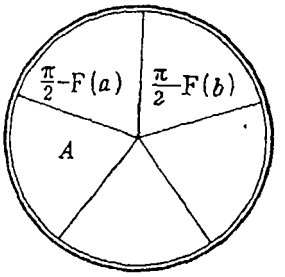
$$ds = \sin^2 F(a)\, da,$$

$$dP = \frac{1}{2}\, b\, \frac{\sin^2 F(a)\, da}{\sin^2 F(a)} = \frac{1}{2}\, b\, da.$$

[126] См. стр. 225 — 226 текста и примечание 96.

[127] Объем сегмента CC_1EE_1 равен, как было выше сказано в тексте, половине произведения a на площадь элементарной бесконечной





полосы CC_1O; а эта последняя, на основании стр. 226 текста и примечания 96, равна $-dF(b)$.

[128] Из треугольника ECA имеем (см. диаграмму):

$$\cos F(a) = \frac{e^{2a} - 1}{e^{2a} + 1} = \operatorname{tg} A \operatorname{ctg} B,$$

и затем

$$e^{2a} = \frac{1 + \operatorname{tg} A \operatorname{ctg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{ctg} B} = \frac{\sin(B + A)}{\sin(B - A)}.$$

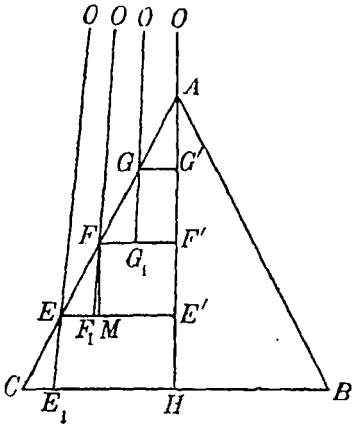
[129] Если угол A бесконечно мал (dA), то и катет a бесконечно мал:

$$\cos F(a) = a = dA \operatorname{ctg} B,$$

$$dP = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} B\, dA\, dB.$$

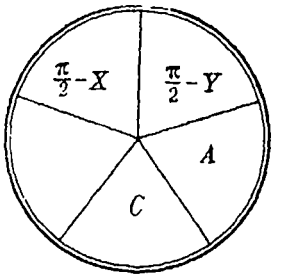
Интегрируя сначала по A от нуля до 2π, а потом по B от $\frac{\pi}{2}$, получим формулу для P, данную в тексте.

[150] Проведем линии EE', FF', GG', ..., перпендикулярные к высоте равнобедренного треугольника BAC, и разделим его сторону AC на элементы EF, FG, ... Через точки E, F, ... проведем линии E_1EO, F_1FO, G_1GO, ..., параллельные высоте. При вращении этой фигуры вокруг прямой AH треугольник CAH опишет конус с основанием BC и высотой AH, а бесконечные полоски между двумя последовательными параллельными — элементарные конические оболочки с общей осью AH. Вычислим объем оболочки описанной полосой OEF_1FO.



Отложим $E'M = F'F$ и положим $F'F = y$, $AF' = x$, $AF = c$, $F'E' = dx$, $EM = dy$, $F_1M = \delta y$.

Для треугольника $AF'F$ мы имеем диаграмму, по которой напишем, кроме формул, данных в тексте, еще формулу $\sin C = \sin X \sin Y$, которая далее понадобится.



Чтобы определить dy, дифференцируем уравнение (18) прямой AB; получаем

$$\sin^2 Y \operatorname{tg} X\, dy - \frac{\sin X}{\cos^2 X} dx = 0,$$

откуда

$$dy = dx \frac{\cos Y}{\sin^2 Y \cos X};$$

чтобы получить δy, воспользуемся уравнением (19) прямой F_1FO, параллельной оси x, приняв $FF' = y$ за начальную ординату и направив ось x от F' к H. Соответственно с этим в уравнении (19) мы должны заменить b через y, y через $y + \delta y$ и x через $-dx$. Получим

$$\cos \mathrm{F}(y + \delta y) = e^{dx} \cos \mathrm{F}(y).$$

Разложив $\cos \mathrm{F}(y + \delta y)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь бесконечно малыми первого порядка, имеем

$$\cos \mathrm{F}(y) + \sin^2 \mathrm{F}(y)\, \delta y = (1 + dx) \cos \mathrm{F}(y),$$

откуда

$$\delta y = \frac{\cos \mathrm{F}(y)}{\sin^2 \mathrm{F}(y)} dx.$$

Это же значение для δy Лобачевский получает проще, замечая, что выше полученная формула для dy остается справедливой, каковы бы ни были угол A и величина x. Когда x делается бесконечно большим, $A = 0$, $\cos X = 1$ и dy обращается в δy.

Зная dy и δy, находим толщину оболочки:

$$EF_1 = dy - \delta y = \frac{\cos Y}{\sin^2 Y}\left(\frac{1}{\cos X} - 1\right) dx,$$

и по формуле (54) объем ее:

$$dP = \pi \frac{\cos^2 Y}{\sin^2 Y}\left(\frac{1}{\cos X} - 1\right) dx,$$

или, выражая dy через dx:

$$dP = \pi \cos Y (1 - \cos X)\, dy.$$

Суммируя объемы всех оболочек, мы получаем объем тела, заключенного между конической поверхностью BOC, простирающейся в бесконечность, и боковой поверхностью конуса BAC:

$$\pi \int \cos Y (1 - \cos X)\, dy.$$

Если вычтем его из объема бесконечного конуса BOC

$$\pi \int \cos Y\, dy,$$

который определяется по формуле (54), получим объем конуса BAC;

$$\pi \int \cos Y \cos X\, dy.$$

[131] Из соотношения

$$\cos X = \cos A \cos C,$$

заменив

$$\cos X = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \quad \cos C = \frac{e^c - e^{-c}}{e^c + e^{-c}},$$

получим

$$e^{2x} = \frac{e^{2c} + 1 + (e^{2c} - 1)\cos A}{e^{2c} + 1 - (e^{2c} - 1)\cos A} = \frac{1 + \cos A \cos C}{1 - \cos A \cos C} = \frac{\sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2}\, e^{2c}}{\cos^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{A}{2}\, e^{2c}}.$$

[132] Сначала получаем

$$x = \frac{1}{2}\left[\left(\cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}\right)(e^{2c} - 1) - \frac{1}{2}\left(\cos^4 \frac{A}{2} - \sin^4 \frac{A}{2}\right)(e^{2c} - 1)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\left(\cos^6 \frac{A}{2} - \sin^6 \frac{A}{2}\right)(e^{2c} - 1)^3 + \ldots\right],$$

$$x = \frac{1}{2}\cos A\,(e^{2c}-1)\left[1-\frac{1}{2}(e^{2c}-1)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\left(\cos^4\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{2}+\sin^4\frac{A}{2}\right)(e^{2c}-1)^2+\ldots\right];$$

но

$$\cos^2 A = \cos^4\frac{A}{2}+\sin^4\frac{A}{2}-2\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{2},$$

$$1 = \cos^4\frac{A}{2}+\sin^4\frac{A}{2}+2\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{2},$$

следовательно,

$$\frac{3+\cos^2 A}{4} = \cos^4\frac{A}{2}+\sin^4\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{2}.$$

Затем разлагаем в ряд

$$e^{2c}-1 = 2c+2c^2+\frac{4}{3}c^3+\ldots$$

[183] Первое равенство следует из уравнения $\sin A = \operatorname{tg} C \operatorname{ctg} Y$ (см. диаграмму к примечанию 130 на стр. 346), ибо при малом $\sin A$ можно положить

$$\cos A = 1-\frac{1}{2}\sin^2 A;$$

подставляя затем значение $\cos A$ в

$$x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos A\cos C}{1-\cos A\cos C} = \frac{1}{2}\ln\frac{\left(1+\cos C-\frac{1}{2}\cos C\operatorname{tg}^2 C\operatorname{ctg}^2 Y\right)}{\left(1-\cos C+\frac{1}{2}\cos C\operatorname{tg}^2 C\operatorname{ctg}^2 Y\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos C}{1-\cos C}-\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 C\operatorname{ctg}^2 Y\left(\frac{\cos C}{1+\cos C}+\frac{\cos C}{1-\cos C}\right) =$$

$$= \ln\operatorname{ctg}\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{ctg}^2 Y}{\cos C};$$

замечая, что $\operatorname{tg}\frac{1}{2}C = e^{-c}$, получаем формулу, данную в тексте.

[184] Принимая во внимание полученные значения $\cos A$ и x при бесконечно малом y, находим для объема конуса по формуле (55):

$$P = \pi\left[\left(c-\frac{1}{2}c\cdot\operatorname{tg}^2 C\operatorname{ctg}^2 Y\right)-c+\frac{\operatorname{ctg}^2 Y}{2\cos C}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}^2 Y\left(\frac{1}{\cos C}-c\cdot\operatorname{tg}^2 C\right),$$

Площадь его основания (формула 38):

$$4\pi \operatorname{ctg}^2 \Gamma\left(\frac{y}{2}\right) = \pi \operatorname{ctg}^2 Y,$$

либо, при бесконечно малом y,

$$\operatorname{ctg} \Gamma(y) = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) = y + \ldots$$

Таким образом в пределе, когда отверстие конуса стремится к нулю, отношение его объема к площади основания будет

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos C} - c \cdot \operatorname{tg}^2 C\right).$$

Это отношение должно равняться отношению объема сферы радиуса c к ее поверхности, которая по формуле (45) равна

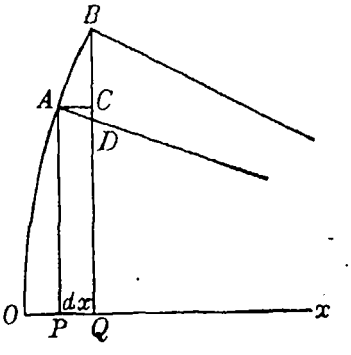
$$4\pi \operatorname{ctg}^2 C.$$

Поэтому объем шара радиуса c

$$2\pi \operatorname{ctg}^3 C \left[\frac{1}{\cos C} - c \cdot \operatorname{tg}^2 C\right] = 2\pi\left(\frac{\cos C}{\sin^2 C} - c\right) = 2\pi(\operatorname{sh} c \operatorname{ch} c - c).$$

Отсюда вытекает формула (56).

[135] Пусть поверхность, ограничивающая тело, происходит от вращения линии OAB вокруг оси x (см. чертеж). Делим дугу линии на элементы AB и через точки деления проводим линии, параллельные оси x. На ординате $QB = y + dy$ отложим отрезок $QC = y$. Тогда $BC = dy$; CD означим δy. Толщина конической оболочки, полученной при вращении полосы между параллельными, проведенными через A и B, будет равна $dy + \delta y$. Величину δy найдем, если (см. примечание 130) воспользуемся уравнением (19) параллельной линии, заменив в нем y через $y - \delta y$, x — через dx:



$$\cos \Gamma(y - \delta y) = e^{-dx} \cos \Gamma(y);$$

отсюда

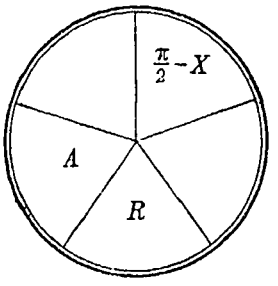
$$\delta y = \frac{\cos \Gamma(y)}{\sin^2 \Gamma(y)}\, dx.$$

[136] Ибо $d \cos X = \sin X\, dx . \sin^2$

[137] На треугольника между x и r имеем (см. диаграмму)

$$\cos X = \cos R \cos A,$$

и формулу для поверхности сферического сегмента (стр. 229)



$$2\pi \frac{\cos R}{\sin^2 R}(\cos R - \cos X)$$

можно написать таким образом:

$$2\pi \frac{\cos^2 R}{\sin^2 R}(1 - \cos A) = 4\pi \operatorname{ctg}^2 R \sin^2 \frac{A}{2}.$$

Поверхность же всей сферы равна $4\pi \operatorname{ctg}^2 R$. Таким образом отношение поверхности сегмента к поверхности шара равняется $\sin^2 \frac{1}{2} A$. Таково же должно быть отношение объема конического вырезка шара к объему всего шара.

[138] То-есть

$$\pi\left(\frac{\cos R}{\sin^2 R} - r\right) - \pi\left(\frac{\cos X}{\sin^2 R} - x\right) = \pi\left[\frac{\cos R - \cos X}{\sin^2 R} - (r - x)\right];$$

замечая, что $\cos X = \cos R \cos A$ (см. предыдущее примечание), получим формулу, данную в тексте.

[139] Объем отрезка шара (сегмента) с высотой x равен разности объема полушара и объема вырезка, определенного по формуле (58), в которой надо x заменить через $r - x$:

$$\pi\left(\frac{\cos R}{\sin^2 R} - r\right) - \pi\left(\frac{\cos \mathrm{F}(r-x)}{\sin^2 R} - (r - x)\right).$$

Но (см. примечание 23)

$$\cos \mathrm{F}(r - x) = \frac{\cos R - \cos X}{1 - \cos R \cos X},$$

следовательно, объем сегмента равняется

$$\frac{\pi}{\sin^2 R}\left[\cos R - \frac{\cos R - \cos X}{1 - \cos R \cos X}\right] - \pi x.$$

Отсюда вытекает формула, данная в тексте.

[140] Для $r = \infty$, $\mathrm{F}(r) = 0$, $\cos R = 1$ и $\frac{\cos X}{1 - \cos X} = \frac{e^x - e^{-x}}{2e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{2}$.

[141] Поверхность $\xi = \text{const}$ представляет собой предельную поверхность. На ней имеет место евклидова геометрия, и потому линии пересечения ее с поверхностями $\eta = \text{const}$ и $\zeta = \text{const}$ образуют на

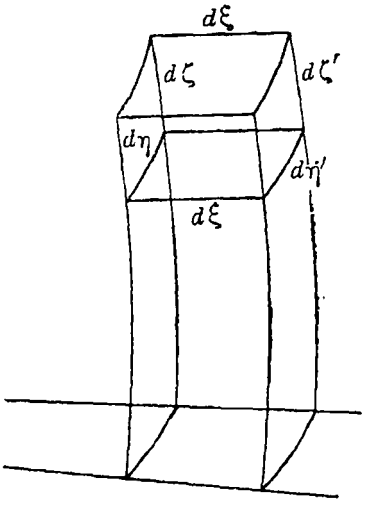
ней ортогональную сеть прямоугольников. Линии же $\eta = \text{const}$, $\zeta = \text{const}$ суть линии, равноотстоящие от оси ξ и лежащие с последней в одной плоскости. Эти линии пересекают поверхность $\xi = \text{const}$ не под прямым углом, и потому система координат ξ, η, ζ, которую вводит здесь Лобачевский, не ортогональна.

Построим элемент объема в этой системе. Одной гранью этого элемента будет прямоугольник со сторонами $d\eta$, $d\zeta$ и вершиной в точке (ξ, η, ζ), лежащей на предельной поверхности $\xi = \text{const}$; противоположной гранью будет такой же точно прямоугольник на поверхности $\xi + d\xi$ с вершиной в точке $(\xi + d\xi, \eta, \zeta)$ и со сторонами $d\eta$ и $d\zeta$. Остальные четыре грани получаем, соединив соответствующие вершины этих прямоугольников линиями, равноотстоящими от оси x. Полученный таким образом элемент будет представлять собой бесконечно малый параллелепипед с прямоугольным основанием и наклонными к основанию ребрами. Площадь основания равна $d\eta\, d\zeta$, высота же равна $d\xi$ — расстоянию между предельными поверхностями ξ и $\xi + d\xi$, и потому объем его будет

$$d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Ссылаясь на формулу (50), Лобачевский, повидимому, иначе вычисляет элемент объема.

Проведем через вершины прямоугольника $d\eta\, d\zeta$ (см. чертеж) оси поверхности ξ; они, пересекаясь с поверхностью $\xi + d\xi$, определят на ней прямоугольник со сторонами $d\eta'$ и $d\zeta'$. Эти два прямоугольника вместе с плоскостями, в которых лежат проведенные через вершины оси, образуют элемент объема, равновеликий элементу, рассмотренному выше: оба элемента имеют общее основание и одинаковую высоту, ибо противоположные основанию грани обоих элементов лежат на одной и той же поверхности $\xi + d\xi$. Для вычисления объема вновь построенного элемента мы можем применить формулу (49); в ней надо положить $S = d\eta'\, d\zeta'$, $c = d\xi$; но по формуле (36)



$$d\eta' = e^{d\xi}\, d\eta, \qquad d\zeta' = e^{d\xi}\, d\zeta,$$

и таким образом объем элемента будет

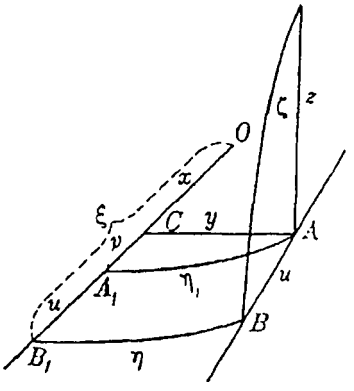
$$\frac{1}{2}\, d\eta\, d\zeta\, e^{2d\xi}(1 - e^{-2d\xi}) = \frac{1}{2}\, d\eta\, d\zeta\, (e^{2d\xi} - 1) = d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

[142] По формуле (29)

$$\zeta = \operatorname{ctg} Z, \qquad \eta_1 = \operatorname{ctg} Y, \tag{I}$$

где η_1 означает дугу AA_1 предельной линии с осью x, проведенной через точку A. По формуле (36)

$$\eta_1 = \eta e^{-u}, \tag{II}$$



где через u обозначен отрезок $AB = A_1B_1$, и, наконец, по формуле (27)

$$\sin Z = e^{-u}, \quad \sin Y = e^{-v}, \tag{III}$$

где $v = CA_1$. Кроме того, из чертежа видим, что

$$\xi = x + u + v.$$

Исключая из (I), (II) и (III) η_1 и u, получим

$$\eta = \frac{\operatorname{ctg} Y}{\sin Z}. \tag{IV}$$

Подставляя u и v в ξ, будем иметь

$$\xi = x - \ln \sin Y - \ln \sin Z. \tag{V}$$

[143] Формулы (I), (IV), (V) предыдущего примечания представляют собой формулы преобразования системы координат x, y, z в систему ξ, η, ζ. Когда при вычислении тройного интеграла, выражающего объем, приходится от одной системы координат переходить к другой, то, как известно, надо произведение $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ заменить таким образом:

$$d\xi\, d\eta\, d\zeta = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)}\, dx\, dy\, dz.$$

Но ζ зависит только от z, η не зависит от x, и функциональный определитель принимает вид

$$\frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} & \frac{\partial\xi}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial\eta}{\partial y} & \frac{\partial\eta}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial\zeta}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\ \frac{\partial\eta}{\partial y}\ \frac{\partial\zeta}{\partial z}.$$

Из уравнений (I), (IV), (V) (предыдущего примечания) имеем

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z} = \frac{1}{\sin Z}, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{1}{\sin Y \sin Z}, \qquad \frac{\partial\xi}{\partial x} = 1,$$

и элемент объема в координатах x, y, z принимает вид

$$d\xi\, d\eta\, d\zeta = \frac{dx\, dy\, dz}{\sin Y \sin^2 Z}.$$

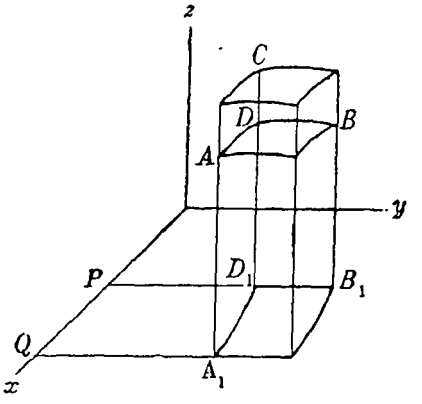
[144] В координатной системе x, y, z поверхность $x = \text{const}$ есть плоскость, перпендикулярная к оси x. Поверхность $y = \text{const}$ есть цилиндр, построенный на линии, лежащей в плоскости xOy, равноотстоящей от оси x, с образующими, перпендикулярными плоскости xOy. Поверхность $z = \text{const}$ есть поверхность, равноотстоящая от плоскости xOy. Эта координатная система ортогональна, и бесконечно малый элемент объема можно рассматривать как прямоугольный параллелепипед. Ребра его по формулам (34) будут

$$PQ = dx, \quad D_1A_1 = \frac{dx}{\sin Y},$$

$$DA = \frac{dx}{\sin Y \sin Z},$$

$$D_1B_1 = dy, \quad DB = \frac{dy}{\sin Z},$$

$$DC = dz.$$



Перемножая ребра DA, DB и DC, получим прежнюю формулу для элемента объема.

[145] Эти формулы мы получаем, если (59) будем интегрировать один раз по x, другой раз по y и третий раз по z, в чем нетрудно убедиться их дифференцированием.

[146] Для сферы

$$\sin X \sin Y \sin Z = \sin R,$$

$$\operatorname{ctg} Y = \sqrt{\frac{\sin^2 X \sin^2 Z}{\sin^2 R} - 1},$$

и заменяя переменные x, y через X, Y, имеем

$$dX = -\sin X\, dx, \quad dZ = -\sin Z\, dz,$$

$$\frac{d^2P}{dX\, dZ} = \frac{\operatorname{ctg} Y}{\sin^3 Z \sin X} = \frac{1}{\sin^2 Z}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 R} - \frac{1}{\sin^2 X \sin^2 Z}}.$$

При интегрировании по Z положим

$$\frac{\operatorname{ctg} Z}{\sin X} = u, \quad \frac{1}{\sin^2 R} - \frac{1}{\sin^2 X} = a^2.$$

Так как интегрирование по Z совершается в пределах от $\frac{\pi}{2}$ до

$$\sin Z = \frac{\sin R}{\sin X},$$

то пределами для u будут 0 и

$$\frac{1}{\sin X}\sqrt{\frac{\sin^2 X}{\sin^2 R} - 1} = a.$$

Сделав эту подстановку, будем иметь

$$\frac{dP}{dX} = -\sin X \int_0^a \sqrt{a^2 - u^2}\, du = -\frac{\sin X}{2}\left[u\sqrt{a^2 - u^2} - a^2 \arcsin\frac{u}{a}\right]_0^a =$$

$$= -\frac{\pi}{4} a^2 \sin X = -\frac{\pi}{4}\sin X\left(\frac{1}{\sin^2 R} - \frac{1}{\sin^2 X}\right).$$

При втором интегрировании по X в пределах $\frac{\pi}{2}$ и R, получим

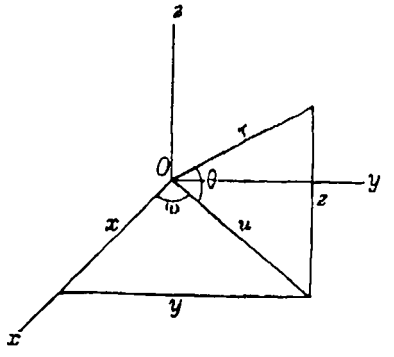
$$P = \frac{\pi}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{R}\left(\frac{1}{\sin X} - \frac{\sin X}{\sin^2 R}\right) dX = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\cos R}{\sin^2 R} + \ln \operatorname{tg}\frac{1}{2}R\right) =$$

$$= \frac{\pi}{16}(e^{2r} - e^{-2r} - 4r).$$

Это — объем одного октанта.

[147] Выражение для элемента объема в полярных координатах можно вывести или аналитическим преобразованием тройного интеграла к новым переменным или геометрически.

Обозначим через u проекцию r на плоскость xOy и с помощью диаграмм a и $б$ напишем



$$\cos X = \cos \mathrm{F}(u)\cos\omega, \qquad \text{(I)}$$

$$\cos \mathrm{F}(u) = \cos R\cos\theta, \qquad \text{(II)}$$

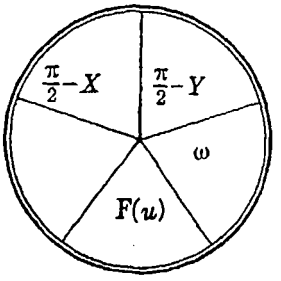
$$\operatorname{ctg} Y = \operatorname{ctg} \mathrm{F}(u)\sin\omega, \qquad \text{(III)}$$

$$\operatorname{ctg} Z = \operatorname{ctg} R\sin\theta, \qquad \text{(IV)}$$

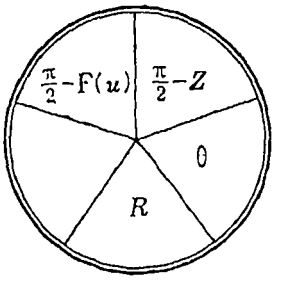
$$\sin R = \sin \mathrm{F}(u)\sin Z. \qquad \text{(V)}$$

Исключим из (I) и (III) $\cos F(u)$, получим

$$\cos X = \cos R \cos\theta \cos\omega. \qquad \text{(VI)}$$



а



б

Дифференцируем (VI), (III), (IV):

$$\sin^2 X\,dx = \sin^2 R\cos\theta\cos\omega\,dr - \cos R\sin\theta\cos\omega\,d\theta - \cos R\cos\theta\sin\omega\,d\omega,$$

$$\frac{dy}{\sin Y} = \frac{\sin\omega}{\sin F(u)}\frac{\partial u}{\partial r}dr + \frac{\sin\omega}{\sin F(u)}\frac{\partial u}{\partial\theta}d\theta + \operatorname{ctg} F(u)\cos\omega\,d\omega,$$

$$\frac{dz}{\sin Z} = \frac{\sin\theta}{\sin R}dr + \operatorname{ctg} R\cos\theta\,d\theta,$$

или, воспользовавшись (I), (II), (III) и (IV):

$$\sin^2 X\,dx = \cos X\left(\frac{\sin^2 R}{\cos R}dr - \operatorname{tg}\theta\,d\theta - \operatorname{tg}\omega\,d\omega\right),$$

$$dy = \cos Y\left(\frac{1}{\cos F(u)}\frac{\partial u}{\partial r}dr + \frac{1}{\cos F(u)}\frac{\partial u}{\partial\theta}d\theta + \operatorname{ctg}\omega\,d\omega\right),$$

$$dz = \cos Z\left(\frac{1}{\cos R}dr + \operatorname{ctg}\theta\,d\theta\right).$$

Составим теперь функциональный определитель:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\omega)} = \frac{\cos X\cos Y\cos Z}{\sin^2 X}\begin{vmatrix} \dfrac{\sin^2 R}{\cos R} & -\operatorname{tg}\theta & -\operatorname{tg}\omega \\ \dfrac{1}{\cos F(u)}\dfrac{\partial u}{\partial r} & \dfrac{1}{\cos F(u)}\dfrac{\partial u}{\partial\theta} & \operatorname{ctg}\omega \\ \dfrac{1}{\cos R} & \operatorname{ctg}\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\cos X\cos Y\cos Z}{\sin^2 X}\left[\frac{\operatorname{tg}\theta\operatorname{ctg}\omega}{\cos R} + \frac{\operatorname{ctg}\theta\operatorname{ctg}\omega\sin^2 R}{\cos R} + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{tg}\omega\operatorname{ctg}\theta}{\cos F(u)}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\operatorname{tg}\omega}{\cos F(u)\cos R}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right].$$

Рассмотрим сначала два последних члена в скобках, причем заменим в них $\frac{\partial u}{\partial r}$ и $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ с помощью уравнения, которое получим, дифференцируя уравнение (III):

$$\sin^2 \mathrm{F}(u)\, du = \sin^2 R \cos\theta\, dr - \cos R \sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{\sin^2 R \cos \mathrm{F}(u)}{\cos R} dr - \operatorname{tg}\theta \cos \mathrm{F}(u)\, d\theta.$$

Будем иметь

$$\frac{\operatorname{tg}\omega}{\cos \mathrm{F}(u)} \left[\operatorname{ctg}\theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{\cos R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\omega}{\cos \mathrm{F}(u)} \left[\operatorname{ctg}\theta \frac{\sin^2 R \cos \mathrm{F}(u)}{\cos R \sin^2 \mathrm{F}(u)} + \frac{\cos \mathrm{F}(u) \operatorname{tg}\theta}{\cos R \sin^2 \mathrm{F}(u)} \right] =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\omega}{\cos R \sin^2 \mathrm{F}(u)} [\operatorname{ctg}\theta \sin^2 R + \operatorname{tg}\theta] =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\omega (1 - \cos^2\theta \cos^2 R)}{\cos R \sin^2 \mathrm{F}(u) \sin\theta \cos\theta} = \frac{\operatorname{tg}\omega}{\cos R \sin\theta \cos\theta}.$$

Два других члена определителя:

$$\frac{\operatorname{ctg}\omega}{\cos R} (\operatorname{tg}\theta + \operatorname{ctg}\theta \sin^2 R) = \frac{\operatorname{ctg}\omega \sin^2 \mathrm{F}(u)}{\cos R \sin\theta \cos\theta},$$

и выражение в скобках будет

$$\frac{\operatorname{tg}\omega + \sin^2 \mathrm{F}(u) \operatorname{ctg}\omega}{\cos R \sin\theta \cos\theta} = \frac{1 - \cos^2 \mathrm{F}(u) \cos^2\omega}{\cos R \cos\theta \sin\theta \cos\omega \sin\omega} = \frac{\sin^2 X}{\cos X \sin\omega \sin\theta},$$

таким образом

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \omega)} = -\frac{\cos X \cos Y \cos Z}{\sin^2 X} \cdot \frac{\sin^2 X}{\cos X \sin\omega \sin\theta} = \frac{\cos Y \cos Z}{\sin\omega \sin\theta},$$

$$dx\, dy\, dz = \frac{\cos Y \cos Z}{\sin\omega \sin\theta} dr\, d\theta\, d\omega.$$

Элемент объема в полярных координатах (59) получается так:

$$\frac{dx\, dy\, dz}{\sin Y \sin^2 Z} = \frac{\cos Y \cos Z}{\sin\omega \sin\theta} \cdot \frac{dr\, d\theta\, d\omega}{\sin Y \sin^2 Z} = \frac{\operatorname{ctg} Y \operatorname{ctg} Z}{\sin\omega \sin\theta \sin Z} dr\, d\theta\, d\omega =$$

$$= \frac{\operatorname{ctg} F(u) \sin\omega \operatorname{ctg} R \sin\theta}{\sin Z \sin\omega \sin\theta}\, dr\, d\theta\, d\omega = \frac{\cos R \cos\theta \operatorname{ctg} R}{\sin R}\, dr\, d\theta\, d\omega =$$

$$= \operatorname{ctg}^2 R \cos\theta\, dr\, d\theta\, d\omega,$$

что совпадает с формулой (61).

Объем элемента в полярных координатах, однако, проще определить геометрически.

Координаты ω, θ, r ортогональны, и элемент объема в полярных координатах представляет собой бесконечно малый прямоугольный параллелепипед. Ребрами его служат: дуга меридиана сферы радиуса r, соответствующая центральному углу $d\theta$:

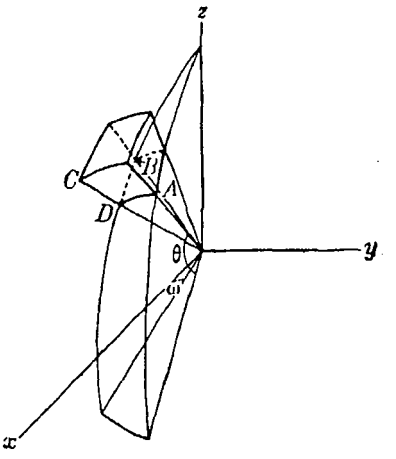
$$DB = \operatorname{ctg} R\, d\theta;$$

дуга параллельного круга, радиус которого u равен перпендикуляру, опущенному из D на ось z, соответствующая центральному углу $d\omega$:

$$DA = \operatorname{ctg} F(u)\, d\omega,$$

и, наконец,

$$DC = dr.$$



Принимая во внимание формулу для треугольника между r и u:

$$\operatorname{ctg} F(u) = \operatorname{ctg} R \cos\theta,$$

получим элемент объема:

$$DA \cdot DB \cdot DC = \operatorname{ctg} F(u) \operatorname{ctg} R\, dr\, d\theta\, d\omega =$$

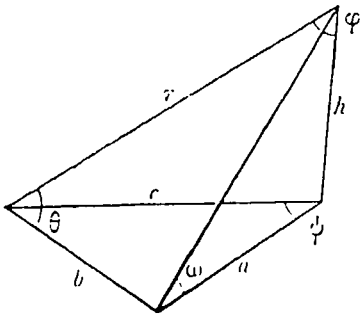
$$= \operatorname{ctg}^2 R \cos\theta\, dr\, d\theta\, d\omega.$$

[148] Если в конусе мы сделаем вырезок двумя плоскостями, проведенными через высоту конуса, то объем этого вырезка будет пропорционален углу между плоскостями. Поэтому объем вырезка между плоскостями, наклоненными под углом $d\psi$ в конусе с высотой h и образующей r, наклоненной под углом φ к высоте по формуле (55), будет

$$\frac{1}{2}\, d\psi\, (r\cos\varphi - h).$$

Каждый из элементов, на которые делится пирамида плоскостями, проведенными через высоту h, можно принять за вырезок конуса, и мы имеем формулу (63).

[149] В той же пирамиде мы можем прямоугольный треугольник между a и h принять за основание, а b за высоту, и, следовательно, в предыдущих формулах заменить



$$a,\ r,\ b,\ h,\ \vartheta,\ \varphi,\ \omega$$

через

$$a,\ r,\ h,\ b,\ \omega,\ \vartheta,\ \psi.$$

[150] Из треугольника между a и h имеем, по диаграмме a:

$$\operatorname{tg}\omega = \cos H \operatorname{tg} A. \qquad (\text{I})$$

Из треугольника между c и h, по диаграмме $б$:

$$\cos H = \cos\varphi \cos R, \qquad (\text{II})$$

$$\cos C = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{ctg} H, \qquad (\text{III})$$

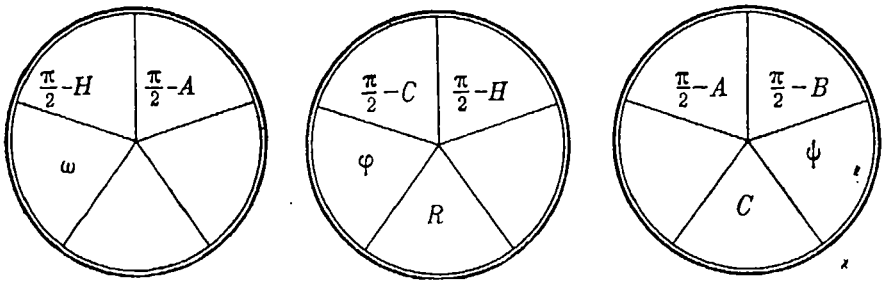
где $C = \Gamma(c)$, и из треугольника между a и b, по диаграмме $в$:

$$\cos A = \cos\psi \cos C. \qquad (\text{IV})$$

Формулы (III) и (IV) дают

$$\operatorname{tg}\varphi \cos\psi = \cos A \operatorname{tg} H. \qquad (\text{V})$$

На основании сказанного в предыдущем примечании мы можем в этих



а *б* *в*

формулах сделать указанную в том примечании замену и получить формулы (65).

[151] Из (64_1) и (64_3) имеем

$$\cos\psi = \frac{\cos A \sin H}{\sqrt{\cos^2 R - \cos^2 H}},$$

из (64_1), (64_2) и тождества $\dfrac{1}{\cos^2 H} = 1 + \operatorname{tg}^2 H$ имеем

$$\operatorname{ctg}^2\omega \sin^2 A = \cos^2 A + \operatorname{tg}^2\varphi \cos^2\psi,$$

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{\operatorname{ctg}^2\omega\sin^2 A - \cos^2 A}{\cos^2\psi},$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{\sin^2 A - \sin^2\omega\sin^2\psi}{\cos^2\psi\sin^2\omega},$$

и, наконец,

$$\cos^2\varphi = \frac{\cos^2\psi\sin^2\omega}{\sin^2 A - \sin^2\omega\sin^2\psi}.$$

Из (64_2), (64_3) и предыдущего выражения $\cos\varphi$ получаем $\cos R$ (66_3).

[152] Вместо переменной интегрирования ψ вводится переменная R, причем a, h остаются постоянными. Дифференцируем уравнение (66_1):

$$\sin\psi\, d\psi = \frac{\cos A\sin H\cos R\sin R\, dR}{(\sin^2 H - \sin^2 R)^{\frac{3}{2}}},$$

и, заменяя

$$\sin\psi = \frac{\sqrt{\sin^2 A\sin^2 H - \sin^2 R}}{\sqrt{\sin^2 H - \sin^2 R}}; \quad \cos\varphi = \frac{\cos H}{\cos R},$$

имеем

$$\cos\varphi\, d\psi = -\frac{1}{2}\,\frac{\sin 2H\cos A\sin R\, dR}{(\sin^2 H - \sin^2 R)\sqrt{\sin^2 A\sin^2 H - \sin^2 R}}.$$

Подставляя это выражение и

$$r = \ln\operatorname{ctg}\frac{1}{2}R, \quad h = \ln\operatorname{ctg}\frac{1}{2}H$$

в формулу (63), изменяя знак интеграла и порядок пределов, получаем формулу (67).

[153] Интегрирование в формуле (67) оканчивается значением $R = \mathrm{F}(r)$, где r равно гипотенузе в треугольнике между a и h, для которого мы имеем формулу:

$$\sin\mathrm{F}(r) = \sin A\sin H,$$

и начинается значением r, равным гипотенузе в треугольнике между c и h, для которого $\sin R = \sin C\sin H$ или, так как из треугольника между a и b (см. диаграммы $б$ и $в$, приведенные в примечании 150):

$$\sin C = \sin A\sin B,$$

$$\sin R = \sin A\sin B\sin H.$$

Подставляя в последний член формулы (67) пределы, мы получаем

$$-\arccos\frac{\cos A}{\sqrt{1-\sin^2 A\sin^2 B}} + \arccos\frac{\cos A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}.$$

Второе слагаемое обращается в нуль, а первое равно

$$-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\sin^2 A\sin^2 B-\cos^2 A}}{\cos A}=-\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} A\cos B).$$

Проще выражение для

$$\psi=\arccos\frac{\cos A\sin H}{\sqrt{\sin^2 H-\sin^2 R}}=\operatorname{arctg}(\cos B\operatorname{tg} A)$$

получить из (65_2).

Объем той же пирамиды, как было упомянуто выше (см. примечание 149), мы получим, если обменяем буквы b и h.

[154] Определить угол α по уравнению (68) возможно, ибо оба угла ω и ψ меньше $\Pi(a)=A$. Геометрическое значение α будет выяснено ниже (см. примечание 174). Вводя в (63) вместо переменной интегрирования ψ переменную α, мы имеем:

$$\sin A\sin\alpha=\sin\omega\sin\psi, \tag{I}$$

$$\sin A\cos\alpha\,d\alpha=\sin\omega\cos\psi\,d\psi, \tag{II}$$

$$\sin A\cos\alpha=\sqrt{\sin^2 A-\sin^2\omega\sin^2\psi}, \tag{III}$$

$$\sin\omega\cos\psi=\sqrt{\sin^2\omega-\sin^2 A\sin^2\alpha}, \tag{IV}$$

и пользуясь формулой (66_2):

$$\sin A\cos\alpha\cos\varphi=\sin\omega\cos\psi,$$

а из (II):

$$\cos\varphi\,d\psi=d\alpha. \tag{V}$$

Формула (63) может быть теперь переписана таким образом:

$$2P=\int r\,d\alpha-\psi h,$$

или, если возьмем интеграл по частям:

$$2P=r\alpha-\psi h-\int\alpha\,dr. \tag{VI}$$

[155] Это выражение r через α мы получаем решением уравнения (66_3), предварительно заменив в нем радикал при помощи формулы (III) предыдущего примечания через $\sin A\cos\alpha$ и представив это уравнение в виде

$$\cos R=\frac{e^r-e^{-r}}{e^r+e^{-r}}=\frac{\cos A\cos\alpha}{\cos\omega\cos\psi}.$$

[156] Дифференцируя уравнение (69) и принимая во внимание, что A и ω остаются постоянными, а ψ есть функция α, определяемая уравнением (68), получаем

$$\frac{dr}{d\alpha}=\frac{\cos A\cos\omega\,[\cos\alpha\sin\psi\cdot\psi'-\sin\alpha\cos\psi]}{\cos^2\omega\cos^2\psi-\cos^2 A\cos^2\alpha}.$$

Умножим числителя и знаменателя на $\sin^2\omega\cos\psi$ и заменим $\sin^2\omega\cos^2\psi$ по формуле (IV), $\sin\omega\cos\psi\cdot\psi'$ по формуле (II) и $\sin\omega\sin\psi$ по формуле (I) примечания 154.

Для числителя получим

$$\cos A\cos\omega\,[\cos^2\alpha\sin^2 A\sin\alpha - \sin\alpha\,(\sin^2\omega - \sin^2 A\sin^2\alpha)] =$$
$$= \cos A\cos\omega\sin\alpha\,(\sin^2 A - \sin^2\omega),$$

а для знаменателя:

$$\cos\psi\,[\cos^2\omega\,(\sin^2\omega - \sin^2 A\sin^2\alpha) - \cos^2 A\cos^2\alpha\sin^2\omega] =$$
$$= \cos\psi\,(\sin^2 A - \sin^2\omega)\,(\sin^2\omega - \sin^2\alpha).$$

Таким образом

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{\cos A\cos\omega\sin\alpha}{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)\cos\psi}.$$

Подставив сюда вместо $\cos\psi$ его значение из (IV) примечания 154 и внося $\frac{dr}{d\alpha}$ в формулу (VI), получим интеграл (70).

[157] В формуле (70) мы должны заменить h его выражением через ω и A. По формуле (64_2) имеем

$$\cos H = \frac{e^h - e^{-h}}{e^h + e^{-h}} = \operatorname{tg}\omega\operatorname{ctg} A,$$

$$e^{2h} = \frac{1 + \operatorname{tg}\omega\operatorname{ctg} A}{1 - \operatorname{tg}\omega\operatorname{ctg} A} = \frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)}.$$

Если в формуле (70) мы сделаем указанную в примечании 149 замену букв ψ, ω, b, h через ω, ψ, h, b, то, как это видно из формул (68) и (69), r и α не изменятся, и, сравнивая два значения $4P$, мы получаем уравнение, данное в тексте.

[158] Из уравнения (69) мы видим, что при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $r = 0$. С другой стороны, в примечании 156 мы имели

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{\cos A\cos\omega\sin\alpha}{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)\cos\psi},$$

и, следовательно,

$$r = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos A\cos\omega\sin\alpha\,d\alpha}{(\sin^2\alpha - \sin^2\omega)\cos\psi}.$$

Если в этой формуле обменяем местами буквы A и α, то $\cos\psi$ и r не изменятся, как видно из формул (69) и (68), а потому

$$r = \int_{A}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\alpha\cos\omega\sin A\,dA}{(\sin^2 A - \sin^2\omega)\cos\psi},$$

причем здесь мы должны считать α и ω постоянными, а ψ функцией от A, определяемой уравнением (68). При замене r полученным для него выражением, $\int r\,d\alpha$ обращается в двойной интеграл, приводимый в тексте, причем r рассматривается как функция двух переменных A и α.

[169] Обозначим через

$$f(A)=\int_A^{\frac{\pi}{2}}\frac{dA}{\sin^2 A-\sin^2\omega}=\frac{1}{\sin 2\omega}\ln\frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)}$$

и берем интеграл по переменному A по частям:

$$\int_A^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin A\,dA}{(\sin^2 A-\sin^2\omega)\cos\psi}=-\int_A^{\frac{\pi}{2}}f'(A)\frac{\sin A}{\cos\psi}dA=\frac{\sin A}{\cos\psi}f(A)+\int_A^{\frac{\pi}{2}}f(A)\,d\frac{\sin A}{\cos\psi}.$$

Так как ψ зависит от A, то

$$d\frac{\sin A}{\cos\psi}=\left(\frac{\cos A}{\cos\psi}+\frac{\sin A\sin\psi}{\cos^2\psi}\frac{d\psi}{dA}\right)dA, \qquad (I)$$

причем из (68) следует

$$\frac{d\psi}{dA}=\frac{\sin\alpha\cos A}{\sin\omega\cos\psi}=\operatorname{tg}\psi\operatorname{ctg}A,$$

и, следовательно,

$$d\frac{\sin A}{\cos\psi}=\frac{\cos A}{\cos^3\psi}dA. \qquad (II)$$

Таким образом

$$\int_A^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin A\,dA}{(\sin^2 A-\sin^2\omega)\cos\psi}=\frac{\sin A}{\cos\psi}f(A)+\int_A^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos A}{\cos^3\psi}f(A)\,dA$$

и

$$2\int r\,d\alpha=2\cos\omega\int_0 d\alpha\cos\alpha\int_A^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin A\,dA}{(\sin^2 A-\sin^2\omega)\cos\psi}=$$

$$=2\cos\omega\int_0\frac{\sin A}{\cos\psi}\cos\alpha f(A)\,d\alpha+2\cos\omega\int_0\cos\alpha\,d\alpha\int_A^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos A}{\cos^3\psi}f(A)\,dA,$$

что совпадает с формулой, приводимой в тексте.

[160]. Сохраняем обозначение $f(A)$, введенное в предыдущем примечании. Первый двойной интеграл

$$\int_0 \frac{\sin A}{\cos\psi} \cos\alpha f(A)\, d\alpha = \sin A f(A) \int_0 \frac{\cos\alpha}{\cos\psi}\, d\alpha$$

по формуле (II) примечания 154 преобразуется в

$$\sin A f(A) \int \frac{\sin\omega}{\sin A}\, d\psi = \sin\omega\ \psi\ f(A).$$

Изменяя во втором порядок интегрирования и принимая во внимание, что аналогично формуле (II) предыдущего примечания мы имеем

$$d\frac{\sin\alpha}{\cos\psi} = \frac{\cos\alpha}{\cos^3\psi}\, d\alpha,$$

получаем

$$\int_A^{\frac{\pi}{2}} \cos A f(A)\, dA \int_0 \frac{\cos\alpha}{\cos^3\psi}\, d\alpha = \int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\alpha\cos A}{\cos\psi} f(A)\, dA.$$

[161] По формуле (I) примечания 159 мы имеем

$$d\psi = \frac{\sin\alpha\cos A}{\sin\omega\cos}\, dA,$$

и, следовательно, интегрируя по частям, получаем

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\omega}\int \frac{\cos A}{\cos\psi} \ln\frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)}\, dA = \psi \ln\frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)} +$$

$$+\sin 2\omega \int \frac{\psi\, dA}{\sin(A+\omega)\sin(A-\omega)}.$$

Подставляя сюда пределы A и $\frac{\pi}{2}$ и замечая, что ln при $A=\frac{\pi}{2}$ обращается в нуль, получим формулу, данную в тексте.

[162] Надо заметить, что преобразование формулы (63) в (71) может быть выполнено проще, если мы при вычислении двойного интеграла

$$2\int r\, d\alpha = 2\cos\omega \int_0 \cos\alpha\, d\alpha \int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin A\, dA}{(\sin^2 A - \sin^2\omega)\cos\psi}$$

изменим порядок интегрирования, т. е. напишем его таким образом.

$$2\int r\, d\alpha = \sin 2\omega \int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{dA}{\sin^2 A - \sin^2\omega} \int_0 \frac{\sin A\cos\alpha}{\sin\omega\cos\psi}\, d\alpha,$$

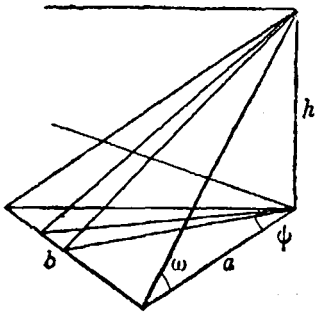
и затем при первом интегрировании по α введем переменную ψ по уравнению (68) и заменим, по формуле (II) примечания 154, $\frac{\sin A \cos\alpha}{\sin\omega\cos\psi}\,d\alpha$ через $d\psi$. Мы сразу получаем

$$2\int r\,d\alpha = \sin 2\omega \int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi\,dA}{\sin(A+\omega)\sin(A-\omega)}.$$

[163] По уравнению (68) имеем

$$\sin(A+\omega)\sin(A-\omega) = \sin^2 A - \sin^2\omega = \frac{\sin^2\omega}{\sin^2\alpha}(\sin^2\psi - \sin^2\alpha),$$

$$dA = \frac{\cos\psi\sin\omega}{\cos A\sin\alpha}\,d\psi = \frac{\cos\psi\sin\omega\,d\psi}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\omega\sin^2\psi}}.$$



При $A = \frac{\pi}{2}$, по формуле (68),

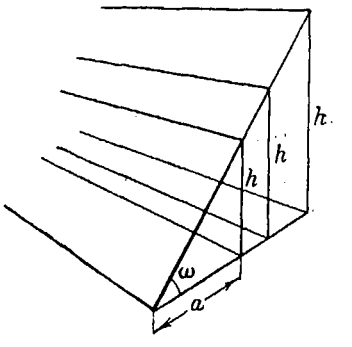
$$\sin\psi = \frac{\sin\alpha}{\sin\omega}.$$

[164] При вычислении объема пирамиды, простирающейся бесконечно, по формуле (72), пирамида разрезается на элементы плоскостями, проходящими через катет h прямоугольного треугольника, который служит основанием пирамиды, причем угол ψ меняется от нуля до $A = \mathrm{F}(a)$.

[165] При вычислении объема пирамиды, простирающейся бесконечно, по формуле

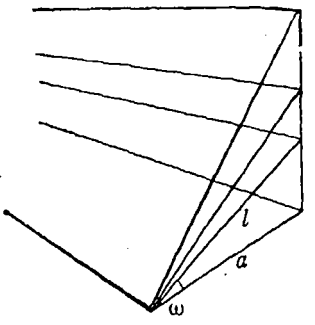
$$2P = \int_A^{\frac{\pi}{2}} h\,dA,$$

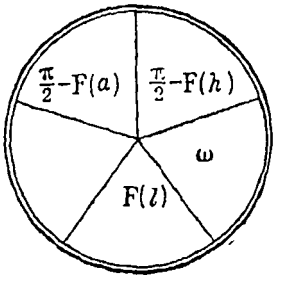
где $A = \mathrm{F}(a)$, пирамида разрезается на элементы плоскостями, которые перпендикулярны к основанию пирамиды. В этой формуле мы должны h заменить его выражением через переменную интегрирования $A = \mathrm{F}(a)$ (см. примечание 157). Катет a меняется при этом от нуля, A — от $\frac{\pi}{2}$.



[166] При вычислении объема пирамиды, простирающейся бесконечно, по формуле (53), пирамида разрезается на элементы плоскостями, проходящими через ребро, проведенное через вершину острого угла при катете a, и перпендикулярными к плоскости прямоугольного

треугольника, который служит основанием пирамиды. Каждый такой элемент мы можем рассматривать, как вырезок бесконечно простирающе-





гося конуса, и по формуле (53) имеем для его объема выражение

$$dP = -\frac{1}{2}\, d\omega \ln \sin \mathrm{F}(l),$$

где l обозначает радиус основания конуса, т. е. отрезок, указанный на чертеже. Из треугольника между l и a имеем (см. диаграмму)

$$\sin \mathrm{F}(l) = \sin A \sin H,$$

причем H будет функцией угла ω, и по уравнению (64_2):

$$\sin^2 A \sin^2 H = 1 - \frac{\cos^2 A}{\cos^2 \omega}.$$

[167] В том, что (73) одинаково с (74), мы убеждаемся, рассматривая $4P$ как функцию двух переменных ω и $A = \mathrm{F}(a)$. Из (73) мы получаем

$$4\frac{\partial P}{\partial A} = -\ln \frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)},$$

и затем

$$4\frac{\partial^2 P}{\partial A\, \partial \omega} = -\frac{\sin 2A}{\sin(A+\omega)\sin(A-\omega)}.$$

Из (74) имеем

$$4\frac{\partial P}{\partial \omega} = -\ln\left(1 - \frac{\cos^2 A}{\cos^2 \omega}\right),$$

$$4\frac{\partial^2 P}{\partial \omega\, \partial A} = -\frac{\sin 2A}{\cos^2 \omega - \cos^2 A},$$

выражение, тождественное с предыдущим.

[168] В том, что и это выражение тождественно с (73), также можно убедиться дифференцированием.

[169] Иначе говоря, если мы вместо переменной A введем переменную h при помощи уравнения (64_2), считая ω постоянной, то

$$\frac{dA}{\cos^2 A} = -\operatorname{tg}\omega \operatorname{tg}^2 H\, dh,$$

$$dA(\cos^2 H \cos^2\omega + \sin^2\omega) = -\sin\omega\cos\omega\sin^2 H\, dh,$$

$$dA = -\frac{\sin 2\omega}{2\left(\frac{1}{\sin^2 H} - \cos^2\omega\right)}\, dh = -\frac{\sin 2\omega}{2\operatorname{ch}^2 h - 2\cos^2\omega},$$

$$dA = -\frac{2\sin 2\omega}{e^{2h} + e^{-2h} - 2\cos 2\omega}\, dh.$$

Чтобы получить выражение логарифма через h, удобно воспользоваться примечанием 157.

[170] Пирамиды, о которых говорит Лобачевский, представлены на чертеже, приведенном на следующей странице. Чтобы написать относящиеся к этому чертежу формулы, на той же странице приведены соответствующие диаграммы.

[171] Написав $D = \Pi[(c+d) - c]$, получаем $\sin D$ и $\cos D$ по формулам примечания 23 и формуле (77) текста.

[172] Мы имеем

$$\cos(A-\psi) - \cos C = \frac{1}{\cos\psi}(\cos A\cos^2\psi + \sin A\sin\psi\cos\psi - \cos C\cos\psi) =$$

$$= \frac{\sin\psi}{\cos\psi}\sin(A-\psi),$$

$$1 - \cos(A-\psi)\cos C = \frac{1}{\cos\psi}(\cos\psi - \cos^2 A\cos\psi - \sin A\cos A\sin\psi) =$$

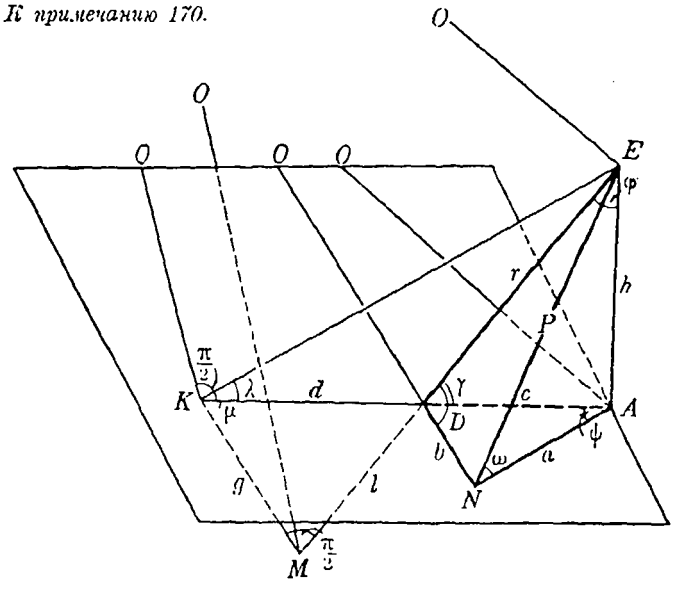
$$= \frac{\sin A}{\cos\psi}\sin(A-\psi).$$

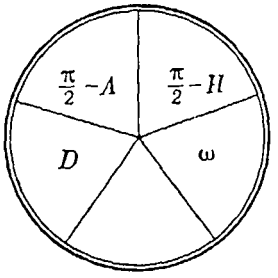
Эти формулы можно получить иначе, замечая, что вследствие параллельности прямых NO и KO (см. чертеж примечания 170) угол между d и прямой NO равняется $\Pi(d) = D$. Угол между b и c будет также равен D, и из диаграммы для треугольника между a и b непосредственно получим (см. примечание 20):

$$\sin\psi = \cos D\sin A,$$

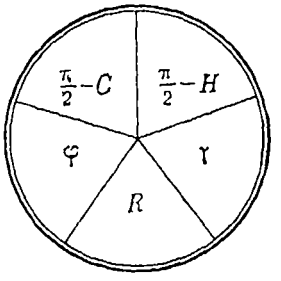
$$\cos\psi\sin C = \sin D\sin A.$$

К примечанию 170.

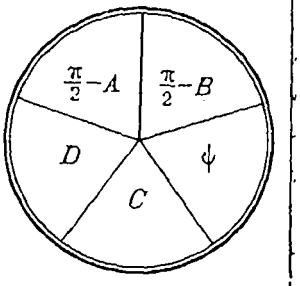




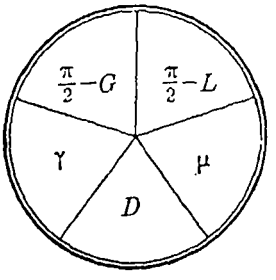
а



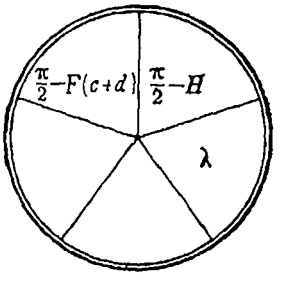
б



в



г



д

Для треугольника между a и h — диаграмма *а*,
» » » c » h — » *б*,
» » » a » b — » *в*,
» » » g » l — » *г*,
» » » h » $d+c$ » *д*.

[173] Из формул (78_8), (78_7), (78_1) и формул для $\sin D$ и $\cos D$ имеем

$$\operatorname{tg}\mu = \sin D \operatorname{ctg}\gamma = \frac{\sin C\cos\psi}{\sin A}\cdot\frac{\operatorname{ctg} C}{\cos H} = \frac{\cos C\cos\psi}{\sin A - \cos H} = \frac{\operatorname{ctg} A}{\cos H}.$$

В справедливости равенства

$$\mu = \frac{\pi}{2} - \omega$$

можно убедиться из чертежа к примечанию 170. Так как линии KO, MO и NO параллельны и угол между плоскостями OMK и OME равен $\frac{\pi}{2}$, угол между плоскостями ONK и ONM равен ω, то угол между плоскостями OKM и OKN, т. е. $\mu = \frac{\pi}{2} - \omega$.

[174] Это и есть геометрическое значение угла α, введенного в формуле (68).

[175] В формуле (75) ребро бесконечной пирамиды, перпендикулярное к основанию, проходит через вершину угла ω, h обозначает катет, противолежащий углу ω. Поэтому для пирамиды P'', основанием которой служит треугольник между $c+d$ и h, надо вместо ω поставить λ и h оставить без изменения; для пирамиды P_1, основанием которой служит треугольник между g и $r+l$, надо вместо ω и h подставить $\lambda+\mu = \lambda + \frac{\pi}{2} - \omega$ и $l+r=h'$ и, наконец, для пирамиды P_2, основанием которой служит треугольник между g и l, вместо ω и h надо поставить $\mu = \frac{\pi}{2} - \omega$ и l.

[176] По формуле (73) ребро бесконечной пирамиды, перпендикулярное к основанию, проходит через вершину угла ω, и пределом интеграла служит $A = \mathrm{F}(a)$, где a означает катет, прилежащий к углу ω. Поэтому для пирамиды P'', основанием которой служит треугольник между $c+d$ и h, надо ω заменить через λ и предел A — через $\mathrm{F}(c+d) = A - \psi$. Для пирамиды P_1, основанием которой служит треугольник между g и $r+l$, надо ω заменить через $\lambda+\mu = \lambda + \frac{\pi}{2} - \omega$, предел A — через $\mathrm{F}(g) = G = \frac{\pi}{2} - \alpha$; мы будем иметь тогда сначала

$$P_1 = \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\sin\left(A + \lambda + \frac{\pi}{2} - \omega\right)}{\sin\left(A - \lambda - \frac{\pi}{2} + \omega\right)}\, dA,$$

а потом, положив $A = \frac{\pi}{2} - \alpha$, получим формулу (81_8).

Для пирамиды P_2, у которой основанием служит треугольник между g и l, угол ω надо заменить через $\mu = \frac{\pi}{2} - \omega$ и нижним пределом взять $G = \Pi(g) = \frac{\pi}{2} - \alpha$; тогда получим

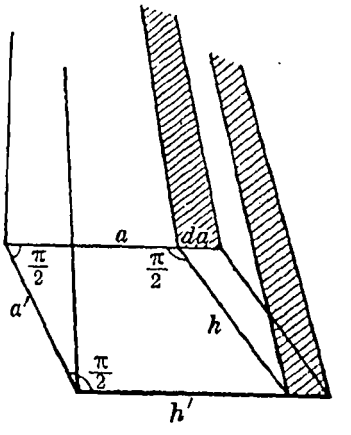
$$P_2 = \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\sin\left(A + \frac{\pi}{2} - \omega\right)}{\sin\left(A - \frac{\pi}{2} + \omega\right)}\, dA,$$

и потом, положив $A = \frac{\pi}{2} - \alpha$, формулу (81_4).

[177] Мы можем в пирамиде, основанием которой служит треугольник между a, b и высотой h, принять за основание треугольник между a и h, а за высоту b, и затем повторить предыдущие построения (см. примечания 149 и 153).

[178] Если мы, не изменяя стороны a', дадим стороне a приращение da и соответствующее приращение стороне h', то пирамида увеличится на элемент, объем которого по формуле (51)

$$dP = -\frac{1}{2} h\, d\,\Pi(a).$$



[179] Из уравнения, связывающего элементы четырехугольника с тремя прямыми углами (см. диаграмму a к примечанию 183)

$$\frac{\cos A'}{\sin A} = \cos H = \frac{e^h - e^{-h}}{e^h + e^{-h}},$$

имеем:

$$h = \frac{1}{2} \ln \frac{\sin A + \cos A'}{\sin A - \cos A'}.$$

[180] Если напишем

$$\ln \frac{\sin A + \cos A'}{\sin A - \cos A'} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A - A'}{2}\right) - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{A + A'}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

разложим интеграл на два, и затем в первом заменим переменную интегрирования A через

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{A - A'}{2},$$

а во втором через

$$y = \frac{A + A'}{2} - \frac{\pi}{4},$$

то и получим формулу, данную в тексте.

[181] Интеграл

$$\int \ln \operatorname{tg} x \, dx$$

в пределах от $\frac{A'}{2}$ до $\frac{\pi}{2} - \frac{A'}{2}$ обращается в нуль, ибо $\ln \operatorname{tg} x$ и $\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ по абсолютной величине равны и по знаку противоположны, и все элементы интеграла попарно сокращаются.

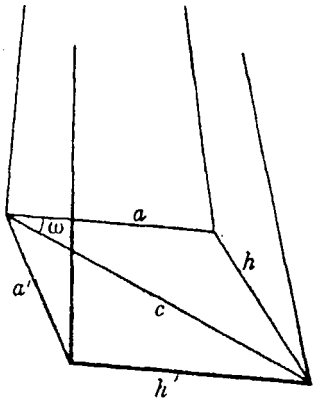
[182] Если положим

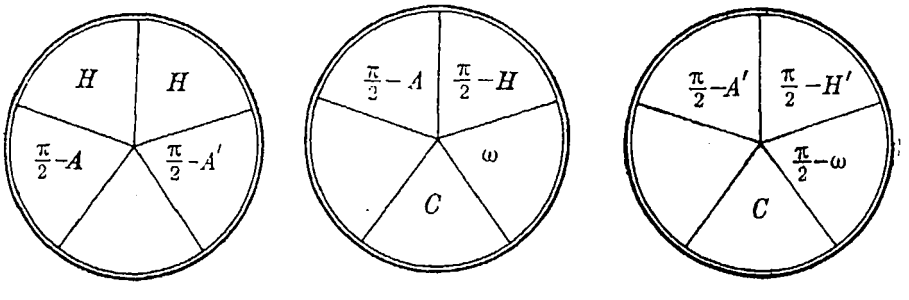
$$z = \ln \operatorname{tg} x,$$

то получим

$$e^z \, dz = -\frac{dx}{\sin^2 x}, \quad dx = -\frac{e^z \, dz}{1 + e^{2z}}.$$

[183] Диаграммы для четырехугольника и двух прямоугольных треугольников, лежащих в основании пирамиды, отмечены буквами a, b, c; через c обозначена диагональ и $C = \mathrm{F}(c)$. По этим диаграммам





a *b* *c*

получаем непосредственно первые три формулы, приведенные в тексте, и кроме того,

$$\sin \omega = \operatorname{tg} C \operatorname{ctg} H, \quad \cos A = \cos \omega \cos C,$$
$$\cos \omega = \operatorname{tg} C \operatorname{ctg} H', \quad \cos A' = \sin \omega \cos C,$$

из которых вытекают формулы в тексте для $\operatorname{tg} H'$ и для $\cos A'$.

[184] Представив уравнение, предшествующее (83), в виде

$$e^{h'} - e^{-h'} = \operatorname{ctg} \omega (e^{h} - e^{-h}),$$

решаем это уравнение относительно $e^{h'}$.

[185] Для четырехугольника по диаграмме a примечания 183 имеем

$$\cos A' = \cos H \sin A,$$

$$\cos A = \cos H' \sin A';$$

исключая из этих уравнений сначала A', потом A, получим

$$\cos^2 H \sin^2 A + \frac{\cos^2 A}{\cos^2 H'} = 1; \quad \cos^2 H' \sin^2 A' + \frac{\cos^2 A'}{\cos^2 H} = 1;$$

отсюда

$$\sin A = \frac{\sin H'}{\sqrt{1 - \cos^2 H \cos^2 H'}}, \quad \sin A' = \frac{\sin H}{\sqrt{1 - \cos^2 H \cos^2 H'}};$$

$$\cos A = \frac{\sin H \cos H'}{\sqrt{1 - \cos^2 H \cos^2 H'}}, \quad \cos A' = \frac{\sin H' \cos H}{\sqrt{1 - \cos^2 H \cos^2 H'}},$$

и далее (по формулам примечания 23),

$$\cos (A - A') = \frac{\sin H \sin H'}{1 - \cos H \cos H'} = \sin \mathrm{F} (h - h'),$$

$$\sin (A - A') = \frac{\cos H - \cos H'}{1 - \cos H \cos H'} = \cos \mathrm{F} (h - h'),$$

$$\cos (A + A') = -\frac{\sin H \sin H'}{1 + \cos H \cos H'} = -\sin \mathrm{F} (h + h'),$$

$$\sin (A + A') = \frac{\cos H + \cos H'}{1 + \cos H \cos H'} = \cos \mathrm{F} (h + h').$$

Следовательно,

$$A - A' = \frac{\pi}{2} - \mathrm{F} (h - h'), \quad A + A' = \frac{\pi}{2} + \mathrm{F} (h + h'),$$

$$\ln \operatorname{ctg} \left(\frac{A - A'}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \mathrm{F} (h - h') = h' - h,$$

$$\ln \operatorname{ctg} \left(\frac{A + A'}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \mathrm{F} (h + h') = h' + h.$$

Когда $h = \infty$, то вершина угла между h и h' в четырехугольнике, лежащем в основании пирамиды, удаляется в бесконечность, стороны h, h' и диагональ становятся параллельными, $h' = \infty$, $\omega = \mathrm{F}(a) = A$,

$A' = \frac{\pi}{2} - \omega = \frac{\pi}{2} - A$. При подстановке этих значений A и A' в пределы для x получаем ∞ и $\ln \operatorname{ctg} \omega$.

Так как пределы h и h' одни и те же: 0 и ∞, то мы можем во втором интеграле вместо h' написать h, и тогда, соединяя оба интеграла вместе, получим

$$2\int_0^\infty \frac{(e^{2h}+e^{-2h})\,h\,dh}{e^{4h}+e^{-4h}-2\cos 4\omega} = \frac{1}{2\sin 2\omega}\int_0^\infty \frac{z\,dz}{e^z+e^{-z}}.$$

Заменяя $2h$ через h_1 и 2ω через ω_1, получаем равенство, данное в тексте.

[186] Для пирамиды, основанием которой служит треугольник между a' и h' (см. чертеж к примечанию 183), вместо ω мы должны взять $\frac{\pi}{2} - \omega$ и тогда

$$\ln \frac{\sin\left(A' + \frac{\pi}{2} - \omega\right)}{\sin\left(A' - \frac{\pi}{2} + \omega\right)} = \ln \frac{\cos(A' - \omega)}{-\cos(A' + \omega)}.$$

Этот логарифм — действительное число, ибо $A' > \frac{\pi}{2} - \omega$ и $A' - \omega > \frac{\pi}{2}$.

[187] Так как предельные значения A и A' связаны между собой уравнением (83), то предельные значения A и A_1 будут связаны уравнением

$$\sin A_1 = \cos A \operatorname{tg} \omega.$$

Поэтому в формуле предыдущего примечания, а равным образом и в формулах (85) и (86) надо натуральный логарифм брать от абсолютных величин

$$\frac{\cos(A' - \omega)}{\cos(A' + \omega)}, \quad \frac{\sin(A + \omega)}{\sin(A - \omega)}, \quad \frac{\sin(A_1 + \omega)}{\sin(A_1 - \omega)}.$$

[188] Когда $A = A_1$, то из уравнения

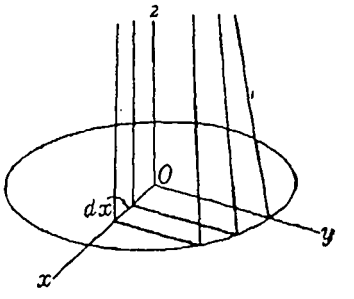
$$\sin A_1 = \cos A \operatorname{tg} \omega$$

находим $A = A_1 = \omega$, и пределы для z становятся равными $\ln \operatorname{ctg} 0 = \infty$ и $\ln \operatorname{ctg} \omega$. Таким образом для второго интеграла (85) пределы равны нулю и A, а для первого — равны A и $\frac{\pi}{2}$, и оба интеграла можно соединить в один с пределами 0 и $\frac{\pi}{2}$. Здесь также берется логарифм от абсолютной величины

$$\frac{\sin(A + \omega)}{\sin(A - \omega)}.$$

[188] Круг, который служит основанием конуса, разрезается на полосы прямыми, перпендикулярными к оси x и отстоящими одна от другой на расстоянии dx. Проведя через ординаты плоскости, параллельные оси конуса, которая перпендикулярна к его основанию, мы разделим конус на элементарные объемы, которые по формуле (51) будут равны $-\frac{1}{2} y\,d\mathrm{F}(x)$; объем же всего конуса будет

$$-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{r} y\,d\mathrm{F}(x) = 2\int_{R}^{\frac{\pi}{2}} y\,dX.$$



[190] Уравнение круга можно написать в таком виде:

$$\frac{2\sin X}{e^{y}+e^{-y}} = \sin R,$$

откуда

$$e^{y} = \frac{\sin X \pm \sqrt{\sin^2 X - \sin^2 R}}{\sin R}.$$

Корень со знаком плюс определяет положительную ординату, а со знаком минус — отрицательную, соответствующие одной и той же абсциссе. Возьмем корень со знаком плюс, тогда

$$y = \frac{1}{2}\ln\frac{\sin X + \sqrt{\sin^2 X - \sin^2 R}}{\sin X - \sqrt{\sin^2 X - \sin^2 R}}.$$

[191] Из уравнения круга

$$\cos X \sin Y\,dX + \cos Y \sin X\,dY = 0$$

имеем:

$$dX = -\operatorname{ctg} Y \operatorname{tg} X\,dY = -\sin R\frac{\operatorname{ctg} Y}{\sqrt{\sin^2 Y - \sin^2 R}}\,dY,$$

$$\ln \operatorname{ctg}\frac{1}{2}Y = \frac{1}{2}\ln\frac{\cos^2\frac{1}{2}Y}{\sin^2\frac{1}{2}Y} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos Y}{1-\cos Y} =$$

$$= \ln\frac{\sin X + \sqrt{\sin^2 X - \sin^2 R}}{\sin X - \sqrt{\sin^2 X - \sin^2 R}}.$$

[192] Проинтегрированная часть при подстановке границ R и $\frac{\pi}{2}$ дает

$$\frac{\pi}{2}\ln\frac{1+\cos R}{1-\cos R}.$$

[193] Том I «Exercices de calcul intégral» Лежандра был напечатан в Париже в 1811 г. Особый томик в 50 страниц, озаглавленный «Supplément à la premiére partie», не имеет ни года, ни места издания.

На стр. 35—50 этого «Supplément» дана «Table générale des formules», в которой находятся данные здесь Лобачевским два интеграла. Первый (стр. 43, строка 14) в виде

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega\, d\omega \cos\omega}{\sqrt{\sin^2\omega - \sin^2\alpha}} = \frac{1}{2}\pi \ln(1+\cos\alpha),$$

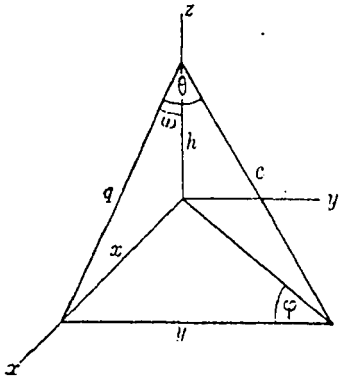
а второй (стр. 46, строка 2) в виде

$$\int_0^{\beta} \frac{\Omega\, d\omega \sin\omega}{\cos\omega \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\omega}} = \frac{\pi}{\cos\beta} \lg \frac{1}{\cos\beta},$$

где $\Omega = \frac{1}{2} \lg \frac{1+\sin\omega}{1-\sin\omega}$.

Таким образом в первом интеграле $X = \omega$, $R = \alpha$ и во втором $Y = \frac{1}{2}\pi - \omega$, $R = \frac{1}{2}\pi - \beta$.

[194] Применяя формулу (61) к пирамиде, изображенной на чертеже [1]), принимаем вершину пирамиды за полюс, высоту — за ось и плоскость между h и x — за плоскость первого меридиана.



[195] Имеем

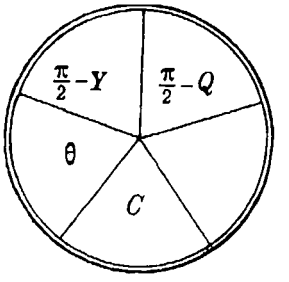
$$\int (e^c - e^{-c})^2\, dc = \int (e^{2c} + e^{-2c} - 2)\, dc =$$

$$= \frac{1}{2}(e^c + e^{-c})(e^c - e^{-c}) - 2c =$$

$$= \frac{2\cos C}{\sin^2 C} + 2 \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} C =$$

$$= \frac{2\cos C}{\sin^2 C} - \ln \frac{1+\cos C}{1-\cos C}.$$

[196] Для треугольника между c и q (см. чертеж к примечанию 194) мы имеем приводимую здесь диаграмму и формулы



$$\sin C = \sin Y \sin Q, \qquad (I)$$

$$\cos C \sin\theta = \cos Y \sin Q. \qquad (II)$$

При интегрировании по θ мы считаем Q постоянным и вместо переменной θ можем

[1]) На этом чертеже через φ обозначен не тот угол, о котором говорится в тексте Лобачевского. О значении угла φ на этом чертеже — см. ниже, примечание 198, стр. 376.

ввести или переменную c или переменную y, которые обе суть функции θ, связанные с θ предыдущими уравнениями.

Дифференцируя равенство (II), получаем

$$\cos\theta\cos C\,d\theta + \sin\theta\sin^2 C\,dc = \sin Q\sin^2 Y\,dy.$$

Деля все уравнение на $\sin^2 C$ и пользуясь уравнением (I), имеем

$$\frac{\cos C}{\sin^2 C}\cos\theta\,d\theta + \sin\theta\,dc = \frac{dy}{\sin Q}.$$

Интегрируем теперь левую часть равенства по частям

$$\int\left(\frac{\cos C}{\sin^2 C} - c\right)\cos\theta\,d\theta = -c\sin\theta + \int\left(\frac{\cos C}{\sin^2 C}\cos\theta + \sin\theta\,dc\right) =$$

$$= -c\sin\theta + \int\frac{dy}{\sin Q} = \frac{y}{\sin Q} - c\sin\theta.$$

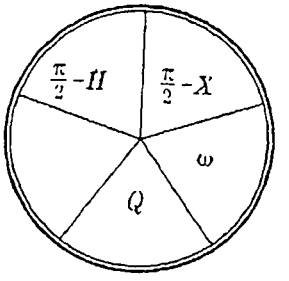
[197] Написанные равенства мы имеем из треугольников между x и h и между c и q из чертежа к примечанию 194 (см. диаграммы на предыдущей и этой страницах). Вводим вместо переменной интегрирования ω переменную x. Из приводимой здесь диаграммы мы имеем

$$\frac{d\omega}{\cos^2\omega} = -\operatorname{tg} H\sin X\,dX,$$

$$\frac{1}{\cos^2\omega} = \frac{1-\sin^2 H\sin^2 X}{\cos^2 H},$$

$$d\omega = -\frac{\cos H\sin H\sin X\,dX}{1-\sin^2 H\sin^2 X} =$$

$$= -\frac{\cos H\sin Q\,dX}{1-\sin^2 H\sin^2 X}.$$



Кроме того, из уравнения (II) предыдущего примечания и первого уравнения в тексте

$$\sin\theta = \frac{\sin Q\cos Y}{\cos C} = \frac{\sin X\cos Y\sin H}{\cos C}.$$

Подставляя эти выражения в полученную выше формулу для $4dP$, получим формулу (87).

[198] Если примем во внимание, что x меняется от нуля до r, а X от $\frac{\pi}{2}$ до R, то объем всего конуса представится суммой двух интегралов:

$$2P = \cos H\int_{R}^{\frac{\pi}{2}}\frac{y\,dX}{1-\sin^2 H\sin^2 X} + \frac{c\sin^2 H\cos H}{\cos C}\int_{\frac{\pi}{2}}^{R}\frac{\cos Y\sin^2 X\,dX}{1-\sin^2 H\sin^2 X}. \quad (I)$$

В первый интеграл вместо переменной X введем при помощи уравнения круга

$$\sin X \sin Y = \sin R$$

переменную Y; получим (см. примечание 191), принимая во внимание, что Y меняется от $\frac{\pi}{2}$ до R,

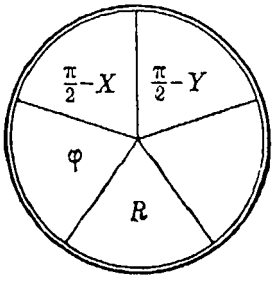
$$dX = -\sin R \frac{\operatorname{ctg} Y\, dY}{\sqrt{\sin^2 Y - \sin^2 R}}$$

и

$$\int_R^{\frac{\pi}{2}} \frac{y\, dX}{1 - \sin^2 H \sin^2 X} =$$

$$= \sin R \int_R^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \operatorname{ctg} \frac{1}{2} Y \cos Y \sin Y\, dY}{\sqrt{\sin^2 Y - \sin^2 R}(\sin^2 Y - \sin^2 H \sin^2 R)} = \sin R \cdot I, \qquad (II)$$

где через I обозначен интеграл, входящий в уравнение (88).



При вычислении второго интеграла равенства (I) введем переменный угол φ, противолежащий катету x в прямоугольном треугольнике между x и y (черт. к примечанию 194), связанный с X и Y, как видно из диаграммы этого треугольника, соотношениями

$$\cos Y = \cos\varphi \cos R, \quad \sin\varphi = \operatorname{tg} R \operatorname{ctg} X.$$

из которых мы получаем

$$\cos\varphi\, d\varphi = -\operatorname{tg} R \frac{dX}{\sin^2 X}, \quad \frac{1}{\sin^2 X} = 1 + \operatorname{ctg}^2 X = 1 + \operatorname{ctg}^2 R \sin^2\varphi,$$

$$dX = -\frac{\operatorname{ctg} R \cos\varphi\, d\varphi}{1 + \operatorname{ctg}^2 R \sin^2\varphi},$$

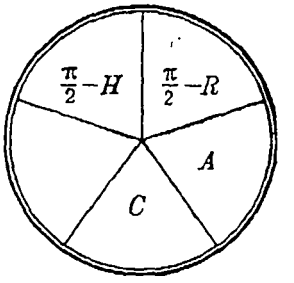
$$1 - \sin^2 H \sin^2 X = \frac{\cos^2 H + \operatorname{ctg}^2 R \sin^2\varphi}{1 + \operatorname{ctg}^2 R \sin^2\varphi},$$

$$\frac{dX}{1 - \sin^2 H \sin^2 X} = -\frac{\operatorname{ctg} R \cos\varphi\, d\varphi}{\cos^2 H + \operatorname{ctg}^2 R \sin^2\varphi},$$

$$\frac{\cos Y \sin^2 X\, dX}{1 - \sin^2 H \sin^2 X} = -\frac{\operatorname{ctg} R \cos R \cos^2\varphi\, d\varphi}{(1 + \operatorname{ctg}^2 R \sin^2\varphi)(\cos^2 H + \operatorname{ctg}^2 R \sin^2\varphi)}.$$

Разделив числитель и знаменатель на $\cos^4\varphi$ и принимая во внимание равенства

$$\left.\begin{aligned}\sin C &= \sin H \sin R,\\ \cos H &= \cos A \cos C,\\ \cos R \sin H &= \sin A \cos C,\end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$



которые мы имеем из приводимой диаграммы для треугольника между c, r и h, получим

$$\frac{\cos Y \sin^3 X\,dX}{1-\sin^2 H \sin^2 X} = -\frac{\cos^2 R \sin^2 R}{\cos^2 C}\,\frac{d\operatorname{tg}\varphi}{(\sin^2 R+\operatorname{tg}^2\varphi)(\sin^2 R\cos^2 A+\operatorname{tg}^2\varphi)} =$$

$$= \frac{\cos^2 R \sin R}{\cos^2 C \sin^2 A}\left[\frac{1}{\sin^2 R+\operatorname{tg}^2\varphi} - \frac{1}{\sin^2 R\cos^2 A+\operatorname{tg}^2\varphi}\right] d\operatorname{tg}\varphi.$$

Пределами интегрирования по φ будут 0 и $\frac{\pi}{2}$, и мы получаем:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{R} \frac{\cos^2 Y \sin^2 X\,dX}{1-\sin^2 H \sin^2 X} =$$

$$= \frac{\cos^2 R \sin R}{\cos^2 C \sin^2 A}\left[\frac{1}{\sin R}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin R} - \frac{1}{\sin R\cos A}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin R\cos A}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{\cos^2 R}{\cos^2 C \sin^2 A}\,\frac{\cos A-1}{\cos A};$$

наконец, подставляя этот интеграл и (II) в уравнение (I), получаем

$$2P = \cos H \sin R \cdot I + \frac{\pi}{2}\,\frac{\cos^2 R \sin^2 H}{\cos^2 C \sin^2 A}\,\frac{\cos H}{\cos A \cos C}(\cos A-1)\,c,$$

или по формулам (III):

$$2P = \cos H \sin R \cdot I + \frac{\pi}{2}(\cos A-1)\,c.$$

Подставим теперь в левую часть вместо половины объема пирамиды значение, взятое из формулы (55), получаем

$$\frac{\pi}{2}(c\cos A-h) = \cos H \sin R \cdot I + \frac{\pi}{2}(\cos A-1)\,c,$$

и затем

$$\cos H \sin R \cdot I = \frac{\pi}{2}(c-h) = \frac{\pi}{2}\left(\ln \operatorname{ctg}\frac{1}{2}C \operatorname{tg}\frac{1}{2}H\right).$$

Лобачевский, повидимому, совершает интегрирование несколько иначе, разлагая сначала второй член формулы (87) на сумму двух таким образом:

$$c\cos\Pi\sin^2\Pi\frac{\cos Y\sin^2 X}{1-\sin^2\Pi\sin^2 X}\,dX=$$

$$=c\cos\Pi\frac{\cos Y\,dX}{1-\sin^2\Pi\sin^2 X}-c\cos\Pi\cos Y\,dX.$$

Оба члена могут быть проинтегрированы введением переменной φ.

Что касается

$$\int_R^{\frac{\pi}{2}}\cos Y\,dX,$$

то его можно получить проще. Пользуясь уравнением окружности основания конуса,

$$\sin X\sin Y=\sin R$$

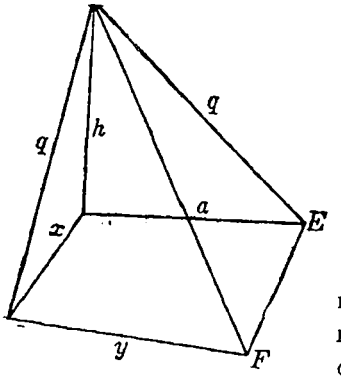
и равенством

$$dX=-\sin X\,dx,$$

мы можем преобразовать его таким образом:

$$\int_R^{\frac{\pi}{2}}\cos Y\,dX=\sin R\int_0^r\operatorname{ctg} Y\,dx,$$

откуда видно [см. формулу (39)], что он представляет собой произведение $\sin R$ на площадь четверти круга радиуса r, и по формуле (40) мы получим



$$\int_R^{\frac{\pi}{2}}\cos Y\,dX=\frac{\pi}{2}\sin R\left(\frac{1}{\sin R}-1\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}(1-\sin R).$$

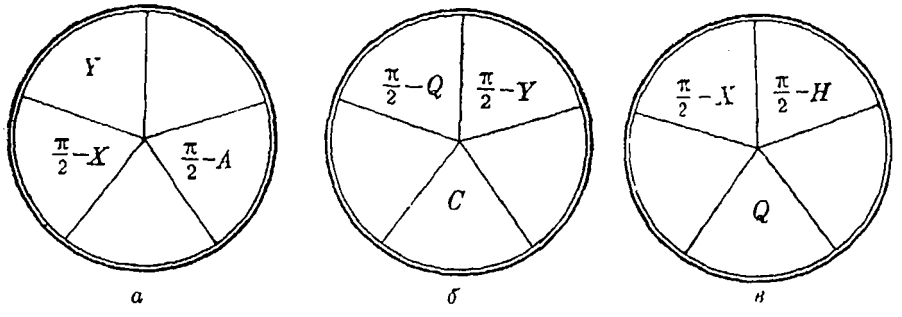
[199] Уравнение

$$\sin X\cos Y=\cos A \qquad (I)$$

прямой EF, проходящей через конец начальной ординаты a, можно также получить из общего уравнения прямой (25), если в последнем заменить $\mathrm{F}(l)$, A соответственно через A и $\frac{\pi}{2}$. Его можно получить также из четырехугольника между a, x, y с тремя

прямыми углами, составив для четырехугольника диаграмму *а*. Из треугольника между q и y имеем (диаграмма *б*)

$$\sin C = \sin Q \sin Y,$$



а *б* *в*

а из треугольника между x и h (диаграмма *в*)

$$\sin Q = \sin X \sin H,$$

и потому

$$\sin C = \sin X \sin Y \sin H = \sin H \cos A \operatorname{tg} Y. \qquad \text{(II)}$$

Из последних двух уравнений получаем

$$\sin^2 C + \sin^2 H \cos^2 A =$$

$$= \sin^2 H \cos^2 A \,(1 + \operatorname{tg}^2 Y) = \frac{\sin^2 H \cos^2 A}{\cos^2 Y} = \sin^2 H \sin^2 X,$$

$$\cos^2 C - \sin^2 H \cos^2 A = 1 - \sin^2 H \sin^2 X,$$

$$-\sin^2 C + \sin^2 H \sin^2 A = \sin^2 H \cos^2 X. \qquad \text{(III)}$$

В первый член второй части формулы (87) вводим переменную Y. Из уравнения (I) мы имеем

$$dX = \operatorname{tg} X \operatorname{tg} Y\, dY,$$

$$\cos^2 Y - \cos^2 A = \cos^2 X \cos^2 Y,$$

$$dX = \cos A \frac{\operatorname{tg} Y\, dY}{\sqrt{\cos^2 Y - \cos^2 A}},$$

и затем получаем

$$\frac{y\, dX}{1 - \sin^2 H \sin^2 X} = \frac{y \cos A \operatorname{tg} Y\, dY}{\left(1 - \sin^2 H \dfrac{\cos^2 A}{\cos^2 Y}\right)\sqrt{\cos^2 Y - \cos^2 A}} =$$

$$= \frac{y \cos A \sin Y \cos Y\, dY}{(\cos^2 Y - \sin^2 H \cos^2 A)\sqrt{\cos^2 Y - \cos^2 A}}.$$

Во второй член формулы (87) вводим переменную C. Из (III) имеем

$$\sin^2 H \sin X \cos X\, dX = \sin C \cos C\, dC,$$

и затем

$$\frac{\cos Y \sin^2 X\, dX}{\cos C(1-\sin^2 H \sin^2 X)} = \frac{\cos A \sin C\, dC}{\sin^3 H \cos X(\cos^2 C - \sin^2 H \sin^2 A)} =$$

$$= \frac{\cos A \sin C\, dC}{\sin H(\cos^2 C - \sin^2 H \sin^2 A)\sqrt{\sin^2 H \sin^2 A - \sin^2 C}}.$$

В первом члене формулы (87) пределами интегрирования по X служат $\frac{\pi}{2}$ и X, а по Y, $A = \mathrm{F}(a)$ и Y. Во втором члене пределами для переменной C служат $\sin C = \sin A \sin H$ и $\sin C = \sin X \sin Y \sin H = \sin H \cos A \operatorname{tg} Y$ [см. формулу II].

[200] Если мы начнем интегрировать по φ и положим

$$a \sin\psi = x,$$

то интеграл (90) обратится в

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\psi\, d\psi}{1-a^2\sin^2\psi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\psi\, d\psi}{1-a^2\sin^2\psi} E(x),$$

и затем, принимая во внимание, что

$$a\cos\psi\, d\psi = dx; \quad d\psi = \frac{dx}{a\cos\psi} = \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

в

$$\frac{1}{a}\int_0^a \frac{x\, dx\, E(x)}{(1-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Подобным же образом интеграл (91) будет

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\psi\, d\psi}{1-a^2\sin^2\psi} E(x) = \frac{1}{a}\int_0^a \frac{dx\, E(x)}{1-x^2}.$$

[201] См. формулы на стр. 230.

[202] Диференцируя один раз равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, dx \sin \mathrm{F}(x-\alpha) = \pi\alpha$$

по α, мы получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, dx \cos \mathrm{F}(x-\alpha) \sin \mathrm{F}(x-\alpha) = \pi$$

или

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx \sin 2\mathrm{F}(x-\alpha) = 2;$$

таким образом приведенные Лобачевским две формулы справедливы для $i=1$. Чтобы доказать их для произвольного i, воспользуемся переходом от i к $i+1$. Допустим, что они справедливы для какого-нибудь i и всех чисел, меньших i, и докажем, что в таком случае они будут верны и для $i+1$. Дифференцируя по α первое равенство, мы получаем

$$(2i+1)\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx \cos(2i+1)\,\mathrm{F}(x-\alpha)\sin\mathrm{F}(x-\alpha) = \pi;$$

но

$$2\cos(2i+1)\,\mathrm{F}(x-\alpha)\sin\mathrm{F}(x-\alpha) =$$
$$= \sin(2i+2)\,\mathrm{F}(x-\alpha) - \sin 2i\,\mathrm{F}(x-\alpha),$$

следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\sin(2i+2)\,\mathrm{F}(x-\alpha)\,dx -$$
$$-\int_{-\infty}^{+\infty} x\sin 2i\,\mathrm{F}(x-\alpha)\,dx = \frac{2\pi}{2i+1}.$$

Сложив это равенство с равенством для $\sin 2i\,\mathrm{F}(x-\alpha)$, данным в тексте, найдем, что это последнее будет верно и для $i+1$.

Дифференцируя второе равенство, получаем

$$2i\int_{-\infty}^{+\infty} x\cos 2i\,\mathrm{F}(x-\alpha)\sin\mathrm{F}(x-\alpha)\,dx = 0.$$

Но

$$2\cos 2i\,\mathrm{F}(x-\alpha)\sin\mathrm{F}(x-\alpha) =$$
$$= \sin(2i+1)\,\mathrm{F}(x-\alpha) - \sin(2i-1)\,\mathrm{F}(x-\alpha),$$

следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\sin(2i+1)\,\mathrm{F}(x-\alpha)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\sin(2i-1)\,\mathrm{F}(x-\alpha)\,dx.$$

[203] В интеграле, стоящем во второй части равенства (84), положим

$$z = \ln\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}.$$

Тогда

$$dz = -\frac{d\omega}{\sin\omega},$$

$$e^z + e^{-z} = \frac{2}{\sin\omega},$$

$$\int \frac{z\,dz}{e^z + e^{-z}} = -\frac{1}{2}\int_{\omega}^{0} \ln \operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}\,d\omega = \frac{1}{2}\int_{0} \ln \operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}\,d\omega.$$

[204] Заменим в (92) α через $\frac{\pi}{2} - \omega$:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{(e^x - e^{-x})\,x\,dx}{e^{2x} + e^{-2x} - 2\cos 2\omega} = \frac{\pi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)}{4\cos\omega}.$$

Если это равенство сложим с (93) и затем вычтем из (93), то получим формулы, данные в тексте.

[205] Вычислим

$$\frac{x\,dx}{e^x + e^{-x} - 2\cos\omega} - \frac{x\,dx}{e^x + e^{-x} + 2\cos\omega} = \frac{4x\,dx\cos\omega}{e^{2x} + e^{-2x} - 2\cos 2\omega}.$$

Во второй части положим $2x = y$ и возьмем интегралы от обеих частей, начиная от нуля; мы получим второе равенство

$$L(x,\ \omega) - L(x,\ \pi - \omega) = \cos\omega\, L(2x,\ 2\omega).$$

Если за верхний предел возьмем ∞, то получим другое данное в тексте равенство.

[206] Имеем

$$L(\omega) + L(\pi - \omega) = \int_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{e^x + e^{-x} - 2\cos\omega} + \int_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{e^x + e^{-x} + 2\cos\omega} =$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{2(e^x + e^{-x})\,x\,dx}{e^{2x} + e^{-2x} - 2\cos 2\omega} = \frac{1}{\sin\omega}\int_{0} d\omega \ln \operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}.$$

[207] Сравнивая (73) и (75), имеем

$$4P = \int_{A}^{\frac{\pi}{2}} dA \ln\frac{\sin(A + \omega)}{\sin(A - \omega)} = 4\sin 2\omega \int_{0}^{h} \frac{h\,dh}{e^{2h} + e^{-2h} - 2\cos 2\omega},$$

где пределы A и h связаны между собой уравнением (64_2). Если положим

$$A = \frac{\pi}{2} - \xi, \quad 2h = x,$$

то это равенство обратится в

$$4P = -\int_0^{\alpha} d\xi \ln \frac{\cos(\xi - \omega)}{\cos(\xi + \omega)} = \sin 2\omega \int_0^{x} \frac{x\,dx}{e^x + e^{-x} - 2\cos 2\omega} = \sin 2\omega L(x,\ 2\omega),$$

а равенство (64_2) — в

$$\operatorname{tg}\omega = \cos H \operatorname{ctg}\xi$$

или

$$\frac{e^h - e^{-h}}{e^h + e^{-h}} = \operatorname{tg}\omega \operatorname{tg}\xi,$$

откуда

$$2h = x = \ln \frac{\cos(\xi - \omega)}{\cos(\xi + \omega)}.$$

Сравнивая (74) и (75), имеем

$$4P = -\int_0^{\omega} d\omega \ln\left(1 - \frac{\cos^2 A}{\cos^2 \omega}\right) = 4\sin 2\omega \int_0^{h} \frac{h\,dh}{e^{2h} + e^{-2h} - 2\cos 2\omega}.$$

В этом равенстве снова делаем подстановку

$$A = \frac{\pi}{2} - \xi, \quad 2h = x.$$

Тогда

$$1 - \frac{\cos^2 A}{\cos^2 \omega} = \frac{\cos^2\omega - \sin^2\xi}{\cos^2\omega} = \frac{\cos^2\omega(1 - \sin^2\xi) - \sin^2\xi(1 - \cos^2\omega)}{\cos^2\omega} =$$

$$= \frac{\cos^2\omega\cos^2\xi - \sin^2\xi\sin^2\omega}{\cos^2\omega},$$

и получаем равенство, данное в тексте.

[208] Действительно, если в равенстве

$$\int_0^{\omega} d\omega \ln \frac{\cos^2\omega}{\cos(\omega + \xi)\cos(\omega - \xi)} = \sin 2\omega L(x,\ 2\omega)$$

мы заменим логарифм произведения суммой логарифмов, то и получим равенство (95).

[209] Интегрируя (94) по частям, получаем

$$\int d\xi \ln \frac{\cos(\xi - \omega)}{\cos(\xi + \omega)} = \xi \ln \frac{\cos(\xi - \omega)}{\cos(\xi + \omega)} - \int \xi \left[-\frac{\sin(\xi - \omega)}{\cos(\xi - \omega)} + \frac{\sin(\xi + \omega)}{\cos(\xi + \omega)}\right] d\xi =$$

$$= \xi \ln \frac{\cos(\xi - \omega)}{\cos(\xi + \omega)} - \sin 2\omega \int \frac{\xi\,d\xi}{\cos(\xi + \omega)\cos(\xi - \omega)},$$

и затем равенство, данное в тексте.

[210] Для вывода равенства (97) Лобачевский пользуется равенством (76), и объем пирамиды P он определяет по формуле (67), а объемы пирамид P', P'', P_1 и P_2 по формулам (80).

При этом Лобачевский изменяет обозначения: вместо H и R он пишет β и ξ и вводит две величины α и η, полагая

$$\sin A \sin H = \sin \alpha \quad \text{и} \quad \sin \eta = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \xi.$$

Рассматривая чертеж, на котором изображены пирамиды P', P'', P_1 и P_2 (см. стр. 385), нетрудно видеть, что α есть угол параллельности (на чертеже не изображен), соответствующий гипотенузе треугольника между a и h, а η — угол между r и b. Действительно, из диаграмм a и δ для этих треугольников мы имеем написанные выше равенства. Следует отметить, что введенная теперь величина α отлична от величины α, определяемой формулой (68). Величина

$$\arccos \frac{\cos A \sin H}{\sqrt{\sin^2 H - \sin^2 R}},$$

входящая в формулу (67), представляет собой угол ψ; согласно диаграммам (δ, a и $в$) треугольников, имеем

$$\cos B = \cos \xi \cos \eta, \tag{I}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} A = \cos \omega \sin \beta, \tag{II}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \cos B \operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cos \xi \cos \eta}{\cos \omega \sin \beta}. \tag{III}$$

Определив отсюда ψ и заменив по диаграмме a

$$\cos A = \cos \omega \cos \alpha$$

и H и R через β и ξ, мы приводим формулу (67) к виду

$$4P = \sin 2\beta \cos \omega \cos \alpha \int_{\xi}^{\alpha} \frac{\sin \xi \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \xi \, d\xi}{(\sin^2 \beta - \sin^2 \xi) \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \xi}} -$$

$$- 2 \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \alpha \cos \xi \cos \eta}{\sin \beta \cos \omega} \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \beta.$$

Займемся далее преобразованием формул (80).

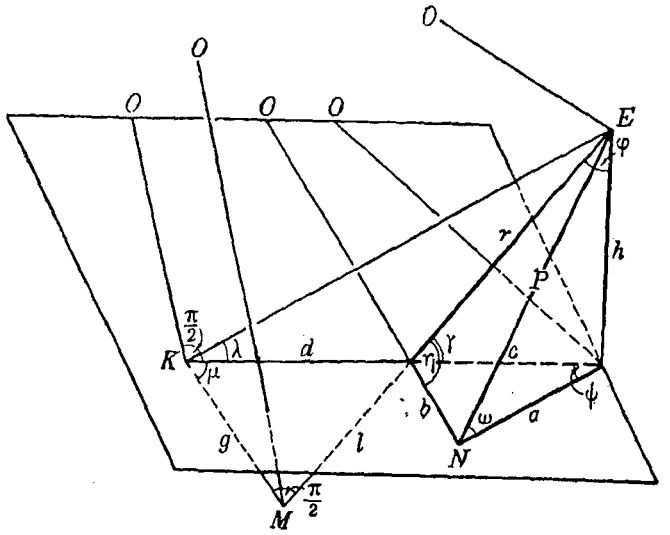
В формуле для P' верхним пределом интеграла служит h — высота треугольника; так как

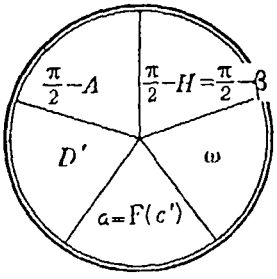
$$H = \beta = \Pi(h), \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(h) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta = e^{-h},$$

то

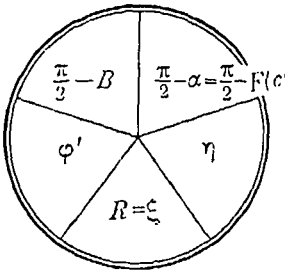
$$h = \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \beta. \tag{IV}$$

К примечанию 210.

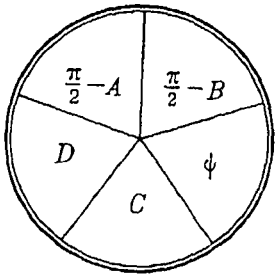




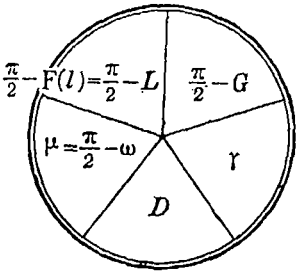
а



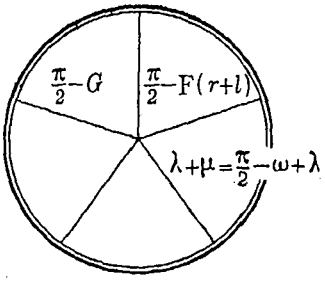
б



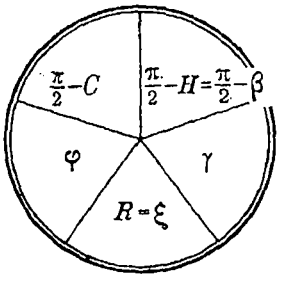
в



г



д



е

В той же формуле заменим переменную интегрирования h переменной z, положив $2h = z$; тогда

$$P' = \frac{\sin 2\omega}{4} \int_0^{2h} \frac{z\,dz}{e^z + e^{-z} - 2\cos 2\omega} = \frac{\sin 2\omega}{4} L(2h,\ 2\omega).$$

Подобным же образом интеграл P'' (80) преобразуется в

$$P'' = \frac{\sin 2\lambda}{4} L(2h,\ 2\lambda).$$

В интеграле P_1 верхним пределом интегрирования служит $h' = r + l$, где r и l определяются формулами

$$r = \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\xi, \quad l = \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\eta, \tag{V}$$

из которых первая вытекает из того обстоятельства, что $\xi = R = \mathrm{F}(r)$, а вторая может быть написана потому, что продолжение катета b есть линия, параллельная с MO и с KO (перпендикуляром к плоскости треугольника между l и g), а угол η есть угол параллельности, соответствующий длине l. Таким образом

$$h' = r + l = \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\xi \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\eta, \tag{VI}$$

$$P_1 = \frac{1}{4} \sin(2\omega - 2\lambda)\, L(2h',\ \pi - 2\omega + 2\lambda).$$

Наконец, преобразуя последний интеграл (80), имеем

$$P_2 = \frac{1}{4} \sin 2\omega\, L(2l,\ \pi - 2\omega).$$

Подставляя теперь значения P, P', P'', P_1, P_2 в равенство (76), получаем

$$\sin 2\beta \cos\omega \cos\alpha \int_\xi^\alpha \frac{\sin\xi \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\xi\, d\xi}{(\sin^2\beta - \sin^2\xi)\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\xi}} =$$

$$= 2 \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\alpha \cos\xi \cos\eta}{\cos\omega \sin\beta} \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\beta + \sin 2\omega\, L(2h,\ 2\omega) - \sin 2\lambda\, L(2h,\ 2\lambda) +$$

$$+ \sin(2\omega - 2\lambda)\, L(2h',\ \pi - 2\omega + 2\lambda) - \sin 2\omega\, L(2l,\ \pi - 2\omega). \tag{VII}$$

Значение $\operatorname{ctg}\lambda$ мы получим по формуле (79_4), заменив в ней H через β:

$$\operatorname{ctg}\lambda = \frac{1}{\cos\beta} \operatorname{ctg}(A - \psi) = \frac{1}{\cos\beta} \frac{1 + \operatorname{tg} A \operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg} A - \operatorname{tg}\psi},$$

и по формулам (II) и (III):

$$\operatorname{ctg}\lambda = \frac{1+\operatorname{tg}^2 A\cos\xi\cos\eta}{\cos\beta\operatorname{tg} A\,(1-\cos\xi\cos\eta)} =$$

$$= \frac{1}{\sin A\cos A\cos\beta\,(1-\cos\xi\cos\eta)} - \frac{\operatorname{tg} A}{\cos\beta}.$$

Из диаграммы *а* (стр. 385):

$$\cos A = \cos\omega\cos\alpha, \qquad \sin\alpha = \sin A\sin\beta,$$

и потому

$$\operatorname{ctg}\lambda = \frac{\sin\beta}{\cos\omega\cos\beta\sin\alpha\cos\alpha\,(1-\cos\xi\cos\eta)} - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\omega\sin\beta\cos\beta}$$

или

$$\operatorname{ctg}\lambda\cos\omega\sin\beta = \frac{\sin^2\beta}{\cos\beta\sin\alpha\cos\alpha\,(1-\cos\xi\cos\eta)} - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\beta}. \qquad \text{(VIII)}$$

Чтобы определить $\operatorname{ctg}(\omega-\lambda)$, напишем для треугольников между $r+l$, g и l, g, согласно диаграммам *г* и *д* (стр. 385), равенства

$$\cos\mathrm{F}(l) = \cos L = \operatorname{ctg} G\operatorname{tg}\mu,$$

$$\cos\mathrm{F}(r+l) = \operatorname{ctg} G\operatorname{tg}(\lambda+\mu) = \operatorname{ctg} G\operatorname{ctg}(\omega-\lambda),$$

где $G = \mathrm{F}(g)$, и разделим одно на другое:

$$\operatorname{tg}(\lambda+\mu) = \operatorname{tg}\mu\frac{\cos\mathrm{F}(r+l)}{\cos\mathrm{F}(l)}$$

Вследствие параллельности линий *KO* и *MO* с линией *EO* и перпендикулярности линий *EK* и *EN* с прямыми *KO* и *NO*,

$$\angle NEO = \alpha, \quad \angle MEO = \mathrm{F}(r+l) = \angle NEO - \angle NEM = \alpha - \varphi'$$

и

$$\operatorname{tg}(\lambda+\mu) = \operatorname{tg}\mu\frac{\cos(\alpha-\varphi')}{\cos\mathrm{F}(l)}.$$

Из треугольника между *b* и *r* (диаграмма *б* на стр. 385) имеем

$$\cos\varphi'\sin\xi = \sin\eta\sin\alpha, \quad \sin\varphi' = \cos\eta\sin\alpha,$$

и, заменив α через $\frac{\pi}{2}-\omega$, $\mathrm{F}(l)$ — через η, получим

$$\operatorname{ctg}(\omega-\lambda) = \frac{\operatorname{ctg}\omega}{\cos\eta}(\cos\alpha\cos\omega' + \sin\alpha\sin\varphi') =$$

$$= \operatorname{ctg}\omega\left(\frac{\cos\alpha\operatorname{tg}\eta\sin\alpha}{\sin\xi} + \sin^2\alpha\right);$$

но по диаграмме *а* (стр. 385):

$$\sin\omega = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta,$$

и, следовательно,

$$\frac{\operatorname{ctg}(\omega-\lambda)}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos\omega\operatorname{tg}\beta}{\sin\xi}[\operatorname{tg}\eta + \operatorname{tg}\alpha\sin\xi]. \qquad \text{(IX)}$$

Сравнивая полученные формулы (VII), (VIII), (IX) с формулами (97) Лобачевского в том виде, как они приведены в «Казанском вестнике», мы видим, что Лобачевский изменил обозначения, которыми он пользовался раньше (см. примечание 170), а именно: вместо

$$\lambda,\ \omega-\lambda,\ h,\ l$$

он теперь пишет

$$\omega-\lambda,\ \lambda,\ x,\ y-x$$

и буква α теперь обозначает угол параллельности, соответствующий гипотенузе треугольника между a и h; он не равен углу α, введенному формулой (68).

Если указанную замену мы произведем в формулах (VII), (VIII) и (IX), то мы еще не получим формулы (97) и за ней следующих. Во-первых, в формуле (97) стоит член

$$\sin 2\lambda\ L(2y,\ \pi-2\lambda),$$

где

$$y=\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\eta\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\beta\right),$$

в формуле же (VII) соответствующий член, полученный заменой λ на $\omega-\lambda$,

$$\sin 2(\omega-\lambda)\ L(2h',\ \pi-2\omega+2\lambda),$$

имеет аргументом

$$h'=r+l=\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\eta\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\xi\right),$$

и, во-вторых, в формулах Лобачевского для $\operatorname{ctg}\lambda$ и $\operatorname{ctg}(\omega-\lambda)$ после замены λ и $\omega-\lambda$ на $\omega-\lambda$ и λ надо $\operatorname{ctg}(\omega-\lambda)$ умножить на $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ и $\operatorname{ctg}\lambda$ — на $\cos\omega\sin\beta$.

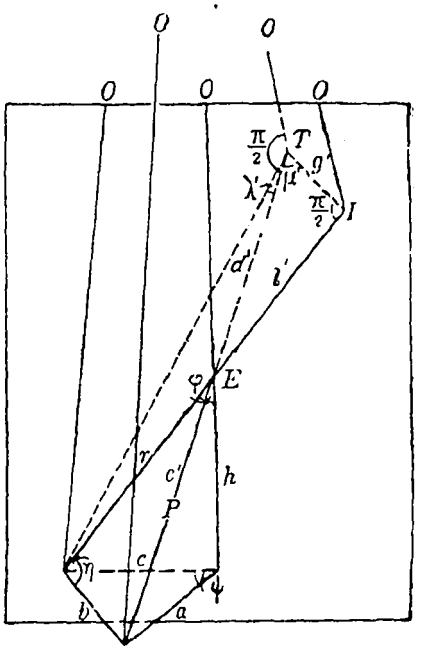
[211] Эти формулы также возбуждают сомнение. Первая часть равенства та же, что и в равенстве (97), и представляет объем той же пирамиды, которой основанием служит треугольник с катетами a и b и высотой h (см. чертеж). В функциях же, выражающих объемы четырех пирамид, простирающихся в бесконечность, произведена замена одних величин другими, о которых говорилось в примечании 149, т. е. та же пирамида P теперь составляется из четырех пирамид Q', Q'', Q_1, Q_2:

$$P=Q'-Q''+Q_1-Q_2, \tag{I}$$

у которых ребра параллельны высоте h пирамиды P. У пирамиды Q' основание — общее с пирамидой P, т. е. прямоугольный треуголь-

ник с катетами a и b и углом ψ против b, и по формуле (75):

$$Q' = \frac{1}{4} \sin 2\psi \, L(2b, 2\psi).$$



Чтобы получить остальные пирамиды, продолжаем гипотенузу c' треугольника между a и h через вершину пирамиды P и откладываем на продолжении отрезок d', от конца которого параллельная с h делается перпендикулярной к d' и плоскости треугольника из b, r, c'. Опускаем теперь перпендикуляр g' от этого конца d' на продолжение r через вершину пирамиды P и обозначим через l' отрезок от продолжения r. Так произойдут прямоугольные треугольники: с катетами b, $c' + d'$, который будет основанием пирамиды Q'', и где пусть λ' — угол против b, с катетами g', $r + l'$ — основанием пирамиды Q_1 и, наконец, основание пирамиды Q_2, с катетами g' и l' и где пусть μ' — угол против l'. Объемы этих пирамид по формуле (75) будут

$$Q'' = \frac{1}{4} \sin 2\lambda' \, L(2b, 2\lambda'),$$

$$Q_1 = \frac{1}{4} \sin 2(\lambda' + \mu') \, L\big(2(r + l'), \, 2(\lambda' + \mu')\big),$$

$$Q_2 = \frac{1}{4} \sin 2\mu' \, L(2l', 2\mu').$$

Из формулы (I) примечания 210 мы имеем (диаграмма δ на стр. 385)

$$b = \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{2} B = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos B}{1 - \sin B} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \xi \cos \eta}{1 - \cos \xi \cos \eta}. \qquad \text{(II)}$$

Так как линия OI перпендикулярна к l', то угол φ против катета c в треугольнике между c и h будет углом параллельности для отрезка l', и из этого треугольника (диаграмма ε на стр. 385)

$$\cos \mathrm{F}(l') = \cos \varphi = \frac{\cos \beta}{\cos \xi}$$

$$l' = \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \mathrm{F}(l') = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} = \frac{1}{2} \ln \frac{\cos \xi + \cos \beta}{\cos \xi - \cos \beta}. \qquad \text{(III)}$$

Далее, в трехгранном угле с бесконечно удаленной вершиной O и параллельными ребрами OE, OT, OI сумма двугранных углов равна π, а так как угол с ребром EO равен ψ и угол с ребром IO прямой, то угол μ' с ребром TO будет

$$\mu' = \frac{\pi}{2} - \psi$$

и

$$\lambda' + \mu' = \frac{\pi}{2} - \psi + \lambda'.$$

Подставив значения Q', Q'', Q_1, Q_2 и P в равенство (I), мы получим

$$\sin 2\beta \cos\alpha \cos\omega \int_{\xi}^{\pi} \frac{d\xi \sin\xi \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\xi}{(\sin^2\beta - \sin^2\xi)\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\xi}} =$$

$$= 2 \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\alpha \cos\xi \cos\eta}{\sin\beta \cos\omega} \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\beta + \sin 2\psi\, L(2b, 2\psi) - \sin 2\lambda'\, L(2b, 2\lambda') +$$

$$+ \sin(2\psi - 2\lambda')\, L(2(r + l'), \pi - 2\psi + 2\lambda') - \sin(\pi - 2\psi)\, L(2l', \pi - 2\psi),$$

где

$$2b = \ln \frac{1 + \cos\xi \cos\eta}{1 - \cos\xi \cos\eta}, \quad 2l' = \ln \frac{\cos\xi + \cos\beta}{\cos\xi - \cos\beta},$$

$$r = \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\xi.$$

Формулу для $\operatorname{tg}\psi$ получим, написав по диаграммам *а*, *б*, *в* на стр. 385

$$\operatorname{tg}\psi = \cos B \operatorname{tg} A, \quad \cos B = \cos\xi \cos\eta,$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\omega \sin\beta}.$$

Сравнивая эти формулы с соответствующими формулами Лобачевского, приведенными в тексте, мы видим, что в члене

$$\sin(2\psi - 2\lambda')\, L(2(r + l'), \pi - 2\psi + 2\lambda'))$$

вместо аргумента

$$2(r + l') = \ln \frac{\cos\xi + \cos\beta}{\cos\xi - \cos\beta} + \ln \frac{1 + \cos\xi}{1 - \cos\xi}$$

стоит

$$2y' = \ln \frac{\cos\xi + \cos\beta}{\cos\xi - \cos\beta} + \ln \frac{1 + \cos\xi \cos\eta}{1 - \cos\xi \cos\eta}$$

и в члене

$$-\sin 2\psi\, L(2l', \pi - 2\psi)$$

вместо $\pi - 2\psi$ стоит 2ψ.

Кроме того, для определения угла λ' в «Казанском вестнике» стоит формула

$$\operatorname{tg}\lambda' = \cos\omega \operatorname{ctg}\alpha,$$

а в «Собрании сочинений Лобачевского»

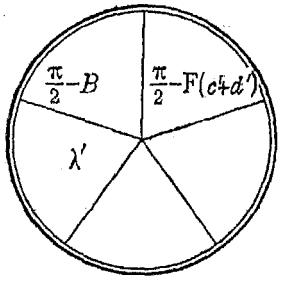
$$\operatorname{tg}\lambda' = \cos\omega\cos\alpha.$$

Очевидно, что обе эти формулы неверны. В самом деле, из построения пирамид ясно, что угол λ' зависит не только от вида треугольника между катетами a и h, но также и от угла ψ или B.

Для $\operatorname{tg}\lambda'$ можно дать различные выражения. Одно из них можно получить, производя в формуле (79_4) или в формуле (VIII) предыдущего примечания соответствующую замену букв (см. примечание 149). Но более простое выражение для $\operatorname{ctg}\lambda'$ мы получим следующим образом. Вследствие параллельности линий EO и TO угол между катетом h и гипотенузой c' в треугольнике между c' и h будет

$$\Pi(d') = D'.$$

Для треугольника между катетами $c' + d'$ и b мы имеем приводимую здесь диаграмму и формулу



$$\cos B = \operatorname{tg}\lambda' \operatorname{ctg}\Pi(c' + d'),$$

и по формуле примечания 23

$$\cos B = \operatorname{tg}\lambda' \frac{\cos\Pi(c') + \cos\Pi(d')}{\sin\Pi(c')\sin\Pi(d')}$$

или

$$\cos B = \operatorname{tg}\lambda' \frac{\cos\alpha + \cos D'}{\sin\alpha\sin D'}. \qquad \text{(II)}$$

Кроме того, из диаграмм e и ω на стр. 385 имеем

$$\cos B = \operatorname{tg}\psi \operatorname{ctg} A, \qquad \cos\beta = \operatorname{tg}\omega \operatorname{ctg} A,$$

$$\sin D' = \cos\omega\sin\beta, \qquad \cos\beta = \cos D'\cos\alpha,$$

и затем

$$\cos B \operatorname{tg}\omega = \cos\beta\operatorname{tg}\psi.$$

Подставляя $\cos B$, $\cos D'$ и $\sin D'$ в формулу (II), мы выразим $\operatorname{ctg}\lambda'$ через четыре величины ω, β, α и ψ:

$$\operatorname{ctg}\lambda' = \frac{\cos\alpha + \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}}{\cos\beta\operatorname{tg}\psi\operatorname{ctg}\omega\sin\alpha\cos\omega\sin\beta},$$

и затем исключим ω при помощи равенств

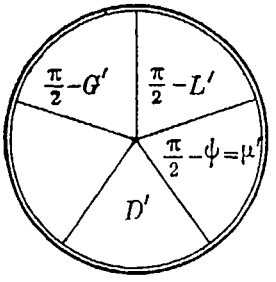
$$\sin\omega = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \text{ (диаграмма } a \text{ на стр. 385)},$$

$$\operatorname{ctg}\omega\cos\omega = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta} = \frac{\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\alpha\cos^2\beta}{\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta}.$$

Получим

$$\operatorname{ctg}\lambda' = \operatorname{ctg}\psi\,\frac{\cos^2\alpha+\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\alpha)}.$$

Интересно отметить, что отрезок g' равен отрезку g (на чертеже на стр. 385). Действительно, для треугольника между g' и d' мы имеем приводимую здесь диаграмму и формулу



$$\cos G' = \sin\psi\cos D',$$

которая при подстановке $\cos D'$ из равенства

$$\sin\omega = \cos D'\sin A$$

для диаграммы a (стр. 385) обращается в

$$\cos G' = \frac{\sin\psi\sin\omega}{\sin A}.$$

Такое же выражение мы получим для $\cos G$ из формул

$$\cos G = \sin\omega\cos D,\quad \sin\psi = \cos D\sin A$$

для треугольников между катетами a, b и катетами g, l на диаграммах $в$ и $г$ (стр. 385).

[212] Вынесем в формуле (70) $\sin A$ из-под знака радикала и положим

$$\sin\omega = \sin\beta\sin A, \tag{I}$$

откуда

$$\sin\beta\cos A = \sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\omega},\quad \sin\omega\operatorname{ctg}A = \sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\omega}.$$

Тогда равенство (70) примет вид

$$2\cos\omega\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\omega}\int\frac{\alpha\sin\alpha\,d\alpha}{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}} =$$

$$= 2\alpha r - 2\psi h - 4P, \tag{II}$$

где на основании (76) надо P заменить через

$$P = P' - P'' + P_1 - P_2$$

и объемы P', P'', P_1, P_2 определить по формулам примечания 210. Следует обратить внимание на то, что теперь буквы β и α имеют другие значения, чем в формуле (97) и за ней следующих.

В формуле (97)

$$\beta = H = \mathrm{F}(h), \qquad \alpha = \mathrm{F}(c')$$

и α определялось из равенства

$$\sin\omega = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta;$$

теперь же в формуле (98)

$$\beta = \frac{\pi}{2} - D',$$

где D' есть угол, прилегающий к катету h в треугольнике между c' и h, в чем убеждаемся, написав для этого треугольника формулу (диаграмма a на стр. 385)

$$\sin\omega = \cos D' \sin A$$

и сравнив ее с формулой (I). Величина же $\alpha = \frac{\pi}{2} - G$ правой части формулы (II) определяется из уравнения (68):

$$\sin\alpha = \frac{\sin\omega \sin\psi}{\sin A},$$

откуда [формула (I)]

$$\sin\beta \sin\psi = \sin\alpha,$$

$$\sin\beta \cos\psi = \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}.$$

Кроме того, величины h, r, l выражаются в формуле (98) через другие части фигуры и через угол β. По формуле (79_3) мы имеем

$$\cos L = \cos \mathrm{F}(l) = \operatorname{ctg}\omega \operatorname{tg}\alpha;$$

отсюда

$$2l = 2 \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{2} L = \ln \frac{1 + \cos L}{1 - \cos L} = \ln \frac{\sin(\omega + \alpha)}{\sin(\omega - \alpha)}.$$

Далее,

$$2h = 2 \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{2} H = \ln \frac{1 + \cos H}{1 - \cos H} = \ln \frac{\cos\omega + \cos\omega \cos H}{\cos\omega - \cos\omega \cos H},$$

но из треугольника между a и h (диаграмма a на стр. 385) имеем

$$\cos H = \operatorname{tg}\omega \operatorname{ctg} A,$$

$$\cos\omega \cos H = \sin\omega \operatorname{ctg} A = \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\omega},$$

и, следовательно,

$$2h = \ln \frac{\cos\omega + \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\omega}}{\cos\omega - \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\omega}}.$$

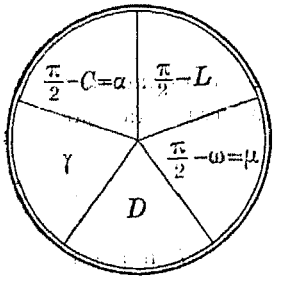
Чтобы определить r, напишем по диаграммам ε и α (стр. 385) и диаграмме для треугольника между g и l, приводимой здесь, формулы

$$\cos C = \cos\gamma \cos R,$$

$$\cos A = \cos\psi \cos C,$$

$$\cos\omega = \cos\gamma \cos\alpha$$

и исключим из них $\cos\gamma$ и $\cos C$; получим



$$\cos R = \cos \mathrm{F}(r) = \frac{\cos A \cos\alpha}{\cos\omega \cos\psi},$$

и затем по формуле

$$\cos \mathrm{F}(r) = \frac{\cos\alpha \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\omega}}{\cos\omega \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}},$$

$$2r = \ln \frac{1 + \cos \mathrm{F}(r)}{1 - \cos \mathrm{F}(r)},$$

$$2r = 2(h' - l) = \ln \frac{\cos\omega \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha} + \cos\alpha \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\omega}}{\cos\omega \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha} - \cos\alpha \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\omega}}.$$

Наконец, чтобы определить λ, составим диаграмму для треугольника между g и $r + l$ (диаграмма ∂, стр. 385) и возьмем соотношение

$$\operatorname{ctg}(\omega - \lambda) = \operatorname{ctg}\alpha \cos \mathrm{F}(r + l).$$

По формуле примечания 23

$$\operatorname{ctg}(\omega - \lambda) = \operatorname{ctg}\alpha \frac{\cos R + \cos L}{1 + \cos R \cos L}.$$

Подставим сюда вместо $\cos R$ и $\cos L$ их значения:

$$\operatorname{ctg}(\omega - \lambda) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cos\alpha \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\omega} + \operatorname{ctg}\omega \cos\omega \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}}{\sin\omega \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha} + \sin\alpha \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\omega}} \operatorname{tg}\omega$$

и освободимся от радикалов в знаменателе:

$$\operatorname{ctg}(\omega - \lambda) =$$

$$= \frac{\frac{\cos^2\alpha - \cos^2\omega}{\sin\omega \sin\alpha} \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\omega} \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha} + (\cos^2\alpha - \cos^2\omega)\cos^2\beta}{\sin^2\beta (\cos^2\alpha - \cos^2\omega)} \operatorname{tg}\omega,$$

$$\operatorname{ctg}(\omega - \lambda) = \frac{\sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\omega} \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}}{\cos\omega \sin\alpha \sin^2\beta} + \operatorname{tg}\omega \operatorname{ctg}^2\beta.$$

[213] Вынесем в формуле (71) $\sin\omega$ из-под знака радикала и положим

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\omega} = \sin\beta, \qquad (\mathrm{I})$$

откуда

$$\operatorname{ctg}\omega \sin^2\alpha = \sin\alpha \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}$$

Тогда равенство (71) примет вид

$$4P = -2\psi h + 2\sin\alpha \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha} \int_{\psi}^{\beta} \frac{\psi\, d\psi \cos\psi}{(\sin^2\psi - \sin^2\alpha)\sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\psi}}, \quad \text{(II)}$$

где на основании равенства (I) примечания 211 мы должны положить

$$P = Q' - Q'' + Q_1 - Q_2 \quad \text{(III)}$$

и объемы Q', Q'', Q_1, Q_2 определить по формулам примечания 211. Теперь

$$\beta = \frac{\pi}{2} - D,$$

где D есть угол между гипотенузой c и катетом b (или их продолжениями) в треугольнике между b и a, в чем убеждаемся, если сравним формулу (I) с формулой для треугольника между g и l (диаграмма на стр. 394):

$$\cos G = \sin\alpha = \sin\omega \cos D,$$

и α определяется формулой (68):

$$\sin\alpha = \frac{\sin\omega \sin\psi}{\sin A},$$

из которой имеем

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{\sin\omega} = \frac{\sin\psi}{\sin A},$$

и затем

$$\cos\omega \sin\beta = \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha},$$

$$\cos A \sin\beta = \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\psi},$$

$$\sin^2\beta \cos\omega \sin A = \sin\psi \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha},$$

$$\sin^2\beta \cos A \sin\omega = \sin\alpha \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\psi}.$$

Из треугольника между a и h (диаграмма a на стр. 385) мы имеем

$$\cos H = \operatorname{tg}\omega \operatorname{ctg} A,$$

$$2h = \ln\frac{1+\cos H}{1-\cos H} = \ln\frac{\cos\omega \sin A + \sin\omega \cos A}{\cos\omega \sin A - \sin\omega \cos A} =$$

$$= \ln\frac{\sin\psi \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha} + \sin\alpha \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\psi}}{\sin\psi \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha} - \sin\alpha \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\psi}}.$$

Что же касается формул для $2b$, $2l'$, $\operatorname{ctg}(\psi - \lambda')$ и $2r$, то они получаются из соответствующих формул (98) указанной в примечании 149 заменой ω, ψ и h через ψ, ω и b.

Подставляя значения Q_1, Q_2, Q', Q'' и h в формулы (II) и (III), мы получим формулы

$$2\sin\alpha\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}\int_{\psi}^{\beta}\frac{\psi\,d\psi\cos\psi}{(\sin^2\psi-\sin^2\alpha)\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\psi}}=$$

$$=\psi\lg\frac{\sin\psi\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}+\sin\alpha\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\psi}}{\sin\psi\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}-\sin\alpha\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\psi}}+$$

$$+\sin 2\psi\,L(2b,\,2\psi)-\sin 2\lambda'\,L(2b,\,2\lambda')-$$

$$+\sin(2\psi-2\lambda')\,L(2h',\,\pi-2\psi+2\lambda')-\sin 2\psi L(2l',\,\pi-2\psi),$$

где

$$2h'=2l'+\lg\frac{\cos\psi\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}+\cos\alpha\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\psi}}{\cos\psi\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}-\cos\alpha\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\psi}},$$

$$2l'=\ln\frac{\sin(\psi+\alpha)}{\sin(\psi-\alpha)}.$$

Сравнение этих формул с формулами, данными в тексте, показывает, что в последних вместо λ' написано λ, причем, следовательно, угол λ теперь не равен углу λ, входившему в формулы (97) и (98). Далее, в последнем члене выражения интеграла

$$\sin 2\psi\,L(2l,\,\pi-2\psi)$$

и выражении h' вместо l' стоит l. Значение l' мы получаем заменой в формуле (98) ω через ψ:

$$2l'=\lg\frac{\sin(\psi+\alpha)}{\sin(\psi-\alpha)},$$

и поэтому нельзя считать, что Лобачевский только изменил обозначения, написав вместо буквы l' букву l, ибо значение для

$$2l=\lg\frac{\cos\alpha+\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}}{\cos\alpha-\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}},$$

данное в «Казанском вестнике», не равно вышеприведенному значению $2l'$. Повидимому, последняя формула для $2l$ была выведена из формулы (98)

$$2l=\ln\frac{\sin(\omega+\alpha)}{\sin(\omega-\alpha)},$$

причем Лобачевский забыл заменить ω через ψ. Действительно, если такой замены мы не сделаем, то последнюю формулу можно написать таким образом:

$$2l = \ln \frac{\sin\omega\cos\alpha\sin\beta + \cos\omega\sin\alpha\sin\beta}{\sin\omega\cos\alpha\sin\beta - \cos\omega\sin\alpha\sin\beta};$$

но теперь

$$\sin\omega\sin\beta = \sin\alpha, \quad \cos\omega\sin\beta = \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}$$

и потому

$$2l = \ln \frac{\cos\alpha + \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}}{\cos\alpha - \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}}.$$

[214] Сравнивая (67) и (71), принимая во внимание формулу (66_1) и равенство

$$h = \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{2} H,$$

заменяя буквы R и H через ξ и β, как в примечании 210, мы получим

$$\cos A \sin 2\beta \int_{\xi} \frac{d\xi \sin\xi \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\xi}{(\sin^2\beta - \sin^2\xi)\sqrt{\sin^2 A \sin^2\beta - \sin^2\xi}} =$$

$$= 2\cos\omega\sin^2\alpha \int_{\psi} \frac{\psi\, d\psi \cos\psi}{(\sin^2\psi - \sin^2\alpha)\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\omega\sin^2\psi}}.$$

Если положим

$$\sin A \sin\beta = \sin a, \quad \sin\alpha = \sin\omega\sin b, \tag{I}$$

то пределами первого интеграла будут a и ξ, а второго — b и ψ, и предыдущее равенство примет вид

$$\int_{\xi}^{a} \frac{d\xi \sin\xi \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\xi}{(\sin^2\beta - \sin^2\xi)\sqrt{\sin^2 a - \sin^2\xi}} =$$

$$= \frac{\cos\omega\sin^2\alpha}{\cos A \sin\omega\cos\beta\sin\beta} \int_{\psi}^{b} \frac{\psi\cos\psi\, d\psi}{(\sin^2\psi - \sin^2\alpha)\sqrt{\sin^2 b - \sin^2\psi}}.$$

Здесь мы снова должны изменить обозначения. Буква a теперь обозначает не катет треугольника между a и h, а угол параллельности, соответствующий гипотенузе c' этого треугольника, т. е. тот угол, который в формуле (97) и за ней следующих до (98) был обозначен буквой α (см. примечания 210 и 211). Буквой b обозначен теперь не катет в треугольнике между a и c, а

$$b = \frac{\pi}{2} - D,$$

т. е. величина, которая в примечании 213 была обозначена буквой [ср. формулу (I) настоящего примечания с формулой (I) примечания 213]. Под буквой же α подразумевается величина α, определяемая формулой (68), из которой мы теперь имеем

$$\sin b = \frac{\sin \alpha}{\sin \omega} = \frac{\sin \psi}{\sin A} = \frac{\sin \beta \sin \psi}{\sin a}; \qquad \text{(II)}$$

из диаграммы a (стр. 385) для треугольника между a и h, в которой теперь вместо α мы должны написать a, и из формулы (68) имеем

$$\cos a \sin \omega = \cos \beta \sin A,$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin \omega \sin \psi}{\sin A} = \frac{\cos \beta \sin \psi}{\cos a}. \qquad \text{(III)}$$

Далее, из диаграмм e, δ и ε (стр. 385), в которых также вместо α надо поставить a, находим

$$\sin \xi = \sin \beta \sin C, \quad \sin \xi = \sin a \sin B,$$

$$\sin \psi = \operatorname{tg} C \operatorname{ctg} B = \frac{\sin C \sin \beta \sqrt{\sin^2 a - \sin^2 \xi}}{\sin B \sin a \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \xi}} = \frac{\sqrt{\sin^2 a - \sin^2 \xi}}{\sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \xi}}. \qquad \text{(IV)}$$

Наконец, чтобы получить коэфициент при интеграле второй части, перемножим равенства (II) и (III):

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin \omega} = \frac{\sin \beta \cos \beta \sin^2 \psi}{\sin a \cos a},$$

и воспользуемся соотношением

$$\frac{\cos \omega}{\cos A} = \frac{1}{\cos a},$$

взятым с диаграммы a (стр. 385) треугольника между a и h; для коэфициента при интеграле второй части тогда получим по формуле (IV):

$$\frac{\cos \omega \sin^2 \alpha}{\sin \omega \cos A \cos \beta \sin \beta} = \frac{\sin^2 \psi}{\sin a \cos^2 a} = \frac{\sin^2 a - \sin^2 \xi}{\sin a \cos^2 a (\sin^2 \beta - \sin^2 \xi)},$$

$$\int \frac{d\xi \sin \xi \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \xi}{(\sin^2 \beta - \sin^2 \xi) \sqrt{\sin^2 a - \sin^2 \xi}} =$$

$$= \frac{\sin^2 a - \sin^2 \xi}{\sin a \cos a (\sin^2 \beta - \sin^2 \xi)} \int_{\psi} \frac{\psi \cos \psi \, d\psi}{(\sin^2 \psi - \sin^2 a) \sqrt{\sin^2 b - \sin^2 \psi}}.$$

[216] Сравнивая формулы (71) и (70), заменив в последней ω, ψ, h на ψ, ω, b, мы имеем

$$P = -2\psi h + 2\cos\omega\sin^2\alpha \int \frac{\cos}{(\sin^2\psi - \sin^2\alpha)\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\omega\sin^2}} =$$

$$= 2\alpha r - 2\omega b + \cos A \sin 2 \int_0 \frac{\alpha \sin\alpha\, d\alpha}{(\sin^2\alpha - \sin^2\psi)\sqrt{\sin^2 \quad - \sin^2\alpha\sin^2 A}}.$$

Положим, как и в предыдущем замечании,

$$\sin b = \frac{\sin\alpha}{\sin\omega} = \frac{\sin}{\sin A}$$

Тогда

$$2\operatorname{ctg}\omega\sin^2\alpha \int_\psi \frac{d\ \cos}{(\sin^2\psi - \sin^2\alpha)\sqrt{\sin^2 b - \sin^2\psi}} =$$

$$= \operatorname{ctg} A \sin 2\psi \int_0^\alpha \frac{\alpha\, d\alpha \sin\alpha}{(\sin^2\alpha - \sin^2\ )\sqrt{\sin^2 b - \sin^2\alpha}} - \omega \ln \frac{\sin(A+\psi)}{\sin(A-\psi)} +$$

$$+ \ln \frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)} + 2\alpha r.$$

Подставив сюда значение (69), Лобачевский меняет обозначения вместо предела α и переменной интегрирования α он пишет вместо пишет α.

[216] В интеграле

$$\int_0^p \frac{dp}{1 - p^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{2\sin\varphi} \ln \frac{1 + p\sin\varphi}{1 - p\sin\varphi}$$

для верхнего предела возьмем $p = \cos b$. Поэтому, если начнем интегрировать двойной интеграл сначала по p, а затем по φ, введя вместо φ переменную ξ, положив

$$\sin\varphi = \frac{\cos\xi}{\cos b}, \quad \cos\varphi\cos b = \sqrt{\cos^2 b - \cos^2\xi},$$

$$d\varphi = -\frac{\sin\ d}{\sqrt{\sin^2\xi - \sin^2 b}},$$

то получим

$$\int\int \frac{\sin^2\varphi\, dp\, d\varphi}{(1-p^2\sin^2\varphi)(1-n^2\sin^2\varphi)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{1-n^2\sin^2\varphi} \ln \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\xi =$$

$$= \frac{\cos^2 a}{\cos b} \int_b^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi \sin\xi\cos\xi \ln\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\xi}{(\sin^2\xi - \sin^2 a)\sqrt{\sin^2\xi - \sin^2 b}}.$$

Изменяем затем порядок интегрирования и вычисляем сначала

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{(1-p^2\sin^2\varphi)(1-n^2\sin^2\varphi)} =$$

$$= \frac{1}{p^2-n^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{1-p^2\sin^2\varphi} - \frac{1}{1-n^2\sin^2\varphi}\right] d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2(p^2-n^2)}\left(\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\right),$$

а потом интегрируем по p, введя вместо p переменную ϑ и положив

$$p = \sin\vartheta, \quad \sqrt{1-p^2} = \cos\vartheta, \quad \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} = \operatorname{tg}\vartheta, \quad \cos\vartheta\, d\vartheta = dp.$$

Будем иметь

$$\int_0^b \frac{dp}{(p^2-n^2)\sqrt{1-p^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}-b} \frac{d\vartheta}{\sin^2\vartheta - n^2} = \frac{1}{2n\sqrt{1-n^2}} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-b} \ln \frac{n-\sqrt{1-n^2}\operatorname{tg}\vartheta}{n+\sqrt{1-n^2}\operatorname{tg}\vartheta} =$$

$$= \frac{\cos^2 a}{2\cos b\sqrt{\sin^2 b - \sin^2 a}} \ln \frac{\cos b - \sqrt{\sin^2 b - \sin^2 a}\operatorname{ctg} b}{\cos b + \sqrt{\sin^2 b - \sin^2 a}\operatorname{ctg} b} =$$

$$= \frac{\cos^2 a}{\cos b \sin b \cos c} \ln \operatorname{tg}\frac{1}{2}c,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-n^2}} \int_0^p \frac{dp}{(p^2-n^2)} = \frac{1}{2n\sqrt{1-n^2}} \Bigg|_0^{\cos b} \ln \frac{n-p}{n+p} =$$

$$= \frac{\cos^2 a}{2\cos b \sin b \cos c} \ln \frac{1-\cos a}{1+\cos a} = \frac{\cos^2 a}{\cos b \sin b \cos c} \ln \operatorname{tg}\frac{1}{2}a,$$

и, следовательно,

$$\int\int \frac{\sin^2\varphi\, d\rho\, d\varphi}{(1-\rho^2\sin^2\varphi)(1-n^2\sin^2\varphi)} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{\cos^2 a}{\cos b \sin b \cos c}\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{2}a \operatorname{tg}\frac{1}{2}c\right).$$

Сравнивая два значения двойного интеграла, получаем равенство (102).

[217] Из уравнения

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{\sin^2\xi - \sin^2 b}}{\sin b \cos c}$$

мы имеем

$$\cos^2\varphi = \frac{\sin^2 b \cos^2 c}{\sin^2\xi - \sin^2 a},$$

$$\sin^2\xi = \frac{\sin^2 b(1-\sin^2 c\sin^2\varphi)}{\cos^2\varphi}, \quad \cos^2\xi = \frac{\cos^2 a(\sin^2\gamma - \sin^2\varphi)}{\cos^2\varphi},$$

$$\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\sin\xi\cos\xi\, d\xi}{\sqrt{\sin^2\xi - \sin^2 b}\,\sin b\cos c},$$

$$d\varphi = \frac{\sin\xi\cos\xi\sin b\cos c\, d\xi}{(\sin^2\xi - \sin^2 a)\sqrt{\sin^2\xi - \sin^2 b}}.$$

Пользуясь этими соотношениями, напишем интеграл (102) в таком виде:

$$\int_b^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\xi\cos\xi\ln\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\xi}{(\sin^2\xi - \sin^2 a)\sqrt{\sin^2\xi - \sin^2 b}}\, d\xi = \frac{1}{\sin b\cos c}\int_b^{\frac{\pi}{2}} \ln\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\xi\, d\varphi$$

и интегрируем его по частям. Получаем

$$\frac{1}{\sin b\cos c}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\xi\, d\varphi = \frac{1}{\sin b\cos c}\int_b^{\frac{\pi}{2}} \varphi\frac{d\xi}{\sin\xi},$$

причем проинтегрированная часть

$$\frac{1}{\sin b\cos c}\left|\varphi\ln\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\xi\right|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

обращается в нуль ибо $\ln\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\xi = 0$ при $\xi = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = 0$ при $\xi = b$.

Заменяем, далее, переменную интегрирования ξ через φ и, замечая, что пределами для φ будут 0 и γ, находим

$$\frac{1}{\sin b\cos c}\int_b^{\frac{\pi}{2}}\varphi\,\frac{d\xi}{\sin\xi}=\frac{\cos c}{\cos a\sin b}\int_0^{\gamma}\frac{\varphi\sin\varphi\,d\varphi}{(1-\sin^2 c\sin^2\varphi)\sqrt{\sin^2\gamma-\sin^2\varphi}}.$$

Чтобы получить вторую часть равенства (103), вычисляем

$$\cos\gamma=\sqrt{1-\sin^2\gamma}=\frac{\sqrt{\sin^2 b-\sin^2 c}}{\cos a}=\frac{\sin b\cos c}{\cos a}=\frac{\cos c}{\cos a}\,\frac{\sin a}{\sin c},$$

$$\sqrt{1-\sin^4\gamma\sin^2 c}=\sqrt{1-\frac{\cos^2 b}{\cos^2 a}\,\frac{\sin^2 a}{\sin^2 b}}=\frac{\sqrt{\sin^2 b-\sin^2 a}}{\cos a\sin b}=\frac{\cos c}{\cos a}$$

и преобразуем

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}a\operatorname{tg}\frac{1}{2}c=\frac{1+\cos a}{\sin a}\,\frac{\sin c}{1+\cos c}=\frac{\cos c(1+\cos a)\sin c}{\sin a\cos c\,2\cos^2\frac{1}{2}c}=$$

$$=\frac{\cos c\left(1+\frac{1}{\cos a}\right)}{2\cos^2\frac{1}{2}c}\,\frac{\cos a\sin c}{\sin a\cos c}=\frac{\cos c+\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2 c}}{2\cos\gamma\cos^2\frac{1}{2}c}.$$

Подставляя эти выражения в равенство (102), мы и получим равенство (103).

[218] Если

$$\frac{1}{1-\sin^2 c\sin^2\varphi}$$

разложим в ряд:

$$\frac{1}{1-\sin^2 c\sin^2\varphi}=1+\sin^2 c\sin^2\varphi+\sin^4 c\sin^4\varphi+\ldots,$$

то интеграл (103) разложится также в ряд, общий член которого

$$\sin^{2n}c\int_0^{\gamma}\frac{\varphi\sin^{2n+1}\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\sin^2\gamma-\sin^2\varphi}}$$

будет меньше, чем

$$\sin^{2n}c\,\frac{\pi}{2}\sin^{2n}\gamma\int_b^{\gamma}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\sin^2\gamma-\sin^2\varphi}}=\frac{\pi}{2}\sin^{2n}c\sin^{2n}\gamma\ln\frac{1+\sin\gamma}{\cos\gamma},$$

ибо в пределах интегрирования

$$\varphi < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \sin\varphi < \sin\gamma.$$

Так как $\ln(1+\sin\gamma) < 1$, то коэффициент $\sin^n c$ будет меньше

$$\frac{\pi}{2}\sin^n\gamma \ln\frac{1}{\cos\gamma}.$$

[219] Чтобы преобразовать (103) в (104), надо вторую часть равенства (103) выразить через $\sin c$ и затем в обеих частях параметр $\sin c$ заменить через $\frac{1}{\sin c}$. Тогда в первой части (103) мы получим

$$\sin^2 c \int_0^{\gamma} \frac{\varphi\, d\varphi \sin\varphi}{(\sin^2 c - \sin^2\varphi)\sqrt{\sin^2\gamma - \sin^2\varphi}},$$

а во второй части вместо

$$\cos c = \sqrt{1-\sin^2 c}, \quad 2\cos^2\frac{1}{2}c = 1+\cos c = 1+\sqrt{1-\sin^2 c}$$

мы должны подставить

$$\sqrt{1-\frac{1}{\sin^2 c}} = i\frac{\cos c}{\sin c}, \quad 1+\sqrt{1-\frac{1}{\sin^2 c}} = \frac{\sin c + i\cos c}{\sin c} = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-c\right)}}{\sin c}.$$

Тогда аргумент логарифма второй части заменится через

$$\frac{i\frac{\cos c}{\sin c} + \sqrt{1-\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2 c}}}{\cos\gamma}\sin c\, e^{\left(c-\frac{\pi}{2}\right)i}$$

или

$$\left(i\frac{\cos c}{\cos\gamma} + \sqrt{1-\frac{\cos^2 c}{\cos^2\gamma}}\right)e^{\left(c-\frac{\pi}{2}\right)i} = e^{ic}\left(\frac{\cos c}{\cos\gamma} - i\sqrt{1-\frac{\cos^2 c}{\cos^2\gamma}}\right),$$

и, следовательно, числитель второй части будет

$$\pi \ln\left[e^{ic}\left(\frac{\cos c}{\cos\gamma} - i\sqrt{1-\frac{\cos^2 c}{\cos^2\gamma}}\right)\right] = \pi i\left(c - \arccos\frac{\cos c}{\cos\gamma}\right),$$

а знаменатель обратится в

$$2i\frac{\cos c}{\sin^2 c}\sqrt{\sin^2 c - \sin^2\gamma},$$

и мы получим равенство (104).

[220] При $c=\frac{\pi}{2}$ $\cos c$ обращается в нуль и правые части равенств (103) и (104) делаются неопределенными. Заменив $\cos c$ через x, мы найдем по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{x+\sqrt{\cos^2\gamma+\sin^2\gamma x}}{(1+x)\cos\gamma}}{2x\sqrt{\cos^2\gamma+\sin^2\gamma x}}=\frac{\sin^2\dfrac{1}{2}\gamma}{\cos^2\gamma}$$

и

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arccos x-\arccos\dfrac{x}{\cos\gamma}}{2x\sqrt{\cos^2\gamma+\sin^2\gamma x}}=\frac{\sin^2\dfrac{1}{2}\gamma}{\cos^2\gamma}.$$

[221] Подставив в интеграл (104) $\frac{\pi}{2}-\varphi$ вместо φ, мы разделим его на два интеграла:

$$-\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\gamma}\frac{d\sin\varphi}{(\sin^2\varphi-\cos^2 c)\sqrt{\sin^2\varphi-\cos^2\gamma}}+$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\gamma}\frac{\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{(\sin^2\varphi-\cos^2 c)\sqrt{\sin^2\varphi-\cos^2\gamma}};$$

неопределенный интеграл дает

$$\int\frac{d\sin\varphi}{(\sin^2\varphi-\cos^2 c)\sqrt{\sin^2\varphi-\sin^2\gamma}}=$$

$$=\frac{1}{\cos c\sqrt{\cos^2\gamma-\cos^2 c}}\operatorname{arctg}\frac{-\cos c\sqrt{\cos^2\gamma-\cos^2 c}}{\sin^2\varphi-\cos^2 c+\sin\varphi\sqrt{\sin^2\varphi-\cos^2\gamma}},$$

в чем нетрудно убедиться дифференцированием.

Поэтому

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\gamma}\frac{d\sin\varphi}{(\sin^2\varphi-\cos^2 c)\sqrt{\sin^2\varphi-\cos^2\gamma}}=$$

$$=\frac{1}{\cos c\sqrt{\cos^2\gamma-\cos^2 c}}\left[\operatorname{arctg}\frac{\cos c\sqrt{\cos^2\gamma-\cos^2 c}}{\sin^2 c+\sin^2\gamma}-\right.$$

$$\left.-\operatorname{arctg}\frac{\cos c\sqrt{\cos^2\gamma-\cos^2 c}}{\cos^2\gamma-\cos^2 c}\right]=$$

$$\frac{1}{\cos c\sqrt{\cos^2\gamma-\cos^2 c}}\operatorname{arctg}\frac{\cos c\sin\gamma}{\sqrt{\cos^2\gamma-\cos^2 c}},$$

и уравнение (104) принимает вид

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\gamma} \frac{\varphi \cos\varphi\, d\varphi}{(\sin^2\varphi - \cos^2 c)\sqrt{\sin^2\varphi - \sin^2\gamma}} =$$

$$= \frac{\pi}{2\cos c\sqrt{\cos^2\gamma - \cos^2 c}}\left[c - \arccos\frac{\cos c}{\cos\gamma} - \operatorname{arctg}\frac{\cos c\sin\gamma}{\sqrt{\cos^2\gamma - \cos^2 c}}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2\cos c\sqrt{\cos^2\gamma - \cos^2 c}}\left[c - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\cos^2\gamma - \cos^2 c}}{\cos c} - \operatorname{arctg}\frac{\cos c\sin\gamma}{\sqrt{\cos^2\gamma - \cos^2 c}}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2\cos c\sqrt{\cos^2\gamma - \cos^2 c}}\left[c - \operatorname{arctg}\frac{\sin^2 c + \sin^2\gamma}{\cos c\sqrt{\cos^2\gamma - \cos^2 c}}\right].$$

Заменив в этом равенстве c через $\frac{\pi}{2} - \beta$ и γ через $\frac{\pi}{2} - \alpha$, окончательно получим равенство, данное в тексте.

[222] Разложение функции $\Phi(x)$ в ряд дано в мемуаре «Применение Воображаемой Геометрии к некоторым интегралам», формула (11).

ОТЗЫВЫ СОВРЕМЕННИКОВ О СОЧИНЕНИИ «О НАЧАЛАХ ГЕОМЕТРИИ»

Мемуар «О началах геометрии», открыв новую эпоху развития геометрии, превосходил силы современного Лобачевскому читателя и оставлял его совершенно равнодушным или даже возбуждал в нем впечатление какой-то нелепости. Гаусс, опасаясь «крика беотийцев», до конца своей жизни так и не решился опубликовать свои идеи. Смелое решение Лобачевского опубликовать свое сочинение подтвердило всю основательность опасений Гаусса — мемуар «О началах геометрии» вызвал резко отрицательное отношение в некоторых математических кругах.

В 1834 г. в журнале «Сын отечества» [1]) была напечатана рецензия о работе Лобачевского, в которой автор, издеваясь над Лобачевским, сознавался, однако, что в его работе он ничего не понял. Статья составлена в фельетонном стиле настолько грубо, что редакция не считает возможным воспроизвести ее в настоящем издании.

О неизвестном авторе этой статьи проф. А. В. Васильев в своей биографии Н. И. Лобачевского [2]) пишет:

«Кто был автором этой статьи? Этот вопрос не мог не интересовать и почитателей Лобачевского и лиц, интересующихся историей русской математической науки, и у них составилось мнение, что статья написана академиком М. В. Остроградским [3]). Так, например, В. В. Бобынин в своем очерке биографии Остроградского, помещенном в энциклопедическом словаре Брокгауза и Ефрона, говорит об „оскорбительных насмешках Остроградского над Н. И. Лобачевским“, причем не доказывая эту фразу. По моему мнению, статья написана не Остроградским, но лицом, близким к нему. Таким лицом был С. А. Бурачек.

---

[1]) Приводим библиографические данные этого номера журнала:

Сын отечества и Северный архив, журнал словесности, политики и истории, издаваемый Николаем Гречем и Фаддеем Булгариным. Т. XLV. (Сына отечества часть 167-я, Северного архива — 81-я). С.-Петербург. (В типографии Н. Греча.) 1834, № 41, стр. 407—416.

[2]) Эта биография находится в рукописи.

[3]) М. В. Остроградский с 1830 г. занимал в Академии кафедру прикладной математики; с 1855 г. — кафедру чистой математики.

Журнал „Сын отечества“ в тридцатых годах издавался Гречем и Булгариным. Известно отношение этого журнала к Пушкину и те едкие эпиграммы, которыми великий поэт в начале тридцатых годов мстил своим злым критикам. В числе сотрудников журнала был и С. А. Бурачек, корабельный инженер, с 1831 г. преподававший в офицерских классах Морского кадетского корпуса, высшем учебном заведении, в котором преподавал и Остроградский; там же преподавал и С. И. Зеленый, читавший также в С.-Петербургском университете лекции по высшей математике, автор сочинения „Способ определения долготы места и наблюдения прохождения звезд и Луны через меридиан“ (СПБ, 1831) и учебников прямолинейной и сферической тригонометрии, впоследствии директор гидрографического департамента. Бурачек и Зеленый издали известные лекции Остроградского по алгебраическому и трансцендентному анализу. Как сотрудник „Сына отечества“ Бурачек отличался своими резкими нападками на современную ему литературу, которая была для него произведением ватаги разбойников. Его бойкое перо не щадило и Пушкина, все герои которого были „уголовными преступниками“. В библиотеке Семиколенова [1]) я нашел его статью, содержащую восторженный отзыв о лекциях Остроградского; стиль этого отзыва чрезвычайно напоминает стиль хлесткой статьи о Лобачевском. Для меня несомненно, что эта статья написана Бурачеком, может быть, вместе с Зеленым (чем объясняется и псевдоним *С. С.* [2])) и, весьма вероятно, не без ведома Остроградского. На это указывает то место статьи, где говорится о новых интегралах».

Высказанное проф. А. В. Васильевым предположение о влиянии М. В. Остроградского на отрицательное отношение к работам Н. И. Лобачевского подтверждается протоколами Академии наук, хранящимися в ее архиве [3]).

В 1832 г. Совет Казанского университета (ректором которого в то время был Лобачевский) направил 19 августа в Академию наук напечатанный в «Казанском вестнике» мемуар «О началах геометрии».

Собрание Конференции Академии, которому представлен был этот труд, в заседании 5 сентября постановило дать его академику Остроградскому для словесного отзыва.

В заседании 31 октября М. В. Остроградский доложил, что исполнил поручение Академии и просмотрел работу Н. И. Лобачевского. Содержание доклада так изложено в протоколе:

[1]) Инж. Семиколенов пожертвовал свою весьма ценную библиотеку Казанскому университету. Она составила ядро библиотеки имени Н. И. Лобачевского, находящейся в Геометрическом кабинете Казанского университета.

[2]) С. А. Бурачек и С. И. Зеленый.

[3]) См. приложение на стр. 410 настоящего тома.

«Указав на то, что из двух определенных интегралов, на вычисление которых при помощи своего нового метода претендует Г-н Лобачевский, один уже известен и легко выводится при помощи начал интегрального исчисления, а другой неверен, Г-н Остроградский замечает, кроме того, что работа выполнена с таким малым старанием, что большая часть ее непонятна. Поэтому он полагает, что этот труд Г-на Лобачевского не заслуживает внимания Академии».

Связь между статьей в «Сыне отечества» и отзывом Остроградского видна хотя бы из того, что оба рецензента единодушно отмечают наличие двух интегралов, из которых один «находится гораздо легчайшим образом, другой совершенно неверен». Что это за неверный интеграл, который «равен то $\frac{\pi}{2}$, то ∞»? Это обвинение Лобачевского лишено всякого основания. В начале своего сочинения «Воображаемая геометрия», вышедшего в 1835 году в «Ученых записках Казанского университета», Лобачевский делает следующее примечание[1]:

«Статьи о началах Геометрии помещены были в Казанском Вестнике за 1829 и 1830 годы. В № 41 Журнала Сын Отечества 1834 года напечатана критика, весьма оскорбительная для меня, и, надеюсь, совершенно несправедливая. Рецензент основал свой отзыв на том только, что он моей Теории не понял и почитает ее ошибочной, потому, что в примерах встречает один *нелепой* интеграл. Впрочем такого интеграла не нахожу я в моем сочинении. В ноябре месяце прошедшего года послал я к издателю ответ, который однако же, не знаю почему, до сих пор, в продолжении пяти месяцев, еще не напечатан».

Если даже для такого большого математика, каким был М. В. Остроградский, оставалось неясным громадное значение работы Н. И. Лобачевского, глубоко затрагивавшей основы Геометрии, то нет ничего удивительного, что, благодаря новизне идей, развиваемых в своих работах Н. И. Лобачевским, опережавших уровень развития Геометрии в первую половину прошлого столетия, его работы были мало доступны его современникам и оставались долгое время не оцененными по достоинству. Только такой гений, как Гаусс, который к тому же и сам много лет размышлял о теории параллельных и пришел к тем же результатам, как и Лобачевский, мог надлежащим образом оценить все важное значение его работ.

И в настоящее время читатель, который приступил бы к чтению этого сочинения, еще не владея основами неевклидовой геометрии,

---

[1]) «Полн. собр. соч. по геом.», т. I, стр. 72.

встретил бы, можно сказать, непреодолимые затруднения. Именно поэтому редакционная коллегия настоящего издания сочла необходимым дать раньше место сочинению «Геометрические исследования по теории параллельных линий». Комментарии и указания, сопровождающие сочинение «О началах геометрии» в настоящем издании, составлены в предположении, что читатель уже знаком с основами неевклидовой геометрии и внимательно прочитал «Геометрические исследования» с сопровождающими его комментариями.

ПРОТОКОЛЫ КОНФЕРЕНЦИИ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК О РАБОТЕ ЛОБАЧЕВСКОГО «О НАЧАЛАХ ГЕОМЕТРИИ»

1) Протокол Конференции Академии Наук 5 сентября 1832 г. § 432.

Le conseil de cette même Université envoie avec une troisième communication datée du 19 Août cotée № 1209, un mémoire imprimé, extrait du Courier de Kasan et intitulé: О началах геометрии г-а *Лобачевского*. La Conférence remit ce mémoire à M. l'Académicien Ostrogradsky en le priant de lui en faire un rapport verbal. La réception en sera accusée [1]).

2) Протокол Конференции Академии Наук 31-го октября 1832 г., § 602.

M. l'Académicien Ostrogradsky ayant été chargé par l'Académie d'examiner l'ouvrage de M. Lobatchefsky: О началах геометрии (voir Prot. du 5 septembre § 432) et il en fit un rapport verbal. Après avoir montré que des deux intégrales définies dont M. Lobatchefsky prétend avoir trouvé la valeur au moyen de sa nouvelle méthode, l'une est péjà connue et facile à déduire des principes élémentaires du calcul intégrale et que l'autre est fausse, M. Ostrogradsky observe encore que l'ouvrage est rédigé avec si peu de soin qu'une grande partie en est inintelligible. Il conclut par conséquent que ce travail de M. Lobatchefsky ne mérite point l'attention de l'Académie [2]).

---

[1]) Совет того же Университета направил при третьем отношении от 19 августа за № 1209 напечатанный мемуар, извлеченный из Казанского Вестника и называющийся «О началах Геометрии г-на Лобачевского». Конференция пересылает этот мемуар Г. Академику Остроградскому с просьбой сделать о нем доклад. Получение мемуара должно быть подтверждено.

[2]) Г. Академик Остроградский, имея поручение от Академии рассмотреть работу Г. Лобачевского «О началах Геометрии» (см. протокол от 5 сентября, § 432), сделал об этом доклад. Указав на то, что из двух определенных интегралов, на вычисление которых при помощи своего нового метода претендует Г. Лобачевский, один уже известен и легко выводится при помощи начал интегрального исчисления, а другой неверен, Г. Остроградский замечает, кроме того, что работа выполнена с таким малым старанием, что большая часть ее непонятна. Поэтому он полагает, что этот труд Г. Лобачевского не заслуживает внимания Академии.

ИСТОРИКО-БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ О СОЧИНЕНИИ «О НАЧАЛАХ ГЕОМЕТРИИ»

«О началах геометрии» представляет собой первое появившееся в математической литературе сочинение, в котором излагается «воображаемая геометрия», т. е. геометрическая система, основанная на тех же постулатах, как и «употребительная геометрия» за исключением знаменитого XI постулата Евклида о параллельных линиях. Оно кладет начало новой отрасли геометрии — «неевклидовой геометрии».

Сочинение начало печататься в ежемесячном журнале «Казанский вестник», издававшемся Казанским университетом [1]) в двойной книжке за февраль — март 1829 г. Но, как видно из примечаний к заглавию [2]) и на странице 251 мартовской книжки «Казанского вестника» за 1830 г., первая часть работы «О началах геометрии» представляет собой извлечение из того «рассуждения», которое три года раньше, уже в 1826 г., было читано Лобачевским в Отделении физико-математических наук. Это «рассуждение» носило название «Exposition succincte des principes de la Géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles» [3]), было написано на французском языке и в первоначальной редакции никогда не было напечатано. Рукопись его не найдена и, вероятно, окончательно потеряна.

Указывая в примечании к заглавию (вероятно, по памяти), что это «рассуждение» было читано 12 февраля 1826 г., Лобачевский ошибается на один день. В январе 1926 г., в связи с празднованием столетия «неевклидовой геометрии», проф. Н. И. Порфирьевым была найдена в архиве Казанского университета препроводительная бумага, с которой

---

[1]) Точное название «Казанский вестник, издаваемый при императорском казанском университете». Фотографии титульного листа «Казанского вестника» и первой страницы журнала с сочинением Лобачевского приложены на вкладных листах перед стр. 179 и 185.

[2]) См. стр. 185 настоящего тома и фотографию на вкладном листе.

[3]) «Краткое изложение принципов Геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных».

рассуждение «Exposition succincte etc.» было представлено в Отделение физико-математических наук. Вот содержание этой бумаги [1]):

«Препровождаю сочинение мое под заглавием „Exposition succincte des principes de la Géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles".

Желаю знать мнение о сем ученых, моих сотоварищей и есть ли оно будет выгодно, то прошу покорнейше представленное мною сочинение принять в составление ученых записок Физико-математического отделения, в каком намерении я предпочел писать на французском языке, т. к. предполагалось записки издавать на сем языке, сделавшемся ныне общим между учеными.

Проф. *Н. И. Лобачевский*».

Наверху этой бумаги имеется пометка: «*Получено 7 февраля 1826 г.*», а внизу написано: «*Слушано 11 февраля ст. 1. Определено: Поручить рассмотреть сочинение гг. профессорам Симонову, Купферу и Адъюнкту Брашману и мнение свое сообщить Отделению*».

Попытки проследить результаты этой резолюции по протоколам Отделения физико-математических наук не увенчались успехом и о дальнейшей судьбе рукописи ничего неизвестно.

Этот интересный исторический документ вполне точно устанавливает день доклада Лобачевского: не 12 февраля, а 11 февраля 1826 г. Эту дату и надо считать днем рождения «воображаемой геометрии».

Заглавие представленной Лобачевским рукописи возбуждает некоторое недоумение. Не совсем ясно, что подразумевал Лобачевский под словами «une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles». Примечания, сделанные Лобачевским к сочинению «О началах геометрии», а равным образом и примечание к сочинению «Новые начала», указание его на то, что содержание рукописи составило первую часть сочинения «О началах геометрии», не дают никакого основания думать, что в этой рукописи было какое-либо «доказательство» постулата Евклида, подобное другим существовавшим доказательствам и основанное на каких-либо неявных допущениях, эквивалентных самому постулату. Первая часть сочинения «О началах геометрии» совершенно ясно указывает, что Лобачевский уже в 1826 г. совершенно владел своей геометрией, ясно видел ее логическую безупречность и невозможность чисто логического доказательства постулата Евклида. Возможно, что, говоря о «строгом доказательстве теоремы о параллельных», он подразумевал именно строгую теорию параллельных в том виде, в каком она намечена в первой части «Новых начал». Возможно также, что под этими словами он подразумевал те соображения, при

[1]) Ее фотография приложена на вкладном листе перед стр. 5.

Получ. 7 февраля 1826 года

М. Н. Н.

Департаментъ Народнаго Просвѣщенія

Императорской Казанской Университетъ

Отъ Профессора Лобачевскаго

Препровождаетъ сочиненіе

Казань 1826 февраля 6

Въ Отдѣленіе Физико-математическихъ наукъ

Препровождаю сочиненіе мое подъ названіемъ Exposition sacrée des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles. Желаю знать мнѣніе о семъ ученыхъ моихъ сотоварищей и если оно будетъ выгодно, то прошу покорнѣйше представленное мною сочиненіе принять въ составленіе ученыхъ записокъ физико-математическаго отдѣленія, въ какомъ намѣреніи я и предпочелъ писать на французскомъ языкѣ, такъ какъ предполагаемыя записки издавать на семъ языкѣ сдѣлавшимся нынѣ общимъ между учеными. Профессоръ Н. Лобачевскій

Секретарь Отдѣленія Кинтеръ

Статьи сдаетъ Дьяконовъ въ Грамматическое Отдѣленіе 18 Іюня ст. 1

Секретарь Кинтеръ

1826 года

Слушано 11 февраля ст. 1.

Опредѣлено: поручить разсмотрѣть сочиненіе Гг. профессорамъ Симонову, Купферу и Адъюнкту Брашману и мнѣніе свое сообщить отдѣленію.

помощи которых он, пользуясь параллаксами неподвижных звезд, доказывал, что сумма углов треугольника между Солнцем, Землей и звездой Keida отличается от π менее чем на $0{,}43''$. Но далее Лобачевский пишет [1]):

«...сама Природа указывает нам такие расстояния, в сравнении с которыми исчезают за малостию даже и расстояния нашей земли до неподвижных звезд.

После этого нельзя утверждать более, что предположение, будто мера линий не зависит от углов — предположение, которое многие Геометры хотели принимать за строгую истину, не требующую доказательства — может быть, оказалось бы приметно ложным еще прежде, нежели перейдем за пределы видимого нами мира.

С другой стороны, мы не в состоянии постигать, какая бы связь могла существовать в природе вещей и соединять в ней величины столь разнородные, каковы линии и углы. Итак, очень вероятно, что Евклидовы положения одни только истинные, хотя останутся навсегда недоказанными».

Возможно, что указанные соображения и выражают ту мысль, которую Н. И. Лобачевский подразумевал под строгим доказательством теоремы о параллельных.

Все то, что следует за формулами (17) [2]), как видно из примечания на стр. 251 мартовской книжки «Казанского вестника» за 1830 г., было добавлено к рассуждению «Exposition succincte» уже после, и все вместе было напечатано в «Казанском вестнике» в следующих книжках:

в 1829	г.	—	часть	25,	февраль — март,	стр.	178—187,
»	»	»	»	»	апрель	»	228—241,
»	»	»	»	27,	ноябрь—декабрь	»	227—243;
» 1830	»		»	28,	март—апрель	»	251—283,
»	»	»	»	»	июль—август	»	571—636.

Размеры этого журнала были небольшие, in 8°.

Второй раз сочинение «О началах геометрии» было напечатано в «Полном собрании сочинений по геометрии», изданном Казанским университетом в 1883 г. in 4°, в первом томе, стр. 1—69 [3]).

На немецкий язык оно было переведено проф. Энгелем и поме-

---

[1]) Стр. 209.

[2]) Начиная с 206 стр. настоящего издания.

[3]) Полное собрание сочинений по геометрии Н. И. Лобачевского. Издание императорского Казанского университета. Том первый. Сочинения на русском языке. Казань, 1883.

щено в его монографии, посвященной Лобачевскому. В этом переводе опущена последняя часть, как имеющая чисто аналитический характер. В этой же книге кроме сочинения «О началах геометрии» находится также перевод сочинения «Новые начала».

Оба перевода сделаны весьма тщательно, в них исправлены довольно многочисленные опечатки, допущенные как в оригинальном издании «Казанского вестника», так и в «Полном собрании сочинений по геометрии». Многочисленные примечания к переводу дают исторические и библиографические справки и облегчают чтение трудного мемуара Лобачевского. В конце книги приведена биография Лобачевского и характеристика его научной и административной деятельности, составленная проф. Энгелем по собранным им материалам [1]).

На русском языке часть этого мемуара была выпущена в 1908 г. небольшой отдельной брошюрой преподавателем гимназии А. Н. Желтухиным [2]). Это издание содержит начало сочинения, извлеченное Лобачевским из мемуара «Exposition succincte...», и рассуждения, относящиеся к экспериментальной проверке двух возможных предположений относительно суммы углов прямолинейного треугольника [3]). Оно воспроизводит текст, помещенный в «Полном собрании сочинений Лобачевского по геометрии» без изменений, и, в виде примечаний, развернутые выводы основных тригонометрических формул.

В настоящем издании сочинение «О началах геометрии» также снабжено многочисленными примечаниями и чертежами. Большинство примечаний имеет целью восполнить пропущенные Лобачевским промежуточные, иногда довольно длинные, вычисления. Много чертежей («диаграмм») сделано для того, чтобы облегчить читателям пользование правилом Непера при употреблении тригонометрических формул.

Настоящее издание воспроизводит текст первого издания (в «Казанском вестнике»). Для удобства сравнения с первым изданием мы отмечали знаком | начало новой страницы первого издания, и знаком || — начало новой тетради журнала. В соответствующих местах на полях отмечается номер страницы и тетради журнала. Чертежи, помещенные в первом издании в виде приложения, расположены нами в самом тексте.

При этом нами были допущены следующие отклонения от оригинального издания:

---

[1]) Библиографические данные о монографии проф. Энгеля приведены на стр. 172 настоящего тома.

[2]) «О началах геометрии». Текст Н. И. Лобачевского. Примечания А. Н. Желтухина. С.-Петербург, 1908 г.

[3]) См. стр. 207 — 209.

1) Установлена современная орфография.

2) В отдельных случаях, где это вызывалось удобствами чтения, изменена пунктуация.

3) Математическая орфография в основном сохранена (например, вместо $\mathrm{tg}^2 x$ Лобачевский пишет $\mathrm{tang}\, x^2$, и т. д.). Но слова Sin, Tang, Log, Lim и т. д. мы везде начинаем со строчных букв (sin, tang, log, lim) — в оригинальном издании это строго не выдерживается.

4) Исправлены все замеченные ошибки и опечатки оригинального издания как типографского характера, так и ошибки Лобачевского. Их оказалось очень большое число.

Большинство этих ошибок было воспроизведено и в «Полном собрании сочинений по геометрии»; помимо них, в этом последнем издании было допущено много новых существенных ошибок и пропусков.

Редакторы: *И. Н. Бронштейн*,
А. И. Маркушевич.

Подписано в печать 21 декабря 1943 г.
Тираж 5000 экз. 26 печатных листов и 6 иллюстраций на отд. листах. 28 уч.-авт. листов.
Заказ № 458. М — 0520.
Цена 17 руб., переплет 2 руб.

4-я типография им. Евг. Соколовой
треста «Полиграфкнига» ОГИЗа
при Совете Министров РСФСР.
Ленинград, Измайловский пр., 29.